

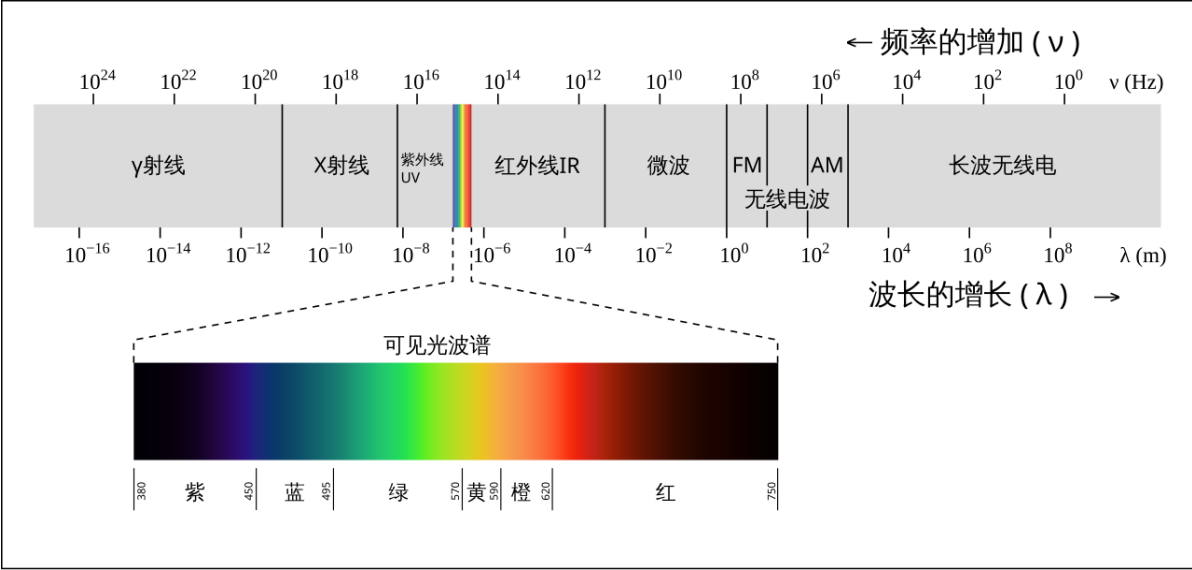
lesson13_辐射度量学与渲染方程

1 引言

前面的章节我们讲解以及实现了一个较为简单的光线追踪模型，但是很显然，它依旧有很多不真实的地方。因此，我们要学会更精确的光线追踪，而这个前提就是，我们需要先学会能更精确反应现实中的光照信息的辐射度量学，以及渲染方程等。

2 辐射度量学

辐射度量学 (radiometry) 是研究各种电磁辐射 (electromagnetic radiation) 强弱的学科，研究对于电磁辐射的测量[1]。电磁辐射可被认为是光子组成的粒子流，而电磁辐射的波动形式是电磁波，我们平时看到的可见光就属于电磁波。



可见光谱只占有宽广的电磁波谱的一小部分。图片来自[3]

使用辐射度量学可以从物理上更精准的描述光的信息。

2.1 辐射量

要对电磁辐射进行测量，我们需要首先定义一些辐射量 (radiometric quantity)。（就比如我们对苹果这个物体的质量进行测量，我们需要定义质量这个物理量一样。）

英文名称	中文名称	符号	单位	公式	注解
radiant energy	辐射能	Q	$Joule, J$ (焦耳)		电磁辐射的能量
radiant flux / power	辐射通量 / 功率	Φ	$watts, W$ (瓦特)	$\frac{dQ}{dt}$	单位时间的辐射能量
irradiance	辐照度	E	W/m^2	$\frac{d\Phi}{dA}$	辐射通量相对于面积的密度

英文名称	中文名称	符号	单位	公式	注解
radiant intensity	辐射强度	I	W/sr	$\frac{d\Phi}{d\omega}$	辐射通量相对于 立体角 的密度
radiance	辐射率	L	$W/m^2 sr$	$\frac{d^2\Phi}{dA d\omega}$	辐射通量相对于 面积和立体角 的密度 / 对 单条光线 中电磁辐射的度量

接下来，我们会逐一讲解以上辐射量。

2.1.1 辐射能 (radiant energy)

思考：一个灯泡会发光发热，我们该如何表示它的总能量呢？

辐射能 (radiant energy) 就是电磁辐射的能量，符号为 Q ，单位为 J (*Joule*)，也就是焦耳。电磁辐射可被认为是光子组成的粒子流，因此辐射能也可以认为是光子所携带的能量。

实际上，光源辐射出来的就是辐射能，比如当你打开一个灯泡，灯泡会发出光，这些光是以电磁辐射的形式传播的能量，这些能量的总量就是辐射能。

2.1.2 辐射通量 (radiant flux) / 功率 (power)

