Escola de Engenharia
Universidade do Minho

2023/2024

Trabalho Prático

Investigação Operacional

Relatório do Trabalho 2

Pedro Filipe Maneta Pinto - a104173

Marco António Fernandes Brito - a104187

Pedro Miguel de Abreu Argainha - a104351

Pedro Seabra Vieira - a104352

Tomás Henrique Alves Melo - a104529

Índice

Keywords: “Relax4”, “Fluxo Máximo”, “Modelo de fluxo de rede”

1 Formulação do problema

1.1 Contextualização e dados

A partir de um dado grafo G = (V, A), em que V é o conjunto de vértices e A o conjunto de arestas, pretende-se determinar o fluxo máximo entre dois vértices não-adjacentes, designados por O (origem) e D (destino), O, D ∈ V :

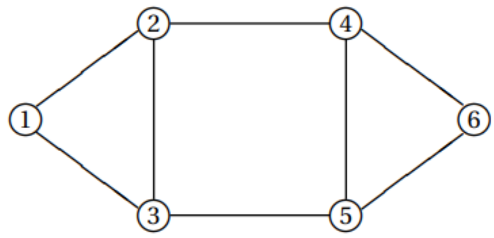

Figura 1 - Grafo original

Para a descoberta do vértice origem e vértice destino, é necessário de realizar o seguinte cálculo.

Seja ABCDE o nº de inscrição do elemento do grupo com maior número de inscrição.
x$ABCDE$ → 104529

- Seja k o resto da divisão do número DE por 14 → 29mod(14) = **01** = **k**
- **K=1** → Vértice origem: **1**; Vértice destino: **5**
- **(O,D) = (1,5)**

Posteriormente, para descobrirmos as capacidades dos vértices, as mesmas foram dadas pela tabela abaixo. Se o vértice for a origem O ou o destino D, o valor da sua capacidade é substituído por +∞.

vértice	capacidade
1	**infinito**
2	10 × (4+2+1) = **70**
3	10 × (5+1) = **60**
4	10 × (2+1) = **30**
5	**infinito**
6	10 × (2+9+1) = **120**

Tabela 1 - Resultado de capacidades dos vértices

1.2 Objetivo

O problema envolve determinar o fluxo máximo possível entre dois vértices não-adjacentes (um vértice de origem e um vértice de destino) num grafo orientado em que o fluxo nas arestas pode tomar qualquer um dos dois sentidos. Para isso, será essencial criar um modelo de fluxo de redes, capaz de descobrir o fluxo máximo nessa rede, traduzindo o problema para uma forma aplicável no software Relax4. Este software permitirá otimizar conjuntos de dados e complexas configurações de rede, levando a soluções concretas e aplicáveis, permitindo, por fim, revelar a solução do desafio de fluxo máximo proposto.

2 Modelo de fluxo em redes

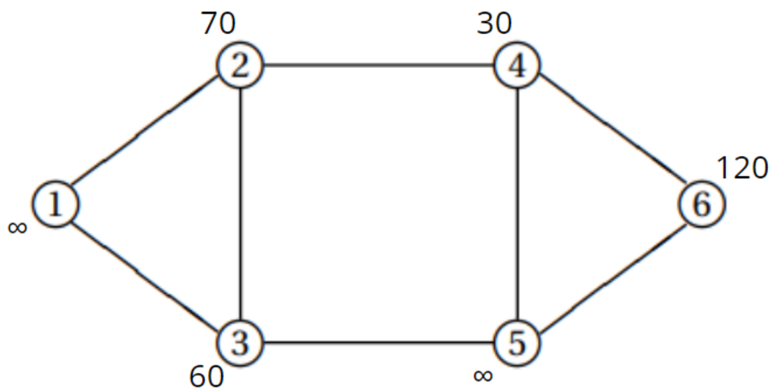

Figura 2 - Grafo original com capacidades atribuídas

O grafo abaixo surgiu de modo a obedecermos à restrição da obrigatoriedade de o fluxo ser entre dois vértices não-adjacentes, mantendo, igualmente, as seguintes condições visadas no enunciado:

- O fluxo numa aresta pode ter qualquer um dos dois sentidos;
- A capacidade das arestas é virtualmente infinita;
- Os vértices têm capacidade, com exceção dos vértices O e D, que não têm capacidade.

