密级________________

中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

博士学位论文

超几何项的约化与邻差算子的构造

作者姓名：黄　辉

指导教师：Manuel Kauers 教授 与 李子明 研究员

奥地利林茨大学代数研究所与数学与系统科学研究院

学位类别：理学博士

学科专业：应用数学

研究所：数学与系统科学研究院

2016 年 5 月

Reduction and Creative Telescoping For Hypergeometric Terms

By

Hui Huang

Supervisors:

Prof. Manuel Kauers and Prof. Ziming Li

A Dissertation Submitted to
The University of Chinese Academy of Sciences
In partial fulfillment of the requirement
For the degree of
Doctor of Science

Academy of Mathematics and Systems Science
University of Chinese Academy of Sciences

May, 2016

摘　要

在符号计算中，超几何项是一类基本而重要的特殊函数。涉及超几何项的和式及恒等式在计数组合学中广泛存在。Abramov-Petkovšek 约化算法主要计算超几何项的极小加法分解，可用于解决超几何项的不定求和问题，从而扩展了 Gosper 算法。Wilf-Zeilberger 理论可以系统地解决一大类涉及超几何项定求和或恒等式证明的问题，是符号计算应用于组合数学、数学物理等领域的重要桥梁。该理论的核心步骤是构造超几何项的邻差算子（telescoper），而构造算法的效率则决定该理论的实用性。

本文的主要结果包括以下三个方面。

(1) 我们改进了 Abramov-Petkovšek 约化算法。和原算法相比，改进后算法在保留原算法输出条件的同时，进一步将超几何项完全分解为可求和部分与不可求和部分之和。此外，改进后的算法不需要求解任何辅助线性差分方程。通过实际例子的测试，证实改进后的算法比原算法更加高效。

(2) 基于改进的 Abramov-Petkovšek 约化算法，我们提出构造双变元超几何项极小邻差算子的新算法。该算法允许在构造邻差算子的同时避免计算相应验证函数。验证函数的表达式通常比邻差算子复杂庞大。通过实例测试证实，无论计算验证函数与否，新算法效率均高于经典 Zeilberger 算法。

(3) 我们进一步研究基于约化的邻差算子构造算法，并给出其终止性证明的新论证。该论证不仅提供关于邻差算子存在性的独立证明，而且还可以导出不同于以往的关于极小邻差算子阶数的新上下界。新的上下界或者与已知的上下界相同或者比它们更接近真正的阶数。

关键词： Abramov-Petkovšek 约化算法，超几何项，邻差算子，可求和性，阶数界

Abstract

In Symbolic Computation, hypergeometric terms are a basic but important class of special functions. The ubiquity of hypergeometric terms in combinatorial enumeration is widely recognized. The Abramov-Petkovšek reduction computes an additive decomposition of a hypergeometric term, which extends the functionality of the Gosper algorithm for indefinite hypergeometric summation. Wilf-Zeilberger theory systematically solves a large class of problems related to summations or identities involving hypergeometric terms, which is a bridge for applying symbolic computation to combinatorial mathematics, mathematical physics and other fields. The key step of this theory is so-called creative telescoping, whose efficiency determines the utility of the theory.

The main contributions of this thesis are as follows.

(1) We modify the Abramov-Petkovšek reduction so as to decompose a hypergeometric term as the sum of a summable term and a non-summable one. The outputs of the Abramov-Petkovšek reduction and our modified version share the same required properties. The modified reduction does not solve any auxiliary linear difference equation explicitly. It is also more efficient than the original reduction according to computational experiments.

(2) Based on the modified Abramov-Petkovšek reduction, we design a new algorithm to compute minimal telescopers for bivariate hypergeometric terms. The new algorithm can avoid the costly computation of certificates. Whether the certificates are computed or not, the new algorithm outperforms the classic Zeilberger's algorithm according to computational experiments.

(3) We investigate further and present a new argument for the termination of the new algorithm that computes minimal telescopers for bivariate hypergeometric terms. This new argument provides an independent proof of

the existence of telescopers and even enables us to derive upper as well as lower bounds for the order of minimal telescopers for hypergeometric terms. Compared to the known bounds in the literature, our bounds are sometimes better, and never worse than the known ones.

Keywords: Abramov-Petkovšek reduction, hypergeometric term, telescoper, summability, order bound

目　　录

表　　格

插　　图

算　法

第一章　引言

1.1　问题的背景

用计算机代替人工操作是上个世纪符号计算研究工作的重要主题之一，而算法化处理特殊函数的相关问题则是其中重要的方向。超几何项是一类基本而重要的特殊函数。它是系数为多项式的一阶线性（偏）差分方程组的非零解。常见的超几何项有非零有理函数，指数函数，阶乘函数，二项式系数等等。在符号计算的研究工作中，涉及超几何项的问题主要有两大类：

问题 1.1 (超几何项的定求和). 考虑如下和式

$$\sum_{y=-\infty}^{\infty} f(x,y), \quad f(x,y) \text{ 是关于 } x,y \text{ 的双变元超几何项,} \tag{1.1}$$

是否具有闭形式表示。换句话说，考虑和式 (1.1) 是否可以被表示成若干个超几何项之和，且求和个数是与所有变量和参数都无关的常数。

问题 1.2 (超几何项的恒等式证明). 证明如下恒等式

$$\sum_{y=-\infty}^{\infty} f(x,y) = h(x), \quad f(x,y) \text{ 是关于 } x,y \text{ 的双变元超几何项,} \tag{1.2}$$

其中 $h(x)$ 是与 y 无关的已知函数。

类似微分中的定积分问题，在某些情形下，问题 1.1 可以通过求解超几何项的不定求和（或反差分）来解决，即计算一个超几何项 $g(x,y)$ 使得

$$f(x,y) = g(x,y+1) - g(x,y).$$

一旦知道 $g(x,y)$，那么利用裂项相消法，问题 1.1 就迎刃而解。第一个解决超几何项不定求和问题的完整算法是由 Gosper 于 1978 年提出的，即著名的 Gosper 算法 [29]。然而当问题 1.1 中的 $f(x,y)$ 不存在超几何不定求和时，该算法就不适用。20 世纪 90 年代初，Wilf 和 Zeilberger 在他们的一系列工作 [42–47] 中建立

了一套构造性理论，后称为 Wilf-Zeilberger 理论。该理论的核心是通过构造超几何项的邻差算子来得到和式 (1.1) 所满足的线性差分方程。结合 Petkovšek [37] 于 1992 年提出的用于判定线性差分方程是否具有超几何项解的决定性算法，问题 1.1 得到基本完美的解决。此外，倘若 Petkovšek 算法返回的结果是否定的，即和式 (1.1) 不存在闭形式表示时，我们依旧可以利用所得差分方程来分析该和式的其他重要性质，如渐进展式等等。

另一方面，Wilf-Zeilberger 理论也使得问题 1.2 的发展有实质性的突破。它不仅可以系统地给出已知超几何项恒等式的证明，甚至还可以发现新的组合恒等式。这为组合学及特殊函数论中的相关研究工作提供强有力的算法基础。该理论证明恒等式的基本思路阐述如下。

我们首先算法化构造一个非零差分算子 L 及另一个超几何项 $g(x,y)$ 使得

$$L \cdot f(x,y) = g(x,y+1) - g(x,y), \tag{1.3}$$

其中要求算子 L 必须不包含 y 及其相应的平移算子 σ_y，即它必须具有如下形式

$$L = e_0 + e_1\sigma_x + \cdots + e_\rho\sigma_x^\rho,$$

其中 $e_0, \ldots, e_\rho$ 仅与 x 有关，且 σ_x 为 x 的平移算子。等式 (1.3) 中的算子 L 被称为超几何项 $f(x,y)$ 关于 y 的*邻差算子* (telescoper)，而超几何项 $g(x,y)$ 则被称为超几何项 $f(x,y)$ 关于 L 的*验证函数* (certificate)。一旦知道超几何项 $f(x,y)$ 的邻差算子，那么我们就可以对等式 (1.3) 两边关于 y 求和从而得到和式 $\sum_{y=-\infty}^{\infty} f(x,y)$ 所满足的线性差分方程。接着通过代入运算证明函数 $h(x)$ 也满足所得的差分方程。最后只要验证等式两侧满足同样的初始条件，恒等式 (1.2) 就得到严格的证明。

由上可见，构造邻差算子是算法化解决超几何项定求和或者恒等式证明问题的关键。而如何设计出构造邻差算子的高效算法一直是该领域的研究热点。根据 Manuel Kauers 教授的观点，从 1990 年至今，计算超几何项和超指数函数的邻差算子的构造算法共经历四代的演化。

第一代算法 [25, 27, 38, 47] 最早可追溯至上世纪 40 年代，其基本思想是基于微分、差分算子环上的非交换消元。**第二代算法** [11, 38, 46, 48] 始于现在所熟知的 Zeilberger（快速）算法。它是由 Zeilberger [46] 于 1990 年提出的。其基本思想是基于参数化的 Gosper 算法来“快速”构造超几何项邻差算子。该算法很快

被 Almkvist-Zeilberger [11] 推广到微分超指数函数及混合情形。这类快速算法在许多现代计算机代数系统中得到实现，比如 Maple [5] 和 Mathematica [36]；并成为组合恒等式机器证明的核心算法。关于前两代算法的详细讲述可以参见文献 [38]。

第三代算法 [12, 33] 是由 Zeilberger 及其学生 Apagodu 于 2005 年所开创的，后称之为 Apagodu-Zeilberger 算法。该算法的初衷是为更好地分析已有的邻差算子构造算法的复杂度，其基本思想是基于线性系统的求解。该算法在当时引发研究热潮，这不仅仅是因为它相对于前两代算法而言更容易在软件上实现并且更加快速，更是因为它易于分析。事实上，通过对这类算法的分析已经产生迄今为止关于邻差算子阶数及其多项式系数次数的最好上界估计 [18, 19]。在 2014 年，陈绍示，Kauers 和 Koutschan [20] 更将 Apagodu-Zeilberger 算法推广到满足高阶微分、差分方程的函数情形。然而这类算法并不总能找到极小邻差算子，即阶数最小的邻差算子。这使其不能满足一些实际应用的要求。

前三代算法的共同特点是在计算邻差算子的同时不可避免需要计算相应的验证函数。而验证函数往往在很多实际应用中是多余的，并且一般在存储大小上比邻差算子高出一个数量级。如果可以在明确不需要验证函数时避免对其进行计算，将会大大提高解决问题的效率。然而，如何将邻差算子及其相应验证函数的计算分离开来，是个具有挑战性的问题。

2010 年，Bostan，陈绍示，Chyzak 及李子明 [13] 在微分情形下提出基于 Hermite 约化的双变元有理函数极小邻差算子的新构造算法。该算法不仅具有比已有算法更低的算术复杂度，而且首次解决邻差算子和相应验证函数计算的分离问题。由此打开**第四代算法**的大门，即基于约化的构造算法。该代算法的基本思想是先将给定函数及其相应变化约化成特定的 “标准形式”，再通过找出这些 “标准形式” 之间的线性关系来给出邻差算子。新一代算法的特点是可以将邻差算子和验证函数的计算完全分离开来，从而在实际应用问题中效率远优于经典算法。2012 年，陈绍示等人 [22] 利用 Picard 约化将 [13] 中的算法推广到三变元有理情形, 之后又由 Bostan 等人 [15] 利用 Griffiths-Dwork 约化进一步推广到一般多变元有理情形。2013 年，Bostan 等人 [14] 基于改进后的 Hermite 约化算法，提出计算双变元超指数函数极小邻差算子的构造算法。该算法同样解决分离问题。与经典的 Zeilberger 算法相比，该算法不但可以理论上给出极小邻差算子阶数的更紧上界，而且效率更优。随着研究工作的不断进行，新一

代算法日渐丰腴。然而在本论文工作开始前，大部分研究都是围绕微分方面所展开的；关于差分方面的结论还不是很明朗。鉴于超几何项在组合学中应用广泛，本论文的主要研究动机是设计关于超几何项的第四代算法，也就是通过约化计算双变元超几何项的极小邻差算子。

1.2 论文的贡献

我们的主要结果有三部分：

1. 首先，我们改进用于计算单变元超几何项加法分解的 Abramov-Petkovšek 约化算法 [7, 10] 。和原算法相比，改进后算法在保留原算法输出条件的同时，进一步将超几何项完全分解为可求和部分与不可求和部分之和。此外，我们在计算机代数系统 MAPLE 中实现改进后的算法。实验结果表明，我们的程序比原算法在 MAPLE 软件包 SumTools[Hypergeometric] 中的对应程序 SumDecomposition 更加高效。

2. 其次，我们利用上述改进的约化算法设计关于双变元超几何项极小邻差算子的新构造算法。新算法保留第四代算法的特性，即可以将邻差算子和相应验证函数的计算分离开来，从而完成了关于双变元超几何项第四代算法的设计。同样的，我们也在计算机代数系统 MAPLE 中实现新算法。根据实例测试我们发现，在同样输出相应验证函数的情况下，新程序比 Zeilberger 算法在 MAPLE 软件包 SumTools[Hypergeometric] 中的对应程序 Zeilberger 效率高；此外，当新程序选择不输出相应验证函数时，它的效率远远高于 MAPLE 所带程序。

3. 最后，我们利用离散留式的对应关系重新证明关于上述基于约化的邻差算子构造算法的终止性。通过该证明方法，我们推导出极小邻差算子阶的上界和下界。对于一般的 (generic) 超几何项，新的上界与已知的上界相等。这是因为对于一般的超几何项，已知的上界已经是最优的。然而，对于一些特殊的超几何项，我们的上下界均比已知界更加接近极小邻差算子的真实阶数。此外，无论在何种情况下，新的上下界都不会差于已知界。利用所得的上下界，我们还在一定程度上改进上述基于约化的构造算法，并通过实例比较了二者的效率。

前两项研究结果是与陈绍示、Manuel Kauers 和李子明合作完成，并已发表在 ISSAC 2015 的文章 [17] 中。后一项研究结果（见文章 [30]）已被 ISSAC 2016 接收。

1.3 论文的结构

本文的主要内容安排如下：

在第二章中，我们首先定义本文所需要的符号；然后回顾差分环，超几何项，超几何可求和，无平移，平移既约等基本概念，最后描述超几何项的乘法分解。

在第三章中，我们改进计算单变元超几何项加法分解的 Abramov-Petkovšek 约化算法。为此，我们引入差分情形下的多项式约化算法。最后，我们比较 Abramov-Petkovšek 约化算法与改进后算法在计算机代数系统 Maple 中的程序效率。

第四章的主要目的是连接单变元超几何项和双变元超几何项，为后文做准备。我们首先回顾有理正规形式的定义和性质，接着进一步刻画离散留式的重要性质，最后利用同余的观点处理离散留式的可加性。

在第五章中，我们首先将超几何项概念扩展到双变元情形，并回顾相关的重要定理。然后我们利用改进的 Abramov-Petkovšek 约化算法构造双变元超几何项极小邻差算子，最后展示实验结果。

在第六章中，我们首先给出关于上一章基于约化的构造算法终止性的新证明方法。利用该方法，我们推导出超几何项极小邻差算子的上下界，并且将所得界与已知界相比较。最后，我们在一定程度上改进上一章基于约化的构造算法，并给出二者的实例比较。

