视觉惯导SLAM

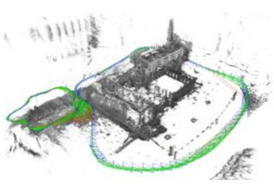
章国锋
浙江大学CAD&CG国家重点实验室

VISLAM: 视觉惯导SLAM

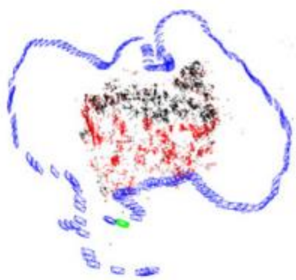
- IMU 模型
- 基于IMU预积分的状态估计
- 基于关键帧的VISLAM 常用框架

VSLAM: 视觉SLAM

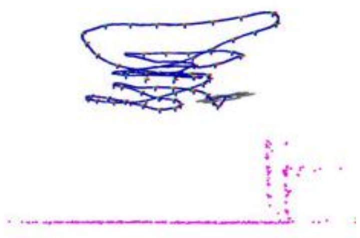
- 自从2003年以来，单目相机成为了SLAM研究的热点。
- 优点：体积小、价格廉价和不受视觉上距离范围的限制
- 最近几年已经出现了很多优秀的单目SLAM算法。



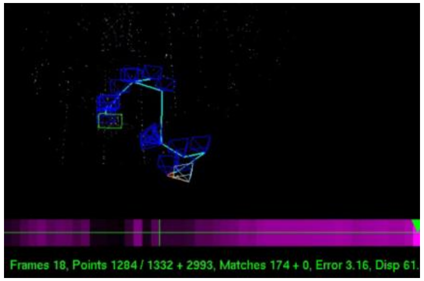
LSD-SLAM



ORB-SLAM



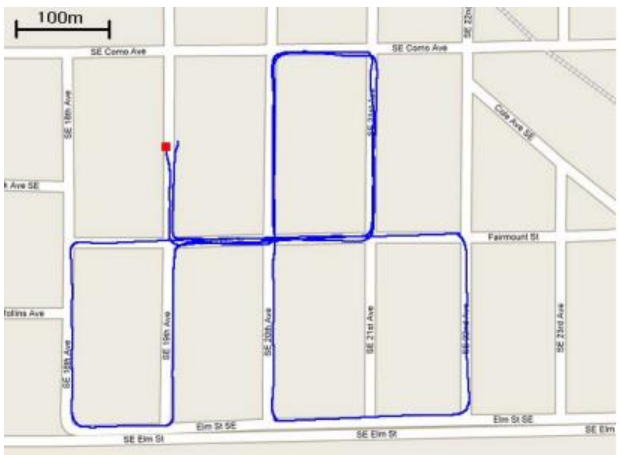
SVO



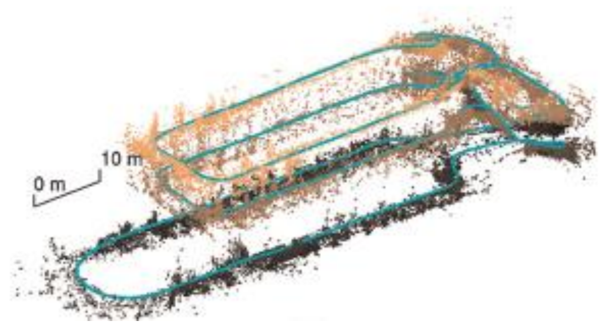
RKSLAM

VISLAM

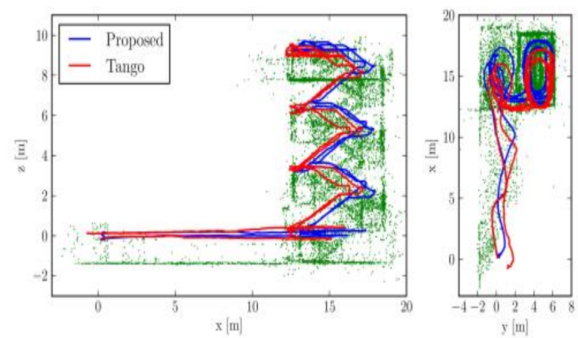
- 使用IMU融合单目相机来解决单目尺度问题



2007年明尼苏达大学MSCKF



2013年苏黎世大学OKVIS



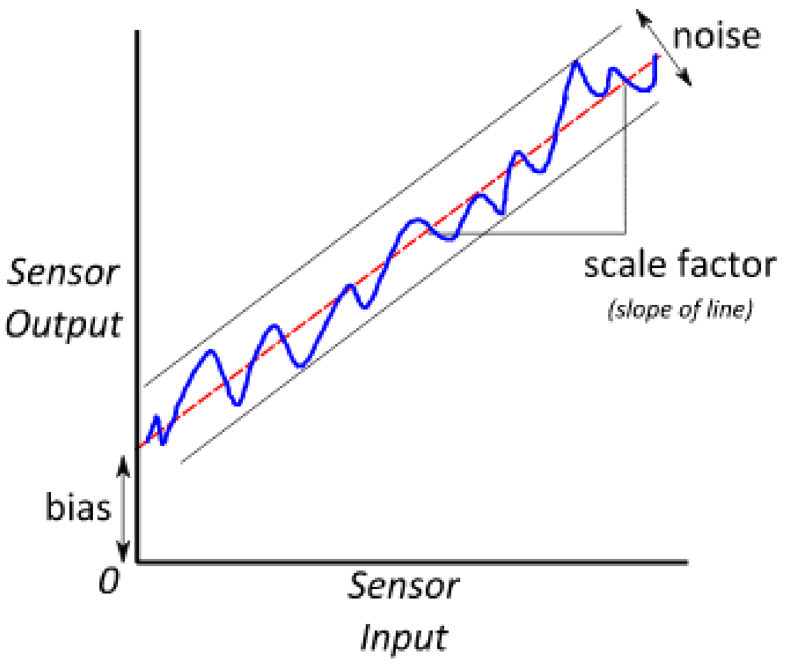
2015年苏黎世大学SVO+IMU

IMU基本模型

IMU基本模型

- IMU：惯性测量单元（Inertial Measurement Unit），是测量物体三轴角速度以及加速度的装置。可以通过对这些数据的一次和二次得到系统的旋转、速度和平移
- 优点：
  - 能以很高的频率工作
  - 工作非常稳定，几乎不会宕机
  - 可以提供尺度信息
  - 与相机互补，在视觉环境恶劣的情况下辅助跟踪
- 缺点：
  - 噪声较大，较难标定
  - 经过双重积分会有较大漂移 $\iint_{t}^{t+\Delta t} w^{a(\tau)} d\tau^2$

IMU噪声模型



- 假设加速度计和陀螺仪相互统计独立
- 各自的三轴之间都统计独立不考虑地球自转

角速度和加速度量分别为：

$$
\begin{aligned}
{}_{\mathrm{B}}\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{WB}}(t) &= {}_{\mathrm{B}}\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{WB}}(t) + \mathbf{b}^g(t) + \boldsymbol{\eta}^g(t) \\
{}_{\mathrm{B}}\tilde{\mathbf{a}}(t) &= \mathrm{R}_{\mathrm{WB}}^{\mathsf{T}}(t)\left({}_{\mathrm{W}}\mathbf{a}(t) - {}_{\mathrm{W}}\mathbf{g}\right) + \mathbf{b}^a(t) + \boldsymbol{\eta}^a(t),
\end{aligned}
$$

IMU errors and their effects. 2014.
https://www.novatel.com/assets/Documents/Bulletins/ APN064.pdf

IMU噪声模型

- 通常VISLAM中考虑两种噪声
  - 加性白噪声η，通常认为是零均值高斯分布
  - 缓慢增长的bias b, 可以用零均值高斯随机游走来建模

$$\boldsymbol{\eta}^{bg} \sim \mathcal{N}\left(\mathbf{0}, \Sigma^{bg}\right), \boldsymbol{\eta}^{ba} \sim \mathcal{N}\left(\mathbf{0}, \Sigma^{ba}\right)$$

$$\mathbf{b}^{g} \sim \mathcal{N}(0, \Sigma^{g}), \mathbf{b}^{a} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \Sigma^{a})$$

- 一般VISLAM应用中可以忽略地球自转的影响

$\boldsymbol{\eta}^{g}, \boldsymbol{\eta}^{a}, \mathbf{b}^{g}, \mathbf{b}^{a}$ 的协方差可以用Allan-Deviation方法来标定

IMU状态定义

- 相对于VSLAM的状态定义，VISLAM的状态增加了速度和bias项

$$\mathbf{x}_i \doteq [\mathbf{R}_i \quad \mathbf{p}_i \quad \mathbf{v}_i \quad \mathbf{b}_i]$$

- IMU误差状态

$$\delta\mathbf{x}_i \doteq [\delta\boldsymbol{\phi}_i \quad \delta\mathbf{p}_i \quad \delta\mathbf{v}_i \quad \delta\mathbf{b}_i]$$

基于IMU预积分的状态估计

Forster, C., Carlone, L., Dellaert, F., and Scaramuzza, D. (2017). On-manifold preintegration for real-time visual–inertial odometry. IEEE Transactions on Robotics, 33(1):1–21.

