

# Secret Sharing

Henning Hontheim

10. März 2020

# Inhaltsverzeichnis

1	Wozu Secret Sharing? . . . . .	1
1.1	Ein kombinatorisches Beispiel . . . . .	1
2	Primitives Secret Sharing . . . . .	2
2.1	Aufsplitten des Secrets . . . . .	2
2.2	One-Time-Padding . . . . .	2
	Vernam-Chiffre . . . . .	2
	Visuelle Kryptographie . . . . .	3
	One-Time-Padding mit mehr als 2 Personen . . . . .	5
3	Shamir's Secret Sharing . . . . .	5
3.1	Die Vandermonde-Matrix . . . . .	6
3.2	Das Shamir-Secret-Sharing-Protokoll . . . . .	8
3.3	Berechnung der Shares . . . . .	9
3.4	Rekonstruktion des Geheimnisses . . . . .	9
3.5	Sicherheit . . . . .	9
3.6	Beispiele . . . . .	9
	Graphisches $(2, n)$ -Schema . . . . .	9
	Graphisches $(3, n)$ -Schema . . . . .	10
4	Weitere Verfahren . . . . .	11
4.1	Blakeley's . . . . .	11
4.2	Chinesischer Restsatz . . . . .	11
4.3	whatever... . . . .	11
5	Fazit . . . . .	12
	<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>13</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>13</b>

---

Allein aus Gründen der Lesbarkeit wird auf die gleichzeitige Verwendung mehrerer geschlechtsspezifischer Sprachformen verzichtet. Sämtliche Personenbezeichnungen gelten für alle Geschlechter.

# 1 Wozu Secret Sharing?

Arbeiten Sie mit Anderen an einem geheimen Projekt, so gibt es einige Herausforderungen zu meistern. Was passiert, wenn Sie Ihren Schlüssel der verschlüsselten Daten verlieren? Haben lediglich Sie einen Schlüssel? Wahrscheinlich nicht. Es ist nützlich, seien es in einem Tresor verschlüsselte Daten, oder die privaten Schlüssel in einer PKI, wenn nicht nur Sie den einzigen Schlüssel besitzen.

Aber wie teilen Sie den Zugriff auf die Daten? Wenn Sie Ihren Schlüssel vervielfältigen würden, hätte ein Einzelner Vollzugriff. Es wäre besser, wenn es mehrere Personen benötigen würde, um Zugriff zu erhalten – idealerweise mehr als die Hälfte aller Beteiligten. Doch wie lässt es sich in der Praxis umsetzen, dass es mehrere Personen benötigt um einen privaten Schlüssel zu rekonstruieren?

Ich möchte hier eine Technik vorstellen, die es erlaubt, Geheimnisse mit anderen zu teilen – das Secret Sharing. Siehe [2] und [6].

## 1.1 Ein kombinatorisches Beispiel

Mehrere Wissenschaftler  $N$  arbeiten zusammen an einem Geheimprojekt. Um die Dokumente geheim zu halten und um Missbrauch vorzubeugen, verschließen sie diese in einem Tresor. Nur wenn mindestens die Hälfte aller Wissenschaftler anwesend ist, soll sich der Tresor öffnen lassen. Wie viele paarweise verschiedene Schlösser  $S$  muss der Tresor mindestens besitzen? Wie viele paarweise verschiedene Schlüssel  $s$  muss jeder Wissenschaftler mindestens bei sich tragen? Siehe [6] nach [4].

**Beispiel 1.1.** Sei  $N = 11$  die Anzahl aller Wissenschaftler und  $n = \lceil \frac{N}{2} \rceil = 6$  die Anzahl derer, die mindestens anwesend sein müssen, damit sich der Tresor öffnen lässt. Folglich muss es also für jede Teilmenge mit  $k$  Wissenschaftlern, wobei  $k = N - n = 5$ , genau ein Schloss geben, für das keiner der  $k$  Wissenschaftler einen Schlüssel besitzt. Also muss der Tresor  $S = \binom{N}{k} = \binom{11}{5} = 462$  paarweise verschiedene Schlösser besitzen.