在第七章中，我们总结本文的主要结果，并对未来的工作进行展望。

第二章　预备知识

在本章中，我们将回顾 [26, 34] 中差分环（域）及超几何项的基本定义与性质。此外，我们将简述超几何项的可求和性及其乘法分解，并引入一些常用的引理。

2.1　差分环（域）和超几何项

设 $\mathbb{F}$ 是特征为 0 的域，且 y 为 $\mathbb{F}$ 上的未定元。令 $\mathbb{F}(y)$ 表示以 $\mathbb{F}$ 为基域的关于 y 的有理函数域。定义 σ_y 为 $\mathbb{F}(y)$ 上关于 y 的平移算子，即将 $\mathbb{F}(y)$ 中的任一有理函数 $r(y)$ 映射为 $r(y+1)$。容易验证 σ_y 为 $\mathbb{F}$–自同构。我们称二元组 $(\mathbb{F}(y), \sigma_y)$ 构成一个*差分域* (difference field)。若一个交换环 $\mathbb{D}$ 满足如下性质：

1. $\mathbb{F}(y) \subset \mathbb{D}$；
2. $\mathbb{F}(y)$ 上的平移算子 σ_y 可以扩展为 $\mathbb{D}$ 上的单同态，为简单起见仍记为 σ_y；

则我们称二元组 $(\mathbb{D}, \sigma_y)$ 为 $(\mathbb{F}(y), \sigma_y)$ 的*差分扩环*；有时简称 $\mathbb{D}$ 为 $\mathbb{F}(y)$ 的*差分扩环* (difference ring extension)。对于 $\mathbb{D}$ 中的元素 c，如果它满足 $\sigma_y(c) = c$，则称 c 为关于 σ_y 的*常数*。容易验证 $\mathbb{D}$ 中所有关于 σ_y 的常数构成 $\mathbb{D}$ 的一个子环，记为 $C_{\sigma_y,\mathbb{D}}$。特别地，当 $\mathbb{D}$ 为域时，$C_{\sigma_y,\mathbb{D}}$ 也为域。此外，根据 [9, 引理 2] 可知 $C_{\sigma_y,\mathbb{F}(y)} = \mathbb{F}$，即 $\mathbb{F}(y)$ 中的所有关于 σ_y 的常数构成域 $\mathbb{F}$。

在本文中，对于 $\mathbb{F}[y]$ 中的非零多项式 p，我们分别用 $\deg_y(p)$ 和 $\mathrm{lc}_y(p)$ 来表示其关于 y 的次数和最高项系数。

定义 2.1. 设 $\mathbb{D}$ 是 $\mathbb{F}(y)$ 的差分扩环，且 T 为环 $\mathbb{D}$ 中的非零元素。如果存在有理函数 $r \in \mathbb{F}(y)$ 使得 $\sigma_y(T) = rT$ 成立，那么我们称 T 为有理函数域 $\mathbb{F}(y)$ 上的*超几何项* (hypergeometric term)。而有理函数 r 则被称为 T 关于 y 的*差商* (shift-quotient)。

若没有特别说明，我们假设本章及下两章出现的超几何项都在 $\mathbb{F}(y)$ 的某个差分扩环中。

例 2.1. 所有非零的多项式和有理函数都是超几何项。此外，下面两类常见的组合函数也都是超几何项。

1. (指数函数). $T = c^y$，其中 $c \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$。该函数对应的差商是 $\sigma_y(T)/T = c$。
2. (阶乘函数). $T = y!$。该函数对应的差商是 $\sigma_y(T)/T = y + 1$。

容易验证，超几何项的乘积以及超几何项的逆依旧是超几何项。然而，超几何项的和却不一定是超几何项，例如 2^y 和 1 都是超几何项，但它们的和 $2^y + 1$ 却不是。由此可知，超几何项在求和运算下不是封闭的。

2.2 超几何项的可求和性

类似微积分中初等函数的不定积分，我们考虑差分情形下超几何项的不定求和问题，即给定超几何项 $T(y)$，计算另一个超几何项 $G(y)$ 使得

$$T(y) = G(y+1) - G(y).$$

由此引出超几何项可求和的概念。

定义 2.2. 设 T 为 $F(y)$ 上的超几何项。如果存在超几何项 G 使得

$$T = \Delta_y(G), \qquad \text{其中 } \Delta_y \text{ 表示 } \sigma_y \text{ 和恒等映射的差}, \tag{2.1}$$

那么我们称 T 为*超几何可求和的* (hypergeometric summable)，在后文中简称为*可求和*。而超几何项 G 则被称为 T 的*不定求和*（*或反差分*）(antidifference)。特别地，当 T 和 G 都是有理函数时，我们称 T 为*有理可求和的*。

例 2.2. 所有多项式都是可求和的。此外，可以验证 $y \cdot y! = \Delta_y(y!)$，从而是可求和的；但 $y!$ 是不可求和的。

针对超几何项的不定求和问题，Gosper [29] 于 1978 年提出了第一个完整的算法, 后被称之为 Gosper 算法。Gosper 算法是个确定性的算法，即判定给定超几何项是否是可求和的；若答案是肯定的，它还可以找出此不定求和。其核心思想是将求和问题转化为求系数为多项式的一阶差分方程的多项式解的问题。

值得注意的是，超几何项在加法上的不封闭性导致了 Gosper 算法的非线性性，即两个可求和的超几何项之和不一定还是可求和的。这在很大程度上局限

了 Gosper 算法的应用。为了克服这一缺陷，Petkovšek，Wilf 和 Zeilberger [38] 引入了相似超几何项的概念，巧妙地将 Gosper 算法看成一种 “线性运算”。下面我们回顾相似的概念。

定义 2.3. 给定 $\mathbb{F}(y)$ 上的两个超几何项 T, G。如果存在有理函数 $r \in \mathbb{F}(y)$ 使得 $T = rG$，那么我们称 T 和 G 是相似的 (similar)。

容易证明相似性是超几何项集合上的等价关系，并且所有有理函数构成其中一个等价类。根据 [38] 中的命题 5.6.2 可知，相似超几何项之和要么为零要么为超几何项，反之也成立。利用超几何项之间的相似性，Gosper 算法可以被推广到超几何项的任意线性组合情形。详细阐述参见文献 [38, §5.6]。

2.3 超几何项的乘法分解

在本节中，我们将回顾 [7, §1] 中无平移以及平移既约的基本定义，并介绍超几何项的乘法分解。

定义 2.4. 设 p 是 $\mathbb{F}[y]$ 中的非零多项式。若对任意非零整数 i，都有 $\gcd(p, \sigma_y^i(p))$=1，则我们称 p 关于 y 是无平移的 (shift-free)。

直观地说，无平移多项式的任意两个互异根之差都不是整数。下面的引理揭示了无平移性和有理可求和性之间的关系，其证明参见文献 [1, 命题 3]。

引理 2.1. *设 $f = p/q$ 是 $\mathbb{F}(y)$ 中的有理函数，其中 $p, q \in \mathbb{F}[y]$，$\gcd(p, q) = 1$ 且 $\deg_y(p) < \deg_y(q)$。进一步假设 q 是无平移的。如果存在有理函数 $r \in \mathbb{F}(y)$ 使得 $f = \Delta_y(r)$ 成立，那么 $f = 0$。*

定义 2.5. 设 $f = p/q$ 是 $\mathbb{F}(y)$ 中的非零有理函数，其中 $p, q \in \mathbb{F}[y]$ 且满足 $\gcd(p, q) = 1$。如果对于任意整数 i，都有 $\gcd(p, \sigma_y^i(q)) = 1$，那么我们称 f 关于 y 是平移既约的 (shift-reduced)。

下面我们给出平移既约有理函数的一些基本性质。

引理 2.2. *设 $f \in \mathbb{F}(y)$ 为平移既约的有理函数。*

(*i*) *如果存在非零有理函数 $r \in \mathbb{F}(y)$ 使得 $f = \sigma_y(r)/r$，那么 $r \in \mathbb{F}$ 且 $f = 1$。*

(*ii*) 进一步假设 f 不等于 1。如果存在多项式 $p \in \mathbb{F}[y]$ 使得 $f\sigma_y(p) - p = 0$，那么 $p = 0$。

证明. (*i*) 我们采取反证法。假设 $r = s/t \in \mathbb{F}(y) \setminus \mathbb{F}$，其中多项式 s, $t \in \mathbb{F}[y]$ 互素且至少一个不在 $\mathbb{F}$ 中。不失一般性，我们假设 $s \in \mathbb{F}[y] \setminus \mathbb{F}$。于是存在 s 的非平凡因子 $p \in \mathbb{F}[y]$ 使得 $\deg_y(p) > 0$。令

$$\ell = \max\{k \in \mathbb{N} : \sigma_y^{-k}(p) \mid s\} \quad \text{以及} \quad m = \max\{k \in \mathbb{N} : \sigma_y^{k}(p) \mid s\}.$$

于是我们有 $m \geq 0$，$\ell \geq 0$，并且

- $\sigma_y^{-\ell}(p) \mid s \quad$ 但 $\quad \sigma_y^{-\ell}(p) \nmid \sigma_y(s)$；
- $\sigma_y^{m+1}(p) \mid \sigma_y(s) \quad$ 但 $\quad \sigma_y^{m+1}(p) \nmid s$。

因为 $\gcd(s,t) = 1$，所以 $\gcd(\sigma_y(s), \sigma_y(t)) = 1$。注意到

$$f = \frac{\sigma_y(r)}{r} = \frac{\sigma_y(s)\, t}{s\, \sigma_y(t)},$$

从而 $\sigma_y^{m+1}(p)$ 为 f 的分子的非平凡因子，而 $\sigma_y^{-\ell}(p)$ 为其分母的非平凡因子。由此说明 f 的分子和其分母的第 $(\ell + m + 1)$ 次平移有公因子 $\sigma^{m+1}(p)$，这与 f 的平移既约性矛盾。从而 $r \in \mathbb{F}$ 且 $f = 1$。

(*ii*) 同样地，我们采取反证法。假设 $p \neq 0$。那么我们有

$$f = \frac{p}{\sigma_y(p)} = \frac{\sigma_y(1/p)}{1/p}.$$

因为 f 是平移既约的，所以由结论 (*i*) 可知，$1/p \in \mathbb{F}$。从而 $f = 1$，这与假设条件 $f \neq 1$ 矛盾。因此 $p = 0$。 □

根据 [7, 10] 可知，$\mathbb{F}(y)$ 上的任意超几何项 T 都存在一个关于 y 的乘法分解 (multiplicative decomposition)，即 $T = SH$，其中 S 是 $\mathbb{F}(y)$ 中的有理函数，而 H 是超几何项并且它关于 y 的差商是平移既约的。我们称该差商 $K = \sigma_y(H)/H$ 为 T 关于 y 的一个核 (kernel)，并且称有理函数 S 为该核相应的壳 (shell)。由引理 2.2 (*i*) 可知，$K = 1$ 当且仅当 T 是个有理函数；此时我们有 $T = cS$，其中 c 为差分扩环 $\mathbb{D}$ 中的常数，即 $c \in C_{\sigma_y,\mathbb{D}}$。

给定超几何项 T，并且设 $T = SH$ 为其一个乘法分解，其中 S 是 $\mathbb{F}(y)$ 中的有理函数，而 H 是超几何项并且它关于 y 的差商 $K \in \mathbb{F}(y)$ 是平移既约的。假设 T 是可求和的，即存在超几何项 G 使得 $T = \Delta_y(G)$。那么通过简单的计算可知 G 是相似于 T 的。这意味着存在有理函数 $r \in \mathbb{F}(y)$ 使得 $G = rH$。容易验证

$$SH = \Delta_y(rH) \Longleftrightarrow S = K\sigma_y(r) - r. \tag{2.2}$$

为了方便，我们引入一些记号。给定超几何项 T，定义 $\mathbb{U}_T$ 为由元素 0 和相似于 T 的所有可求和超几何项所构成的集合。易知 $\mathbb{U}_T$ 是差分扩环 $\mathbb{D}$ 中的 $\mathbb{F}$-线性空间。此外，对于任何相似于 T 的超几何项 H，我们都有 $\mathbb{U}_T = \mathbb{U}_H$。令

$$\mathbb{V}_K = \{K\sigma_y(r) - r \mid r \in \mathbb{F}(y)\}.$$

易知 $\mathbb{V}_K$ 是 $\mathbb{F}(y)$ 中的 $\mathbb{F}$-线性子空间。那么等式 (2.2) 等价于

$$SH \equiv 0 \mod \mathbb{U}_H \Longleftrightarrow S \equiv 0 \mod \mathbb{V}_K. \tag{2.3}$$

这些同余式可以用于简化后文中的一些表达式。

第三章　超几何项的加法分解[1]

3.1　前言

超几何项的不定求和问题是差分方程理论中的基本问题之一。该问题主要是计算给定超几何项的不定求和（或反差分）。从算法角度来说，Gosper [29] 在 1978 年提出第一个完整的算法来判定超几何项的不定求和是否仍然是超几何项；若答案是肯定的，该算法还可以找出此不定求和。然而当已知超几何项不可求和时，我们仍然希望得到更多的信息来处理相关定求和问题。就目前所知，第一个关于不可求和情形的刻画是由 Abramov 给出的。早在 1975 年他就提出计算有理函数加法分解的约化算法 [2]，之后分别由 Pirastu 与 Strehl [39]，Paule [35]，Abramov 本人 [3] 等进一步完善。该算法可以将任意有理函数完全分解为可求和部分与不可求和部分之和，其中不可求和部分是真分式，它的分母是无平移的并且其次数是此类分解中极小的。我们将该分解称为有理函数的*极小加法分解*。根据引理 2.1，有理函数是有理可求和的当且仅当其极小加法分解中的不可求和部分为零。2001 年，Abramov 和 Petkovšek [7, 10] 将上述约化算法推广至超几何项情形，即 Abramov-Petkovšek 约化算法。后由 Geddes，Le 和李子明 [28] 于 2004 年进一步推广到超指数函数情形。这些约化算法都可以看成 Gosper 算法 [29] 及其微分模拟 [11] 的扩展。虽然推广后的约化算法保留加法分解的极小性，但是对于可求和的完全分离性却丢失。具体地说，给定超几何项 T，Abramov-Petkovšek 约化算法构造两个超几何项 T_1, T_2 使得

$$T \quad = \quad \underbrace{\Delta_y(T_1)}_{\text{可求和部分}} \quad + \quad \underbrace{T_2}_{\text{待定部分}} \,,$$

其中 T_2 在某种意义下是极小的。为判定 T 的可求和性，我们还必须进一步求解由 T_2 导出的某一阶线性差分方程的多项式解 [10, §4]。微分情形亦是如此。这在实际应用中带来很大的不便。为保持与有理函数的一致性，陈绍示等人 [14] 于 2013 年利用纯线性代数方法改进 [28] 中的约化算法。改进后的算法避免求

[1]本章的主要结果是与陈绍示、Manuel Kauers 和李子明合作得到。

解线性微分方程，并将每个超指数函数完全分解为可积部分与不可积部分之和。在本章中，我们将借鉴 [14] 的方法来相应改进 Abramov-Petkovšek 约化算法。

本章的主要结果是改进用于计算超几何项加法分解的 Abramov-Petkovšek 约化算法。和原算法相比，改进后的算法在保持加法分解极小性的同时，进一步将给定超几何项完全分解为可求和部分与不可求和部分之和。这为之后设计基于约化的邻差算子的构造算法奠定坚实的基础。此外，我们还在计算机代数系统 Maple 中实现改进后的算法，并将其与经典算法 Gosper 算法及 Abramov-Petkovšek 约化算法，在 Maple 程序包 SumTools[Hypergeometric] 中的对应程序 Gosper 及 SumDecomposition 相比较。实验结果表明，我们的程序更加高效。