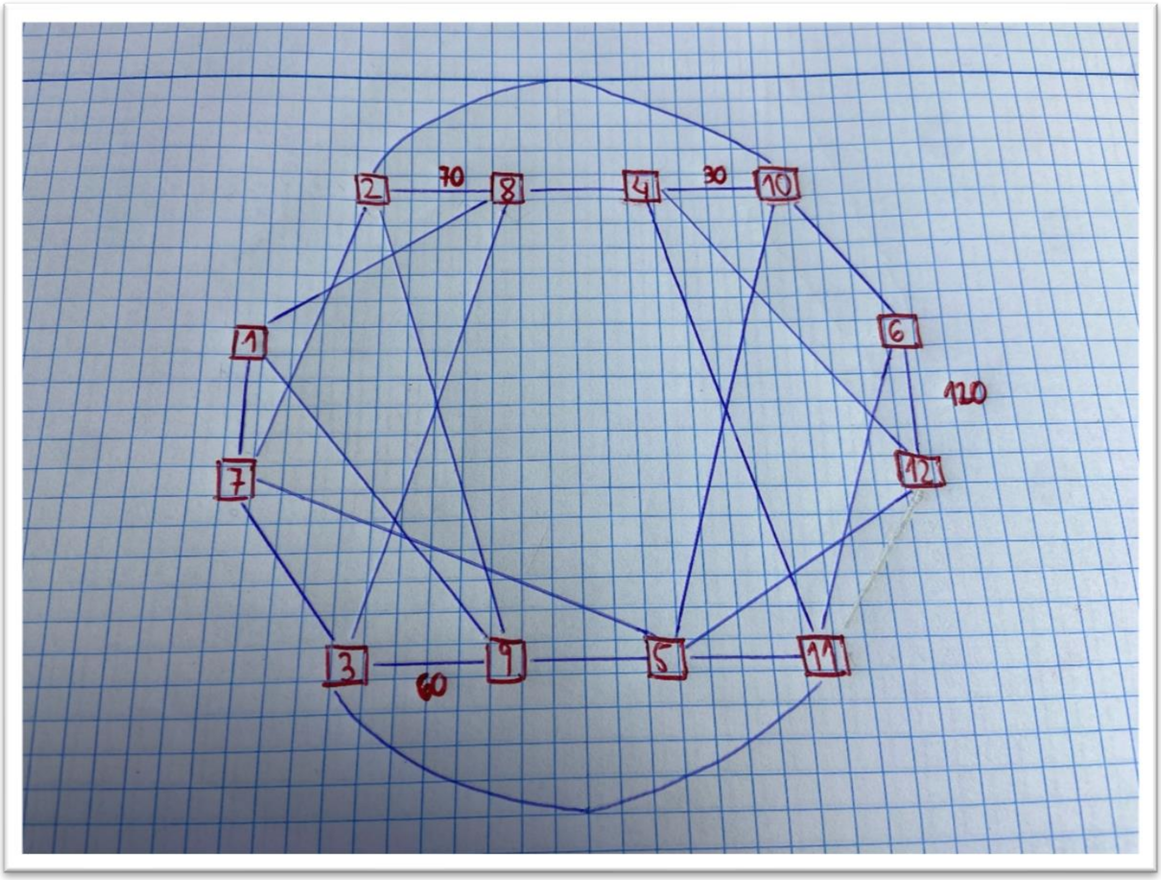

Figura 3 – Modelo de fluxo de redes

Para a construção deste grafo utilizamos o algoritmo de Ford-Fulkerson, para nos facilitar a encontrar o fluxo máximo em uma rede de fluxo.

Desta forma, com o grafo acima torna-se possível implementar os dados num software especializado na resolução de problemas de fluxo em redes como o Relax4, de modo a obter a solução ótima do problema.

Acima, apenas está a representação gráfica do modelo de fluxo de redes, com a indicação das capacidades das arestas do modelo que possuem valor diferente de infinito, e dos novos vértices de apoio criado. As arestas sem qualquer indicação, indicam que essas arestas têm capacidade infinita (feito desta forma para que a análise do grafo seja mais clara).

O objetivo do algoritmo de Ford- Fulkerson é enviar a maior quantidade de fluxo possível do ponto de origem para um ponto de destino, obedecendo às capacidades das arestas. O algoritmo, opera em etapas, aumentando progressivamente o fluxo na rede até que não seja possível mais aumentá-lo. Em cada passo, ele encontra um caminho da origem ao destino onde ainda é possível aumentar o fluxo.

Para a aplicação gráfica do algoritmo, para garantir ligações entre vértices não-adjacentes, criamos vértices de apoio, (7, 8, 9, 10, 11, 12). A capacidade das arestas entre os vértices (1,7), (2,8), (3,9), (4,10), (5,11) e (6,12) é, respetivamente, ∞, 70, 60,30, ∞, 120. Todas as outras arestas terão capacidade infinita.

Desta forma será possível a resolução do problema de maximização de fluxo.