Sei  $W = \{w_1, w_2, \dots, w_k, w_{k+1}\}$  mit  $|W| = k + 1 = 6$  die Menge von Wissenschaftlern, die mindestens benötigt wird, um den Tresor zu öffnen. Dann gibt es genau ein bestimmtes Schloss  $S'$ , für das keiner der Wissenschaftler aus  $W \setminus w_{k+1}$  einen Schlüssel besitzt, der Wissenschaftler  $w_{k+1}$  jedoch schon. Da für jede Permutation von  $k = 5$  Wissenschaftlern genau der  $w_{k+1}$  existiert, der die Teilmenge  $W$  „vervollständigt“, bekommt jeder Wissenschaftler  $s = \binom{N-1}{|W|-1} = \binom{N-1}{k} = \binom{10}{5} = 252$  Schlüssel. Das ergibt eine Gesamtanzahl an  $11 \cdot 252 = 2772$  Schlüsseln. Dass dies keine praktikable Lösung des Problems ist, ist offensichtlich.

## 2 Primitives Secret Sharing

### 2.1 Aufsplitten des Secrets

Ein primitives Vorgehen zur Aufteilung eines Geheimnisses wäre es, dieses nach einer gewissen Anzahl Stellen zu trennen.

**Beispiel 2.1.** Sei  $D = 14561237$  das Geheimnis, welchen unter 2 Personen aufgeteilt werden soll. Bei 8 Stellen, könnte man der ersten Person  $P_1$  die ersten 4 Stellen, der zweiten Person  $P_2$  die letzten 4 Stellen zuteilen.

$$D = 14561237 = \underbrace{1456}_{=:D_1} \underbrace{1237}_{=:D_2} = D_1 \cdot 10^4 + D_2$$

Der entscheidende Nachteil hierbei ist, dass die Shares<sup>1</sup>  $D_1$  und  $D_2$  Aufschluss über die Beschaffenheit von  $D$  geben. Wer  $D_1$  besitzt braucht nur  $10^4$  Kombinationen zu testen, wohingegen ein unbeteiligter Dritter  $10^8$  ausprobieren müsste.

Fortan fordern wir also, dass es eine wichtige Eigenschaft der Shares sein muss, keine Informationen über das Geheimnis  $D$  preiszugeben und alle Möglichkeiten von  $D$  gleich wahrscheinlich sein sollen. Dies wird beschrieben durch das Prinzip der Konfusion, welches auf den Mathematiker Claude Shannon zurückzuführen ist.[7]

### 2.2 One-Time-Padding

#### Vernam-Chiffre

Ein Verfahren, welches die geforderte Eigenschaft nicht verletzt, ist das sogenannte One-Time-Padding. Dieses beruht auf der Vernam-Chiffre. Hierbei wird eine zufällige Zahl  $r$  zu unserem Geheimnis  $D$  addiert, wobei beide die gleiche Stellenanzahl haben müssen.

**Beispiel 2.2.** Sei wieder  $D = 14561237$  und ein  $r_1 = 81613241$  zufällig gewählt. Nun berechnen wir  $r_2 = D \oplus r_1$ , wobei wir hier  $\oplus$  die Addition modulo 10 ist, die Überträge also quasi vernachlässigt werden. Hier wäre beispielsweise  $5 \oplus 6 = 1$ .

$$\begin{array}{rcl} 14561237 & = & D \\ \oplus & 81613241 & = r_1 \\ \hline 95174478 & = & r_2 \end{array} \tag{1}$$

---

<sup>1</sup>Shares sind die Bestandteile eines Geheimnisses, die zur Rekonstruktion dessen an die beteiligten Personen aufgeteilt werden

Nun können wir das Geheimnis rekonstruieren, wenn wir  $D = r_2 \ominus r_1$  stellenweise rechnen. Unsere Subtraktion  $\ominus$  wird wieder modulo 10 gerechnet, ignoriert also auch hier für jede Stelle den (negativen) Übertrag. Somit wäre beispielsweise  $1 \ominus 6 = +5$ .

$$\begin{array}{rcl} 95174478 & = & r_2 \\ \ominus 81613241 & = & r_1 \\ \hline 14561237 & = & D \end{array} \quad (2)$$

Wenn wir nun zwei Personen haben, die  $D$  unter sich aufteilen möchten, erhält  $P_1$  den Share  $r_1 = 81613241$  und  $P_2$  den Share  $r_2 = 95174478$ . Beide Shares geben keinerlei Aufschluss über die Beschaffenheit von  $D$ . Zusammen können  $P_1$  und  $P_2$  das Geheimnis jedoch rekonstruieren.