思考：一个灯泡单位时间会释放多少能量呢？

辐射通量 (radiant flux) 又称为**功率 (power)** 是单位时间的辐射能 (radiant energy)，符号为 Φ ，可表示为 $\frac{dQ}{dt}$ ，单位是 *watts*, W (瓦特)。

实际上每个辐射度量学物理量会对应一个光度学物理量，辐射通量 (radiant flux) 对应光度学中的光通量 (luminous flux)，单位是流明 (lumen)，表示光的亮度。

光度学 (photometry) 会考虑人眼感知可见光强弱，而人眼对于不同波长的光的敏感度是不同的。

而辐射度量学就不会考虑人眼的感知，而是直接考虑电磁辐射的强弱。

辐射通量 (radiant flux) 是辐射度量学中最基本的单位，而非 辐射能 (radiant energy)。假设还是一个灯泡照射在桌面上，照的时间越长，桌面越热，辐射能 (radiant energy) 越大，但我们并不想知道总的辐射能，我们其实希望知道，这个灯泡每秒钟会释放多少焦耳的辐射能，因此我们就引入使用辐射通量 (radiant flux) 来表示。这个灯泡的辐射通量 (radiant flux) / 功率 (power) 为100瓦，表示其每秒钟会释放100焦耳的辐射能 (radiant energy)。

2.1.3 irradiance (辐照度)

思考：把手掌放在灯泡旁边，手掌表面接收到的光的能量是多少呢？

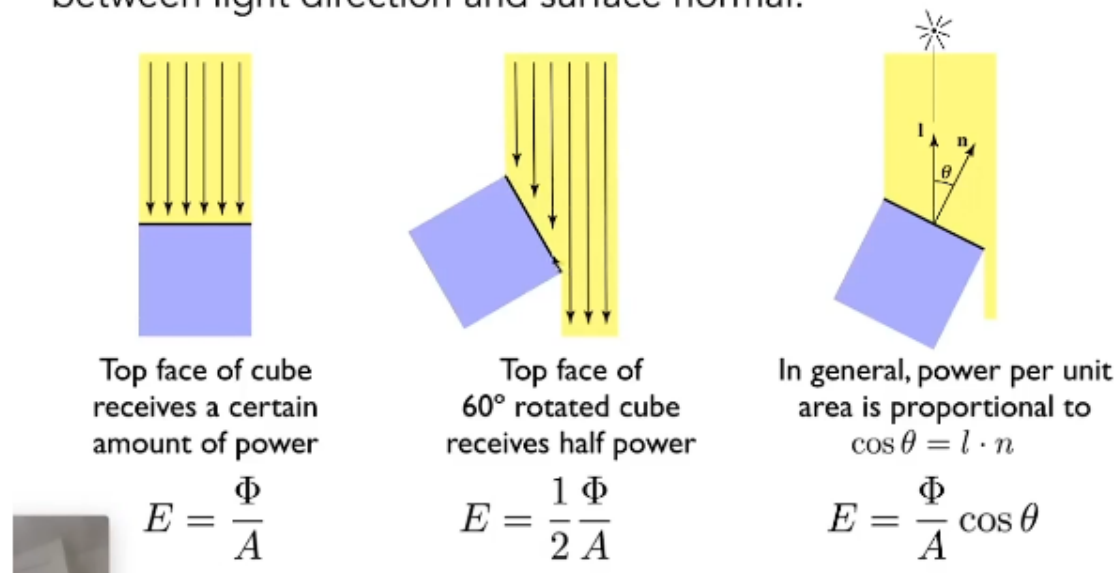
标题中我们将英文写在前面，因为接下来几个概念大家更习惯用英文来表述，中文可能会引起混淆。

irradiance (辐照度) 表示单位面积上的辐射通量, 符号为 E , 单位是 W/m^2 (瓦特每平方米)。可以表示为 $\frac{d\Phi}{dA}$ 。

具体来说, irradiance (辐照度) 表示的是, 电磁辐射入射于物体表面时, 每单位面积的辐射通量 (radiant flux) / 功率 (power)。也可以简单理解为用来描述物体表面接收多少光的能量。

在渲染中, 这个单位面积一般是物体的表面, 与入射光线垂直的面积。

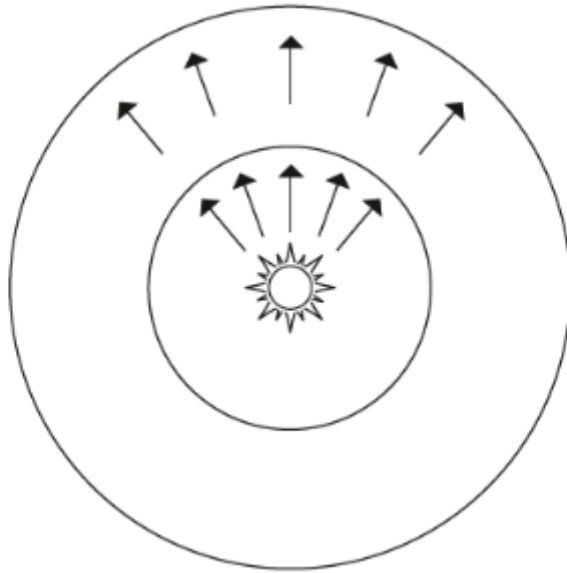
Irradiance at surface is proportional to cosine of angle between light direction and surface normal.