本章内容安排如下：在第 3.2 节中，我们将总结性回顾 Abramov-Petkovšek 约化算法的主要内容并引入有理壳约化算法，为改进算法作进一步准备。在第 3.3 节中，我们通过引入差分情形下的多项式约化算法来改进 Abramov-Petkovšek 约化算法。最后在第 3.4 节中，我们给出上述算法的程序实现，并进行实例测试及程序比较。

3.2 Abramov-Petkovšek 约化算法

差分情形下，用于计算有理函数极小加法分解的约化算法已经得到很完善的发展，详细阐述参见 [1–3, 35, 39]。因此，在本节中我们将重点介绍关于非有理函数的超几何项的 Abramov-Petkovšek 约化算法 [7, 10]。该约化算法可以看成是 Gosper 算法的一种扩展，它不仅可以用于判定超几何项的可求和性，还可以在超几何项不可求和时给出其相应的刻画。下面我们首先通过一个例子来说明 Abramov-Petkovšek 约化算法较 Gosper 算法的优势。

例 3.1. [2] 考虑如下定求和

$$\sum_{y=0}^{\infty} T(y), \quad \text{其中 } T(y) = \frac{1}{(y^4+y^2+1)\, y!}.$$

将 Gosper 算法作用于求和项 $T(y)$ 后可知其是不可求和的。因而上述定求和无法通过计算 $T(y)$ 的不定求和来解决。然而，若对求和项 $T(y)$ 作用 Abramov-

[2]本例由陈奕俊先生提供。

Petkovšek 约化算法，我们则有

$$T(y) = \Delta_y \left(\frac{y^2}{2(y^2 - y + 1)y!} \right) + \frac{1}{2y!}.$$

上式两边关于 y 从零到无穷求和，并利用裂项相消法可得

$$\sum_{y=0}^{\infty} T(y) = \lim_{y\to\infty} \left(\frac{y^2}{2(y^2 - y + 1)y!} \right) - 0 + \sum_{y=0}^{\infty} \frac{1}{2y!} = \frac{1}{2}e.$$

此即为给定定求和的闭形式表示。

为了简单清晰地描述 Abramov-Petkovšek 约化算法，我们首先需要对相关符号进行约定并引入一个重要的概念。

符号约定 3.1. 设 T 是 $\mathbb{F}(y)$ 上的超几何项，并且有理函数 $K, S \in \mathbb{F}(y)$ 分别为 T 的核和该核相应的壳。于是存在以 K 为差商的超几何项 H 使得 $T = SH$ 成立。进一步假设 K 不等于 1，即超几何项 T 不是有理函数。此外，假设 $K = u/v$，其中 $u, v \in \mathbb{F}[y]$ 且 $\gcd(u, v) = 1$。

定义 3.1. 在符号约定 3.1 的假设下，设 p 是 $\mathbb{F}[y]$ 中的非零多项式。如果对于任意非负整数 i，都有 $\gcd(p, \sigma_y^{-i}(u)) = \gcd(p, \sigma_y^{i}(v)) = 1$，那么我们称 p 与 K *强互素* (strongly prime)。

文献 [7] 中引理 3 的证明蕴含着一个约化算法。关于该算法的输入和输出阐述如下。

算法 1: Abramov-Petkovšek 约化算法

输入: 有理函数 $K, S \in \mathbb{F}(y)$，其中两者满足符号约定 3.1 中的假设。

输出: 有理函数 $S_1 \in \mathbb{F}(y)$ 和多项式 $b, w \in \mathbb{F}[y]$，满足 b 是无平移的且与 K 强互素，使得如下等式成立

$$S = K\sigma_y(S_1) - S_1 + \frac{w}{b \cdot \sigma_y^{-1}(u) \cdot v}. \tag{3.1}$$

针对上述约化算法，文献 [7] 在其第 4 页给出了相关的伪代码。该伪代码的最后十行是用于得到其输出中的有理函数 V，使得该有理函数的分母在某种

意义下是极小的。在此，我们选择不执行这十行，于是该约化算法将会输出两个有理函数 U_1 和 U_2。他们分别对应等式 (3.1) 中的 S_1 和 $w/(b\sigma_y^{-1}(u)v)$。

为了下一节更方便地改进 Abramov-Petkovšek 约化算法，我们接下来稍微改动一下算法 1 的输出。注意到有理函数 K 是平移既约的，并且多项式 b 与 K 强互素。因此多项式 b，$\sigma_y^{-1}(u)$ 及 v 两两互素。根据部分分式分解，等式 (3.1) 可改写为

$$S = K\sigma_y(S_1) - S_1 + \left(\frac{a}{b} + \frac{p_1}{\sigma_y^{-1}(u)} + \frac{p_2}{v}\right),$$

其中，a, p_1, p_2 为满足上式的 $\mathbb{F}[y]$ 中的多项式。令 $r = p_1/\sigma_y^{-1}(u)$。那么通过简单的计算可知 $r = K\sigma_y(-r) - (-r) + \sigma_y(p_1)/v$。重新定义 S_1 为 $S_1 - r$ 并且令 $p = \sigma_y(p_1) + p_2$。于是我们有

$$S = K\sigma_y(S_1) - S_1 + \left(\frac{a}{b} + \frac{p}{v}\right). \tag{3.2}$$

结合算法 1 和上述改动，我们得到如下有理壳约化算法 (shell reduction)。

算法 2: 有理壳约化算法

输入: 有理函数 $K, S \in \mathbb{F}(y)$，其中两者满足符号约定 3.1 中的假设。

输出: 有理函数 $S_1 \in \mathbb{F}(y)$ 和多项式 $a, b, p \in \mathbb{F}[y]$，满足 b 是无平移的且与 K 强互素，使得等式 (3.2) 成立。

上述有理壳约化算法可以诱导出超几何项可求和的一个必要条件。

命题 3.1. *在符号约定 3.1 的假设下，设 a, b, p 为 $\mathbb{F}[y]$ 上的多项式，其中 b 是无平移的并且与 K 强互素。进一步假设等式 (3.2) 成立。如果超几何项 T 是可求和的，那么 a/b 是 $\mathbb{F}[y]$ 上的多项式，即 $b \in \mathbb{F}$。*

证明. 在符号约定 3.1 的假设中，我们有 $T = SH$，并且有理函数 K 和 S 分别为 T 的核和该核相应的壳。于是根据等式 (2.3) 和 (3.2)，我们有

$$T \equiv_y \left(\frac{a}{b} + \frac{p}{v}\right) H \mod \mathbb{U}_H.$$

这意味着 T 是可求和的当且仅当 $(a/b + p/v)H$ 是可求和的。

令 $H' = (1/v)H$。那么易知平移既约的有理函数 $K' = u/\sigma_y(v)$ 为超几何项 H' 的差商。由于 b 与 K 强互素，因此 b 与 K' 强互素。于是将 [10] 中的定理 11 应用于超几何项 $(av/b+p)H'$（即 $(a/b+p/v)H$），就可以推导出 $(av/b+p)$ 是个多项式。由于 b 和 v 是互素的，所以 a/b 必须是个多项式。命题得证。 □

命题 3.1 为我们在判定某些超几何项可求和性的问题中提供了捷径。

例 3.2. 考虑超几何项 $T = y^2 y!/(y+1)$。通过计算可知有理函数 $K = y+1$ 和 $S = y^2/(y+1)$ 分别为 T 的核和该核相应的壳。执行算法 2，我们得到

$$S \equiv_y -\frac{1}{y+2} + \frac{y}{v} \mod \mathbb{V}_K,$$

其中 $v = 1$。于是由命题 3.1 可知，T 是不可求和的。

值得注意的是，即使当等式 (3.2) 中的 $a/b + p/v$ 不为零时，给定超几何项 T 依旧可能可求和。

例 3.3. 考虑超几何项 $T = y \cdot y!$。通过计算可知有理函数 $K = y+1$ 和 $S = y$ 分别为 T 的核和该核相应的壳。通过算法 2 我们知道 $S \equiv_y y/v \mod \mathbb{V}_K$，其中 $v = 1$。然而，不难验证 $T = \Delta_y(y!)$。因而 T 实际上是可求和的，

由上述例子可以看出，无论是有理壳约化算法还是 Abramov-Petkovšek 约化算法都不能直接判定超几何项的可求和性。为了解决这个问题，在算法 2 的基础上，文献 [10] 提出的方案是通过判断一阶线性差分方程

$$u\sigma_y(z) - vz = p \tag{3.3}$$

是否存在 $\mathbb{F}[y]$ 中的多项式解来给出超几何项 T 的可求和性。如果差分方程 (3.3) 存在多项式解 $f \in \mathbb{F}[y]$，那么 T 是可求和的，并且 $T = \Delta_y((S_1 + f)H)$；否则 T 是不可求和的。该方案将问题进一步转化为求解域 $\mathbb{F}$ 上的线性系统。在下一节中，我们将展示如何在避免求解任何线性差分方程的同时利用极小加法分解直接判定超几何项的可求和性。

3.3 改进的 Abramov-Petkovšek 约化算法

在执行了算法 2（即有理壳约化算法）得到等式 (3.2) 之后，我们只需要判定超几何项 $(a/b + p/v)H$ 的可求和性，便可知晓给定超几何项 T 的可求和性。在有理函数情形，即核 $K = 1$ 时，等式 (3.2) 中的有理函数 $a/b + q/v$ 可以进一步被约化成不可求和的真分式 a/b，其中 $\deg_y(a) < \deg_y(b)$。这是因为所有的多项式都是有理可求和的。然而在超几何项情形，纵使给定超几何项有一个为多

项式的壳，它也不一定可求和。例如，考虑阶乘函数 $y!$，它的对应于核 $K=y+1$ 的壳为 $S=1$，这显然是个多项式；但 $y!$ 却是不可求和的。

在本节中，我们将引入有理函数的离散留式的概念，并提出差分情形下的多项式约化算法 (polynomial reduction)。该算法是文献 [14] 中关于超指数函数的多项式约化算法的差分模拟。该模拟算法不仅诱导出一个直接判定超几何项可求和性的方法，而且还极大地削减等式 (3.2) 中多项式 p 的非零项的项数。

3.3.1 离散留式

在符号约定 3.1 的假设下，我们定义如下 $\mathbb{F}$ 上的线性映射

$$\begin{array}{rccc} \phi_K: & \mathbb{F}[y] & \to & \mathbb{F}[y] \\ & p & \mapsto & u\sigma_y(p)-vp, \end{array}$$

其中 p 为 $\mathbb{F}[y]$ 中的任意多项式。我们称映射 ϕ_K 为关于 K 的多项式约化映射 (the map for polynomial reduction w.r.t. K)。

引理 3.2. 定义线性空间

$$\mathbb{W}_K=\operatorname{span}_{\mathbb{F}}\left\{y^\ell \mid \ell\in\mathbb{N}\text{ 且对任意 } p\in\operatorname{im}(\phi_K)\text{ 都有 }\ell\neq\deg_y(p)\right\}.$$

那么 $\mathbb{F}[y]=\operatorname{im}(\phi_K)\oplus\mathbb{W}_K$。

证明. 由 $\mathbb{W}_K$ 的定义知，$\operatorname{im}(\phi_K)\cap\mathbb{W}_K=\{0\}$；并且对于任意非负整数 m，总是存在多项式 $f_m\in\operatorname{im}(\phi_K)\cup\mathbb{W}_K$ 使得 $\deg_y(f_m)=m$。于是集合 $\{f_0,f_1,f_2,\ldots\}$ 构成 $\mathbb{F}[y]$ 的一组 $\mathbb{F}$-基。因此 $\mathbb{F}[y]=\operatorname{im}(\phi_K)\oplus\mathbb{W}_K$。 □

鉴于上述引理，我们称 $\mathbb{W}_K$ 为 $\operatorname{im}(\phi_K)$ 的标准补空间 (standard complement)。由引理 3.2，$\mathbb{F}[y]$ 中的任意多项式 p 都可以被唯一分解为 $p=p_1+p_2$，其中 $p_1\in\operatorname{im}(\phi_K)$ 且 $p_2\in\mathbb{W}_K$。

引理 3.3. *在符号约定 3.1 的假设下，设 p 是 $\mathbb{F}[y]$ 中的多项式。那么存在多项式 $q\in\mathbb{W}_K$ 使得 $p/v\equiv_y q/v \mod \mathbb{V}_K$。*

证明. 令 $q\in\mathbb{F}[y]$ 为 p 在补空间 $\mathbb{W}_K$ 中的投影。那么存在多项式 $f\in\mathbb{F}[y]$ 使得 $p=\phi_K(f)+q$，即 $p=u\sigma_y(f)-vf+q$。因而 $p/v=K\sigma_y(f)-f+q/v$，这等价于 $p/v\equiv_y q/v \mod \mathbb{V}_K$。 □

注 3.1. 如果将上述引理中的 p 替换为 vp，那么我们就有对任意 $\mathbb{F}[y]$ 中的多项式 p，总是存在多项式 $q \in \mathbb{W}_K$ 使得 $p \equiv_y q/v \mod \mathbb{V}_K$。

根据引理 3.3 及注释 3.1，等式 (3.2) 蕴含着如下同余式

$$S \equiv_y \left(\frac{a}{b} + \frac{q}{v}\right) \mod \mathbb{V}_K, \tag{3.4}$$

其中 $a, b, q \in \mathbb{F}[y]$，$\deg_y(a) < \deg_y(b)$，$b$ 是无平移的且与 K 强互素，并且 $q \in \mathbb{W}_K$。效仿文献 [14] 中的做法，我们下面引入离散情形下留式的概念。

定义 3.2. 在符号约定 3.1 的假设下，我们进一步假设 f 为 $\mathbb{F}(y)$ 中的有理函数。如果存在多项式 $a, b, q \in \mathbb{F}[y]$ 使得

$$f \equiv_y \frac{a}{b} + \frac{q}{v} \mod \mathbb{V}_K,$$

其中 $\deg_y(a) < \deg_y(b)$，b 是无平移的且与 K 强互素，并且 $q \in \mathbb{W}_K$；那么我们称有理函数 $r = a/b + q/v$ 为 f 关于 K 的一个（*离散*）*留式* (discrete residual form)。为了方便，若 f 可以从上下文知晓，则简称 r 为关于 K 的*留式*。此外，当 $\gcd(a, b) = 1$ 时，我们称 b 为 r 的*首分母*。

正如下面命题所展示的，离散留式与超几何项的可求和性密切相关。

命题 3.4. *在符号约定 3.1 的假设下，我们进一步假设 r 为关于 K 的非零留式。那么超几何项 rH 是不可求和的。*

证明. 我们采用反证法，假设 rH 是可求和的。根据留式的定义，r 具有如下形式 $r = a/b + q/v$，其中 $\deg_y(a) < \deg_y(b)$，b 是无平移的且与 K 强互素，并且 $q \in \mathbb{W}_K$。由命题 3.1 可知，此时 a/b 是个多项式。注意到 $\deg_y(a) < \deg_y(b)$，因此 $a = 0$。从而 $(q/v)H$ 是可求和的。从等式 (2.2) 可知，存在 $\mathbb{F}(y)$ 中的有理函数 w 使得 $u\sigma_y(w) - vw = q$。根据文献 [38] 中的定理 5.2.1（第 76 页），我们有 $w \in \mathbb{F}[y]$。这意味着 q 属于像空间 $\mathrm{im}(\phi_K)$。另一方面，由留式定义可知，q 也属于补空间 $\mathbb{W}_K$。根据引理 3.2 有 $q = 0$，从而 $r = 0$，这与已知矛盾。 □

在符号约定 3.1 的假设下，设 r 为壳 S 关于 K 的留式。那么由余式 (2.3) 和 (3.4) 可知 $SH \equiv_y rH \mod \mathbb{U}_H$。根据命题 3.4，我们有超几何项 SH 是可求和的当且仅当 $r = 0$。综上所述，要想判定给定超几何项 T 的可求和性，我们仅需计算 T 的任意核相应的壳关于该核的一个留式。这就是下一小节内容的主要动机。