连续时间/离散时间积分

- 状态关于时间的导数：

$$\dot{\mathrm{R}}_{\mathrm{WB}} = \mathrm{R}_{\mathrm{WB}}\ {}_{\mathrm{B}}\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{WB}}^{\wedge}, \qquad {}_{\mathrm{W}}\dot{\mathbf{v}} = {}_{\mathrm{W}}\mathbf{a}, \qquad {}_{\mathrm{W}}\dot{\mathbf{p}} = {}_{\mathrm{W}}\mathbf{v},$$

- 连续时间IMU积分：

$$\mathrm{R}_{\mathrm{WB}}(t+\Delta t) = \mathrm{R}_{\mathrm{WB}}(t)\ \mathrm{Exp}\left(\int_t^{t+\Delta t} {}_{\mathrm{B}}\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{WB}}(\tau)d\tau\right)$$

$${}_{\mathrm{W}}\mathbf{v}(t+\Delta t) = {}_{\mathrm{W}}\mathbf{v}(t) + \int_t^{t+\Delta t} {}_{\mathrm{W}}\mathbf{a}(\tau)d\tau$$

$${}_{\mathrm{W}}\mathbf{p}(t+\Delta t) = {}_{\mathrm{W}}\mathbf{p}(t) + \int_t^{t+\Delta t} {}_{\mathrm{W}}\mathbf{v}(\tau)d\tau + \iint_t^{t+\Delta t} {}_{\mathrm{W}}\mathbf{a}(\tau)d\tau^2$$

- 离散时间IMU积分：

$$\mathrm{R}_{\mathrm{WB}}(t+\Delta t) = \mathrm{R}_{\mathrm{WB}}(t)\ \mathrm{Exp}\left({}_{\mathrm{B}}\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{WB}}(t)\Delta t\right)$$

$${}_{\mathrm{W}}\mathbf{v}(t+\Delta t) = {}_{\mathrm{W}}\mathbf{v}(t) + {}_{\mathrm{W}}\mathbf{a}(t)\Delta t$$

$${}_{\mathrm{W}}\mathbf{p}(t+\Delta t) = {}_{\mathrm{W}}\mathbf{p}(t) + {}_{\mathrm{W}}\mathbf{v}(t)\Delta t + \frac{1}{2}{}_{\mathrm{W}}\mathbf{a}(t)\Delta t^2$$

假设${}_{W}\mathbf{a}$和${}_{B}\boldsymbol{\omega}_{WB}$ 的值在两次读数$[t, t+\Delta t]$之间保持不变

对图像帧i和j之间的IMU进行积分

- 假设：
  - IMU时间戳与图像时间戳已经同步
  - 全局坐标系下的重力g已知
  - IMU采样时间保持不变
  - 图像帧i和j之间的的bias保持不变

$$\mathbf{b}_i^g = \mathbf{b}_{i+1}^g = \ldots = \mathbf{b}_{j-1}^g, \quad \mathbf{b}_i^a = \mathbf{b}_{i+1}^a = \ldots = \mathbf{b}_{j-1}^a$$

$$\mathrm{R}_j = \mathrm{R}_i \prod_{k=i}^{j-1} \mathrm{Exp}\left(\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_k - \mathbf{b}_k^g - \boldsymbol{\eta}_k^{gd}\right)\Delta t\right),$$

$$\mathbf{v}_j = \mathbf{v}_i + \mathbf{g}\Delta t_{ij} + \sum_{k=i}^{j-1} \mathrm{R}_k\left(\tilde{\mathbf{a}}_k - \mathbf{b}_k^a - \boldsymbol{\eta}_k^{ad}\right)\Delta t$$

$$\mathbf{p}_j = \mathbf{p}_i + \sum_{k=i}^{j-1}\left[\mathbf{v}_k\Delta t + \frac{1}{2}\mathbf{g}\Delta t^2 + \frac{1}{2}\mathrm{R}_k\left(\tilde{\mathbf{a}}_k - \mathbf{b}_k^a - \boldsymbol{\eta}_k^{ad}\right)\Delta t^2\right]$$

对图像帧i和j之间的IMU进行积分

- 定义两帧i, j之间的相对运动增量（与其t_i 时刻的状态无关）

$$\Delta \mathrm{R}_{ij} \doteq \mathrm{R}_i^{\mathsf{T}} \mathrm{R}_j = \prod_{k=i}^{j-1} \operatorname{Exp}\left(\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_k - \mathbf{b}_k^g - \boldsymbol{\eta}_k^{gd}\right) \Delta t\right)$$

$$\Delta \mathbf{v}_{ij} \doteq \mathrm{R}_i^{\mathsf{T}} \left(\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i - \mathbf{g} \Delta t_{ij}\right) = \sum_{k=i}^{j-1} \Delta \mathrm{R}_{ik} \left(\tilde{\mathbf{a}}_k - \mathbf{b}_k^a - \boldsymbol{\eta}_k^{ad}\right) \Delta t$$

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{p}_{ij} &\doteq \mathrm{R}_i^{\mathsf{T}} \left(\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i - \mathbf{v}_i \Delta t_{ij} - \tfrac{1}{2} \textstyle\sum_{k=i}^{j-1} \mathbf{g} \Delta t^2\right) \\ &= \sum_{k=i}^{j-1} \left[\Delta \mathbf{v}_{ik} \Delta t + \frac{1}{2} \Delta \mathrm{R}_{ik} \left(\tilde{\mathbf{a}}_k - \mathbf{b}_k^a - \boldsymbol{\eta}_k^{ad}\right) \Delta t^2\right] \end{aligned}$$

预积分项噪声的增长

将预积分项的误差向量记为： $\boldsymbol{\eta}_{ij}^{\Delta} \doteq [\delta\boldsymbol{\phi}_{ij}^{\mathsf{T}}, \delta\mathbf{v}_{ij}^{\mathsf{T}}, \delta\mathbf{p}_{ij}^{\mathsf{T}}]^{\mathsf{T}} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}_{9\times1}, \boldsymbol{\Sigma}_{ij})$

需要分离预积分项的误差部分，利用李代数的运算规则，将白噪声部分“移动”和“重排”到右侧，写成扰动的形式

$$\delta\boldsymbol{\phi}_{ij} \simeq \sum_{k=i}^{j-1} \Delta\tilde{\mathrm{R}}_{k+1j}^{\mathsf{T}} \, \mathrm{J}_r^k \, \boldsymbol{\eta}_k^{gd} \, \Delta t$$

$$\delta\mathbf{v}_{ij} \simeq \sum_{k=i}^{j-1} \left[-\Delta\tilde{\mathrm{R}}_{ik} \left(\tilde{\mathbf{a}}_k - \mathbf{b}_i^a\right)^{\wedge} \delta\boldsymbol{\phi}_{ik} \Delta t + \Delta\tilde{\mathrm{R}}_{ik} \boldsymbol{\eta}_k^{ad} \Delta t\right]$$

$$\delta\mathbf{p}_{ij} \simeq \sum_{k=i}^{j-1} \left[\delta\mathbf{v}_{ik}\Delta t - \frac{1}{2}\Delta\tilde{\mathrm{R}}_{ik} \left(\tilde{\mathbf{a}}_k - \mathbf{b}_i^a\right)^{\wedge} \delta\boldsymbol{\phi}_{ik} \Delta t^2 + \frac{1}{2}\Delta\tilde{\mathrm{R}}_{ik} \boldsymbol{\eta}_k^{ad} \Delta t^2\right]$$