如下图, 还是之前例子中的灯泡, 这个灯泡的辐射通量/ 功率 Φ 为 60W, 这个点光源向四周均匀地辐射能量, 对于距离光源中心 r 的球壳上, 我们取一小块面积 A , 这个面积上的 irradiance (辐照度) E 就是 $\frac{d\Phi}{dA}$, 也就是 $\frac{\Phi}{4\pi r^2} = \frac{60}{4\pi r^2}$ 。 r 越大, irradiance (辐照度) 越小。

我们可以简单地想象, 我们地手掌放在灯泡旁边, 这个时候手掌表面单位面积接收到的光的能量就是 irradiance (辐照度), 我们的手掌距离灯泡越远, 感受到的温暖就越小, 因为 irradiance (辐照度) 变小了。

假设手掌距离灯泡 1 米, 那么 irradiance (辐照度) 的值就是 $\frac{60}{4\pi r^2} = \frac{60}{4\pi} \approx 4.77 W/m^2$ 。这个值就是我们手掌表面单位面积接收到的光的能量。



<https://yangwc.com/2020/04/06/Spectral/>

[pectral/](https://yangwc.com/2020/04/06/Spectral/)

在某些地方，使用辐射出射度（radiant emittance, radiant exitance）表示单位面积表面发射的辐射通量。

https://en.wikipedia.org/wiki/Radiant_exitance

公式与irradiance（辐照度）是一致的。

2.1.3 radiant intensity（辐射强度）

思考：灯泡往一个特定方向发射的能量是多少呢？

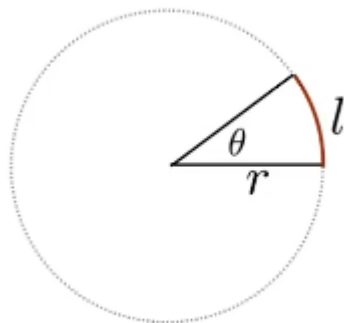
radiant intensity（辐射强度） 表示单位立体角上的辐射通量，符号为 I ，单位是 W/sr （瓦特每立体角）。可以表示为 $\frac{d\Phi}{d\omega}$ 。

这里提到了立体角的概念，那我们来看看什么是立体角：

立体角

二维角度表示--弧度公式

对于二维的半径为 r 的圆来说，角度可表示为 $\theta = \frac{l}{r}$ ，（弧度公式）



例如

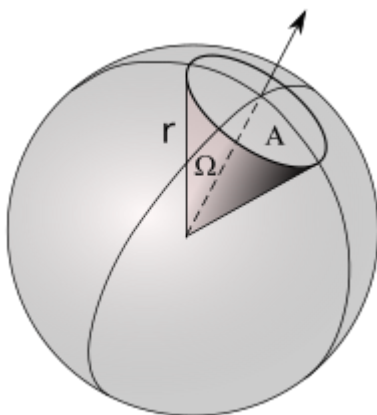
当 $l = 2\pi r$, 则 $\theta = 2\pi$;

当 $l = \frac{1}{2}\pi r$, 则 $\theta = \frac{1}{2}\pi$.