3.3.2 多项式约化算法

在本小节中，在符号约定 3.1 的假设下，我们通过将多项式分别投射到像空间 $\operatorname{im}(\phi_K)$ 及其标准补空间 $\mathbb{W}_K$ 中来计算给定有理函数的留式。关于这两个线性空间的定义可以从上一小节中找到。

定义集合 $\mathbb{B}_K = \{\phi_K(y^i) \mid i \in \mathbb{N}\}$。根据引理 2.2 (ii) 可知，$\mathbb{F}$-线性映射 ϕ_K 是单射。因此 $\mathbb{B}_K$ 是 $\operatorname{im}(\phi_K)$ 的一组 $\mathbb{F}$-基。通过这组基，我们可以分别构造出 $\operatorname{im}(\phi_K)$ 及 $\mathbb{W}_K$ 的一组*阶梯形基* (enchelon basis)。这里阶梯形基指的是满足不同元素次数不同的一组 $\mathbb{F}$-基。利用这两组阶梯形基以及线性消去法，我们可以很容易地得到任意多项式在这两个线性空间中的投影。

为了构造阶梯形基，我们将 $\operatorname{im}(\phi_K)$ 改写成

$$\operatorname{im}(\phi_K) = \{u\Delta_y(p) - (v-u)p \mid p \in \mathbb{F}[y]\}.$$

定义 $\alpha_1 = \deg_y(u)$，$\alpha_2 = \deg_y(v)$，$\beta = \deg_y(v-u)$ 及 $\tau_K = \operatorname{lc}_y(v-u)/\operatorname{lc}_y(u)$。由符号约定 3.1 知 $\tau_K \neq 0$。假设 p 为 $\mathbb{F}[y]$ 中的非零多项式。下面我们就以下几种情形分别讨论。

情形 1. $\beta > \alpha_1$. 于是 $\beta = \alpha_2$，并且

$$\phi_K(p) = -\operatorname{lc}_y(v-u)\operatorname{lc}_y(p)y^{\alpha_2+\deg_y(p)} + \text{次数较低项}.$$

由此可见对任意非负整数 i，都有 $\deg_y(\phi_K(y^i)) = \alpha_2 + i$。因此 $\mathbb{B}_K$ 是像空间 $\operatorname{im}(\phi_K)$ 的一组阶梯形基。根据定义，集合 $\{1, y, \ldots, y^{\alpha_2-1}\}$ 为标准补空间 $\mathbb{W}_K$ 的一组阶梯形基，并且 $\dim_{\mathbb{F}}\mathbb{W}_K = \alpha_2$。

情形 2. $\beta = \alpha_1$. 于是

$$\phi_K(p) = -\operatorname{lc}_y(v-u)\operatorname{lc}_y(p)y^{\alpha_1+\deg_y(p)} + \text{次数较低项}.$$

由此可见对任意非负整数 i，都有 $\deg_y(\phi_K(y^i)) = \alpha_1 + i$。因此 $\mathbb{B}_K$ 是像空间 $\operatorname{im}(\phi_K)$ 的一组阶梯形基。根据定义，集合 $\{1, y, \ldots, y^{\alpha_1-1}\}$ 为标准补空间 $\mathbb{W}_K$ 的一组阶梯形基，并且 $\dim_{\mathbb{F}}\mathbb{W}_K = \alpha_1$。

情形 3. $\beta < \alpha_1 - 1$. 如果 $\deg_y(p) = 0$，那么 $\phi_K(p) = (u-v)p$。否则，我们有

$$\phi_K(p) = \deg_y(p)\operatorname{lc}_y(u)\operatorname{lc}_y(p)y^{\alpha_1+\deg_y(p)-1} + \text{次数较低项}.$$

于是 $\deg_y(\phi_K(1)) = \beta$ 并且对任意正整数 i，都有 $\deg_y(\phi_K(y^i)) = \alpha_1 + i - 1$。因此 $\mathbb{B}_K$ 是像空间 $\operatorname{im}(\phi_K)$ 的一组阶梯形基。从而集合 $\{1, \ldots, y^{\beta-1}, y^{\beta+1}, \ldots, y^{\alpha_1-1}\}$ 为标准补空间 $\mathbb{W}_K$ 的一组阶梯形基，并且 $\mathbb{W}_K$ 的维数为 $\alpha_1 - 1$。

情形 4. $\beta = \alpha_1 - 1$ 且 τ_K 不是正整数. 于是

$$\phi_K(p) = (\deg_y(p)\operatorname{lc}_y(u) - \operatorname{lc}_y(v-u))\operatorname{lc}_y(p)y^{\alpha_1+\deg_y(p)-1} + \text{次数较低项}. \tag{3.5}$$

于是对任意非负整数 i，都有 $\deg_y(\phi_K(y^i)) = \alpha_1+i-1$。因此 $\mathbb{B}_K$ 是像空间 $\operatorname{im}(\phi_K)$ 的一组阶梯形基。从而集合 $\{1, \ldots, y^{\alpha_1-2}\}$ 为标准补空间 $\mathbb{W}_K$ 的一组阶梯形基，并且 $\mathbb{W}_K$ 的维数为 $\alpha_1 - 1$。

情形 5. $\beta = \alpha_1 - 1$ 且 τ_K 是个正整数. 由等式 (3.5) 可知对不同于 τ_K 的非负整数 i，我们有 $\deg_y(\phi_K(y^i)) = \alpha_1 + i - 1$。此外，每个次数为 τ_K 的多项式 p 在映射 ϕ_K 下的像 $\phi_K(p)$ 的次数都少于 $\alpha_1 + \tau_K - 1$。由此可见 $\operatorname{im}(\phi_K)$ 不包含任何次数为 $\alpha_1 + \tau_K - 1$ 的多项式。定义如下集合

$$\mathbb{B}'_K = \left\{\phi_K(y^i) \mid i \in \mathbb{N}, i \neq \tau_K\right\}.$$

利用该集合中的元素，我们可以将多项式 $\phi_K(y^{\tau_K})$ 化简为不为零的且次数小于 $\alpha_1 - 1$ 的多项式 p'。注意到 $\mathbb{B}_K$ 是 $\operatorname{im}(\phi_K)$ 的一组基并且 $\mathbb{B}'_K \subset \mathbb{B}_K$，因此 $\mathbb{B}'_K \cup \{p'\}$ 构成像空间 $\operatorname{im}(\phi_K)$ 的一组阶梯形基。从而标准补空间 $\mathbb{W}_K$ 由阶梯形基 $\{1, y, \ldots, y^{\deg_y(p')-1}, y^{\deg_y(p')+1}, \ldots, y^{\alpha_1-2}, y^{\alpha_1+\tau_K-1}\}$ 所张成，并且 $\mathbb{W}_K$ 的维数为 $\alpha_1 - 1$。

例 3.4. 假设 $K = (y^4+1)/(y+1)^4$。可以看出 K 是个平移既约的有理函数。于是 $\tau_K = 4$。根据情形 5 可知，$\operatorname{im}(\phi_K)$ 有一组阶梯形基为

$$\{\phi_K(p)\} \cup \{\phi_K(y^m) \mid m \in \mathbb{N}, m \neq 4\},$$

其中 $p = y^4 + y/3 + 1/2$，$\phi_K(p) = (5/3)y^2 + 2y + 4/3$ 以及

$$\phi_K(y^m) = (m-4)y^{m+3} + \text{次数较低项}.$$

因此，集合 $\{1, y, y^7\}$ 为 $\mathbb{W}_K$ 的一组阶梯形基。

从上述分类讨论以及例子 3.4 可以看出，虽然标准补空间中的多项式的次数依赖于 τ_K 的取值（从而可能非常地高），但是多项式的项数却仅取决于 K 的分子 u 和分母 v 的次数。我们将这一观察总结为如下命题，它在第六章关于邻差算子阶数界的估计中有重要应用。

命题 3.5. *在符号约定 3.1 中的假设下，我们进一步定义*

$$\alpha_1 = \deg_y(u), \quad \alpha_2 = \deg_y(v), \quad \beta = \deg_y(v-u).$$

于是存在集合 $\mathcal{P} \subset \{y^i \mid i \in \mathbb{N}\}$ 满足条件

$$|\mathcal{P}| \leq \max\{\alpha_1, \alpha_2\} - [\![\beta \leq \alpha_1 - 1]\!],$$

使得在模 $\operatorname{im}(\phi_K)$ 的前提下，$\mathbb{F}[y]$ 中的任意多项式都可被 $\mathcal{P}$ 中元素的 $\mathbb{F}$-线性组合所表示。这里符号 $[\![\beta \leq \alpha_1 - 1]\!]$ 代表的含义是如果 $\beta \leq \alpha_1 - 1$ 成立，那么取值为 1，否则取值为 0。

证明. 根据上述分类讨论可知，$\dim_{\mathbb{F}} \mathbb{W}_K$ 不超过 $\max\{\alpha_1, \alpha_2\} - [\![\beta \leq \alpha_1 - 1]\!]$。因此命题得证。 □

通过上述分类讨论，我们可以找到 $\mathbb{F}[y]$ 中的一个无穷多项式序列 p_0，p_1，p_2，... 使得集合

$$\mathbb{E}_K = \{\phi_K(p_i) \mid i \in \mathbb{N}\}, \quad \text{其中} \ \deg_y(\phi_K(p_i)) < \deg_y(\phi_K(p_{i+1})),$$

为 $\operatorname{im}(\phi_K)$ 的一组阶梯形基。利用这组基，任意多项式都可以被分别投射到 $\operatorname{im}(\phi_K)$ 及 $\mathbb{W}_K$ 中。在前四种情形中，我们可以选择 y 的幂次构成多项式序列 $\{p_i\}_{i\geq 0}$。然而在最后一种情形中，正如例子 3.4 所展示的，该多项式序列中的其中一个元素并不一定是个单项式。综上所述，我们有如下算法。

算法 3: 多项式约化算法

输入: 多项式 $p \in \mathbb{F}[y]$ 和平移既约的有理函数 $K \in \mathbb{F}(y)$。

输出: 多项式 $f \in \mathbb{F}[y]$ 和多项式 $q \in \mathbb{W}_K$，使得 $p = \phi_K(f) + q$ 成立。

1 如果 $p = 0$，那么令 $f = 0$ 且 $q = 0$，并返回结果 (f, q)。

2 令 $d = \deg_y(p)$。找出阶梯形基 $\mathbb{E}_K$ 中所有次数至多为 d 的多项式元素，并将它们的原像记为集合 $\mathbb{P} = \{p_{i_1}, \ldots, p_{i_s}\}$。

3 按照次数从高到低的顺序，利用集合 $\mathbb{P}$ 中的元素逐次对 p 进行线性消去；最终得到 $c_1, \ldots, c_{s-1}, c_s \in \mathbb{F}$ 使得 $p - \sum_{k=1}^{s} c_k \phi_K(p_{i_k}) \in \mathbb{W}_K$。

4 令 $f = \sum_{k=1}^{s} c_k p_{i_k}$ 且 $q = p - \phi_K(f)$；并返回结果 (f, q)。

基于算法 2 和算法 3，我们给出下面的改进算法。

算法 4: 改进的 Abramov-Petkovšek 约化算法

输入: $\mathbb{F}[y]$ 上的非有理函数的超几何项 T。

输出: 超几何项 H 和有理函数 $f, r \in \mathbb{F}(y)$，使得 $K = \sigma_y(H)/H$ 是个平移既约的有理函数，而 r 为关于 K 的留式，且如下等式成立

$$T = \Delta_y(fH) + rH. \tag{3.6}$$

1 计算超几何项 T 的一个核 K 及其相应的壳 S。

2 对 S 关于 K 作用算法 2，得到多项式 $b, s, t \in \mathbb{F}[y]$ 及有理函数 $g \in \mathbb{F}(y)$ 满足 b 是无平移的且与 K 强互素，使得

$$T = \Delta_y(gH) + \left(\frac{s}{b} + \frac{t}{v}\right) H, \tag{3.7}$$

其中 $H = T/S$ 且 $v \in \mathbb{F}[y]$ 为 K 的分母。

3 利用多项式带余除法，计算 s 除以 b 的商和余式，并分别记作 p 和 a。

4 对 $vp + t$ 关于 K 作用算法 3，得到多项式 $h \in \mathbb{F}[y]$ 和多项式 $q \in \mathbb{W}_K$ 使得等式 $vp + t = \phi_K(h) + q$ 成立。

5 令 $f = g + h$ 且 $r = a/b + q/v$；并返回结果 (H, f, r)。

本章的主要结论是

定理 3.6. 在符号约定 *3.1* 的假设下，算法 *4* 可以计算一个有理函数 $f \in \mathbb{F}(y)$ 及关于 K 的一个留式 r 使得等式 (3.6) 成立。此外，超几何项 T 是可求和的当且仅当 $r = 0$。

证明. 回顾符号约定 3.1 中有 $T = SH$，其中 H 是差商为 K 的超几何项，而 S 是有理函数。将关于 K 的算法 2（即有理壳约化算法）作用于 S，可得到等式 (3.7)。该等式等价于

$$T = \Delta_y(gH) + \left(\frac{a}{b} + \frac{vp + t}{v}\right) H,$$

其中多项式 a 和 b 是由算法 4 中的步骤 3 所给出。于是在步骤 4 中利用算法 3（即多项式约化算法），我们有 $vp+t = \phi_K(h)+q$。将上式代入等式 (3.7) 中则有

$$T = \Delta_y(gH) + (K\sigma_y(h) - h)H + \left(\frac{a}{b} + \frac{q}{v}\right) H = \Delta_y((g+h)H) + rH,$$

其中 $r = a/b + q/v$。因此等式 (3.6) 成立。此外由命题 3.4 可知，T 是可求和的当且仅当 r 等于零。 □

例 3.5. 考虑例子 3.2 中的超几何项 T。那么 $K = y + 1$ 以及 $S = y^2/(y + 1)$ 分别为 T 的核及该核相应的壳。设 $H = T/S = y!$。根据例子 3.2 中作用算法 2 所得的结果，我们有

$$T = \Delta_y \left(\frac{-1}{y+1} H \right) + \left(\frac{-1}{y+2} + \frac{y}{v} \right) H,$$

其中 $v = 1$。利用算法 3 可知 $(y/v)H = \Delta_y(1 \cdot H)$。因此我们可以将 T 分解为

$$T = \Delta_y \left(\frac{y}{y+1} H \right) - \frac{1}{y+2} H.$$

由此可见，给定超几何项 T 是不可求和的。该结果与例子 3.2 中的论证吻合。

例 3.6. 考虑例子 3.3 中的超几何项 T。那么 $K = y + 1$ 以及 $S = 1$ 分别为 T 的核及该核相应的壳。设 $H = T/S = y!$。根据例子 3.3 中作用算法 2 所得的结果，我们有 $T = yH$。利用算法 3 可知 $yH = \Delta_y(1 \cdot H)$。由此可见，给定超几何项 T 是可求和的并且 $T = \Delta_y(y!)$。

注 3.2. 在算法 4 的步骤 5 中所给的符号假定下，我们可以将 rH 改写成 $(s_1/s_2)G$ 的形式，其中 $s_1 = av + bq$，$s_2 = b$，并且 $G = H/v$。于是根据第 3.3.1 节中的分类讨论，多项式 s_1 的次数由 [7, 定理 8] 中给定的 λ 所界定。由 [7, 定理 3] 可知多项式 s_2（即等式 (3.1) 中的多项式 b）的次数是极小的。除此之外，因为 $\sigma_y(H)/H$ 是平移既约的，所以 $\sigma_y(G)/G$ 也是如此。上述所有性质正是文献 [7] 中原始约化算法所要求的输出条件。综上所述，改进的 Abramov-Petkovšek 约化算法保留了原始约化算法的所有输出条件，即同样输出超几何项的极小加法分解。

