【ARC105E】Keep Graph Disconnected

【题目描述】

给定一张 n 个点，m 条边的简单无向图，保证初始时点 1 和点 n 不连通，先后手轮流加边，在过程中要保证点 1 和点 n 不能连通且图为简单图，不能操作者负，求先后手谁有必胜策略。

【思路】

Step #1：假设最后点 1 所在的连通块大小为 x，则最后点 n 所在连通块大小为 $n-x$。

Step #2：发现此时输赢取决于 $\frac{n(n-1)}{2}-x(n-x)-m$ 的奇偶性。

Step #3：当 n 为奇数时，此时此式的奇偶性确定，所以只需考虑 n 为偶数时的情形。

Step #4：考察初始时点 1 和点 n 所在连通块的大小与答案之间的关系。

【题解】

发现最后的图一定是两个完全图拼在一起构成的，所以假设最后点 1 所在的连通块大小为 x，则输赢取决于 $\frac{n(n-1)}{2}-x(n-x)-m$ 的奇偶性。

当 n 为奇数时此式的奇偶性已经确定，考虑 n 为偶数时的情况，此时输赢取决于 x 的奇偶性。

假设初始时点 1 和点 n 所在连通块的大小的奇偶性不同，那么此时除了这两个连通块以外肯定有奇数个奇连通块，先手先将一个奇连通块分配给其中一个连通块，然后每一步都“抵消”后手的操作即可。

当初始时点 1 和点 n 所在连通块的大小的奇偶性相同时，先手或后手总是有一方可以保持当前的连通块大小的奇偶性不变，而双方肯定有一方会因此胜利，从而采取这种策略，所以**最终**点 1 所在连通块的大小的奇偶性和以**初始时**点 1 所在连通块的大小的奇偶性相同。

dfs 一遍即可，时间复杂度 $\mathcal{O}(n+m)$