三维角度表示--立体角

在三维空间中, 我们也希望有一个类似于角度的概念, 这就是立体角 (solid angle), 可以理解成从球心指出到球面上的一个很小的面积。

其公式与二维角度类似, 对于半径为 r 的球来说, 立体角 ω 可以表示为 $\omega = \frac{A}{r^2}$, 其中 A 是球面上的面积。



https://en.wikipedia.org/wiki/Solid_angle

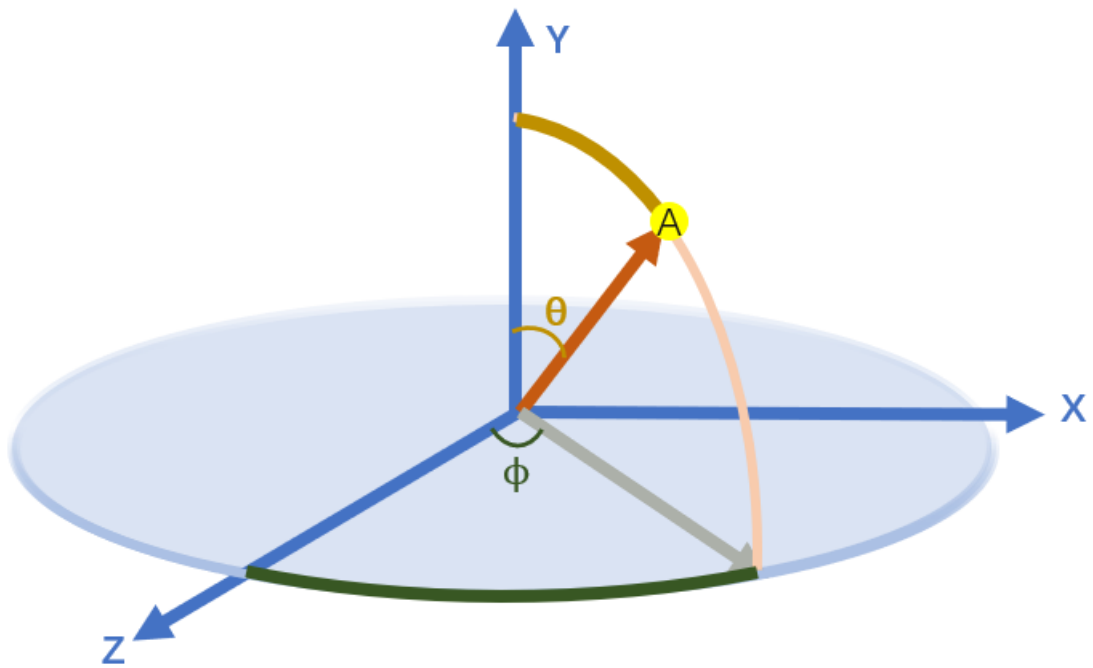
例如:

对于整个球面来说, 其面积为 $4\pi r^2$, 所以整个球面的立体角为 $4\pi r^2 / r^2 = 4\pi$ 。

对于半球面来说, 其面积为 $2\pi r^2$, 所以整个球面的立体角为 $2\pi r^2 / r^2 = 2\pi$ 。

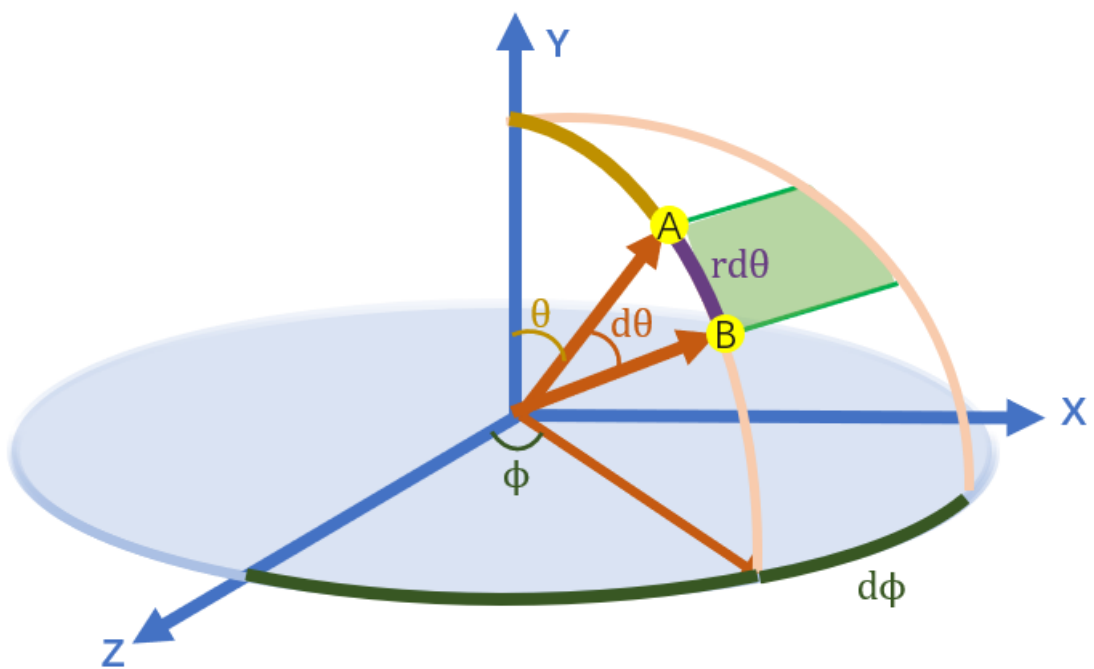
立体角公式推导

实际上在我们后续会遇到的情况中, 我们无法直接得到这个立体角对应的面积的大小, 而是只知道在球面坐标系下这个立体角的“方向”, 即下图中的 θ 和 ϕ 。那么我们就需要通过 θ 和 ϕ 来计算面积进而计算立体角。