为方便在预积分阶段进行增量计算，先写成递推公式，以*k=j-1*时刻为例

$$\begin{array}{ccccccccc}
\begin{bmatrix} \delta\phi_{ij} \\ \delta\mathbf{p}_{ij} \\ \delta\mathbf{v}_{ij} \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{j,j-1} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} \\ -\frac{1}{2}\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{i,j-1}(\tilde{\mathbf{a}}_{j-1} - \mathbf{b}_i^a)^{\wedge}\Delta t^2 & \mathbf{I}_{3\times3} & \mathbf{I}_{3\times3}\Delta t \\ -\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{i,j-1}(\tilde{\mathbf{a}}_{j-1} - \mathbf{b}_i^a)^{\wedge}\Delta t & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{I}_{3\times3} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \delta\phi_{i,j-1} \\ \delta\mathbf{p}_{i,j-1} \\ \delta\mathbf{v}_{i,j-1} \end{bmatrix} & + & \begin{bmatrix} \mathbf{J}_r^{j-1}\Delta t & \mathbf{0}_{3\times3} \\ \mathbf{0}_{3\times3} & \frac{1}{2}\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{i,j-1}\Delta t^2 \\ \mathbf{0}_{3\times3} & \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{i,j-1}\Delta t \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_{j-1}^{gd} \\ \boldsymbol{\eta}_{j-1}^{ad} \end{bmatrix} \\
\boldsymbol{\eta}_{ij}^{\Delta} & & \mathrm{A}_{j-1} & \boldsymbol{\eta}_{ij-1}^{\Delta} & & \mathrm{B}_{j-1} & \boldsymbol{\eta}_{j-1}^{d}
\end{array}$$

得到预积分项的协方差

$$\boldsymbol{\Sigma}_{ij} = \mathbf{A}_{j-1}\boldsymbol{\Sigma}_{ij-1}\mathbf{A}_{j-1}^{\mathsf{T}} + \mathbf{B}_{j-1}\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\eta}}\mathbf{B}_{j-1}^{\mathsf{T}} \qquad \boldsymbol{\Sigma}_{ii} = \mathbf{0}_{9\times9}$$

预积分的噪声：$\delta\phi_{ij}$

$$
\begin{aligned}
\Delta \mathrm{R}_{ij} &\simeq \prod_{k=i}^{j-1}\left[\operatorname{Exp}\left(\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_k - \mathbf{b}_i^g\right)\Delta t\right)\operatorname{Exp}\left(-\mathrm{J}_r^k\,\boldsymbol{\eta}_k^{gd}\,\Delta t\right)\right] \\
&= \Delta\tilde{\mathrm{R}}_{ij}\prod_{k=i}^{j-1}\operatorname{Exp}\left(-\Delta\tilde{\mathrm{R}}_{k+1j}^{\mathsf{T}}\,\mathrm{J}_r^k\,\boldsymbol{\eta}_k^{gd}\,\Delta t\right) \\
&\doteq \Delta\tilde{\mathrm{R}}_{ij}\operatorname{Exp}\left(-\delta\boldsymbol{\phi}_{ij}\right)
\end{aligned}
$$

$$\prod_{k=i}^{j-1}\operatorname{Exp}\left(\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_k - \mathbf{b}_i^g\right)\Delta t\right)$$

其中 $\mathrm{J}_r^k \doteq \mathrm{J}_r^k((\tilde{\boldsymbol{\omega}}_k - \mathbf{b}_i^g)\Delta t)$

*k*时刻*SO(3)*右扰动*Jacobian*

$\simeq$ 代表一阶近似

$$\operatorname{Exp}\left(-\delta\boldsymbol{\phi}_{ij}\right) \doteq \prod_{k=i}^{j-1}\operatorname{Exp}\left(-\Delta\tilde{\mathrm{R}}_{k+1j}^{\mathsf{T}}\mathrm{J}_r^k\,\boldsymbol{\eta}_k^{gd}\,\Delta t\right)$$

$$\downarrow$$

$$\delta\boldsymbol{\phi}_{ij} = -\operatorname{Log}\left(\prod_{k=i}^{j-1}\operatorname{Exp}\left(-\Delta\tilde{\mathrm{R}}_{k+1j}^{\mathsf{T}}\mathrm{J}_r^k\,\boldsymbol{\eta}_k^{gd}\,\Delta t\right)\right)$$

$$\downarrow$$

$$\delta\boldsymbol{\phi}_{ij} \simeq \sum_{k=i}^{j-1}\Delta\tilde{\mathrm{R}}_{k+1j}^{\mathsf{T}}\,\mathrm{J}_r^k\,\boldsymbol{\eta}_k^{gd}\,\Delta t$$

预积分的噪声：δV_{ij}

$$
\begin{aligned}
\Delta \mathbf{v}_{ij} &\simeq \sum_{k=i}^{j-1} \Delta\tilde{\mathrm{R}}_{ik}(\mathbf{I} - \delta\boldsymbol{\phi}_{ik}^{\wedge})\,(\tilde{\mathbf{a}}_k - \mathbf{b}_i^a)\,\Delta t - \Delta\tilde{\mathrm{R}}_{ik}\boldsymbol{\eta}_k^{ad}\Delta t \\
&= \Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ij} + \sum_{k=i}^{j-1} \left[\Delta\tilde{\mathrm{R}}_{ik}\,(\tilde{\mathbf{a}}_k - \mathbf{b}_i^a)^{\wedge}\,\delta\boldsymbol{\phi}_{ik}\Delta t - \Delta\tilde{\mathrm{R}}_{ik}\boldsymbol{\eta}_k^{ad}\Delta t\right] \\
&\doteq \Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ij} - \delta\mathbf{v}_{ij}
\end{aligned}
$$

$$
\Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ij} \doteq \textstyle\sum_{k=i}^{j-1} \Delta\tilde{\mathrm{R}}_{ik}(\tilde{\mathbf{a}}_k - \mathbf{b}_i^a)
$$

$$
\delta\mathbf{v}_{ij} \simeq \sum_{k=i}^{j-1} \left[-\Delta\tilde{\mathrm{R}}_{ik}\,(\tilde{\mathbf{a}}_k - \mathbf{b}_i^a)^{\wedge}\delta\boldsymbol{\phi}_{ik}\Delta t + \Delta\tilde{\mathrm{R}}_{ik}\boldsymbol{\eta}_k^{ad}\Delta t\right]
$$

预积分的噪声：δp_{ij}

$$\begin{aligned}
\Delta\mathbf{p}_{ij} \simeq & \sum_{k=i}^{j-1}\Big[(\Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ik}-\delta\mathbf{v}_{ik})\Delta t+\frac{1}{2}\Delta\tilde{\mathrm{R}}_{ik}(\mathbf{I}-\delta\boldsymbol{\phi}_{ik}^{\wedge})\,(\tilde{\mathbf{a}}_k-\mathbf{b}_i^a)\,\Delta t^2 \\
& \qquad -\frac{1}{2}\Delta\tilde{\mathrm{R}}_{ik}\boldsymbol{\eta}_k^{ad}\Delta t^2\Big] \\
= & \ \Delta\tilde{\mathbf{p}}_{ij}+\sum_{k=i}^{j-1}\Big[-\delta\mathbf{v}_{ik}\Delta t+\frac{1}{2}\Delta\tilde{\mathrm{R}}_{ik}\,(\tilde{\mathbf{a}}_k-\mathbf{b}_i^a)^{\wedge}\,\delta\boldsymbol{\phi}_{ik}\Delta t^2 \\
& \qquad -\frac{1}{2}\Delta\tilde{\mathrm{R}}_{ik}\boldsymbol{\eta}_k^{ad}\Delta t^2\Big] \\
\doteq & \ \Delta\tilde{\mathbf{p}}_{ij}-\delta\mathbf{p}_{ij},
\end{aligned}$$

$$\Delta\tilde{\mathbf{p}}_{ij} \doteq \sum_{k=i}^{j-1}\Big[\Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ik}\Delta t+\frac{1}{2}\Delta\tilde{\mathrm{R}}_{ik}(\tilde{\mathbf{a}}_k-\tilde{\mathbf{b}}_i^a)\Delta t^2\Big]$$

$$\delta\mathbf{p}_{ij} \simeq \sum_{k=i}^{j-1}\Big[\delta\mathbf{v}_{ik}\Delta t-\frac{1}{2}\Delta\tilde{\mathrm{R}}_{ik}\,(\tilde{\mathbf{a}}_k-\mathbf{b}_i^a)^{\wedge}\delta\boldsymbol{\phi}_{ik}\Delta t^2+\frac{1}{2}\Delta\tilde{\mathrm{R}}_{ik}\boldsymbol{\eta}_k^{ad}\Delta t^2\Big]$$

