9 Musterlösungen aus der Linearen Algebra 2

9.1 Vandermondesche Determinante

Aufgabe 9.1 Seien $a_1, a_2, \ldots, a_n$ Elemente eines Körpers K, wobei $n \geq 2$ sei. Betrachte die $(n \times n)$-Matrix $V(a_1, \ldots, a_n) := (v_{ij})$ mit $v_{ij} := a_i^{(j-1)}$ für $1 \leq i, j \leq n$. Zeigen Sie: $\det(V(a_1, \ldots, a_n)) = \prod\limits_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j)$.

Ausführliche Lösung 9.1 In dieser Aufgabe soll die Formel für die Determinante der Vandermonde-Matrix $V(a_1, \ldots, a_n)$ bewiesen werden.

Zunächst sollte man sich zum Lösen dieser Aufgabe überlegen, wie die Vandermonde-Matrix aussieht. $V(a_1, \ldots, a_n) := (v_{ij})$ ist durch $v_{ij} = a_i^{(j-1)}$ gegeben. Das heißt, dass in der i-ten Zeile der Matrix Potenzen von a_i stehen, und zwar von $a_i^0 = 1$ bis a_i^{n-1}. Die Vandermonde-Matrix sieht demnach so aus:

$$V(a_1, \ldots, a_n) = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Für den Beweis, dass

$$\det(V(a_1, \ldots, a_n)) = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j)$$

ist, bietet sich eine *Induktion* nach n an.

Der Induktionsanfang für $n = 2$ ist schnell gemacht:

$$\det(V(a_1, a_2)) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} = 1 \cdot a_2 - 1 \cdot a_1 = \prod_{j=1,\ i=2} (a_i - a_j) = \prod_{1 \leq j < i \leq 2} (a_i - a_j).$$

Machen wir nun den Induktionsschritt von $n - 1$ nach n. Hat man hier erst einmal die richtige Idee zur Berechnung der Vandermondeschen Determinante, so ist der Beweis relativ zügig erbracht. Wir wollen ihn uns Schritt für Schritt überlegen.

C. Ableitinger, A. Herrmann, *Lernen aus Musterlösungen zur Analysis und Linearen Algebra*,
DOI 10.1007/978-3-658-02353-9_9, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2013

Dazu sammeln wir zunächst alle uns zur Verfügung stehenden Möglichkeiten zur Berechnung einer Determinante und überlegen, welche uns davon für diesen speziellen Fall weiterhelfen. Dabei sollten wir immer im Blick haben, dass wir die Determinante für die $(n \times n)$-Matrix auf die uns bekannte Induktionsvoraussetzung (also die Determinante einer $(n-1 \times n-1)$-Vandermonde-Matrix) zurückführen wollen.

Machen wir uns zunächst eine Liste von Berechnungsverfahren:

- Formel für Dreiecksmatrizen,
- Kästchensatz: $\det \begin{pmatrix} A & * \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det(A) \cdot \det(B)$,
- Laplacesche Entwicklung nach Zeilen oder Spalten,
- Elementarumformungen wie Vertauschen zweier Zeilen oder Spalten, Vervielfachen einer Zeile bzw. Spalte, Addition eines Vielfachen einer Zeile bzw. Spalte zu einer anderen (Achtung: Der Wert der Determinante ändert sich dabei!),
- Regel von Sarrus und zur Berechnung der Determinante von (2×2)-Matrizen.

Gut, welche davon können wir hier anwenden? Eine Dreiecksmatrix haben wir nicht gegeben und für den Kästchensatz müssten in der Matrix Kästchen auftauchen, in denen nur Nullen stehen. Diese beiden Formeln helfen uns also zunächst nicht weiter. Da wir eine allgemeine $(n \times n)$-Matrix vorliegen haben, können wir auch nicht die Regel von Sarrus oder die entsprechende Regel für (2×2)-Matrizen anwenden. Es bleibt also nur noch die Entwicklung nach Laplace oder die elementaren Umformungen. Eine Entwicklung nach Laplace empfiehlt sich allerdings auch nur, wenn möglichst viele Nullen in einer Zeile oder Spalte stehen. Denn andernfalls muss man viele neue Determinanten berechnen, da hat man nicht allzu viel gewonnen. Das heißt für unseren Fall aber nun, dass wir mit elementaren Umformungen versuchen, möglichst viele Nullen in einer Zeile oder Spalte zu bekommen. Dann können wir nach Laplace entwickeln und erhalten eine $(n-1 \times n-1)$-Matrix oder mehrere.

Dazu bieten sich nun mehrere Möglichkeiten an. Die erste, die einem da wohl ins Auge springt, ist, die erste Zeile von allen anderen abzuziehen, da dann in der ersten Spalte nur noch eine Eins und sonst Nullen stehen:

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 0 & a_2 - a_1 & a_2^2 - a_1^2 & \cdots & a_2^{n-1} - a_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_n - a_1 & a_n^2 - a_1^2 & \cdots & a_n^{n-1} - a_1^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Jetzt könnte man mit Laplace nach der ersten Spalte entwickeln. Nur kann man auf diese Matrix nicht die Induktionsvoraussetzung anwenden, da es sich nicht um eine Vandermonde-Matrix handelt.