值得一提的是，例子 3.1 对于改进的 Abramov-Petkovšek 约化算法也是适用的。此外改进后的约化算法不仅可以将超几何项的可求和与不可求和部分完全分离，而且在某些定求和问题中比原始约化算法更加有效。

例 3.7. 考虑如下两个著名的组合恒等式

$$\sum_{y=0}^{\infty} \binom{x}{y} = 2^x \quad 及 \quad \sum_{y=0}^{\infty} \binom{x}{y}^2 = \binom{2x}{x}.$$

目前已经有很多方法可以用于证明上述两个恒等式。在此例中，我们将利用改进的 Abramov-Petkovšek 约化算法来证明它们。首先我们考虑第一个恒等式。将改进的 Abramov-Petkovšek 约化算法作用于其求和项可得

$$\binom{x}{y} = \Delta_y \left(-\frac{1}{2}\binom{x}{y} \right) + \frac{x+1}{2(y+1)}\binom{x}{y}.$$

上式两边关于 y 从零到无穷求和，并利用裂项相消法得到

$$\begin{aligned} \sum_{y=0}^{\infty}\binom{x}{y} &= \lim_{y\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\binom{x}{y}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right) + \sum_{y=0}^{\infty}\frac{x+1}{2(y+1)}\binom{x}{y} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{y=0}^{\infty}\binom{x+1}{y+1} = \frac{1}{2}\sum_{y=0}^{\infty}\binom{x+1}{y}. \end{aligned}$$

令 $F(x) = \sum_{y=0}^{\infty}\binom{x}{y}$。于是上式等价于如下关于 $F(x)$ 的一阶线性差分方程

$$F(x+1) - 2F(x) = 0.$$

容易验证 2^x 为上述差分方程的一个解，并且满足初值条件 $2^0 = 1 = F(0)$。因此 $F(x) = 2^x$。第一个恒等式得证。第二个恒等式可以被类似证明。注意原始 Abramov-Petkovšek 约化算法并不适用于此例中的方法。

3.4　算法实现与时间测试

我们已经在计算机代数系统 Maple 18 中实现了相关算法，并生成自己的 Maple 程序包 ShiftReductionCT。该程序包不仅涵盖了本章所涉及的用于计算单变元超几何项加法分解的约化算法，而且还包括双变元超几何项的极小邻差算子的构造算法以及其阶数上下界的计算。后者将在后文详细介绍。

在本节中，我们主要介绍程序包 ShiftReductionCT 中的两个重要程序 ModefiedAbramovPetkovsekReduction 和 IsSummable。前者对应于改进的 Abramov-Petkovšek 约化算法；而后者则是基于前者的用于判定超几何项可求和性算法的程序实现，其中当给定超几何项不可求和时，不再对其做任何处理；即与 Gosper 算法作用相当。利用这两个程序，我们对实际例子进行测试，并给出相应运行时间表以比较它们与 Maple 程序包 SumTools[Hypergeometric] 中的程序 Gosper 和 SumDecomposition 之间的效率。

3.4.1 程序实现及使用说明

ShiftReductionCT: 计算双变元超几何项极小邻差算子的 Maple 程序包

```
> with(ShiftReductionCT);
```

$$[BoundReductionCT,\ IsSummable,\ KernelReduction,\ ModifiedAbramovPetkovsekReduction,\ PolynomialReduction,\ ReductionCT,\ ShellReduction,\ ShiftHomDecomp,\ TranslateDRF,\ VerifyMAPReduction,\ VerifyRCT]$$

```
> T := y^2*y!/(y+1); # 考虑例子3.2及3.5中的超几何项
```

$$T := \frac{y^2 y!}{y+1}$$

```
> res := ModifiedAbramovPetkovsekReduction(T,y); # 对 T 关于 y 作用算法4（即改进的 Abramov-Petkovšek 约化算法）
> K := res[1][1]: S := res[1][2]:  # 使用算法4中的符号标记结果
> f := res[2][1]: r := res[2][2]: H := res[3]:
```

$$res := \left[\left[y+1, \frac{y^2}{y+1}\right], \left[\frac{y}{y+1}, -\frac{1}{y+2}\right], y!\right]$$

```
> res := ModifiedAbramovPetkovsekReduction(T,y,output = hypergeometric);
# 对 T 关于 y 作用算法4；并要求结果以超几何项形式输出
> fH := res[2][1]: rH := res[2][2]: # 使用算法4中的符号标记结果
```

$$res := \left[\frac{y y!}{y+1}, -\frac{y!}{y+2}\right]$$

```
> IsSummable(T,y); # 基于改进的 Abramov-Petkovšek 约化算法，判定 T 的可求和性
```

$$false$$

```
> SumTools[Hypergeometric][Gosper](T,y); # Maple 的 Gosper 算法
```

Error, (in SumTools:-Hypergeometric:-Gosper) no solution found

```
> SumTools[Hypergeometric][SumDecomposition](T,y); # Maple 的 Abramov-Petkovšek 约化算法
```

$$\left[\frac{y \prod_{\_k=1}^{y-1} (\_k+1)}{y+1}, -\frac{\prod_{\_k=1}^{y-1} (\_k+1)}{y+2}\right]$$

3.4.2　实例测试及时间比较

为了测试相关程序的效率，在本小节中我们对这些程序的运行时间及存储空间进行比较。所有测试都是在具有 388Gb 内存和 12 个 2.80GHz 双核处理器的 Linux 计算机中进行；且其运行时间都是以秒为单位。为了简洁，我们约定

- G：Maple 18 中的程序 SumTools[Hypergeometric][Gosper]；
- S：程序 ShiftReductionCT[IsSummable];
- AP：Maple 18 中的程序 SumTools[Hypergeometric][SumDecomposition]；
- MAP：程序 ShiftReductionCT[ModefiedAbramovPetkovsekReduction]。

例 3.8 (随机超几何项). 考虑具有如下形式的超几何项

$$T = \frac{f(y)}{g_1(y)g_2(y)} \prod_{k=n_0}^{y} \frac{u(k)}{v(k)}, \tag{3.8}$$

其中 $f \in \mathbb{Z}[y]$ 是次数为 20 的整系数多项式，$n_0 \in \mathbb{F}$ 为固定常数，u, v 均为两个一次整系数多项式的乘积，并且对 $i = 1, 2$ 都存在次数为 10 的整系数多项式 $p_i \in \mathbb{Z}[y]$ 及非负整数 $\lambda \leq \mu$ 使得 $g_i = p_i \sigma_y^{\lambda}(p_i) \sigma_y^{\mu}(p_i)$。针对二元组 (λ, μ) 的不同取值，我们随机生成具有上述形式的超几何项 T 来进行测试。表格 3.1 给出该输入下上述四个程序运行时间的比较结果。

(λ, μ)	G	S	AP	MAP
$(0, 0)$	0.09	0.12	0.16	0.12
$(5, 5)$	0.36	0.37	3.99	0.45
$(10, 10)$	0.66	0.65	13.70	0.86
$(10, 20)$	4.05	1.41	40.82	2.53
$(10, 30)$	12.13	2.22	294.52	6.26
$(10, 40)$	19.09	3.31	564.71	14.11
$(10, 50)$	34.89	4.76	865.01	26.02

表 3.1: Gosper 算法，Abramov-Petkovšek 约化算法以及改进后的约化算法对随机超几何项的运行时间比较（以秒为单位）

例 3.9 (可求和超几何项). 考虑可求和超几何项 $\sigma_y(T)-T$，其中 T 为满足等式 (3.8) 的超几何项。同样的，针对二元组 (λ,μ) 的不同取值，我们随机生成具有上述形式的超几何项 $\sigma_y(T)-T$ 来进行测试。表格 3.2 给出该输入下上述四个程序运行时间的比较结果。

(λ,μ)	G	S	AP	MAP
$(0,0)$	1.13	1.27	2.34	1.26
$(5,5)$	1.86	1.59	6.44	1.59
$(10,10)$	2.22	1.63	13.78	1.63
$(10,20)$	7.09	2.09	29.76	2.10
$(10,30)$	19.61	2.34	57.63	2.33
$(10,40)$	30.83	2.49	95.31	2.49
$(10,50)$	64.69	2.69	168.72	2.69

表 3.2: Gosper 算法，Abramov-Petkovšek 约化算法以及改进后的约化算法对可求和超几何项的运行时间比较（以秒为单位）

注意到上述两个例子中参数 μ 为等式 (3.8) 中的 g_1,g_2 对自身的差量。在表格 3.1 及表格 3.2 中，我们观察到对不同的程序，差量的影响效果不同。为了直观地描绘例子 3.8 及例子 3.9 中上述四种程序在相同条件下受差量的影响程度，我们给出图 3.1 （见下一页）。

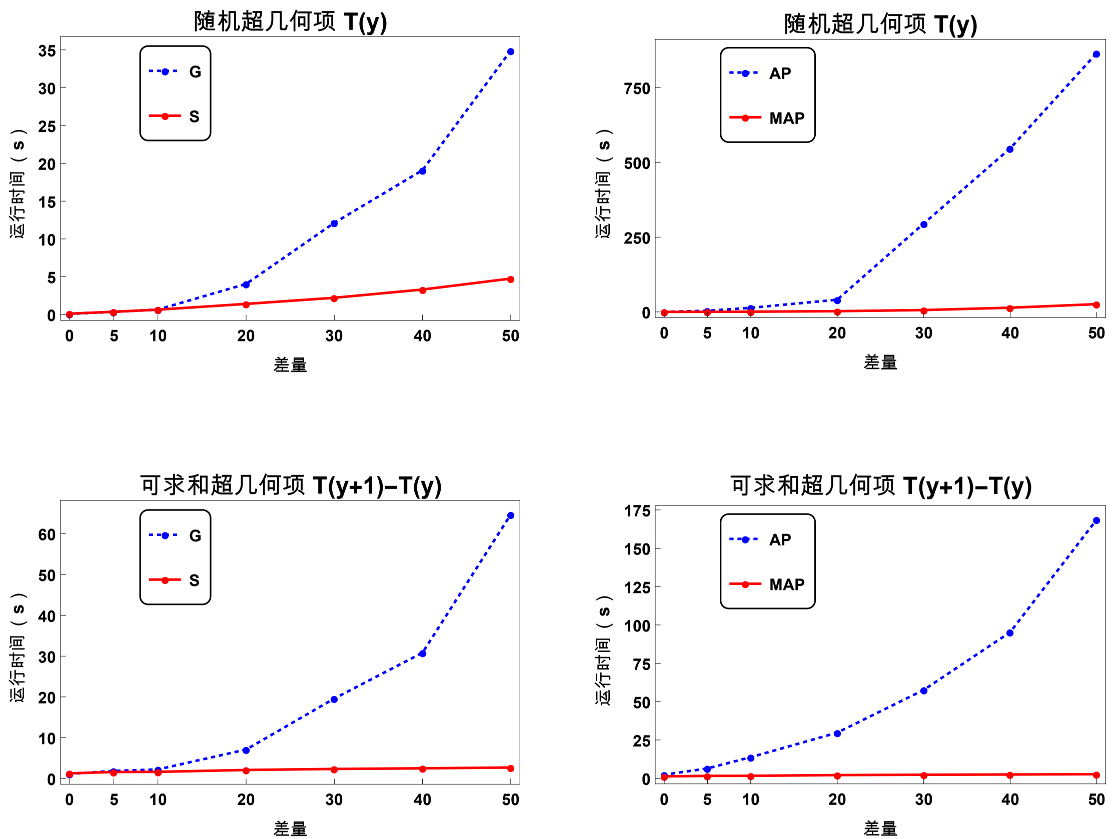

图 3.1: Gosper 算法，Abramov-Petkovšek 约化算法以及改进后的约化算法受差量的影响比较图

第四章　有理正规形式和离散留式的进一步性质[1]

4.1　前言

在前一章中我们改进了 Abramov-Petkovšek 约化算法，使其可以将单变元超几何项完全分解为可求和部分与不可求和部分之和，其中不可求和部分通过离散留式来刻画。如果一个双变元函数关于其两个变量的差商均为有理函数，那么我们称之为*双变元超几何项*。借鉴微分情形 [14]，我们希望利用改进后的约化算法来构造双变元超几何项邻差算子。其基本思想阐述如下。

给定一个双变元超几何项 $T(x, y)$。设 σ_x 和 σ_y 分别为关于 x 和 y 的平移算子。对于非负整数 i，依次将改进的 Abramov-Petkovšek 约化算法关于 y 作用于 $T, \sigma_x(T), \ldots, \sigma_x^i(T)$ 得到余式 $\sigma_x^j(T) \equiv_y r_j H \mod \mathbb{U}_K$，$j = 0, \ldots, i$，其中 H 是双变元超几何项且其关于 y 的差商 K 是平移既约的有理函数，而 r_j 则是关于 K 的留式。于是对于一组不全为零的以 x 为单变量的有理函数序列 $c_0, c_1, \ldots, c_i$，我们有

$$\sum_{j=0}^{i} c_j \sigma_x^j(T) \equiv_y \sum_{j=0}^{i} c_j r_j H \mod \mathbb{U}_K.$$

容易看出，当 $\sum_{j=0}^{i} c_j r_j = 0$ 时，$\sum_{j=0}^{i} c_j \sigma_x^j$ 是 T 的邻差算子。然而不同于微分情形，反之并不成立。这是由于 $\sum_{j=0}^{i} c_j r_j$ 不一定还是关于 K 的留式，即离散留式不满足线性性。因此定理 3.6 不适用。为了能够直接应用定理 3.6，从而将邻差算子的构造问题转化为计算离散留式的线性相关性，我们将在本章进一步研究离散留式的重要性质。

本章的主要结果是进一步探讨了离散留式的一些重要性质；并且采取同余的方法变相地将离散留式 “线性化”，使其得以应用于邻差算子的构造及其阶数界的估计。本章的主要目的是连接一元及二元超几何项，为下两章内容做准备。

本章内容安排如下：在第 4.2 节中，我们主要回顾有理正规形式的定义和性质。在第 4.3 节中，我们探讨并刻画离散留式的唯一性及相关性。为将改进

[1]本章的主要结果是与陈绍示、Manuel Kauers 和李子明合作得到。

后的算法应用于超几何项邻差算子的构造中，我们最后在第 4.4 节中深入讨论如何解决离散留式的非线性性问题。

4.2 有理正规形式

在本节中，我们将回顾 [10] 中平移等价以及有理正规形式的重要定义，并描述同一个有理函数的不同有理正规形式之间的关系。

定义 4.1. 设 p, q 为 $\mathbb{F}[y]$ 中的两个多项式。如果存在整数 k 使得 $p = \sigma_y^k(q)$，那么我们称 p 和 q 关于 y 是平移等价的 (shift-equivalent)，记作 $p \sim_y q$。

容易验证 $\sim_y$ 是等价关系。如果 $\mathbb{F}[y]$ 中一个多项式关于 y 的最高项系数为 1，则称该多项式是首一的。下面我们给出有理正规形式的定义，