Es soll angemerkt sein, dass die Addition modulo 10 nur eine mehrerer Möglichkeiten der Berechnung ist. Handelt es sich um binäre Zahlen liegt es nahe, die XOR<sup>2</sup>-Operation zu nutzen.

## Visuelle Kryptographie

Ein weiteres anschauliches Beispiel lässt sich im Bereich der Visuellen Kryptographie finden. Hier besteht das Geheimnis (Abbildung 4) aus einer s/w-Grafik. Diese Grafik wird aufgeteilt und jeder Teil auf eine transparente Folie gedruckt. Wenn nun die Folien übereinandergelegt werden, erscheint die ursprüngliche Grafik. Jede einzelne Folie sieht dabei wie ein zufälliges Rauschen gleichverteilter schwarzer und weißer Pixel aus. Siehe [5].

**Beispiel 2.3.** Ein Bild soll auf zwei Folien aufgeteilt werden. Die erste Folie (Abbildung 1) wird mit einem zufälligen Muster bedruckt. Aus Gründen des Kontrasts müssen für jedes Pixel des originalen Bildes 4 Pixel (je ein  $2 \times 2$ -Quadrat) generiert werden. Die Folien enthalten also alle viermal so viele Pixel. Hierbei werden für jedes Quadrats entweder die beiden Sub-Pixel oben links und unten rechts, oder die anderen beiden Sub-Pixel oben rechts und unten links schwarz eingefärbt.

---

<sup>2</sup>Exklusiv-Oder



Abbildung 1: Eine zufällige erste Folie. Von [3].

Die Pixel der zweiten Folie (Abbildung 3) werden gemäß Abbildung 2 berechnet. Wenn im Original ein schwarzes Pixel (■) vorhanden ist, muss an dieser Stelle in der zweiten Folie das Komplement der ersten Folie eingefärbt werden. Somit sind bei Überlagerung beider Folien alle 4 Sub-Pixel schwarz. Wenn das originale Pixel weiß ist (□), hat das Quadrat der zweiten Folie das gleiche Muster wie die erste Folie. Das ergibt in Summe ein graues Pixel (#7F7F7F). Weiße Pixel können über Folien nicht rekonstruiert werden, da mit den Folien keine Subtraktion möglich ist. Deshalb muss die Pixelanzahl auch vervierfacht werden. Siehe [3].

Zufallsbitsstrom aus Zufallszahlengenerator: 01010010010101100111...

Zufallsbit:	0	1	0	1
Pixel Folie 1: (folgt Zufallsbit)				
Ursprungspixel:				
Pixel Folie 2: (abgestimmt auf Ergebnis)				
Überlagerung Folie 1 und 2 (~ Ursprungspixel)				

Abbildung 2: Berechnung der Pixel der zweiten Folie. Von [3].

+

Folie 2

—

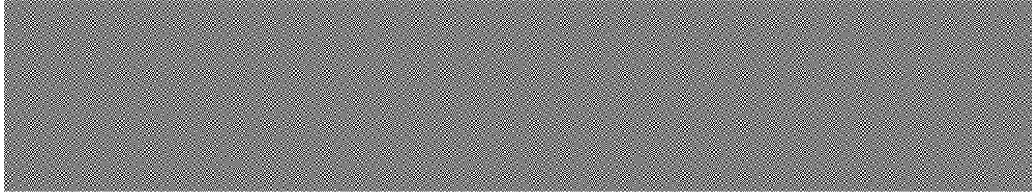


Abbildung 3: Die zweite Folie. Von [3].

Wenn nun beide Folien übereinandergelegt werden, erscheint das Geheimnis:

+

Überlagerung

—



Abbildung 4: Das mittels beider Folien rekonstruierte Geheimnis. Von [3].