3 Otimização da Rede

3.1 Ficheiro de input para o Relax4

```
12
23
1 7 0 1000
2 8 0 70
3 9 0 60
4 10 0 30
5 11 0 1000
6 12 0 120
7 2 0 1000
7 3 0 1000
8 1 0 1000
8 3 0 1000
8 4 0 1000
9 1 0 1000
9 2 0 1000
9 5 0 1000
10 2 0 1000
10 5 0 1000
10 6 0 1000
11 3 0 1000
11 4 0 1000
11 6 0 1000
12 4 0 1000
12 5 0 1000
7 5 -1 1000
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
```

As primeiras duas linhas do ficheiro de input (.txt), definem a dimensão do grafo criado. A primeira linha representa o número de vértices (12) e a segunda linha representa o número de arcos (23). Nas 23 linhas seguintes, número correspondente ao número total de arcos, encontram-se as características de cada arco da rede, isto é, o vértice origem, o vértice destino, o custo unitário e as capacidades de cada um dos arcos. O software tenta minimizar custos, porém o objetivo é maximizar o fluxo, ou seja, para conseguirmos maximizar o fluxo, teremos de minimizar uma função simétrica, daí termos colocado o valor de -1, na ligação entre os vértices 1 e 5 (vértice origem e vértice destino, respetivamente).

Nas próximas (e últimas) 12 linhas, número equivalente ao número de vértices, para concluir, estão definidos os valores das ofertas e das procuras de cada vértice. As primeiras 6 linhas definem que os vértices de 1 a 6 têm oferta igual a 0. As restantes 6, indicam que os vértices de 7 a 12 têm procura igual a 0.

O valor 1000 (valor suficientemente grande) no input do software Relax4, representa 'capacidade infinita' para os vértices que possuem tal capacidade. Os custos unitários das arestas são todos 0, pelo facto de não existir nenhum custo associado ao exercício, à exceção da aresta (7,5) que possui custo unitário -1, pois como já explicado anteriormente, servirá como forma de maximizar o fluxo, através da minimização de uma função simétrica.

3.2 Output do software Relax4

```
  Announcements:
*****************************************************
 NUMBER OF NODES = 12, NUMBER OF ARCS = 23
 DEFAULT INITIALIZATION USED
 ***********************************
 Total algorithm solution time =   0.00288105011 sec.
 OPTIMAL COST =  -90.
 NUMBER OF ITERATIONS =  11
 NUMBER OF MULTINODE ITERATIONS =  2
 NUMBER OF MULTINODE ASCENT STEPS =  0
 NUMBER OF REGULAR AUGMENTATIONS =  3
 ***********************************
```

```
s -90.
f 1 7 90
f 2 8 30
f 3 9 60
f 4 10 30
f 5 11 210
f 6 12 120
f 7 2 0
f 7 3 0
f 8 1 30
f 8 3 0
f 8 4 0
f 9 1 60
f 9 2 0
f 9 5 0
f 10 2 30
f 10 5 0
f 10 6 0
f 11 3 60
f 11 4 30
f 11 6 120
f 12 4 0
f 12 5 120
f 7 5 90
```

3.3 Solução ótima

O output fornecido pelo software Relax4 revela um valor ótimo de -90 (mínimo), sugerindo que 90 é o valor máximo do fluxo na rede entre dois vértices não-adjacentes tomando como vértices origem e destino, 1 e 5, respetivamente. Ou seja, o fluxo andará nunca se irá perder, pois andará sempre num loop.
É revelado de forma individual pelo Relax4, no output do problema, a quantidade de fluxo que passa por cada arco. Por exemplo, 'f 12 4 0' mostra que a quantidade de fluxo entre os vértices 12 e 4 é 0. Já para a linha 'f 6 12 120', indica que a quantidade de fluxo que passa entre os vértices 6 e 12 é 120.