预积分项噪声的增长

- 递推形式的推导：

$$\begin{aligned}\delta\boldsymbol{\phi}_{ij} &\simeq \sum_{k=i}^{j-1}\Delta\tilde{\mathrm{R}}_{k+1j}^{\mathsf{T}}\mathrm{J}_r^k\boldsymbol{\eta}_k^{gd} = \sum_{k=i}^{j-2}\Delta\tilde{\mathrm{R}}_{k+1j}^{\mathsf{T}}\mathrm{J}_r^k\boldsymbol{\eta}_k^{gd}\Delta t + \overbrace{\Delta\tilde{\mathrm{R}}_{jj}^{\mathsf{T}}}^{=\mathbf{I}_{3\times3}}\mathrm{J}_r^{j-1}\boldsymbol{\eta}_{j-1}^{gd}\Delta t\\
&= \sum_{k=i}^{j-2}(\overbrace{\Delta\tilde{\mathrm{R}}_{k+1j-1}\Delta\tilde{\mathrm{R}}_{j-1j}}^{=\Delta\tilde{\mathrm{R}}_{k+1j}})^{\mathsf{T}}\mathrm{J}_r^k\boldsymbol{\eta}_k^{gd}\Delta t + \mathrm{J}_r^{j-1}\boldsymbol{\eta}_{j-1}^{gd}\Delta t \;= \Delta\tilde{\mathrm{R}}_{j-1j}^{\mathsf{T}}\sum_{k=i}^{j-2}\Delta\tilde{\mathrm{R}}_{k+1j-1}^{\mathsf{T}}\mathrm{J}_r^k\boldsymbol{\eta}_k^{gd}\Delta t + \mathrm{J}_r^{j-1}\boldsymbol{\eta}_{j-1}^{gd}\Delta t\\
&= \Delta\tilde{\mathrm{R}}_{j-1j}^{\mathsf{T}}\delta\boldsymbol{\phi}_{ij-1} + \mathrm{J}_r^{j-1}\boldsymbol{\eta}_{j-1}^{gd}\Delta t.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta\mathbf{v}_{ij} &= \sum_{k=i}^{j-1}\left[-\Delta\tilde{\mathrm{R}}_{ik}\left(\tilde{\mathbf{a}}_k-\mathbf{b}_i^a\right)^{\wedge}\delta\boldsymbol{\phi}_{ik}\Delta t + \Delta\tilde{\mathrm{R}}_{ik}\boldsymbol{\eta}_k^{ad}\Delta t\right]\\
&= \delta\mathbf{v}_{ij-1} - \Delta\tilde{\mathrm{R}}_{ij-1}\left(\tilde{\mathbf{a}}_{j-1}-\mathbf{b}_i^a\right)^{\wedge}\delta\boldsymbol{\phi}_{ij-1}\Delta t + \Delta\tilde{\mathrm{R}}_{ij-1}\boldsymbol{\eta}_{j-1}^{ad}\Delta t - \Delta\tilde{\mathrm{R}}_{ij-1}\left(\tilde{\mathbf{a}}_{j-1}-\mathbf{b}_i^a\right)^{\wedge}\delta\boldsymbol{\phi}_{ij-1}\Delta t + \Delta\tilde{\mathrm{R}}_{ij-1}\boldsymbol{\eta}_{j-1}^{ad}\Delta t\\
&= \sum_{k=i}^{j-2}\left[-\Delta\tilde{\mathrm{R}}_{ik}\left(\tilde{\mathbf{a}}_k-\mathbf{b}_i^a\right)^{\wedge}\delta\boldsymbol{\phi}_{ik}\Delta t + \Delta\tilde{\mathrm{R}}_{ik}\boldsymbol{\eta}_k^{ad}\Delta t\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta\mathbf{p}_{ij} &= \sum_{k=i}^{j-1}\left[\delta\mathbf{v}_{ik}\Delta t - \frac{1}{2}\Delta\tilde{\mathrm{R}}_{ik}\left(\tilde{\mathbf{a}}_k-\mathbf{b}_i^a\right)^{\wedge}\delta\boldsymbol{\phi}_{ik}\Delta t^2 + \frac{1}{2}\Delta\tilde{\mathrm{R}}_{ik}\boldsymbol{\eta}_k^{ad}\Delta t^2\right]\\
&= \sum_{k=i}^{j-2}\left[\delta\mathbf{v}_{ik}\Delta t - \frac{1}{2}\Delta\tilde{\mathrm{R}}_{ik}\left(\tilde{\mathbf{a}}_k-\mathbf{b}_i^a\right)^{\wedge}\delta\boldsymbol{\phi}_{ik}\Delta t^2 + \frac{1}{2}\Delta\tilde{\mathrm{R}}_{ik}\boldsymbol{\eta}_k^{ad}\Delta t^2\right] + \delta\mathbf{v}_{ij-1}\Delta t - \frac{1}{2}\Delta\tilde{\mathrm{R}}_{ij-1}(\tilde{\mathbf{a}}_{j-1}-\mathbf{b}_i^a)^{\wedge}\delta\boldsymbol{\phi}_{ij-1}\Delta t^2 + \frac{1}{2}\Delta\tilde{\mathrm{R}}_{ij-1}\boldsymbol{\eta}_{j-1}^{ad}\Delta t^2\\
&= \delta\mathbf{p}_{ij-1} + \delta\mathbf{v}_{ij-1}\Delta t - \frac{1}{2}\Delta\tilde{\mathrm{R}}_{ij-1}\left(\tilde{\mathbf{a}}_{j-1}-\mathbf{b}_i^a\right)^{\wedge}\delta\boldsymbol{\phi}_{ij-1}\Delta t^2 + \frac{1}{2}\Delta\tilde{\mathrm{R}}_{ij-1}\boldsymbol{\eta}_{j-1}^{ad}\Delta t^2\end{aligned}$$

Bias更新

- 预积分项仍然是关于i时刻bias的函数

$$\Delta\tilde{\mathrm{R}}_{ij} \doteq \Delta\tilde{\mathrm{R}}_{ij}\left(\mathbf{b}_i^g\right)$$
$$\Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ij} \doteq \Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ij}\left(\mathbf{b}_i^g, \mathbf{b}_i^a\right)$$
$$\Delta\tilde{\mathbf{p}}_{ij} \doteq \Delta\tilde{\mathbf{p}}_{ij}\left(\mathbf{b}_i^g, \mathbf{b}_i^a\right)$$

- 每轮优化bias更新后，需要更新预积分项

1. 每次重新积分运算量太大
2. 利用一阶近似展开来线性更新

- 假设每次bias更新：$\mathbf{b} \leftarrow \bar{\mathbf{b}} + \delta\mathbf{b}$

$$\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ij}(\mathbf{b}_i^g) \simeq \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ij}(\bar{\mathbf{b}}_i^g)\mathrm{Exp}\left(\frac{\partial\Delta\bar{\mathbf{R}}_{ij}}{\partial\mathbf{b}^g}\delta\mathbf{b}^g\right)$$

$$\Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ij}(\mathbf{b}_i^g, \mathbf{b}_i^a) \simeq \Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ij}(\bar{\mathbf{b}}_i^g, \bar{\mathbf{b}}_i^a) + \frac{\partial\Delta\bar{\mathbf{v}}_{ij}}{\partial\mathbf{b}^g}\delta\mathbf{b}_i^g + \frac{\partial\Delta\bar{\mathbf{v}}_{ij}}{\partial\mathbf{b}^a}\delta\mathbf{b}_i^a$$

$$\Delta\tilde{\mathbf{p}}_{ij}(\mathbf{b}_i^g, \mathbf{b}_i^a) \simeq \Delta\tilde{\mathbf{p}}_{ij}(\bar{\mathbf{b}}_i^g, \bar{\mathbf{b}}_i^a) + \frac{\partial\Delta\bar{\mathbf{p}}_{ij}}{\partial\mathbf{b}^g}\delta b_i^g + \frac{\partial\Delta\bar{\mathbf{p}}_{ij}}{\partial\mathbf{b}^a}\delta\mathbf{b}_i^a$$

