【CF1479E】School Clubs

【题目描述】

有 m 个筐，初始第 i 个筐中有 a_i 个球，其中 $\sum a_i = n$，每天随机一个球 x，有 $\frac{1}{2}$ 的概率会新建一个筐并把它放进去，有 $\frac{1}{2}$ 的概率会以 $\frac{a_y}{n}$ 的概率放入第 y 个筐（**可能放回原来的筐**），求所有球都在同一个筐内的的期望次数，对 998244353 取模。

$n \le 4 \times 10^8$，$m \le 1000$。

【思路】

Step #1：考虑对于一个局面，定义一个估价函数。

Step #2：我们希望每次这个估价函数的值期望减小 1，这样算出初始局面和最终局面的期望值后相减即可。

Step #3：可以考虑寻找一个函数 $f(a_i)$，将这个这个局面的估价函数定义为 $\sum f(a_i)$。

Step #4：列出式子解出函数 f 的递推式以后，考虑如何快速计算 f。

Step #5：多项式做法和拉格朗日插值什么的太复杂了！我们直接暴力计算！

【题解】

对于这类求操作期望次数的问题，一般的思路是对于每一个局面都定义一个估价函数，使得其每次都期望减小 1，而一般都是对于每一个 a_i 寻找一个函数 $f(a_i)$ 然后将这个这个局面的估价函数定义为 $\phi = \sum f(a_i)$。

实际上，这就是鞅中的**停时定理**。

发现一共有三种操作，分别为：

- 有一个球放入了新筐中，此时 $\phi \to \phi - f(a_x) + f(a_x - 1) + f(1)$；
- 有一个球回到了原来的筐中，此时 ϕ 不变；
- 有一个球放入了另一个筐中，此时 $\phi \to \phi - f(a_x) + f(a_x - 1) - f(a_y) + f(a_y + 1)$。

综上，ϕ **期望**会变为：

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{a_i}{2n} \left(\phi - f(a_i) + f(a_i - 1) + f(1) + \frac{a_i}{n}\phi + \sum_{j \ne i} \frac{a_j}{n} \Big(\phi - f(a_i) + f(a_i - 1) - f(a_j) + f(a_j + 1) \Big) \right)$$

经过适当化简，发现其等于：

$$\phi + \frac{1}{2}f(1) - \sum_{i=1}^{n} \frac{3na_i - 2a_i^2}{2n^2} f(a_i) + \frac{2na_i - a_i^2}{2n^2} f(a_i - 1) + \frac{na_i - a_i^2}{2n^2} f(a_i + 1)$$

因为 ϕ 在此过程后期望**减小** 1，所以有：

$$f(1)+2+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{n^2}\big(-(3n-2a_i)f(a_i)+(2n-a_i)f(a_i-1)+(n-a_i)f(a_i+1)\big)=0$$

不妨设 $f(0)=0$，$f(1)=-2$，则有：

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{n^2}\big(-(3n-2a_i)f(a_i)+(2n-a_i)f(a_i-1)+(n-a_i)f(a_i+1)\big)=0$$

所以有：

$$-(3n-2a)f(a)+(2n-a)f(a-1)+(n-a)f(a+1)=0$$

$\mathcal{O}(n)$ 递推即可。

时间复杂度 $\mathcal{O}(n+m)$。

听说有 $\mathcal{O}(\sqrt{n}(m+\log^2 n))$ 的分块 FFT 高妙做法，还有 $\mathcal{O}(\sqrt{n}(m+\log n))$ 的妙妙做法，可惜我都不会！