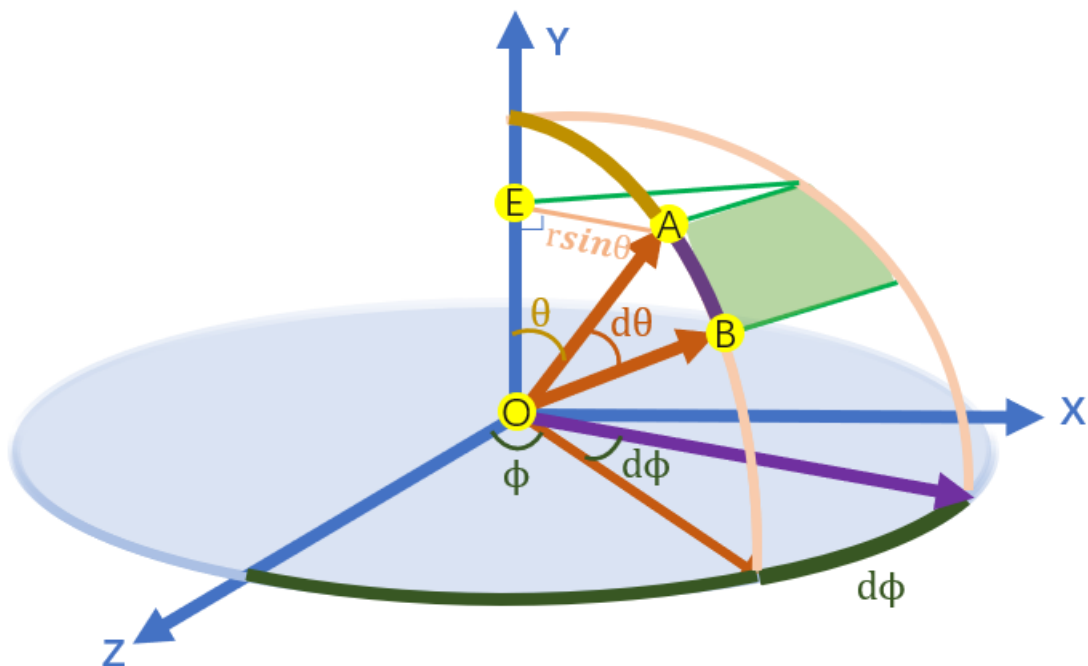


推导公式的图如下：

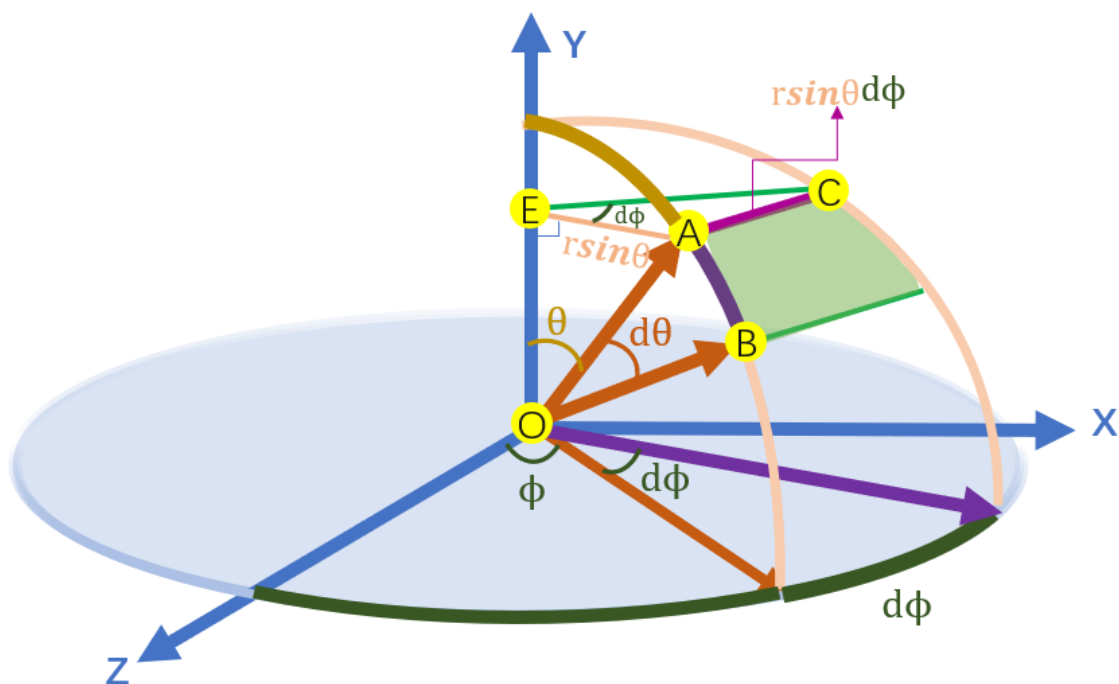
下图中，根据上文提到的弧度公式 $\theta = \frac{l}{r}$ ，则 $l = r\theta$ ，我们知道 $AB = rd\theta$