### One-Time-Padding mit mehr als 2 Personen

Wie sieht es jedoch aus, wenn sich mehr als zwei Personen ein Geheimnis mittels OTP<sup>3</sup> teilen möchten? Auch dies ist möglich für eine beliebige Anzahl  $N$  an Personen. Doch was passiert, wenn einer der Beteiligten den eigenen Share verliert? Da alle Shares benötigt werden um  $D$  zu rekonstruieren, ist das unser SPOF<sup>4</sup>. Da dies in der Praxis für große  $N$  sehr schnell zu einem Problem führen kann, möchten wir dieses Verfahren hier nicht länger behandeln.

## 3 Shamir's Secret Sharing

Wir widmen uns nun einem Verfahren mit dem sich ein Geheimnis rekonstruieren lässt, ohne dass alle Shares benötigt sind. Wie im Beispiel mit den Schlössern wollen wir einen Schwellwert von Shares angeben, die mindestens zur Rekonstruktion des Geheimnisses benötigt sein sollen. Das hier vorgestellte Secret-Sharing-Protokoll stammt von Adi Shamir. [6]

---

<sup>3</sup>One-Time-Padding

<sup>4</sup>Single Point of Failure

Seien  $n, t \in \mathbb{N}$  mit  $t \leq n$ . Bei diesem  $(n, t)$ -Secret-Sharing-Protokoll wird das Geheimnis von einem Dealer auf  $n$  Personen aufgeteilt. Jeder hat einen Teil des Geheimnisses. Wenn sich  $t$  dieser Personen zusammentun, sollen sie das Geheimnis rekonstruieren können. Wenn sich aber weniger als  $t$  dieser Geheimnisträger zusammentun, sollen sie keine relevante Information über das Geheimnis erhalten können. [2]

### 3.1 Die Vandermonde-Matrix

Bevor wir mit der Beschreibung des Protokolls beginnen können, beschäftigen wir uns mit *Vandermonde*<sup>5</sup>-Matrizen.

**Definition 3.1.** Eine Vandermonde-Matrix  $V_n$  ist eine  $(n \times n)$ -Matrix der Form

$$V_n = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Hierbei gilt  $V_n = V(a_1, \dots, a_n) := (v_{ij})$  mit  $v_{ij} := a_i^{(j-1)}$  für  $1 \leq i, j \leq n$ .

**Satz 3.2.** Die Determinante einer Vandermonde-Matrix  $V_n$  ist

$$\det V_n = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j).$$

*Beweis.* Wir beweisen dies mithilfe vollständiger Induktion. [1] Den trivialen Fall für  $\det V_1 = \det(1) = 1$  vernachlässigen wir hierbei.

- **Induktionsanfang  $n = 2$ :**

Der Induktionsanfang für  $n = 2$  ist schnell gezeigt:

$$\det(V_2) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} = 1 \cdot a_2 - 1 \cdot a_1 = \prod_{j=1, i=2} (a_i - a_j) = \prod_{1 \leq j < i \leq 2} (a_i - a_j).$$

- **Induktionsschritt  $n - 1 \rightarrow n$ :**

Wir wollen dies mithilfe der Entwicklung nach Zeilen oder Spalten zeigen. Da sich dies nur empfiehlt, wenn möglichst viele Nullen in einer Zeile oder Spalte stehen, versuchen wir dies mithilfe elementarer Umformungen zu erreichen.

---

<sup>5</sup>nach Alexandre-Théophile Vandermonde



Sei

$$\det V_n = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Um in der ersten Zeile möglichst viele Nullen zu bekommen, subtrahieren wir zunächst das  $a_1$ -fache der  $(n-1)$ -ten Spalte von der  $n$ -ten Spalte, dann das  $a_1$ -fache der  $(n-2)$ -ten Spalte von der  $(n-1)$ -ten Spalte und so weiter bis wir das  $a_1$ -fache der ersten Spalte von der zweiten subtrahieren. Damit erhalten wir:

$$\dots = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_2 - a_1 & a_2^2 - a_1 \cdot a_2 & \cdots & a_2^{n-1} - a_1 \cdot a_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n - a_1 & a_n^2 - a_1 \cdot a_n & \cdots & a_n^{n-1} - a_1 \cdot a_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Dies ist noch keine Vandermonde-Matrix. Wenn wir jedoch folgende Umformung vornehmen, kommen wir unserem Ziel näher:

$$\dots = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & (a_2 - a_1) \cdot 1 & (a_2 - a_1) \cdot a_2 & \cdots & (a_2 - a_1) \cdot a_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & (a_n - a_1) \cdot 1 & (a_n - a_1) \cdot a_n & \cdots & (a_n - a_1) \cdot a_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Jetzt entwickeln wir nach der ersten Spalte und erhalten:

$$\dots = \begin{vmatrix} (a_2 - a_1) & (a_2 - a_1) \cdot a_2 & \cdots & (a_2 - a_1) \cdot a_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_n - a_1) & (a_n - a_1) \cdot a_n & \cdots & (a_n - a_1) \cdot a_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Jetzt ziehen wir die Faktoren aus der Determinante heraus und bekommen:

$$\dots = (a_2 - a_1) \cdot \dots \cdot (a_n - a_1) \begin{vmatrix} 1 & a_2 & \cdots & a_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Die Matrix ist nun tatsächlich eine Vandermonde-Matrix auf die wir unsere Induktionsvoraussetzung anwenden dürfen. Achtung: Die Indizes beginnen erst bei 2! Für diese  $(n-1 \times n-1)$ -Matrix gilt nach der Induktionsvoraussetzung:

$$\begin{vmatrix} 1 & a_2 & \cdots & a_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{n-2} \end{vmatrix} = \prod_{2 \leq j < i \leq n} (a_j - a_i).$$

Daraus folgt für die Determinante einer Vandermonde-Matrix:

$$\begin{aligned}
V(a_1, \dots, a_n) &= \dots = (a_2 - a_1) \cdot \dots \cdot (a_n - a_1) \prod_{2 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j) \\
&= \prod_{j=1, 1 < i \leq n} (a_i - a_j) \prod_{2 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j) \\
&= \prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j).
\end{aligned}$$

Damit haben wir auch den Induktionsschritt gezeigt. □

### 3.2 Das Shamir-Secret-Sharing-Protokoll

Jetzt können wir mit der Beschreibung des Protokolls beginnen.

**Satz 3.3.** Seien  $l, t \in \mathbb{N}, l \leq t$ . Weiter seien  $x_i, y_i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, 1 \leq i \leq l$ , wobei die  $x_i$  paarweise verschieden sind. Dann gibt es genau  $p^{t-l}$  Polynome  $b \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$  vom Grad  $\leq t-1$  mit  $b(x_i) = y_i, 1 \leq i \leq l$ , wobei  $p$  eine Primzahl ist.<sup>6</sup>

*Beweis.* Das Lagrange-Interpolationsverfahren liefert das Polynom

$$b(x) = \sum_{i=1}^l y_i \prod_{j=1, j \neq i}^l \frac{x_j - X}{x_j - x_i}, \quad (3)$$

das  $b(x_i) = y_i, 1 \leq i \leq l$  erfüllt und mit dem sich  $b$  wieder interpolieren lässt. Jetzt muss nur noch die Anzahl dieser Polynome bestimmt werden.

Sei  $b \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$  ein solches Polynom. Dieses lässt sich wie folgt darstellen:

$$b(x) = \sum_{j=0}^{t-1} b_j X^j, b_j \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, 0 \leq j \leq t-1.$$

Aus  $b(x_i) = y_i, 1 \leq i \leq l$  erhält man das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{t-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{t-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_l & x_l^2 & \cdots & x_l^{t-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{t-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_l \end{pmatrix}. \quad (4)$$

---

<sup>6</sup>In unserem konkreten Fall gilt  $l = t$ .