定义 4.2. 设 f 为 $\mathbb{F}(y)$ 中的有理函数。如果有理函数 $K, S \in \mathbb{F}(y)$ 满足

$$f = K \cdot \frac{\sigma_y(S)}{S},$$

并且 K 是平移既约的，那么称二元组 (K, S) 为 f 的*有理正规形式* (rational normal form)。

根据 [10] 的定理 1 可知，每一个有理函数都至少存在一个有理正规形式。容易看出，超几何项的乘法分解和其差商的有理正规形式之间一一对应。具体地说，给定 $\mathbb{F}(y)$ 上的超几何项 T。那么二元组 $(K, S) \in \mathbb{F}(y)^2$ 是 $\sigma_y(T)/T$ 的有理正规形式当且仅当 K 和 S 分别为 T 的核及该核相应的壳当且仅当 $T = SH$ 为其乘法分解，其中 H 是以 K 为差商的超几何项。

下面的例子表明同一个有理函数可以有多个有理正规形式。

例 4.1 ([10] 的例子 1). 考虑有理函数

$$f = \frac{x(x+2)}{(x-1)(x+1)^2(x+3)}.$$

通过计算可知，以下二元有理函数组

$$\left(\frac{1}{(x+1)(x+3)}, (x-1)(x+1)\right), \quad \left(\frac{1}{(x+1)^2}, \frac{x-1}{x+2}\right),$$
$$\left(\frac{1}{(x-1)(x-3)}, \frac{x+1}{x}\right), \quad \left(\frac{1}{(x-1)(x+1)}, \frac{1}{x(x+2)}\right)$$

均为 f 的有理正规形式。

如下命题刻画了同一有理函数的不同有理正规形式之间的关系，其证明参见文献 [10, 定理 2]。

命题 4.1. 设 $(K,S),(K',S')\in\mathbb{F}(y)^2$ 为 $\mathbb{F}(y)$ 中同一有理函数的不同有理正规形式。假设 $K=cu/v$ 且 $K'=c'u'/v'$，其中 $c,c'\in\mathbb{F}$，u,u',v,v' 均是 $\mathbb{F}[y]$ 中的首一多项式，且 $\gcd(u,v)=\gcd(u',v')=1$。那么

(*i*) $c=c'$；

(*ii*) $\deg_y(u)=\deg_y(u')$ 且 $\deg_y(v)=\deg_y(v')$；

(*iii*) 由 u 和 u' 的非平凡首一不可约因子构成的两个多重集合之间存在一一对应 ϕ，使得对 u 的任意非平凡首一不可约因子 p 都有 $p\sim_y\phi(p)$；

(*iv*) 由 v 和 v' 的非平凡首一不可约因子构成的两个多重集合之间存在一一对应 ψ，使得对 v 的任意非平凡首一不可约因子 p 都有 $p\sim_y\psi(p)$。

4.3　离散留式的进一步性质

在本节中，我们将进一步探讨留式的重要性质。

与微分情形不同，在差分情形下，给定 $\mathbb{F}(y)$ 中平移既约的有理函数 K，那么同一有理函数关于 K 的留式可能有多个，即留式并不是唯一的。然而，这些留式之间存在着一个特殊关系。为了更好地描述该关系，我们首先引入无平移多项式之间平移相关的概念。

定义 4.3. 设 p,q 为 $\mathbb{F}[y]$ 中的两个无平移多项式。如果对于 p 的任意非平凡首一不可约因子 $f\in\mathbb{F}[y]\setminus\mathbb{F}$，总存在唯一的 q 的因子 $g\in\mathbb{F}[y]$，使得 $f\sim_y g$，并且 g 在 q 中的重数与 f 在 p 中的重数相同；反之亦然，那么我们称 p 与 q 关于 y 是平移相关的 (shift-related)，记作 $p\approx_y q$。

容易证明 $\approx_y$ 是等价关系。下面的命题给出了关于留式唯一性的刻画。

命题 4.2. 设 K 是 $\mathbb{F}(y)$ 中平移既约的有理函数。假设 r_1,r_2 为 $\mathbb{F}(y)$ 中同一有理函数关于 K 的两个留式。那么 r_1 和 r_2 的首分母平移相关。

证明. 假设 r_1, r_2 分别具有如下形式

$$r_1 = \frac{a_1}{b_1} + \frac{q_1}{v} \quad \text{且} \quad r_2 = \frac{a_2}{b_2} + \frac{q_2}{v},$$

其中对于 $i = 1, 2$ 都有 $a_i, b_i \in \mathbb{F}[y]$，$\deg_y(a_i) < \deg_y(b_i)$，$\gcd(a_i, b_i) = 1$，$b_i$ 是无平移的且与 K 强互素，$q_i \in \mathbb{W}_K$，并且 v 为 K 的分母。由于 r_1, r_2 为同一有理函数关于 K 的留式，因此 $r_1 \equiv_y r_2 \mod \mathbb{V}_K$。这等价于

$$\frac{a_1}{b_1} \equiv_y \frac{a_2}{b_2} + \frac{q_2 - q_1}{v} \mod \mathbb{V}_K.$$

从等式 (2.2) 可以知道存在有理函数 $w \in \mathbb{F}(y)$ 使得

$$\frac{a_1 v}{b_1} = u\sigma_y(w) - vw + \frac{a_2 v}{b_2} + (q_2 - q_1). \tag{4.1}$$

设 $f \in \mathbb{F}[y]$ 为 b_1 的非平凡首一不可约因子，并且其在 b_1 中的重数为 $\alpha > 0$。如果 f^α 也是 b_2 的因子，那么命题得证。否则我们有 f^α 不整除 b_2。记有理函数 w 的分母为 $\mathrm{den}(w)$。根据 b_1 与 K 的强互素性，我们有 $\gcd(f^\alpha, v) = 1$。利用等式 (4.1) 及部分分式分解可知，f^α 只能整除 $\mathrm{den}(w)$ 或者 $\sigma_y(\mathrm{den}(w))$。当 f^α 整除 $\mathrm{den}(w)$ 时，令

$$m = \max\{k \in \mathbb{N} : \sigma_y^k(f)^\alpha \mid \mathrm{den}(w)\}.$$

于是 $m \geq 0$。由于 b_1 与 K 强互素，$\gcd(\sigma_y^{m+1}(f)^\alpha, u) = 1$。由 m 的极大性可知 $\sigma_y^{m+1}(f)^\alpha$ 整除 $\sigma_y(\mathrm{den}(w))$ 但不整除 $\mathrm{den}(w)$。注意到 b_1 是无平移的且 $f \mid b_1$，所以我们有 $\sigma_y^{m+1}(f)^\alpha \nmid b_1$。因此根据等式 (4.1) 可推导出 $\sigma_y^{m+1}(f)^\alpha \mid b_2$。类似地，当 f^α 整除 $\sigma_y(\mathrm{den}(w))$ 时，我们有 $\sigma_y^\ell(f)^\alpha$ 整除 b_2，其中

$$\ell = \min\{k \in \mathbb{Z} : \sigma_y^k(f)^\alpha \mid \mathrm{den}(w)\} \leq -1.$$

综上所述，对于 b_1 中的任意非平凡首一不可约因子 f，b_2 中总存在一个因子与 f 平移等价，并且该因子在 b_2 中的重数至少为 f 在 b_1 中的重数。再根据 b_2 的无平移性可知该因子是唯一的。反之可由类似推导得出。根据定义，我们有 $b_1 \approx_y b_2$。 □

不难看出，上面的命题揭示了同一乘法分解下，给定超几何项的壳关于其对应核的不同留式之间的特殊关系。为了研究不同乘法分解的情形，我们需要引入以下两个引理。

引理 4.3. 设 (K, S) 为有理函数 $f \in \mathbb{F}(y)$ 的有理正规形式，且 r 为 S 关于 K 的留式。记

$$K = \frac{u}{v} \quad \text{其中 } u, v \in \mathbb{F}[y] \text{ 且 } \gcd(u, v) = 1.$$

假设 $p \in \mathbb{F}[y]$ 是 v 中重数为 $\alpha > 0$ 的非平凡首一不可约因子。那么二元组

$$(K', S') = \left(\frac{u}{v' \sigma_y(p)^\alpha}, \, p^\alpha S \right)$$

为 f 的有理正规形式，其中 $v' = v/p^\alpha$。此外，存在 S' 关于 K' 的留式 r' 使得 r' 和 r 具有相同的首分母。

证明. 由于 K 是平移既约的，因此 K' 也是平移既约的。注意到

$$\frac{\sigma_y(T)}{T} = K \frac{\sigma_y(S)}{S} = \frac{u}{v' p^\alpha} \frac{\sigma_y(S)}{S} = \frac{u}{v' \sigma_y(p)^\alpha} \frac{\sigma_y(p^\alpha S)}{p^\alpha S} = K' \frac{\sigma_y(S')}{S'},$$

从而根据定义，(K', S') 为 $\sigma_y(T)/T$ 的有理正规形式。假设 $r = a/b + q/v$，其中 $a, b \in \mathbb{F}[y]$，$\deg_y(a) < \deg_y(b)$，$\gcd(a, b) = 1$，b 是无平移的且与 K 强互素，以及 $q \in \mathbb{W}_K$。从而存在有理函数 $g \in \mathbb{F}(y)$ 使得

$$S = K\sigma_y(g) - g + \frac{a}{b} + \frac{q}{v' p^\alpha}.$$

因此

$$\begin{aligned}
S' = p^\alpha S &= p^\alpha K \sigma_y(g) - p^\alpha g + \frac{a p^\alpha}{b} + \frac{q}{v'} \\
&= \frac{u}{v' \sigma_y(p)^\alpha} \sigma_y(p^\alpha g) - p^\alpha g + \frac{a p^\alpha}{b} + \frac{q \sigma_y(p)^\alpha}{v' \sigma_y(p)^\alpha} \\
&= K' \sigma_y(p^\alpha g) - p^\alpha g + \frac{a p^\alpha}{b} + \frac{q \sigma_y(p)^\alpha}{v' \sigma_y(p)^\alpha}.
\end{aligned}$$

由于 b 与 K 强互素，因此 $\gcd(ap^\alpha, b) = 1$。利用算法 4 的步骤 3 和步骤 4 可计算多项式 $a', q' \in \mathbb{F}[y]$ 满足 $\deg_y(a') < \deg_y(b)$，$\gcd(a', b) = 1$ 及 $q' \in \mathbb{W}_{K'}$，使得

$$S' \equiv_y \frac{a'}{b} + \frac{q'}{v' \sigma_y(p)^\alpha} \mod \mathbb{V}_{K'}.$$

注意到 b 与 K 强互素，从而根据定义 b 与 K' 也强互素。因为 b 是无平移的，所以 $a'/b + q'/(v' \sigma_y(p)^\alpha)$ 为 S' 关于 K' 的留式。

□

引理 4.4. 设 (K,S) 为有理函数 $f\in\mathbb{F}(y)$ 的有理正规形式。且 r 为 S 关于 K 的留式。记

$$K=\frac{u}{v}\quad \text{其中 } u,v\in\mathbb{F}[y] \text{ 且 } \gcd(u,v)=1.$$

假设 $p\in\mathbb{F}[y]$ 是 u 中重数为 $\alpha>0$ 的非平凡首一不可约因子。那么二元组

$$(K',\ S')=\left(\frac{u'\sigma_y^{-1}(p)^\alpha}{v},\ \sigma_y^{-1}(p)^\alpha S\right)$$

为 f 的有理正规形式，其中 $u'=u/p^\alpha$。此外，存在 S' 关于 K' 的留式 r' 使得 r' 和 r 具有相同的首分母。

证明. 类似引理 4.3 可证。 □

命题 4.5. 设 (K,S) 为有理函数 $f\in\mathbb{F}(y)$ 的有理正规形式，且 r 为 S 关于 K 的留式。那么存在 f 的另一有理正规形式 $(\tilde{K},\tilde{S})$ 使得

(i) $\tilde{K}$ 的分子和分母均是无平移的；

(ii) 存在 $\tilde{S}$ 关于 $\tilde{K}$ 的留式 $\tilde{r}$ 满足 $\tilde{r}$ 和 r 具有相同的首分母。

证明. 设 $K=u/v$，其中 $u,v\in\mathbb{F}[y]$ 且 $\gcd(u,v)=1$。设 b 为留式 r 的首分母。

假设 v 不是无平移的，那么 v 中存在两个分别以 $\alpha>0$ 和 $\beta>0$ 为重数的非平凡首一不可约因子 p 和 $\sigma_y^m(p)$ $(m>0)$。不失一般性，假设对任意整数 $\ell<0$ 及 $\ell>m$，都有 $\sigma_y^\ell(p)\nmid v$。根据引理 4.3 可知，存在 f 的一个有理正规形式 (K',S')，使得 K' 的分母为 $\operatorname{den}(K')=v'\sigma_y(p)^\alpha$，其中 $v'=v/p^\alpha$；而分子仍为 u。此外，S' 存在关于 K' 的以 b 为首分母的留式。如果 $m=1$，那么 $\sigma_y(p)$ 是 $\operatorname{den}(K‘)$ 中重数为 $\alpha+\beta$ 的不可约因子。否则，它是 $\operatorname{den}(K')$ 中重数为 α 的不可约因子。更重要的是，对任意整数 $\ell<1$ 都有 $\sigma_y^\ell(p)\nmid\operatorname{den}(K')$。反复迭代使用上述论证，我们将得到 f 的一个有理正规形式，使得 $\sigma_y^m(p)$ 整除新核的分母，但对任意整数 $i\neq m$ 都有 $\sigma_y^i(p)$ 不整除该分母；并且新核的分子仍为 u。此外，相应的新壳存在关于新核的以 b 为首分母的留式。对 v 中的每个不可约因子进行上述同样的处理，我们最终得到 f 的一个有理正规形式，使得其核以 u 为分子且具有无平移的分母，而相应的壳则存在关于该核的以 b 为首分母的留式。

根据引理 4.4，我们可以进一步得到 f 的一个有理正规形式，使得其核分母不变且具有无平移的分子，而相应的壳则存在关于该核的以 b 为首分母的留式。命题得证。 □

对于 $\mathbb{F}(y)$ 中的一个有理函数，如果它是平移既约的，并且其分子分母均是无平移的，那么我们称该有理函数无平移。

命题 4.6. *设 (K, S) 和 (K', S') 均为 $\mathbb{F}(y)$ 中有理函数 f 的有理正规形式，并且 r 和 r' 分别为 S（关于 K）和 S'（关于 K'）的留式。那么 r 和 r' 的首分母平移相关。*

证明. 设 b 和 b' 分别为 r 和 r' 的首分母。根据上述命题可知，存在 f 的两个有理正规形式 $(\tilde{K}, \tilde{S})$ 和 $(\tilde{K}', \tilde{S}')$，使得 $\tilde{K}$ 和 $\tilde{K}'$ 均是无平移的，并且 $\tilde{S}$ 和 $\tilde{S}'$ 关于其对应核分别存在以 b 和 b' 为首分母的留式。

由命题 4.1 可知, $\tilde{K}$ 和 $\tilde{K}'$ 的对应分母 $\tilde{v}$ 和 $\tilde{v}'$ 平移相关。因此对 $\tilde{v}$ 中任意重数为 $\alpha > 0$ 的非平凡首一不可约因子 p，$\tilde{v}'$ 中总存在唯一的具有相同重数的因子 $\sigma_y^{\ell}(p)$，其中 $\ell \in \mathbb{Z}$。不失一般性，假设 $\ell \leq 0$。否则我们可以交换 $(\tilde{K}, \tilde{S})$ 和 $(\tilde{K}', \tilde{S}')$ 的角色进行类似推理。如果 $\ell < 0$，对 $(\tilde{K}', \tilde{S}')$ 反复运用引理 4.3，我们可以得到 f 的新的有理正规形式 $(\tilde{K}'', \tilde{S}'')$，使得 $\tilde{K}''$ 是无平移的，并具有与 $\tilde{K}'$ 相同的分子，且 p 为 $\tilde{K}''$ 的分母中重数为 α 的因子。此外，$\tilde{S}''$ 存在关于 $\tilde{K}''$ 的以 b' 为首分母的留式。