$\frac{\partial \Delta \bar{\mathbf{R}}_{ij}}{\partial \mathbf{b}^g}$

$$\begin{aligned}
\Delta\tilde{\mathrm{R}}_{ij}(\hat{\mathbf{b}}_i) &= \prod_{k=i}^{j-1} \mathrm{Exp}\left(\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_k - (\bar{\mathbf{b}}_i^g + \delta\mathbf{b}_i^g)\right)\Delta t\right) \\
&\simeq \prod_{k=i}^{j-1} \mathrm{Exp}\left((\tilde{\boldsymbol{\omega}}_k - \bar{\mathbf{b}}_i^g)\,\Delta t\right) \mathrm{Exp}\left(-\mathrm{J}_r^k\; \delta\mathbf{b}_i^g\; \Delta t\right) \\
&= \Delta\bar{\mathrm{R}}_{ij} \prod_{k=i}^{j-1} \mathrm{Exp}\left(\; -\Delta\tilde{\mathrm{R}}_{k+1j}(\bar{\mathbf{b}}_i)^{\mathsf{T}} \mathrm{J}_r^k\; \delta\mathbf{b}_i^g\; \Delta t\right), \\
&\simeq \Delta\bar{\mathrm{R}}_{ij}\mathrm{Exp}\boxed{\left(\sum_{k=i}^{j-1} -\Delta\tilde{\mathrm{R}}_{k+1j}(\bar{\mathbf{b}}_i)^{\mathsf{T}} \mathrm{J}_r^k \delta\mathbf{b}_i^g \Delta t\right)} \\
&= \Delta\bar{\mathrm{R}}_{ij}\mathrm{Exp}\left(\frac{\partial \Delta\bar{\mathrm{R}}_{ij}}{\partial \mathbf{b}^g}\delta\mathbf{b}_i^g\right)
\end{aligned}$$

$$\hat{\mathbf{b}}_i^g \leftarrow \bar{\mathbf{b}}_i^g + \delta\mathbf{b}_i^g$$

$$\frac{\partial \Delta\bar{\mathrm{R}}_{ij}}{\partial \mathbf{b}^g} = -\sum_{k=i}^{j-1}\left[\Delta\tilde{\mathrm{R}}_{k+1j}(\bar{\mathbf{b}}_i)^{\mathsf{T}}\; \mathrm{J}_r^k\; \Delta t\right]$$

$\dfrac{\partial \Delta \bar{\mathbf{v}}_{ij}}{\partial \mathbf{b}^g}, \dfrac{\partial \Delta \bar{\mathbf{v}}_{ij}}{\partial \mathbf{b}^a}$

$$\Delta \tilde{\mathbf{v}}_{ij}(\hat{\mathbf{b}}_i) = \sum_{k=i}^{j-1} \Delta \tilde{\mathrm{R}}_{ik}(\hat{\mathbf{b}}_i) \left(\tilde{\mathbf{a}}_k - \bar{\mathbf{b}}_i^a - \delta \mathbf{b}_i^a\right) \Delta t$$

$$\simeq \sum_{k=i}^{j-1} \Delta \bar{\mathrm{R}}_{ik} \mathrm{Exp}\left(\frac{\partial \Delta \bar{\mathrm{R}}_{ik}}{\partial \mathbf{b}^g} \delta \mathbf{b}_i^g\right) \left(\tilde{\mathbf{a}}_k - \bar{\mathbf{b}}_i^a - \delta \mathbf{b}_i^a\right) \Delta t$$

$$\simeq \sum_{k=i}^{j-1} \Delta \bar{\mathrm{R}}_{ik} \left(\mathbf{I} + \left(\frac{\partial \Delta \bar{\mathrm{R}}_{ik}}{\partial \mathbf{b}^g} \delta \mathbf{b}_i^g\right)^\wedge\right) \left(\tilde{\mathbf{a}}_k - \bar{\mathbf{b}}_i^a - \delta \mathbf{b}_i^a\right) \Delta t$$

$$\simeq \Delta \bar{\mathbf{v}}_{ij} - \sum_{k=i}^{j-1} \Delta \bar{\mathrm{R}}_{ik} \Delta t \delta \mathbf{b}_i^a + \sum_{k=i}^{j-1} \Delta \bar{\mathrm{R}}_{ik} \left(\frac{\partial \Delta \bar{\mathrm{R}}_{ik}}{\partial \mathbf{b}^g} \delta \mathbf{b}_i^g\right)^\wedge \left(\tilde{\mathbf{a}}_k - \bar{\mathbf{b}}_i^a\right) \Delta t$$

$$= \Delta \bar{\mathbf{v}}_{ij} \boxed{- \sum_{k=i}^{j-1} \Delta \bar{\mathrm{R}}_{ik} \Delta t \delta \mathbf{b}_i^a} \boxed{- \sum_{k=i}^{j-1} \Delta \bar{\mathrm{R}}_{ik} \left(\tilde{\mathbf{a}}_k - \bar{\mathbf{b}}_i^a\right)^\wedge \frac{\partial \Delta \bar{\mathrm{R}}_{ik}}{\partial \mathbf{b}^g} \Delta t \, \delta \mathbf{b}_i^g}$$

$$= \Delta \bar{\mathbf{v}}_{ij} + \frac{\partial \Delta \bar{\mathbf{v}}_{ij}}{\partial \mathbf{b}^a} \delta \mathbf{b}_i^a + \frac{\partial \Delta \bar{\mathbf{v}}_{ij}}{\partial \mathbf{b}^g} \delta \mathbf{b}_i^g$$

$$\hat{\mathbf{b}}_i^g \leftarrow \bar{\mathbf{b}}_i^g + \delta \mathbf{b}_i^g$$
$$\hat{\mathbf{b}}_i^a \leftarrow \bar{\mathbf{b}}_i^a + \delta \mathbf{b}_i^a$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta \bar{\mathbf{v}}_{ij}}{\partial \mathbf{b}^a} &= -\textstyle\sum_{k=i}^{j-1} \Delta \bar{\mathrm{R}}_{ik} \Delta t \\ \frac{\partial \Delta \bar{\mathbf{v}}_{ij}}{\partial \mathbf{b}^g} &= -\textstyle\sum_{k=i}^{j-1} \Delta \bar{\mathrm{R}}_{ik} \left(\tilde{\mathbf{a}}_k - \bar{\mathbf{b}}_i^a\right)^\wedge \frac{\partial \Delta \bar{\mathrm{R}}_{ik}}{\partial \mathbf{b}^g} \Delta t \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \Delta \bar{\mathbf{p}}_{ij}}{\partial \mathbf{b}^g}, \frac{\partial \Delta \bar{\mathbf{p}}_{ij}}{\partial \mathbf{b}^a}$$

几乎与$\frac{\partial \Delta \bar{\mathbf{v}}_{ij}}{\partial \mathbf{b}^g}, \frac{\partial \Delta \bar{\mathbf{v}}_{ij}}{\partial \mathbf{b}^a}$一致

$$\hat{\mathbf{b}}_i^g \leftarrow \bar{\mathbf{b}}_i^g + \delta \mathbf{b}_i^g$$
$$\hat{\mathbf{b}}_i^a \leftarrow \bar{\mathbf{b}}_i^a + \delta \mathbf{b}_i^a$$

$$\begin{aligned}
\Delta \tilde{\mathbf{p}}_{ij}(\hat{\mathbf{b}}_i) &= \sum_{k=i}^{j-1} \left[\Delta \tilde{\mathbf{v}}_{ik}(\hat{\mathbf{b}}_i) \Delta t + \boxed{\frac{1}{2} \Delta \tilde{\mathrm{R}}_{ik}(\hat{\mathbf{b}}_i)(\tilde{\mathbf{a}}_k - \bar{\mathbf{b}}_i^a - \delta \mathbf{b}_i^a)} \right] \\
&\simeq \sum_{k=i}^{j-1} \left[\Delta \bar{\mathbf{v}}_{ik} \Delta t + \frac{\partial \Delta \bar{\mathbf{v}}_{ik}}{\partial \mathbf{b}^a} \delta \mathbf{b}_i^a \Delta t + \frac{\partial \Delta \bar{\mathbf{v}}_{ik}}{\partial \mathbf{b}^g} \delta \mathbf{b}_i^g \Delta t \right] \\
&\quad \boxed{- \frac{1}{2} \sum_{k=i}^{j-1} \Delta \bar{\mathrm{R}}_{ik} \Delta t^2} \delta \mathbf{b}_i^a \boxed{- \frac{1}{2} \sum_{k=i}^{j-1} \Delta \bar{\mathrm{R}}_{ik} (\tilde{\mathbf{a}}_k - \bar{\mathbf{b}}_i^a)^\wedge \frac{\partial \Delta \bar{\mathrm{R}}_{ik}}{\partial \mathbf{b}^g} \Delta t^2} \delta \mathbf{b}_i^g
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Delta \bar{\mathbf{p}}_{ij}}{\partial \mathbf{b}^a} &= \sum_{k=i}^{j-1} \frac{\partial \Delta \bar{\mathbf{v}}_{ik}}{\partial \mathbf{b}^a} \Delta t - \frac{1}{2} \Delta \bar{\mathrm{R}}_{ik} \Delta t^2 \\
\frac{\partial \Delta \bar{\mathbf{p}}_{ij}}{\partial \mathbf{b}^g} &= \sum_{k=i}^{j-1} \frac{\partial \Delta \bar{\mathbf{v}}_{ik}}{\partial \mathbf{b}^g} \Delta t - \frac{1}{2} \Delta \bar{\mathrm{R}}_{ik} \left(\tilde{\mathbf{a}}_k - \bar{\mathbf{b}}_i^a \right)^\wedge \frac{\partial \Delta \bar{\mathrm{R}}_{ik}}{\partial \mathbf{b}^g} \Delta t^2
\end{aligned}$$