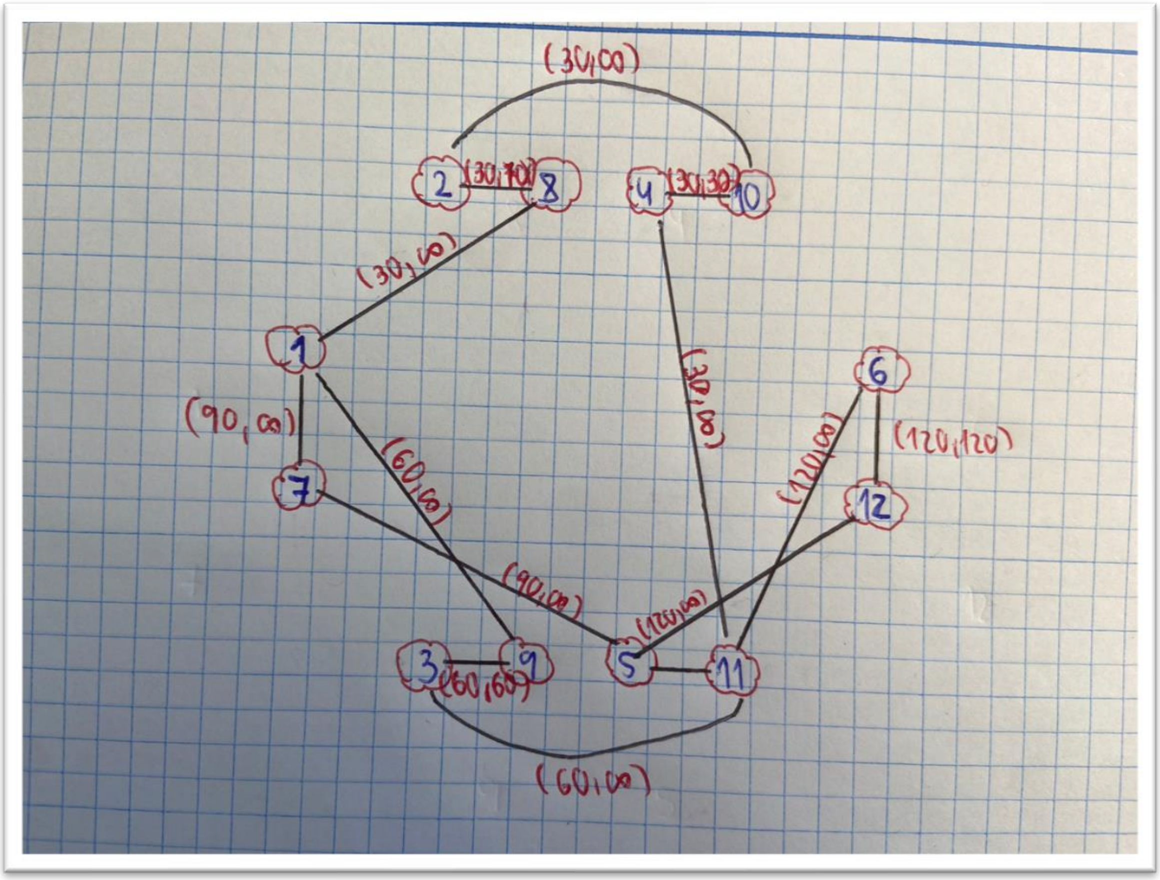

Figura 4- Caminho ideal do modelo de fluxo de rede, após solução do Relax4

Acima encontra-se o grafo desenvolvido que leva à solução ótima deste problema de fluxo de redes.

Neste grafo o fluxo encaminhado pela aresta é representado pela primeira componente e a capacidade da aresta, pela segunda componente. Isto é, (90, ∞), indica um fluxo de 90 e capacidade infinita.

As arestas com capacidade diferente de infinito, resultam dos dados anteriormente obtidos. Por exemplo, para a aresta (2,8) é atribuída uma capacidade de 70 (valor da capacidade do vértice 2). Para os vértices (1,7) e (5,11) é atribuída uma capacidade infinita, devido às capacidades dos vértices 1 e 5, serem ambas infinitas.

A aresta (7,5) foi criada pelo facto dos vértices de origem e destino serem, respetivamente, 1 e 5.

As arestas que apresentaram fluxo nulo, não iram fazer parte da solução ótima, logo não faram parte do caminho que em cima está destacado.

4 Validação do Modelo

Após uma análise cuidadosa do grafo fornecido, podemos confirmar que todos os pontos cruciais para a validação de um modelo de fluxo máximo foram verificados e validados. A conservação do fluxo foi mantida, com a quantidade total de fluxo que entra em cada vértice sendo igual à quantidade total de fluxo que sai, exceto para os vértices origem e destino. As capacidades dos arcos foram respeitadas, com o fluxo em cada arco não excedendo a sua capacidade. O fluxo máximo, que é a soma dos fluxos dos arcos que saem da fonte ou entram no destino, foi verificado.

5 Conclusão

Ao longo do desenvolvimento deste projeto prático, foi alcançada uma compreensão aprofundada de vários princípios lecionados durante as sessões teóricas e laboratoriais da disciplina de Investigação Operacional. Destacam-se entre estes, o conceito de redes com capacidades limitadas e ainda a análise de vértices com restrições específicas, todos essenciais para a resolução do desafio em questão. Com a utilização do software Relax4, especializado em otimização, tornou-se possível chegar a uma solução ideal, fruto da interpretação acurada do problema e da aplicação eficaz dos conceitos estudados.

Em suma, este trabalho prático culminou na validação do modelo proposto, confirmando a adequação da solução ótima encontrada, e resolução do desafio.