对 $\tilde{v}$ 中的每个不可约因子进行上述同样的处理，并且对分子同理运用引理 4.4，我们最终得到 f 的两个有理正规形式使得其核相同，并且相应两个壳分别存在关于该核的以 b 和 b' 为首分母的留式。根据命题 4.2，我们有 $b \approx_y b'$。 □

4.4 离散留式之和

与微分情形不同，在差分情形下留式不满足线性性，即两个留式之和不一定还是留式。这是因为无平移多项式的最小公倍式不一定还是无平移的。从而导致了我们无法直接利用改进后的约化算法来构造双变元超几何项的邻差算子。然而，在一定条件下，留式在求和运算下封闭。

引理 4.7. *在符号约定 3.1 的假设下，设 $r, s \in \mathbb{F}(y)$ 为关于 K 的留式，即*

$$r = \frac{a}{f} + \frac{p}{v} \quad \text{且} \quad s = \frac{b}{g} + \frac{q}{v},$$

其中 $a, f, b, g \in \mathbb{F}[y]$，$\deg_y(a) < \deg_y(f)$，$\deg_y(b) < \deg_y(g)$，$p, q \in \mathbb{W}_K$，并且 f, g 是无平移的且与 K 强互素。进一步假设 $\gcd(a, f) = \gcd(b, g) = 1$。那

么 f,g 的最小公倍式是无平移的当且仅当对任意常数 $\lambda,\mu\in\mathbb{F}$ 都有 $\lambda r+\mu s$ 是关于 K 的留式。

证明. 设 h 为 f,g 的最小公倍式。于是

$$\lambda r+\mu s=\frac{\lambda a(h/f)+\mu b(h/g)}{h}+\frac{\lambda p+\mu q}{v}. \tag{4.2}$$

首先证明必要性，即已知 h 是无平移的。易知 $\deg_y(\lambda a(h/f)+\mu b(h/g))<\deg_y(h)$。由于 $\mathbb{W}_K$ 是线性空间，因而 $\lambda p+\mu q\in\mathbb{W}_K$。注意到 f 和 g 与 K 强互素，于是 h 与 K 也是强互素的。根据留式定义，我们有 $\lambda r+\mu s$ 是关于 K 的留式。

我们采用反证法证明充分性。假设 h 不是无平移的。已知 $\lambda r+\mu s$ 是关于 K 的留式，于是存在 $b^*,h^*\in\mathbb{F}[y]$ 和 $q^*\in\mathbb{W}_K$ 满足 $\deg_y(b^*)<\deg_y(h^*)$，h^* 无平移且与 K 强互素，使得

$$\lambda r+\mu s=\frac{b^*}{h^*}+\frac{q^*}{v}.$$

结合等式 (4.2) 并化简可得

$$\frac{(\lambda a(h/f)+\mu b(h/g))v}{h}=\frac{b^*v}{h^*}+q^*-\lambda p-\mu q. \tag{4.3}$$

注意到 h 为 f,g 的最小公倍式且 f,g 均是无平移的。由于 h 不是无平移的，因此存在 h 的非平凡首一不可约因子 p' 和 $\sigma_y^\ell(p')$ 使得 $p'\mid f$ 且 $\sigma_y^\ell(p')\mid g$，其中 ℓ 为非零整数。因为 $\gcd(a,f)=\gcd(b,g)=1$ 且 $h\mid fg$，所以

- $p'\nmid(h/f)$ 且 $p'\nmid a$，但 $p'\mid(h/g)$；
- $\sigma_y^\ell(p')\nmid(h/g)$ 且 $\sigma_y^\ell(p)\nmid b$，但 $\sigma_y^\ell(p')\mid(h/f)$。

注意到 f 和 g 均与 K 强互素，于是 h 与 K 也是强互素的。从而 $p',\sigma_y^\ell(p')$ 均为等式 (4.3) 左侧有理函数分母的因子。由部分分式分解可知 $p',\sigma_y^\ell(p')$ 均整除 h^*，这与 h^* 的无平移性矛盾。引理得证。 □

利用上述引理，我们可以采取同余的方法将最小公倍式平移化，从而将留式“线性化”。这就是本节接下来的主要内容，即证明在模去线性空间 $\mathbb{V}_K$ 的前提下，两个留式之和依旧是一个留式。

在进入详细讨论之前，我们先通过一个简单的例子来了解一下基本想法。

例 4.2. 设 $K = 1/y$，$r = 1/(2y+1)$ 以及 $s = 1/(2y+3)$。那么根据定义，K 是平移既约的，并且 r 和 s 都是关于 K 的留式。然而，它们的和却不是。这是因为 $r+s$ 的分母 $(2y+1)(2y+3)$ 不是无平移的。不过，我们依旧可以找到等价的留式。例如，我们有

$$r + s \equiv_y -\frac{3m}{2(2y+1)} + \frac{1}{2y} \mod \mathbb{V}_K.$$

值得注意的是，满足上式的留式并不是唯一的。比如我们还可以有如下选择

$$r + s \equiv_y -\frac{2}{3(2y+3)} + \frac{1}{3y} \mod \mathbb{V}_K.$$

为了刻画两个无平移多项式的最小公倍式的无平移性，我们下面引入差量及平移互素的概念。

定义 4.4. 设 f, g 为 $\mathbb{F}[y]$ 中的两个非零多项式。如果存在非负整数 $\ell \geq 0$ 使得 f 和 $\sigma_y^\ell(g)$ 有非平凡公因子，那么定义 f 对 g 的*差量* (dispersion) 为满足条件的最大 ℓ；否则定义其为 -1。如果对于任意非零整数 ℓ，都有 $\gcd(f, \sigma_y^\ell(g)) = 1$，那么我们称 f 与 g 是*平移互素*的 (shift-coprime)。

不难看出，两个无平移多项式的最小公倍式是无平移的当且仅当这两个多项式平移互素当且仅当这两个多项式对彼此的相互差量均为 -1。现在给定 $\mathbb{F}[y]$ 中的两个非零无平移多项式 f 和 g。根据多项式因式分解及差量计算（具体参见文献 [10]），我们可以将多项式 g 唯一分解为

$$g = \tilde{g}\sigma_y^{\ell_1}(p_1)^{m_1} \cdots \sigma_y^{\ell_k}(p_k)^{m_k}, \tag{4.4}$$

其中 $\tilde{g}$ 与 f 平移互素，$p_1, \ldots, p_k$ 为 f 中互不相同的首一不可约因子，$\ell_1, \ldots, \ell_k$ 为非零整数，而 $m_1, \ldots, m_k$ 分别为 $\sigma_y^{\ell_1}(p_1), \ldots, \sigma_y^{\ell_k}(p_k)$ 在 g 中的重数。我们称等式 (4.4) 为 g 关于 f 的*平移互素分解* (shift-coprime decomposition)。

注 4.1. 由于 f 和 g 都是无平移的，等式 (4.4) 中的因子 $\tilde{g}, \sigma_y^{\ell_1}(p_1), \ldots, \sigma_y^{\ell_k}(p_k)$ 之间彼此互素。

为了构造一个留式使其同余于给定的两个留式之和，我们还需要引入三个重要的引理。第一个引理相当于文献 [14] 中的有理核约化算法 (kernel reduction) 在差分情形下的模拟。

引理 4.8. 在符号约定 *3.1* 的假设下，设 p_1, p_2 为 $\mathbb{F}[y]$ 中的两个多项式且 m 是个非负整数。于是存在两个多项式 $q_1, q_2 \in \mathbb{W}_K$ 使得

$$\frac{p_1}{\prod_{i=0}^{m} \sigma_y^i(v)} \equiv_y \frac{q_1}{v} \mod \mathbb{V}_K \quad \text{且} \quad \frac{p_2}{\prod_{j=1}^{m} \sigma_y^{-j}(u)} \equiv_y \frac{q_2}{v} \mod \mathbb{V}_K.$$

证明. 首先我们来证明第一个同余式。为此，令 $w_m = \prod_{i=0}^{m} \sigma_y^i(v)$；并对 m 使用数学归纳法。由引理 3.3 可知，$m = 0$ 时结论成立。下面假设 $m > 1$ 且结论对 $m - 1$ 成立。考虑如下等式

$$\frac{p_1}{w_m} = K\sigma_y\left(\frac{s}{w_{m-1}}\right) - \frac{s}{w_{m-1}} + \frac{t}{w_{m-1}},$$

其中 $s, t \in \mathbb{F}[y]$ 是待定多项式。可以验证上述等式成立当且仅当

$$\sigma_y(s)u + (t - s)\sigma_y^m(v) = p_1.$$

由于 u 和 $\sigma_y^m(v)$ 互素，因此待定多项式 s 和 t 可以通过扩展欧几里德算法计算得到。于是，$p_1/w_m \equiv_y t/w_{m-1} \mod \mathbb{V}_K$。利用归纳假设，$p_1/w_m$ 满足第一个同余式，即结论对 m 也成立。

为了证明第二个同余式，我们需要利用如下等式

$$\frac{p_2}{\sigma_y^{-1}(u)} = K\sigma_y\left(-\frac{p_2}{\sigma_y^{-1}(u)}\right) - \left(-\frac{p_2}{\sigma_y^{-1}(u)}\right) + \frac{\sigma_y(p_2)}{v}.$$

该等式蕴含着 $p_2/\sigma_y^{-1}(u) \equiv_y \sigma_y(p_2)/v \mod \mathbb{V}_K$。根据引理 3.3，存在 $\mathbb{W}_K$ 中的多项式 q_2 使得 q_2/v 是 $p_2/\sigma_y^{-1}(u)$ 关于 K 的一个留式。于是 $m = 0$ 时结论成立。现在假设 $m > 1$ 且第二个同余式对 $m - 1$ 成立。通过类似上述关于 p_1/w_m 的归纳证明，引理得证。 □

下面的引理保证了我们可以在模 $\mathbb{V}_K$ 的前提下随意平移有理函数。

引理 4.9. 设 K 是 $\mathbb{F}(y)$ 中非零且平移既约的有理函数。那么对任意有理函数 $f \in \mathbb{F}(y)$ 及任意正整数 ℓ，都有

$$f \equiv_y \sigma_y^{\ell}(f) \prod_{i=0}^{\ell-1} \sigma_y^i(K) \equiv_y \sigma_y^{-\ell}(f) \prod_{i=1}^{\ell} \sigma_y^{-i}\left(\frac{1}{K}\right) \mod \mathbb{V}_K.$$

证明. 首先我们通过对 ℓ 使用数学归纳法来证明第一个同余式。当 $\ell=1$ 时，等式 $f=K\sigma_y(-f)-(-f)+\sigma_y(f)K$ 蕴含着 $f\equiv_y \sigma_y(f)K \mod \mathbb{V}_K$，即结论成立。下面假设 $\ell>1$ 且结论对 $\ell-1$ 成立。令 $w_\ell=\prod_{i=0}^{\ell-1}\sigma_y^i(K)$。于是由归纳假设知，

$$f\equiv_y \sigma_y^{\ell-1}(f)w_{\ell-1} \mod \mathbb{V}_K.$$

此外，根据归纳奠基可得 $\sigma_y^{\ell-1}(f)w_{\ell-1}\equiv_y \sigma_y^{\ell}(f)w_\ell \mod \mathbb{V}_K$。综合上述同余式，我们就有 $f\equiv_y \sigma_y^\ell(f)w_\ell \mod \mathbb{V}_K$，此即为第一个同余式。

第二个同余式可以被类似证明。当 $\ell=1$ 时，令 $r=\sigma_y^{-1}(f)\sigma_y^{-1}(1/K)$。那么等式 $f=K\sigma_y(r)-r+r$ 蕴含着 $f\equiv_y r \mod \mathbb{V}_K$。接着通过类似第一个同余式的归纳推导，引理得证。 □

引理 4.10. *在符号约定 3.1 的假设下，设 a,b 为 $\mathbb{F}[y]$ 中的两个多项式且 $b\neq 0$。假设 b 是无平移的且与 K 强互素。进一步假设对于某个整数 ℓ，$\sigma_y^\ell(b)$ 与 K 也是强互素的。那么存在两个多项式 $c,q\in\mathbb{F}[y]$ 满足 $\deg_y(c)<\deg_y(b)$，$q\in\mathbb{W}_K$，使得 $c/\sigma_y^\ell(b)+q/v$ 是 a/b 关于 K 的留式。*

证明. 首先，我们考虑 $\ell\geq 0$ 的情形。如果 $\ell=0$，那么存在 $\mathbb{F}[y]$ 中的两个多项式 c,p 使得 $\deg_y(c)<\deg_y(b)$ 并且 $a/b=c/b+p$。再由注释 3.1 可知，引理成立。现在假设 $\ell>0$。根据引理 4.9 中的第一个同余式可得

$$\frac{a}{b}\equiv_y \sigma_y^\ell\left(\frac{a}{b}\right)\prod_{i=0}^{\ell-1}\sigma_y^i(K)=\frac{\sigma_y^\ell(a)\prod_{i=0}^{\ell-1}\sigma_y^i(u)}{\sigma_y^\ell(b)\prod_{i=0}^{\ell-1}\sigma_y^i(v)} \mod \mathbb{V}_K.$$

注意到 $\sigma_y^\ell(b)$ 与 K 强互素，于是它与乘积 $v\sigma_y(v)\cdots\sigma_y^{\ell-1}(v)$ 互素。根据部分分式分解，我们有

$$\frac{a}{b}\equiv_y \frac{c}{\sigma_y^\ell(b)}+\frac{\tilde{q}}{\prod_{i=0}^{\ell-1}\sigma_y^i(v)} \mod \mathbb{V}_K,$$

其中 $c,\tilde{q}\in\mathbb{F}[y]$ 为满足上述同余式的多项式，并且 $\deg_y(c)<\deg_y(b)$。根据引理 4.8 中的第一个同余式可知，存在 $q\in\mathbb{W}_K$ 使得

$$\frac{\tilde{q}}{\prod_{i=0}^{\ell-1}\sigma_y^i(v)}\equiv_y \frac{q}{v} \mod \mathbb{V}_K.$$

结合上述两个同余式可推出，引理对 $\ell\geq 0$ 成立。

对 $\ell<0$ 的情形，利用引理 4.9 和 4.8 的第二个同余式，类似可证。 □

注 4.2. 在上述引理的假设下，设 p 为 b 的非平凡因子且 $\gcd(b', p) = 1$，其中 $b' = b/p$。进一步假设对于某个整数 ℓ, $\sigma_y^{\ell}(p)$ 与 K 也是强互素的。那么利用部分分式分解及上述引理可知，存在两个多项式 $c, q \in \mathbb{F}[y]$ 满足 $\deg_y(c) < \deg_y(b)$ 和 $q \in \mathbb{W}_K$，使得 $c/(b'\sigma_y^{\ell}(p)) + q/v$ 是 a/b 关于 K 的留式。

我们将引理 4.10 和注释 4.2 统称为“首分母平移”性质。

利用上述引理，现在我们来证明本节的主要结果。

定理 4.11. *在符号约定 3.1 的假设下，设 r 和 s 是关于 K 的两个留式。那么存在关于 K 的留式 t，使得 $t \equiv_y s \mod \mathbb{V}_K$，并且对任意常数 $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$ 都有 $\lambda r + \mu t$ 为 $\lambda r + \mu s$ 关于 K 的留式。*