如下图，在直角三角形AEO中， $AE = r\sin\theta$



如下图，依旧根据上文提到的弧度公式 $\theta = \frac{l}{r}$ ，则 $l = r\theta$ ，我们知道 $AC = AE * d\phi = r \sin \theta d\phi$



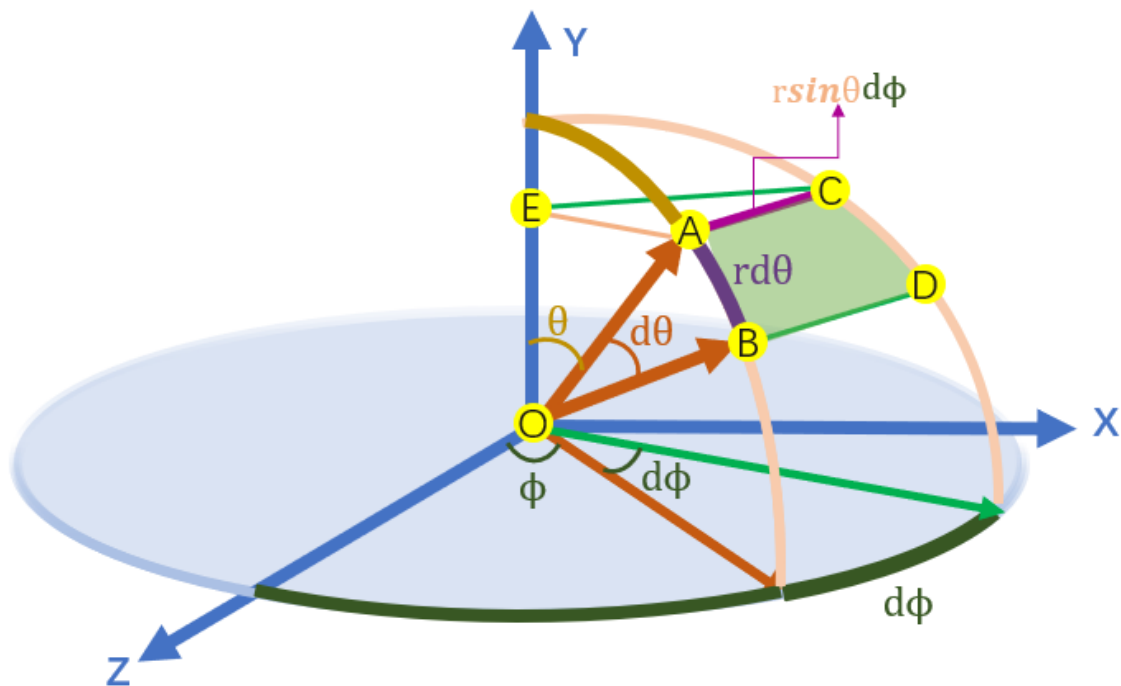
由此，我们终于得到ABCD的两个边 $AB = r d\theta$, $AC = r \sin \theta d\phi$,

我们可以算出小“平面”ABCD的面积

那么此时就有：

$$dA = AB * AC = (r d\theta)(r \sin \theta d\phi) = r^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

