【AGC039D】Incenters

【题目描述】

给定 n 个位于单位圆上的点，其中第 i 个点的坐标为 $(\cos\left(\frac{2\pi T_i}{L}\right), \sin\left(\frac{2\pi T_i}{L}\right))$，从中任意选取三个的点，分别求其内心的横纵坐标的期望。

$n \le 3000$，$T_i < T_{i+1}$。

【思路】

Step #1：内心是很不好算的，但是如果你会一点平面几何的话，你应该知道，一个三角形的内心同时也为其三条角平分线交外接圆所构成的三点所构成的三角形的垂心。

Step #2：设一三角形的重心、垂心、外心分别为 G, H, O，则 $GH = 2OG$，故有 $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$，所以一个单位圆上的三角形 $\triangle ABC$ 的垂心坐标为 $(x_A + x_B + x_C, y_A + y_B + y_C)$。

Step #3：列出式子后计算即可。

【题解】

根据数学常识，一个单位圆上的三角形 $\triangle ABC$ 的垂心坐标为 $(x_A + x_B + x_C, y_A + y_B + y_C)$，而一个三角形的内心同时也为其三条角平分线交外接圆所构成的三点所构成的三角形的垂心。

由于角平分线平分所对圆弧，所以三个交点为剩余两个三角形顶点的平均数。

设选出的三个点的 T 分别为 $x, y, z(x < y < z)$，则其内心的横坐标和纵坐标分别为：

$$\cos\left(\frac{(x+y)\times\pi}{L}\right) + \cos\left(\frac{(y+z)\times\pi}{L}\right) - \cos\left(\frac{(x+z)\times\pi}{L}\right)$$

和

$$\sin\left(\frac{(x+y)\times\pi}{L}\right) + \sin\left(\frac{(y+z)\times\pi}{L}\right) - \sin\left(\frac{(x+z)\times\pi}{L}\right)$$

设 $a_i = \frac{\pi T_i}{L}$，则横纵坐标的 C_n^3 倍分别为：

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}\cos(a_i + a_j) \times \big(n - 2(j-i)\big)$$

和

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}\sin(a_i + a_j) \times \big(n - 2(j-i)\big)$$

即可 $\mathcal{O}(n^2)$ 计算。
本题还有线性做法，考虑三角和差公式，得横纵坐标的 C_n^3 倍分别为：

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}\big(\cos(a_i)\cos(a_j)-\sin(a_i)\sin(a_j)\big)\times\big(n-2(j-i)\big)\\
=&\sum_{i=1}^{n}\cos(a_i)\left((n+2i)\sum_{j=i+1}^{n}\cos(a_j)-2\sum_{j=i+1}^{n}j\cos(a_j)\right)-\\
&\quad\sin(a_i)\left((n+2i)\sum_{j=i+1}^{n}\sin(a_j)-2\sum_{j=i+1}^{n}j\sin(a_j)\right)
\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}\big(\sin(a_i)\cos(a_j)+\cos(a_i)\sin(a_j)\big)\times\big(n-2(j-i)\big)\\
=&\sum_{i=1}^{n}\sin(a_i)\left((n+2i)\sum_{j=i+1}^{n}\cos(a_j)-2\sum_{j=i+1}^{n}j\cos(a_j)\right)+\\
&\quad\cos(a_i)\left((n+2i)\sum_{j=i+1}^{n}\sin(a_j)-2\sum_{j=i+1}^{n}j\sin(a_j)\right)
\end{aligned}$$

分别维护 $\sin(a_i)$，$i\sin(a_i)$，$\cos(a_i)$，$i\cos(a_i)$ 的后缀和后即可 $\mathcal{O}(n)$ 计算。