

【UER #1】猜数

【题目描述】

给定 x, y ，已知 $n = xy = ab$ 为完全平方数， $x|a, x|b$ ，求 $a + b$ 的最小值与最大值，多组询问。

$$T \leq 5, x, y \leq 10^{18}.$$

【思路】

Step #1: 不妨设 $a = xp, b = xq$ ，则 $y = xpq, a + b = x(p + q)$ 。

Step #2: 当 $p + q$ 最大时，有 $p = 1, q = \frac{y}{x}$ ，此时 $a = x, b = y$ 。

Step #3: 当 $p + q$ 最小时，有 $p = q = \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{\sqrt{xy}}{x}$ ，此时 $a = b = \sqrt{xy}$ 。

【题解】

由于 a 和 b 都是 x 的倍数，所以可以设 $a = xp, b = xq$ ，则 $y = xpq, a + b = x(p + q)$ ，所以要让 $a + b$ 最大（小）只需让 $p + q$ 最大（小）。

因为 $pq = \frac{y}{x}$ ，所以 $p + q$ 在 $p = 1, q = \frac{y}{x}$ 时取到最大值，此时 $a = x, b = y$ ；

而 $p + q$ 在 $p = q = \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{\sqrt{xy}}{x}$ 时取到最小值，此时 $a = b = \sqrt{xy}$ ，由于 xy 是完全平方数，所以此时 x, y 一定是正整数。

单组询问时间复杂度 $\mathcal{O}(1)$ 。