$$d\omega = \frac{dA}{r^2} = \sin \theta d\theta d\phi$$



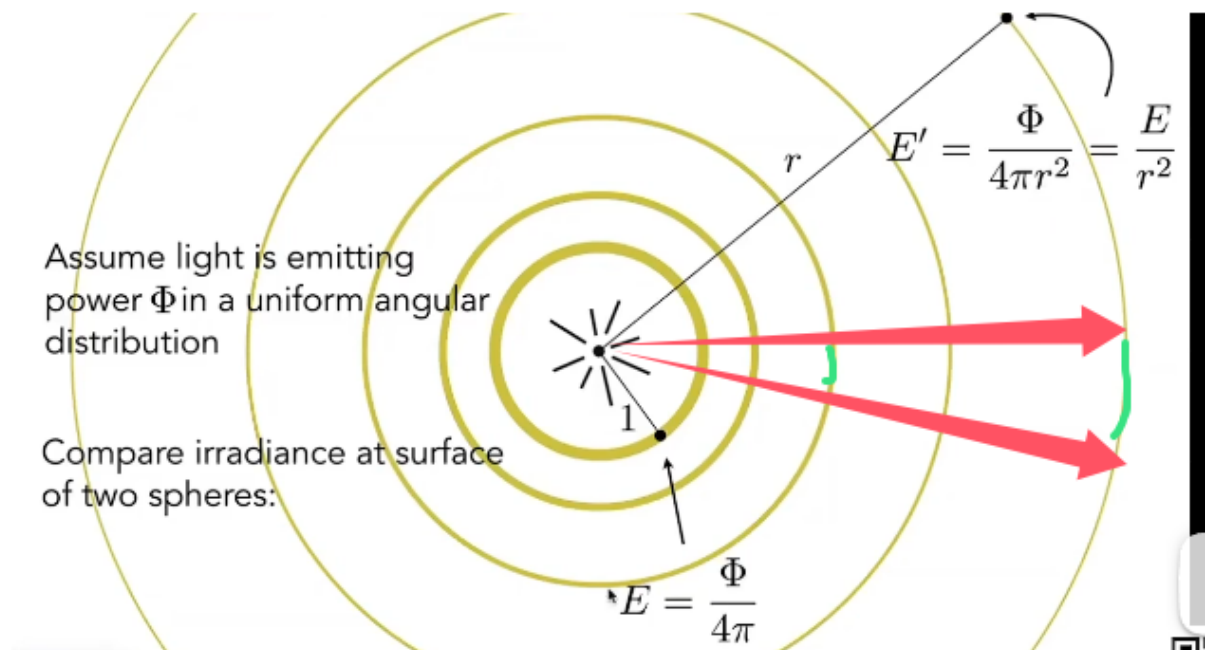
对于整个球来说，有：

$$\Omega = \int_{s^2} d\omega = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin\theta d\theta d\phi = 4\pi$$

综上，在辐射度量学中,我们直接用 ω 来表示三维空间中的方向--立体角(ω 可以由 θ 和 ϕ 来进行定义),
 $d\omega = \sin\theta d\theta d\phi$ 。

回到radiant intensity（辐射强度）上，其定义是单位立体角上的辐射通量，可以表示为 $I = \frac{d\Phi}{d\omega}$ 。

由于立体角 $d\omega = \sin\theta d\theta d\phi$,我们发现，立体角和半径 r 是没有关系的，同理，radiant intensity（辐射强度）与距离光源远近无关。见下图



radiant intensity (辐射强度) 并没有发生衰减 (因为立体角并没有发生变化, 图上红绿色那根线), 而是 irradiance 在发生衰减。

如下图, 还是之前例子中的灯泡, 这个灯泡向四周均匀地辐射能量, 即总的发射辐射通量/ 功率 Φ , 然后单位立体角发射 radiant intensity (辐射强度) I 。

因为有:

$$I = \frac{d\Phi}{d\omega}$$

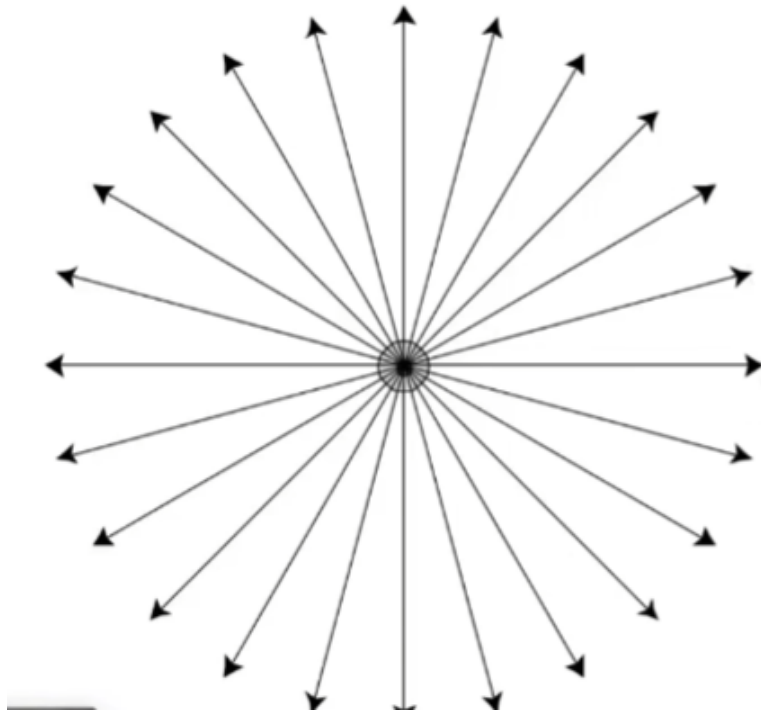
所以要求出单位时间的能量 Φ , 我们就可以对各个立体角方向的 I 进行积分求解, 这就可以得到一个点光源均匀的往四周辐射能量, 对应的任何方向的 intensity 推导公式如下:

$$\Phi = \int_{S^2} I d\omega = 4\pi I \text{ (所有立体角的 intensity 积分起来, 能得到功率 power)}$$