Die Teil-Koeffizientenmatrix

$$U = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{l-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{l-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_l & x_l^2 & \cdots & x_l^{l-1} \end{pmatrix}$$

ist eine *Vandermonde-Matrix*. Ihre Determinante ist

$$\det U = \prod_{1 \leq j < i \leq l} (x_i - x_j).$$

Weil die  $x_i$  nach Voraussetzung paarweise verschieden sind, ist die Determinante ungleich Null. Der Rang von  $U$  ist also  $l$ . Daher hat der Kern der Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems (4) den Rang  $t - l$  und die Anzahl der Lösungen ist  $p^{t-l}$ .  $\square$

### 3.3 Berechnung der Shares

### 3.4 Rekonstruktion des Geheimnisses

### 3.5 Sicherheit

### 3.6 Beispiele

#### Graphisches $(2, n)$ -Schema

Blah

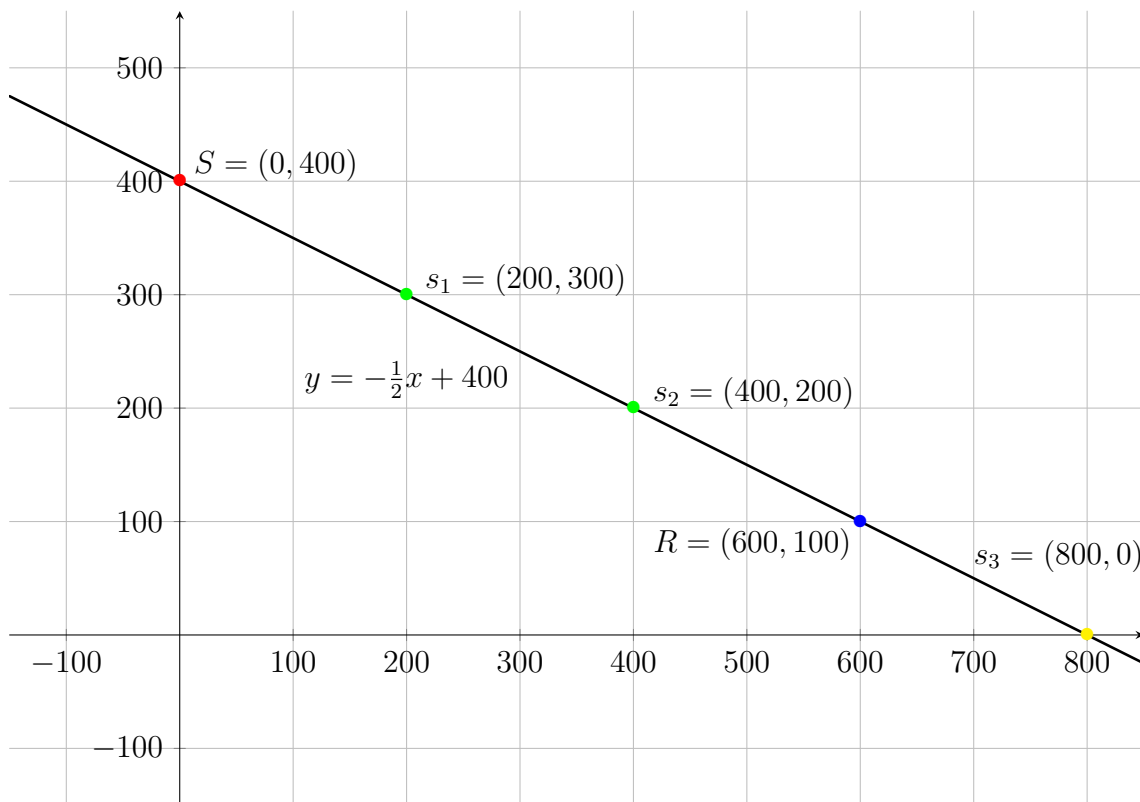


Abbildung 5: Erweiterung des Geheimnisses  $S$  als Gerade  $f$  für zwei Shares  $s_1$  und  $s_2$ .