预积分项关于bias的Jacobians

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \Delta \bar{\mathrm{R}}_{ij}}{\partial \mathbf{b}^g} &= -\sum_{k=i}^{j-1} \left[\Delta \tilde{\mathrm{R}}_{k+1j}(\bar{\mathbf{b}}_i)^{\mathsf{T}}\ \mathrm{J}_r^k\ \Delta t\right] \\
\frac{\partial \Delta \bar{\mathbf{v}}_{ij}}{\partial \mathbf{b}^a} &= -\sum_{k=i}^{j-1} \Delta \bar{\mathrm{R}}_{ik} \Delta t \\
\frac{\partial \Delta \bar{\mathbf{v}}_{ij}}{\partial \mathbf{b}^g} &= -\sum_{k=i}^{j-1} \Delta \bar{\mathrm{R}}_{ik} \left(\tilde{\mathbf{a}}_k - \bar{\mathbf{b}}_i^a\right)^\wedge \frac{\partial \Delta \bar{\mathrm{R}}_{ik}}{\partial \mathbf{b}^g} \Delta t \\
\frac{\partial \Delta \bar{\mathbf{p}}_{ij}}{\partial \mathbf{b}^a} &= \sum_{k=i}^{j-1} \frac{\partial \Delta \bar{\mathbf{v}}_{ik}}{\partial \mathbf{b}^a} \Delta t - \frac{1}{2} \Delta \bar{\mathrm{R}}_{ik} \Delta t^2 \\
\frac{\partial \Delta \bar{\mathbf{p}}_{ij}}{\partial \mathbf{b}^g} &= \sum_{k=i}^{j-1} \frac{\partial \Delta \bar{\mathbf{v}}_{ik}}{\partial \mathbf{b}^g} \Delta t - \frac{1}{2} \Delta \bar{\mathrm{R}}_{ik} \left(\tilde{\mathbf{a}}_k - \bar{\mathbf{b}}_i^a\right)^\wedge \frac{\partial \Delta \bar{\mathrm{R}}_{ik}}{\partial \mathbf{b}^g} \Delta t^2
\end{aligned}
$$

- 与分离预积分项误差的形式非常相似

$$
\delta \boldsymbol{\phi}_{ij} \simeq \sum_{k=i}^{j-1} \Delta \tilde{\mathrm{R}}_{k+1j}^{\mathsf{T}}\ \mathrm{J}_r^k\ \boldsymbol{\eta}_k^{gd}\ \Delta t
$$

$$
\delta \mathbf{v}_{ij} \simeq \sum_{k=i}^{j-1} \left[-\Delta \tilde{\mathrm{R}}_{ik} \left(\tilde{\mathbf{a}}_k - \mathbf{b}_i^a\right)^\wedge \delta \boldsymbol{\phi}_{ik} \Delta t + \Delta \tilde{\mathrm{R}}_{ik} \boldsymbol{\eta}_k^{ad} \Delta t\right]
$$

$$
\delta \mathbf{p}_{ij} \simeq \sum_{k=i}^{j-1} \left[\delta \mathbf{v}_{ik} \Delta t - \frac{1}{2} \Delta \tilde{\mathrm{R}}_{ik} \left(\tilde{\mathbf{a}}_k - \mathbf{b}_i^a\right)^\wedge \delta \boldsymbol{\phi}_{ik} \Delta t^2 + \frac{1}{2} \Delta \tilde{\mathrm{R}}_{ik} \boldsymbol{\eta}_k^{ad} \Delta t^2\right]
$$

基于预积分的相对运动约束

- Retractions

$$
\begin{aligned}
\mathrm{R}_i &\leftarrow \mathrm{R}_i \operatorname{Exp}(\delta\boldsymbol{\phi}_i), & \mathrm{R}_j &\leftarrow \mathrm{R}_j \operatorname{Exp}(\delta\boldsymbol{\phi}_j),\\
\mathbf{p}_i &\leftarrow \mathbf{p}_i + \mathrm{R}_i\delta\mathbf{p}_i, & \mathbf{p}_j &\leftarrow \mathbf{p}_j + \mathrm{R}_j\delta\mathbf{p}_j,\\
\mathbf{v}_i &\leftarrow \mathbf{v}_i + \delta\mathbf{v}_i, & \mathbf{v}_j &\leftarrow \mathbf{v}_j + \delta\mathbf{v}_i,\\
\delta\mathbf{b}_i^g &\leftarrow \delta\mathbf{b}_i^g + \tilde{\delta}\mathbf{b}_i^g, & \delta\mathbf{b}_i^a &\leftarrow \delta\mathbf{b}_i^a + \tilde{\delta}\mathbf{b}_i^a,
\end{aligned}
$$

- Lifting

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r}_{\Delta\mathrm{R}_{ij}} &\doteq \operatorname{Log}\left(\left(\Delta\tilde{\mathrm{R}}_{ij}(\bar{\mathbf{b}}_i^g)\operatorname{Exp}\left(\frac{\partial\Delta\bar{\mathrm{R}}_{ij}}{\partial\mathbf{b}^g}\delta\mathbf{b}^g\right)\right)^{\mathsf{T}}\mathrm{R}_i^{\mathsf{T}}\mathrm{R}_j\right)\\
\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{v}_{ij}} &\doteq \mathrm{R}_i^{\mathsf{T}}\left(\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i - \mathbf{g}\Delta t_{ij}\right)\\
&\quad - \left[\Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ij}(\bar{\mathbf{b}}_i^g, \bar{\mathbf{b}}_i^a) + \frac{\partial\Delta\bar{\mathbf{v}}_{ij}}{\partial\mathbf{b}^g}\delta\mathbf{b}^g + \frac{\partial\Delta\bar{\mathbf{v}}_{ij}}{\partial\mathbf{b}^a}\delta\mathbf{b}^a\right]\\
\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{p}_{ij}} &\doteq \mathrm{R}_i^{\mathsf{T}}\left(\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i - \mathbf{v}_i\Delta t_{ij} - \frac{1}{2}\mathbf{g}\Delta t_{ij}^2\right)\\
&\quad - \left[\Delta\tilde{\mathbf{p}}_{ij}(\bar{\mathbf{b}}_i^g, \bar{\mathbf{b}}_i^a) + \frac{\partial\Delta\bar{\mathbf{p}}_{ij}}{\partial\mathbf{b}^g}\delta\mathbf{b}^g + \frac{\partial\Delta\bar{\mathbf{p}}_{ij}}{\partial\mathbf{b}_a}\delta\mathbf{b}^a\right],
\end{aligned}
$$

关于状态的Jacobian$\Delta\tilde{\mathrm{R}}_{ij}$

$$\frac{\partial \mathbf{r}_{\Delta \mathrm{R}_{ij}}}{\partial \delta \boldsymbol{\phi}_i} = -\mathrm{J}_r^{-1}(\mathbf{r}_{\Delta\mathrm{R}}(\mathrm{R}_i))\mathrm{R}_j^{\mathsf{T}}\mathrm{R}_i \qquad \frac{\partial \mathbf{r}_{\Delta \mathrm{R}_{ij}}}{\partial \delta \mathbf{p}_i} = \mathbf{0}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}_{\Delta \mathrm{R}_{ij}}}{\partial \delta \mathbf{v}_i} = \mathbf{0} \qquad \frac{\partial \mathbf{r}_{\Delta \mathrm{R}_{ij}}}{\partial \delta \boldsymbol{\phi}_j} = \mathrm{J}_r^{-1}(\mathbf{r}_{\Delta\mathrm{R}}(\mathrm{R}_j))$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}_{\Delta \mathrm{R}_{ij}}}{\partial \delta \mathbf{p}_j} = \mathbf{0} \qquad \frac{\partial \mathbf{r}_{\Delta \mathrm{R}_{ij}}}{\partial \delta \mathbf{v}_j} = \mathbf{0}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}_{\Delta \mathrm{R}_{ij}}}{\partial \delta \bar{\mathbf{b}}_i^a} = \mathbf{0} \qquad \frac{\partial \mathbf{r}_{\Delta \mathrm{R}_{ij}}}{\partial \delta \bar{\mathbf{b}}_i^g} = \boxed{\alpha}$$

$$-\mathrm{J}_r^{-1}\left(\mathbf{r}_{\Delta\mathrm{R}_{ij}}(\delta\mathbf{b}_i^g)\right)\mathrm{Exp}\left(\mathbf{r}_{\Delta\mathrm{R}_{ij}}(\delta\mathbf{b}_i^g)\right)^{\mathsf{T}}\boxed{\mathrm{J}_r^b}\frac{\partial \Delta\bar{\mathrm{R}}_{ij}}{\partial \mathbf{b}^g}$$

$$\mathrm{J}_r\left(\frac{\partial \Delta\bar{\mathrm{R}}_{ij}}{\partial \mathbf{b}^g}\delta\mathbf{b}_i^g\right)$$