Man erhält so nämlich:

$$\ldots \overset{\text{Lapl.}}{=} \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & a_2^2 - a_1^2 & \cdots & a_2^{n-1} - a_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n - a_1 & a_n^2 - a_1^2 & \cdots & a_n^{n-1} - a_1^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Mit einfachen Zeilen- oder Spaltenumformungen kommen wir hier nicht mehr weiter. Also überlegen wir uns jetzt, wie wir in der Ausgangsmatrix durch Spaltenumformungen möglichst viele Nullen in die erste Zeile bekommen können.

Man könnte das a_1^j-fache der ersten Spalte von der $(j+1)$-ten Spalte abziehen (für alle $j = 1, \dots, n-1$).

Dann erhalten wir allerdings eine ähnliche Matrix wie bei den Zeilenumformungen und auf die können wir wieder *nicht* die Induktionsvoraussetzung anwenden!

Welche andere Möglichkeit, um Nullen zu bekommen, gibt es nun noch? Wie wäre es damit:

Wir ziehen zunächst das a_1-fache der $(n-1)$-ten Spalte von der n-ten Spalte ab, dann das a_1-fache der $(n-2)$-ten Spalte von der $(n-1)$-ten Spalte und so weiter bis wir das a_1-fache der ersten Spalte von der zweiten abziehen.

Damit erhalten wir folgendes Ergebnis:

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_2 - a_1 & a_2^2 - a_1 \cdot a_2 & \cdots & a_2^{n-1} - a_1 \cdot a_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n - a_1 & a_n^2 - a_1 \cdot a_n & \cdots & a_n^{n-1} - a_1 \cdot a_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Sieht das jetzt so viel besser aus? Da steht doch immer noch keine Vandermonde-Matrix! Stimmt, aber fast, wie man an dieser Umformung sieht:

$$\dots = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & (a_2 - a_1) \cdot 1 & (a_2 - a_1) \cdot a_2 & \cdots & (a_2 - a_1) \cdot a_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & (a_n - a_1) \cdot 1 & (a_n - a_1) \cdot a_n & \cdots & (a_n - a_1) \cdot a_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Jetzt entwickeln wir mit Laplace nach der ersten Zeile, es folgt:

$$\dots = \begin{vmatrix} (a_2 - a_1) & (a_2 - a_1) \cdot a_2 & \cdots & (a_2 - a_1) \cdot a_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_n - a_1) & (a_n - a_1) \cdot a_n & \cdots & (a_n - a_1) \cdot a_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Die Faktoren in den Zeilen darf man nun aber aus der Determinante herausziehen und erhält:

$$\dots = (a_2 - a_1) \cdot \ldots \cdot (a_n - a_1) \begin{vmatrix} 1 & a_2 & \cdots & a_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Nun haben wir tatsächlich wieder eine Vandermonde-Matrix erhalten, auf die wir die Induktionsvoraussetzung anwenden dürfen.

Man muss ein bisschen aufpassen, da die Indizes erst bei 2 beginnen. Für diese $(n-1 \times n-1)$-Matrix gilt nach Induktionsvoraussetzung:

$$\begin{vmatrix} 1 & a_2 & \cdots & a_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{n-2} \end{vmatrix} = \prod_{2 \le j < i \le n} (a_j - a_i).$$

Daraus folgt für die Vandermondesche Determinante:

$$\begin{aligned} V(a_1, \ldots, a_n) &= \ldots = (a_2 - a_1) \cdot \ldots \cdot (a_n - a_1) \prod_{2 \le j < i \le n} (a_i - a_j) \\ &= \prod_{j=1,\ 1<i \le n} (a_i - a_j) \prod_{2 \le j < i \le n} (a_i - a_j) \\ &= \prod_{1 \le j < i \le n} (a_i - a_j). \end{aligned}$$

Damit haben wir auch den Induktionsschritt zu Ende geführt.

Verständnisfragen 9.1

1. Der Beweis wurde mit Hilfe von Induktion durchgeführt. An sich kann man doch die Determinante auch direkt ausrechnen und somit zeigen, dass die Behauptung gilt. Warum macht man das nicht?
2. Welche Matrix erhält man durch die zweite vorgestellte Vorgehensweise (das a_1^j-fache der ersten Spalte der Ausgangsmatrix von der $j+1$-ten Spalte abziehen für $j = 1, \ldots, n-1$)?
3. Wie ist $\prod_{1 \le j < i \le n} (a_i - a_j)$ zu verstehen? Schreiben Sie mit Hilfe der „Pünktchen-Schreibweise" das Produkt aus! Überlegen Sie sich dann, warum die im Beweis auftauchende Gleichheit

$$(a_2 - a_1) \cdot \ldots \cdot (a_n - a_1) \prod_{2 \le j < i \le n} (a_i - a_j) = \prod_{j=1,\ 1<i \le n} (a_i - a_j) \prod_{2 \le j < i \le n} (a_i - a_j)$$

richtig ist.

Übung 9.1 Ordnen Sie nun selbst den einzelnen Bearbeitungsschritten der Musterlösung die Phasen aus Kapitel 3 zu! Tragen Sie dazu die jeweiligen Buchstaben in die kleinen Quadrate am Seitenrand ein!

Arbeitsauftrag 9.1 Verfassen Sie eine komprimierte Musterlösung zu der Aufgabe!

Lösungsvorschläge zu den Verständnisfragen, der Übung und dem Arbeitsauftrag finden Sie in Abschnitt 11.5.