### Graphisches $(3, n)$ -Schema

Blah

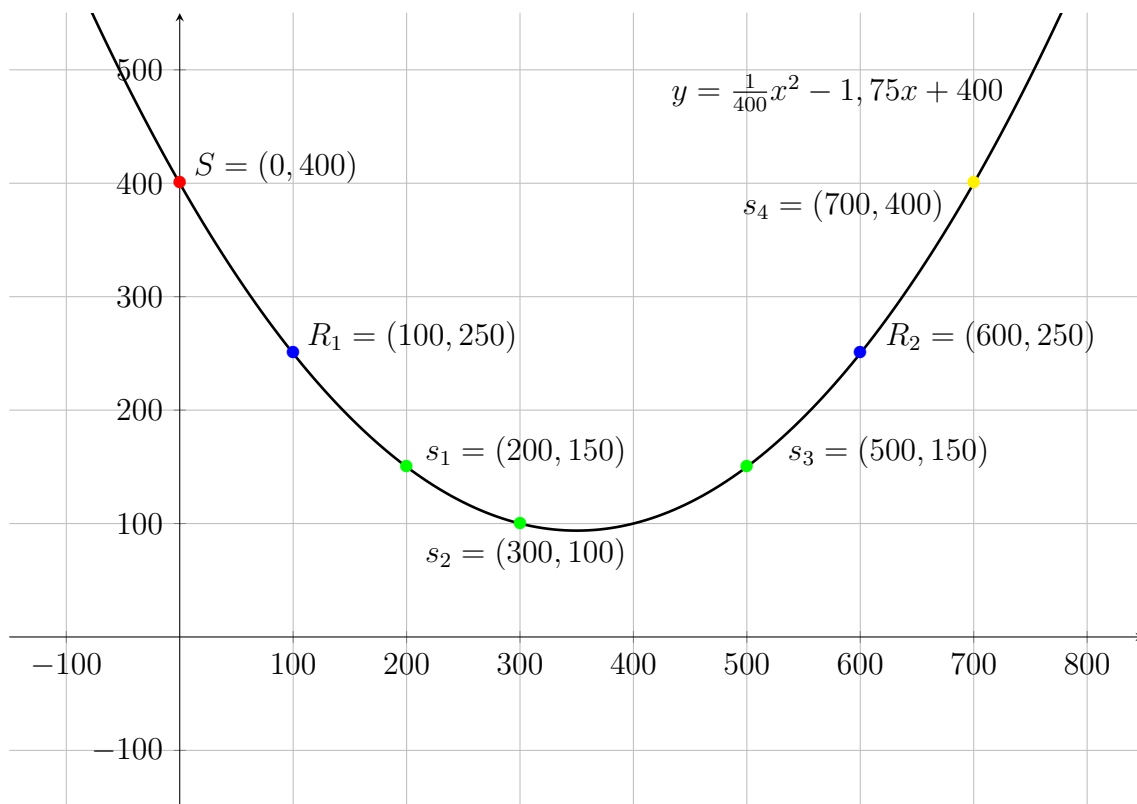


Abbildung 6: Parabel

## 4 Weitere Verfahren

Blah

### 4.1 Blakeley's

Blah

### 4.2 Chinesischer Restsatz

Blah

### 4.3 whatever...

Blah

## 5 Fazit

# Abbildungsverzeichnis

1	Eine zufällige erste Folie. Von [3]. . . . .	4
2	Berechnung der Pixel der zweiten Folie. Von [3]. . . . .	4
3	Die zweite Folie. Von [3]. . . . .	5
4	Das mittels beider Folien rekonstruierte Geheimnis. Von [3]. . . . .	5
5	Erweiterung des Geheimnisses $S$ als Gerade $f$ für zwei Shares $s_1$ und $s_2$ . . . . .	10
6	Parabel . . . . .	11

# Literaturverzeichnis

- [1] ABLEITINGER, C., AND HERRMANN, A. Lernen aus Musterlösungen zur Analysis und Linearen Algebra.
- [2] BUCHMANN, J. *Einführung in die Kryptographie*. Springer Berlin Heidelberg, 2016.
- [3] KUHLEMANN, O. Visuelle Kryptografie. <http://kryptografie.de/kryptografie/chiffre/visuelle-kryptografie.htm>.
- [4] LIU, C. L. *Introduction to Combinatorial Mathematics*. McGraw-Hill, New York, 1968.
- [5] NAOR, M., AND SHAMIR, A. Visual cryptography. *Lecture Notes in Computer Science* (1995), 1–12.
- [6] SHAMIR, A. How to share a secret. *Communications of the ACM* 22, 11 (Nov 1979), 612–613.

- [7] SHANNON, C. E. Communication Theory of Secrecy Systems. *Bell System Technical Journal* 28, 4 (1949), 656–715.