关于状态的Jacobian$\Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ij}$

$$\frac{\partial \mathbf{r}_{\Delta \mathbf{v}_{ij}}}{\partial \delta \boldsymbol{\phi}_i} = \left(\mathbf{R}_i^{\mathrm{T}}(\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i - \mathbf{g}\Delta t_{ij})\right)^{\wedge}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}_{\Delta \mathbf{v}_{ij}}}{\partial \delta \boldsymbol{\phi}_j} = \mathbf{0}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}_{\Delta \mathbf{v}_{ij}}}{\partial \delta \mathbf{p}_i} = \mathbf{0}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}_{\Delta \mathbf{v}_{ij}}}{\partial \delta \mathbf{p}_j} = \mathbf{0}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}_{\Delta \mathbf{v}_{ij}}}{\partial \delta \mathbf{v}_i} = -\mathbf{R}_i^{\mathrm{T}}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}_{\Delta \mathbf{p}_{ij}}}{\partial \delta \mathbf{v}_j} = \mathbf{R}_i^{\mathrm{T}}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}_{\Delta \mathbf{v}_{ij}}}{\partial \tilde{\delta} \mathbf{b}_i^a} = -\frac{\partial \Delta \bar{\mathbf{v}}_{ij}}{\partial \mathbf{b}_i^a}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}_{\Delta \mathbf{p}_{ij}}}{\partial \tilde{\delta} \mathbf{b}_i^g} = -\frac{\partial \Delta \bar{\mathbf{v}}_{ij}}{\partial \mathbf{b}_i^g}$$

关于状态的Jacobian$\Delta\widetilde{\mathbf{p}}_{ij}$

$$\frac{\partial \mathbf{r}_{\Delta \mathbf{p}_{ij}}}{\partial \delta \boldsymbol{\phi}_i} = (\mathbf{R}_i^{\mathrm{T}}(\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i - \mathbf{v}_i \Delta \mathrm{t}_{ij} - \frac{1}{2}\mathbf{g}\Delta t_{ij}^2))^\wedge \qquad \frac{\partial \mathbf{r}_{\Delta \mathbf{p}_{ij}}}{\partial \delta \boldsymbol{\phi}_j} = \mathbf{0}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}_{\Delta \mathbf{p}_{ij}}}{\partial \delta \mathbf{p}_i} = -\mathbf{I}_{3\times 1} \qquad \frac{\partial \mathbf{r}_{\Delta \mathbf{p}_{ij}}}{\partial \delta \mathbf{p}_j} = \mathbf{R}_i^{\mathbf{T}}\mathbf{R}_j$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}_{\Delta \mathbf{p}_{ij}}}{\partial \delta \mathbf{v}_i} = -\mathbf{R}_i^{\mathrm{T}}\Delta t_{ij} \qquad \frac{\partial \mathbf{r}_{\Delta \mathbf{p}_{ij}}}{\partial \delta \mathbf{v}_j} = \mathbf{0}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}_{\Delta \mathbf{p}_{ij}}}{\partial \widetilde{\delta \mathbf{b}}_i^a} = -\frac{\partial \Delta \overline{\mathbf{p}}_{ij}}{\partial \mathbf{b}_i^a} \qquad \frac{\partial \mathbf{r}_{\Delta \mathbf{p}_{ij}}}{\partial \widetilde{\delta \mathbf{b}}_i^g} = -\frac{\partial \Delta \overline{\mathbf{p}}_{ij}}{\partial \mathbf{b}_i^g}$$

Bias约束

$\boldsymbol{\eta}^{bg}, \boldsymbol{\eta}^{ba}$是连续时间的零均值高斯随机游走噪声

$$\boldsymbol{\eta}^{bg} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \Sigma^{bg}), \boldsymbol{\eta}^{ba} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \Sigma^{ba}),$$

- bias关于时间的导数 $\dot{\mathbf{b}}^{g}(t) = \boldsymbol{\eta}^{bg}, \quad \dot{\mathbf{b}}^{a}(t) = \boldsymbol{\eta}^{ba}.$

- 连续时间积分形式 $\mathbf{b}_j^{g} = \mathbf{b}_i^{g} + \boldsymbol{\eta}^{bgd}, \quad \mathbf{b}_j^{g} = \mathbf{b}_i^{g} + \boldsymbol{\eta}^{bad}.$

- 随机游走约束 $\| \mathbf{r}_{\mathbf{b}_{ij}} \|^2 \doteq \| \mathbf{b}_j^{g} - \mathbf{b}_i^{g} \|^2_{\boxed{\Sigma^{bgd}}} + \| \mathbf{b}_j^{a} - \mathbf{b}_i^{a} \|^2_{\boxed{\Sigma^{bad}}}$

离散时间随机游走噪声协方差

$$\Sigma^{bgd} \doteq \Delta t_{ij} \Sigma^{bg}, \Sigma^{bad} \doteq \Delta t_{ij} \Sigma^{ba}$$

an alternative in OKVIS is $\dot{\mathbf{b}}^{a}(t) = -\frac{1}{\tau}\mathbf{b}^{a}(t) + \boldsymbol{\eta}^{ba}$ with the accelerometer bias modeled as a bounded random walk with time constant $\tau > 0$

优化目标函数

$$\mathcal{X}^\star = \arg\min_{\mathcal{X}} \sum_{i,j} \|\mathbf{r}_{\mathcal{I}_{ij}}\|^2_{\Sigma_{ij}} + \sum_{i} \sum_{l} \|\mathbf{r}_{\mathcal{C}_{il}}\|^2_{\Sigma_C}$$

其中前面一项$\mathbf{r}_{\mathcal{I}_{ij}}$就是相对运动约束与IMU约束之和

$$\mathbf{r}_{\Delta \mathrm{R}_{ij}} \doteq \mathrm{Log}\left(\left(\Delta\tilde{\mathrm{R}}_{ij}(\bar{\mathbf{b}}_i^g)\mathrm{Exp}\left(\frac{\partial \Delta\bar{\mathrm{R}}_{ij}}{\partial \mathbf{b}^g}\delta\mathbf{b}^g\right)\right)^\mathsf{T} \mathrm{R}_i^\mathsf{T}\mathrm{R}_j\right)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_{\Delta \mathbf{v}_{ij}} &\doteq \mathrm{R}_i^\mathsf{T}\left(\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i - \mathbf{g}\Delta t_{ij}\right) \\
&\quad - \left[\Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ij}(\bar{\mathbf{b}}_i^g, \bar{\mathbf{b}}_i^a) + \frac{\partial \Delta\bar{\mathbf{v}}_{ij}}{\partial \mathbf{b}^g}\delta\mathbf{b}^g + \frac{\partial \Delta\bar{\mathbf{v}}_{ij}}{\partial \mathbf{b}^a}\delta\mathbf{b}^a\right] \\
\mathbf{r}_{\Delta \mathbf{p}_{ij}} &\doteq \mathrm{R}_i^\mathsf{T}\left(\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i - \mathbf{v}_i\Delta t_{ij} - \frac{1}{2}\mathbf{g}\Delta t_{ij}^2\right) \\
&\quad - \left[\Delta\tilde{\mathbf{p}}_{ij}(\bar{\mathbf{b}}_i^g, \bar{\mathbf{b}}_i^a) + \frac{\partial \Delta\bar{\mathbf{p}}_{ij}}{\partial \mathbf{b}^g}\delta\mathbf{b}^g + \frac{\partial \Delta\bar{\mathbf{p}}_{ij}}{\partial \mathbf{b}_a}\delta\mathbf{b}^a\right],
\end{aligned}$$