$$I = \frac{\Phi}{4\pi}$$

也就是说, 如果是向四周均匀辐射能量的话, 任何方向/立体角的 intensity 的值都为 $\frac{\Phi}{4\pi}$ 。

Isotropic Point Source



$$\Phi = \int_{S^2} I d\omega$$
$$= 4\pi I$$

$$I = \frac{\Phi}{4\pi}$$

我们再举一个例子，如果这次光源不是均匀发光，而是一个聚光灯，发光集中在某方向，假设在某方向上通过的立体角是0.5 sr，功率是60 W，那么：

$$I = \frac{d\Phi}{d\omega} = \frac{60}{0.5} = 120 \text{ W/sr}$$

2.1.4 radiance (辐射率)

radiance (辐射率) 是单位面积和单位立体角上的辐射通量，符号为 L ，单位是 $\text{W/m}^2 \text{sr}$ (瓦特每平方米每立体角)。可以表示为 $\frac{d^2\Phi}{dA d\omega}$ 。

radiance (辐射率) 是一个很重要的概念，我们在之前的基础光线追踪章节中，提到的从相机或者眼睛出发，穿过每个像素的光线，就可以用radiance (辐射率) 来表示。



我们可以理解为，radiance是irradiance和radiant intensity的结合，irradiance是单位面积上的辐射通量，radiant intensity是单位立体角上的辐射通量，而radiance是单位面积和单位立体角上的辐射通量。

radiance (L) 可以看作是单位面积的radiant intensity (I) 。radiant intensity是单位立体角上的辐射通量，我们进一步关注一个微小面积往某个微小立体角上发射的辐射通量，这就是radiance。也可以理解为，这个微小面积dA的radiant intensity是向周围各个方向发射能量，而我们只关心这个微小面积向某个微小立体角\特定方向发射的能量，即radiance。

$$L = \frac{dI}{dA \cos \theta}$$



另一方面，radiance (L) 可以看作是单位立体角的irradiance(E)。irradiance是单位面积上接收到的所有方向来的辐射通量，如下图，我们仅仅看这个小面积上接收的一个立体角来的辐射通量，这就是radiance。

$$L = \frac{dE}{d\omega \cos \theta}$$



反之，如果我们将所有方向的立体角的radiance积分起来，就可以得到irradiance:

$$\begin{aligned} \therefore L_i(\omega) &= \frac{dE}{d\omega \cos \theta} \\ \therefore dE(\omega) &= L_i(\omega) \cos \theta d\omega \\ \therefore E &= \int_{H^2} L_i(\omega) \cos \theta d\omega \end{aligned}$$

所以，dA收到的所有能量（也就是irradiance）就是从各个方向进来的能量求和。其实就是**radiance**在**irradiance**的基础上加了一个方向性。 H^2 指的是单位半球面

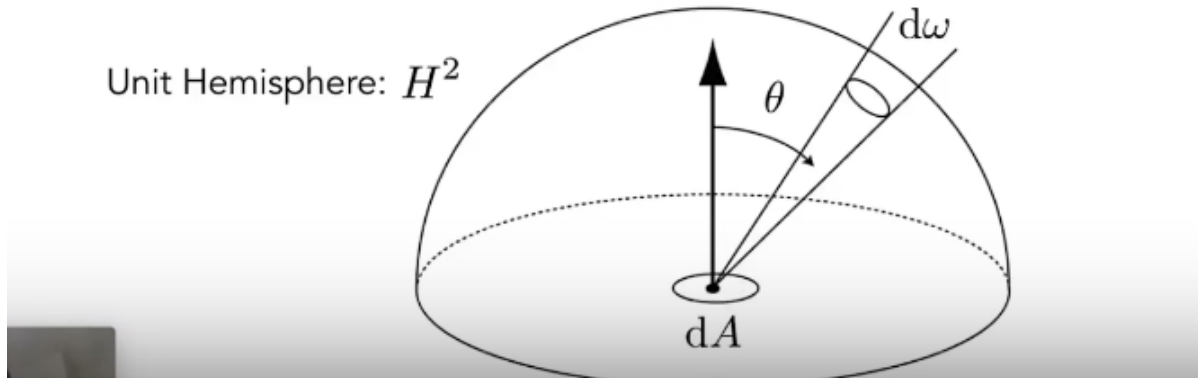
Irradiance: total power received by area dA

Radiance: power received by area dA from "direction" $d\omega$

$$dE(\mathbf{p}, \omega) = L_i(\mathbf{p}, \omega) \cos \theta d\omega$$

$$E(\mathbf{p}) = \int_{H^2} L_i(\mathbf{p}, \omega) \cos \theta d\omega$$

Unit Hemisphere: H^2



[1]<https://en.wikipedia.org/wiki/Radiometry>.

[2]real-time rendering 4th

[3]<https://zh.wikipedia.org/wiki/%E7%94%B5%E7%A3%81%E6%B3%A2>