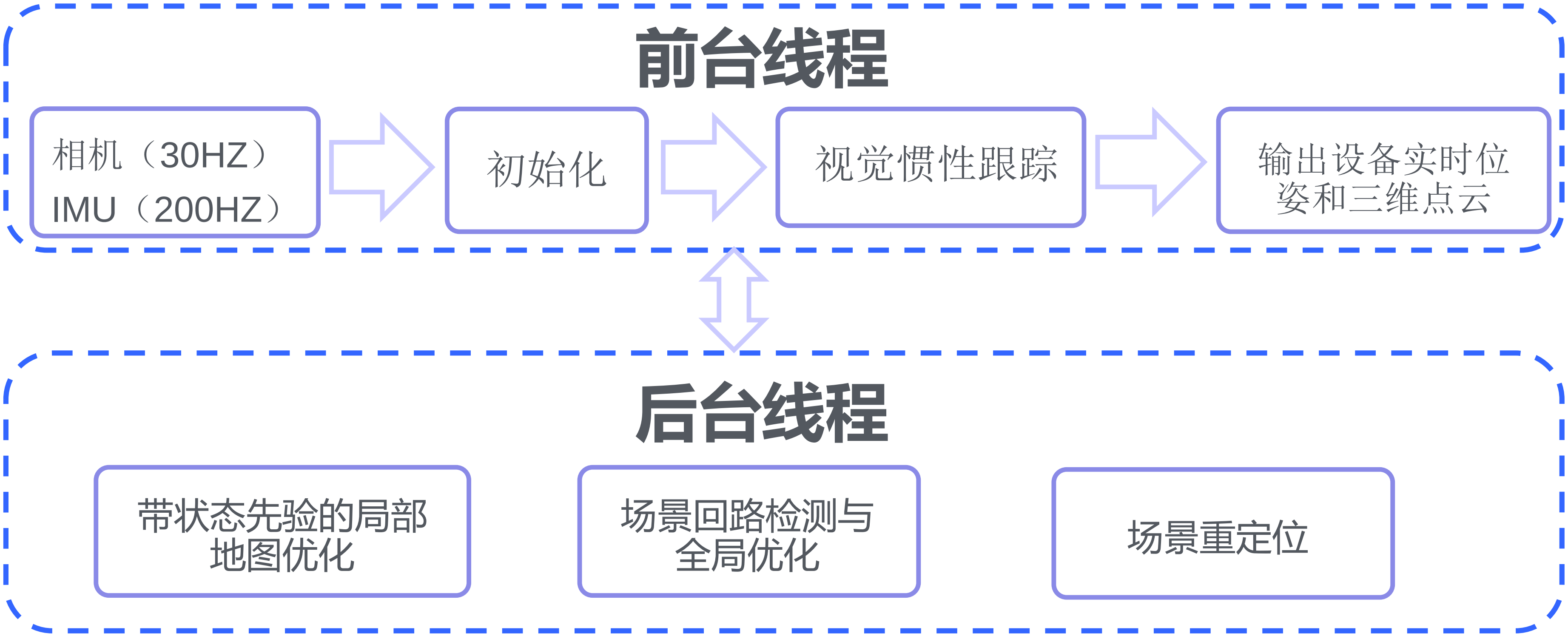
$$\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{b}_{ij}^g} \doteq \mathbf{b}_j^g - \mathbf{b}_i^g$$

$$\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{b}_{ij}^a} \doteq \mathbf{b}_j^a - \mathbf{b}_i^a$$

后一项是经典的重投影误差

$$\mathbf{r}_{\mathcal{C}_{il}} \doteq \mathbf{z}_{il} - \boldsymbol{\pi}\left(\mathrm{K}(\mathrm{R}_i^\mathsf{T}(\mathbf{x}_l - \mathbf{p}_i))\right)$$

基于关键帧的常用VISLAM框架



主要有四个模块

（1）状态初始化

（2）前端跟踪和地图更新

（3）后端局部地图优化

（4）闭环检测

初始化

- **VSLAM初始化**

  主要由三个部分组成：

  （1）寻找有足够视差和匹配点的两帧图像

  （2）利用单应矩阵或基础矩阵恢复两帧图像之间的变换关系

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_{\mathrm{c}} = \boldsymbol{H}_{\mathrm{cr}} \boldsymbol{x}_{\mathrm{r}} \\ \boldsymbol{x}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{F}_{\mathrm{cr}} \boldsymbol{x}_{\mathrm{r}} = 0 \end{cases}$$

  （3） 三角化出初始地图点

初始化

- **VSLAM初始化**
  - **不做初始化，假设一开始静止（OKVIS）**
    - 可以用简单的滤波来估计重力方向
  - **线性初始化（VINS）**
    - 陀螺仪的偏差估计
    - 尺度和重力矢量的近似估计
    - 加速度偏差的估计以及尺度和重力矢量的优化
    - 速度的估计

前端跟踪和地图更新

- 主要有三类
  - 提取特征点和描述子，用描述子匹配特征点
  - 光流跟踪（仅提取特征点）
  - 直接法
    - 利用光度梯度较大的像素作为特征
    - 直接优化光度误差：LSD-SLAM, DOS

前端跟踪和地图更新

- 添加关键帧的条件
  - 跟之前的关键帧的公共特征点数目小于 $\mathbf{N}_{max}$，但不少于 $\mathbf{N}_{min}$
  - 跟上一个关键帧的时间间隔大于阈值
- 删除关键帧
  - 当总的关键帧数目大于阈值
  - 选一个或若干个关键帧删除

前端跟踪和地图更新

- IMU预积分模型
  - IMU的频率一般要比相机的频率高
  - IMU和相机的时间戳对齐
    - 以某一个传感器的时间戳为准
    - 对另一个传感器的读数进行差值
      - 线性插值
      - 非线性插值

前端跟踪和地图更新

- IMU的状态传递
  - IMU 状态：位姿、运动速度、噪声
  - 将当前时刻 IMU 的读数在时间上进行积分得到下一时刻的 IMU 状态

$$
\begin{aligned}
{}_{\mathrm{B}}\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{WB}}(t) &= {}_{\mathrm{B}}\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{WB}}(t) + \mathbf{b}^g(t) + \boldsymbol{\eta}^g(t) \\
{}_{\mathrm{B}}\tilde{\mathbf{a}}(t) &= \mathrm{R}_{\mathrm{WB}}^{\mathsf{T}}(t)\left({}_{\mathrm{W}}\mathbf{a}(t) - {}_{\mathrm{W}}\mathbf{g}\right) + \mathbf{b}^a(t) + \boldsymbol{\eta}^a(t),
\end{aligned}
$$

$$
\mathbf{x}_i \doteq [\mathbf{R}_i \quad \mathbf{p}_i \quad \mathbf{v}_i \quad \mathbf{b}_i]
$$

后端局部地图优化

- **滑动窗口的组成和优化**
  - 优化目标函数里优化

$$\boldsymbol{\mathcal{X}}^{\star} = \arg\min_{\boldsymbol{\mathcal{X}}} \sum_{i,j} \|\mathbf{r}_{\mathcal{I}_{ij}}\|^2_{\Sigma_{ij}} + \sum_{i} \sum_{l} \|\mathbf{r}_{\mathcal{C}_{il}}\|^2_{\Sigma_C}$$

  - 求解出状态变量：$\mathbf{x}_i \doteq [\mathbf{R}_i \quad \mathbf{p}_i \quad \mathbf{v}_i \quad \mathbf{b}_i]$
  - 局部优化一般采用滑动窗口策略

后端局部地图优化

- **滑动窗口的组成和优化**
  - 新的帧加入到窗口里，旧的帧被滑出去
  - 划出去的帧的信息通过边缘化（marginalization）处理保留
  - 边缘化的结果封装成先验约束：

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|^2_{\Sigma_0}$$

回环检测

- **长时间运动造成误差累积**
  - 局部地图优化难免会有误差累积
  - 回环检测+全局优化来消除误差的累积
  - 一般采用词袋（bag of words）做回环检测

词袋

单词：图像的特征点

相似性：特征点的描述子

回环检测

- **一旦闭环检测成功**
  - 所有关键帧和相应的IMU预积分结果都参与优化
  - 优化的计算时间要相比局部地图的优化要长
  - 一般会限制闭环线程重复地去调用闭环检测

$$\min_{p,\varphi}\left\{\underbrace{\sum_{(i,j)\in S}\left\|r_{i,j}\right\|^2}_{\text{闭环帧}}+\underbrace{\sum_{(i,j)\in L}\rho\left(\left\|r_{i,j}\right\|^2\right)}_{\text{其它帧}}\right\}$$