证明. 根据留式定义，r 和 s 具有如下形式

$$r = \frac{a}{f} + \frac{p}{v} \quad 且 \quad s = \frac{b}{g} + \frac{q}{v},$$

其中 $a, f, b, g \in \mathbb{F}[y]$，$\deg_y(a) < \deg_y(f)$，$\deg_y(b) < \deg_y(g)$，$p, q \in \mathbb{W}_K$，并且 f, g 是无平移的且与 K 强互素。假设等式 (4.4) 是 g 关于 f 的平移互素分解。对 $i = 1, \ldots, k$，令 $P_i = \sigma_y^{\ell_i}(p_i)$。根据注释 4.1 以及部分分式分解，我们有

$$\frac{b}{g} = \frac{b_0}{\tilde{g}} + \sum_{i=1}^{k} \frac{b_i}{P_i^{m_i}}, \tag{4.5}$$

其中 $b_0, b_1, \ldots, b_k \in \mathbb{F}[y]$，$\deg_y(b_0) < \deg_y(\tilde{g})$ 且 $\deg_y(b_i) < m_i \deg_y(p_i)$。注意到每个 $p_i = \sigma_y^{-\ell_i}(P_i)$ 都是 f 的因子，从而它们均与 K 强互素。对等式 (4.5) 中的每个分式 $b_i/P_i^{m_i}$ 应用引理 4.10 并化简得到

$$\frac{b}{g} \equiv_y \frac{b_0}{\tilde{g}} + \sum_{i=1}^{k} \frac{b_i'}{p_i^{m_i}} + \frac{q'}{v} \mod \mathbb{V}_K, \tag{4.6}$$

其中 $b_1', \ldots, b_k' \in \mathbb{F}[y]$，$\deg_y(b_i') < m_i \deg_y(p_i)$ 且 $q' \in \mathbb{W}_K$。令 $h = \tilde{g} \prod_{i=1}^{k} p_i^{m_i}$。于是由 f 和 g 的无平移性及与 K 的强互素性可知，h 也是无平移的且也与 K 强互素。此外，由于 f 是无平移的，因此它的所有因子（包括多项式 p_i）都与 f 本身平移互素。由此可知 h 也与 f 平移互素。设

$$b^* = b_0 \prod_{i=1}^{k} p_i^{m_i} + \tilde{g} \sum_{i=1}^{k} b_i' \prod_{j=1, j\neq i}^{k} p_j^{m_j} \quad 且 \quad q^* = q + q'.$$

于是

$$t = \frac{q}{v} + \left(\frac{b_0}{\tilde{g}} + \sum_{i=1}^{k} \frac{b_i'}{p_i^{m_i}} + \frac{q'}{v} \right) = \frac{b^*}{h} + \frac{q^*}{v}.$$

容易看出 $\deg_y(b^*) < \deg_y(h)$ 且 $q^* \in \mathbb{W}_K$。从而 t 是关于 K 的留式，且

$$t \equiv_y s \mod \mathbb{V}_K.$$

注意到 f 和 h 是平移互素的，所以它们的最小公倍式是无平移的。根据引理 4.7 可知，$\lambda r + \mu t$ 仍是关于 K 的留式，并且

$$\lambda r + \mu s \equiv_y \lambda r + \mu t \mod \mathbb{V}_K.$$

□

第五章　基于改进的约化算法构造邻差算子[1]

5.1　前言

在组合数学的相关研究中，我们经常需要计算一些特殊函数的和式或者证明与其相关的组合恒等式。这些特殊函数中的一大类属于超几何项，即系数为多项式的一阶（偏）差分线性方程的非零解。然而，传统的方法往往具有高度技巧性 [40]，无法统一解决一类问题。20 世纪 90 年代，Wilf 和 Zeilberger 在他们的一系列工作 [42–47] 中建立了 Wilf-Zeilberger 理论，它可以系统地解决一大类涉及超几何项定求和或恒等式证明的问题。该理论现已成为符号计算应用于组合数学、数学物理等领域的桥梁。Wilf-Zeilberger 理论的核心步骤是构造超几何项的邻差算子，而构造算法的效率则决定该理论的实用性。20 世纪 90 年代初期，Zeilberger [47] 首先提出的构造算法是基于微分、差分算子环上的非交换消元。该算法后在 Takayama [41] 及 Chyzak，Salvy [25] 等人的工作中利用非交换 Gröbner 基方法得到改进。1990 年，Zeilberger [46] 提出利用参数化的 Gosper 算法来“快速”构造超几何项邻差算子的算法，即现在所熟知的 Zeilberger（快速）算法。几乎同时，Almkvist 和 Zeilberger [11] 将该算法推广到微分超指数函数及混合情形。2000 年，Chyzak [24] 将此类算法推广到满足高阶线性微分与差分方程的函数；之后由 Koutschan 在其博士论文 [31] 中进一步改进。2005 年，Zeilberger 及其学生 Apagodu 基于线性系统的求解提出构造邻差算子的新算法，后称之为 Apagodu-Zeilberger 算法。该算法比前几类算法更加快速并易于分析。以上算法的共同特点是在计算邻差算子的同时不可避免地需要计算相应的验证函数。然而在许多实际应用中，验证函数往往是多余的，并且存储空间一般都远大于邻差算子。分离邻差算子及其相应验证函数的计算，在实际应用中意义重大。2010 年，Bostan 等人 [13] 在微分情形下基于 Hermite 约化提出构造双变元有理函数的邻差算子的新算法。新算法首次解决邻差算子和相应验证函数计算的分离问题。该算法之后进一步被推广到三变元有理情形 [22]，多变元有理情形 [15]，双变元超指数情形 [14] 以及双变元代数情形 [21]。这些算法在实

[1] 本章的主要结果是与陈绍示、Manuel Kauers 和李子明合作得到。

际应用中效率均优于经典算法，然而它们主要是针对微分情形设计的。在本章中，我们将讨论如何利用约化算法有效地计算超几何项的邻差算子。

本章的主要结果是基于第三章中改进的约化算法，设计关于双变元超几何项极小邻差算子的新构造算法。新算法可以分离邻差算子和相应验证函数的计算。同样的，我们也在计算机代数系统 Maple 中实现了新算法。根据实例测试发现，在同样输出相应验证函数的情况下，新程序比 Zeilberger 算法在 Maple 软件包 SumTools[Hypergeometric] 中的对应程序 Zeilberger 更加快速；此外，当新程序选择不输出相应验证函数时，它的效率远远高于 Maple 所带程序。

本章内容安排如下：在第 5.2 节中，我们介绍本章所需的基本知识。利用改进的 Abramov-Petkovšek 约化算法，我们在第 5.3 节中提出构造双变元超几何项极小邻差算子的新算法，并给出其终止性证明。最后在第 5.4 节中，我们给出上述算法的程序实现，并进行实例测试及程序比较。

5.2 预备知识

在本节中，我们将第二章中涉及单变元超几何项的相关概念推广到双变元情形。此外，我们将引入邻差算子、验证函数、整线性多项式等重要定义，并阐述关于邻差算子存在性的判定准则。

设 $\mathcal{C}$ 是特征为 0 的域，且 x, y 为 $\mathcal{C}$ 上的未定元。令 $\mathcal{C}(x,y)$ 表示以 $\mathcal{C}$ 为基域的关于 x, y 的有理函数域。分别定义 σ_x 和 σ_y 为 $\mathcal{C}(x,y)$ 上关于 x 和 y 的平移算子，即对任意的有理函数 $f \in \mathcal{C}(x,y)$，都有

$$\sigma_x(f(x,y)) = f(x+1,y) \quad 和 \quad \sigma_y(f(x,y)) = f(x,y+1).$$

容易验证 σ_x, σ_y 均构成 $\mathcal{C}$-自同构。我们称三元组 $(\mathcal{C}(x,y), \{\sigma_x, \sigma_y\})$ 构成一个*偏差分域* (partial difference field)。若一个交换环 $\mathbb{D}$ 满足如下性质：

1. $\mathcal{C}(x,y) \subset \mathbb{D}$；

2. $\mathcal{C}(x,y)$ 上的平移算子 σ_x, σ_y 均可以扩展为 $\mathbb{D}$ 上的单同态，为简单起见仍记为 σ_x 和 σ_y；

则称三元组 $(\mathbb{D}, \{\sigma_x, \sigma_y\})$ 为 $(\mathcal{C}(x,y), \{\sigma_x, \sigma_y\})$ 的*偏差分扩环* (partial difference ring extension)；有时简称 $\mathbb{D}$ 为 $\mathcal{C}(x,y)$ 的*偏差分扩环*。类似第二章，我们定义 $\mathbb{D}$

中关于 σ_x, σ_y 的常数为在 σ_x 和 σ_y 作用下保持不变的元素；并且同样根据 [9, 引理 2] 知 $\mathcal{C}(x,y)$ 中所有关于 σ_x, σ_y 的常数构成域 $\mathcal{C}$。下面给出双变元超几何项的定义。

定义 5.1. 设 $\mathbb{D}$ 是 $\mathcal{C}(x,y)$ 的偏差分扩环，且 T 为环 $\mathbb{D}$ 中的非零元素。如果存在有理函数 $f, g \in \mathcal{C}(x,y)$ 使得 $\sigma_x(T) = fT$ 和 $\sigma_y(T) = gT$ 成立，那么我们称 T 为有理函数域 $\mathcal{C}(x,y)$ 上的超几何项 (hypergeometric term)。而有理函数 f 和 g 则分别被称为 T 关于 x 和 y 的差商 (shift-quotient)。

若没有特别说明，我们假设后文中出现的超几何项都在 $\mathcal{C}(x,y)$ 的某个差分扩环中。

令 $\mathbb{F}$ 为 $\mathcal{C}$ 上关于 x 的单变元有理函数域，即 $\mathbb{F} = \mathcal{C}(x)$。假设 $\mathbb{F}\langle S_x \rangle$ 为 $\mathbb{F}$ 上关于 x 的线性差分算子环，并且对 $\mathbb{F}$ 中的任意元素 r，都有交换规则 $S_x r = \sigma_x(r) S_x$。给定 $\mathbb{F}(y)$ 上的超几何项 T，定义 $\mathbb{F}\langle S_x \rangle$ 中的线性算子 $L = \sum_{i=0}^{\rho} \ell_i S_x^i$ 对 T 的作用为 $L(T) = \sum_{i=0}^{\rho} \ell_i \sigma_x^i(T)$。

定义 5.2. 设 T 为 $\mathbb{F}(y)$ 上的超几何项。若存在非零线性算子 $L \in \mathbb{F}\langle S_x \rangle$ 和超几何项 G 使得 $L(T) = \Delta_y(G)$，我们则称 L 为 T 关于 y 的一个邻差算子 (telescoper)，而 G 为 T 关于 L 的验证函数 (certificate)。

不同于微分情形，任意超几何项并不一定都存在邻差算子。为了刻画邻差算子的存在性，我们引入整线性的概念。

定义 5.3. 设 p 为 $\mathcal{C}[x,y]$ 中的不可约多项式。如果存在单变元多项式 $P \in \mathcal{C}[z]$ 以及两个整数 λ, μ 使得 $p = P(\lambda x + \mu y)$，那么我们称 p 在 $\mathcal{C}$ 上是整线性的 (integer-linear)。如果 $\mathcal{C}[x,y]$ 中一个多项式的所有不可约因子都是整线性的，那么我们称该多项式在 $\mathcal{C}$ 上是整线性的。如果 $\mathcal{C}(x,y)$ 中一个有理函数的分子及分母都是整线性的，那么我们称该有理函数在 $\mathcal{C}$ 上是整线性的。

定理 5.1 (存在性判定准则). 设 T 为 $\mathbb{F}(y)$ 上的超几何项。假设 $K, S \in \mathbb{F}(y)$ 分别为其关于 y 的核和该核相应的壳，并且 $H = T/S$。记多项式 $v \in \mathbb{F}[y]$ 为 K 的分母。进一步假设对 T 关于 y 作用算法 4（即改进的 *Abramov-Petkovšek* 约化算法）后，得到

$$T = \Delta_y(gH) + \left(\frac{a}{b} + \frac{q}{v}\right) H, \tag{5.1}$$

其中 $g \in \mathbb{F}(y)$，$H = T/S$，且 $a/b + q/v$ 为 S 关于 K 的留式，即 $a, b \in \mathbb{F}[y]$ 且 $\deg_y(a) < \deg_y(b)$，b 关于 y 是无平移的且与 K 强互素，以及 $q \in \mathbb{W}_K$。那么 T 关于 y 存在邻差算子当且仅当 b 是整线性的。

证明. 首先证明充分性，即已知 b 是整线性的，需要证明 T 存在邻差算子。注意到 K 是 H 的差商且平移既约。根据 [8, 定理 8] 可知，H 是 $\mathbb{F}(y)$ 上的阶乘项，即其关于 x, y 的差商都是整线性的。于是 K 是整线性的，从而其分母 v 也是如此。由 b 的整线性性可知，$H/(bv)$ 仍是阶乘项。因而

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{q}{v}\right) H = (av + bq)\,\frac{H}{bv}$$

是正则超几何项，即为非零多项式与阶乘项之积。根据 [44, 基本引理]，任意正则超几何项均存在邻差算子。结合等式 (5.1) 可知 T 存在邻差算子。

接下来证明必要性。已知 T 存在邻差算子。由 [4, 定理 10] 得 $(a/b+q/v)H$ 是正则超几何项。从而 $H/(bv)$ 是阶乘项。注意到

$$\frac{\sigma_y(H/(bv))}{H/(bv)} = \frac{u}{\sigma_y(v)}\,\frac{b}{\sigma_y(b)}.$$

于是 $b/\sigma_y(b)$ 是整线性的。由于 b 关于 y 是无平移的，因此 $\gcd(b, \sigma_y(b)) \in \mathbb{F}$。因为 $\mathbb{F}$ 中的元素均是整线性的，所以 b 是整线性的。 □

5.3 极小邻差算子的构造

考虑 $\mathbb{F}(y)$ 上的一个超几何项。如果由定理 5.1 知它存在邻差算子，那么该超几何项的所有邻差算子加上零线性算子构成主理想环 $\mathbb{F}\langle S_x\rangle$ 中的一个左理想。我们称该理想的生成元为给定超几何项的*极小邻差算子* (minimal telescoper)。直观地说，极小邻差算子就是超几何项的邻差算子中阶数极小的算子。

从 1990 年至今，许多已有的算法 [6, 32, 46–48] 都旨在构造超几何项的极小邻差算子，其中最经典的是 Zeilberger 算法 [46]。该算法通过反复迭代使用 Gosper 算法来判定拟设 (ansatz) 超几何项 $L(T)$ 的可求和性，其中线性算子 $L = \sum_{i=0}^{\rho} \ell_i S_x^i \in \mathbb{F}\langle S_x\rangle$ 且 $\ell_0, \ldots, \ell_\rho$ 待定。可以看出，Zeilberger 算法在计算邻差算子的同时不可避免的需要计算相应的验证函数。为实现二者计算的分离性，借鉴微分情形下基于 Hermite 约化构造邻差算子的思想 [13–16]，我们利用改进的 Abramov-Petkovšek 约化算法来设计超几何项极小邻差算子的新构造算法。该算法的主要步骤阐述如下。

算法 5: 基于约化的邻差算子构造算法

输入: $\mathbb{F}(y)$ 上的超几何项 T。

输出: 当邻差算子存在时，输出 T 的极小邻差算子 $L \in \mathbb{F}\langle S_x \rangle$ 和相应的验证函数 $G \in \mathbb{F}(y)$。否则输出“不存在邻差算子！”。

1 计算超几何项 T 关于 y 的核 K 及该核相应的壳 S 使得 $T = SH$，其中超几何项 H 关于 y 的差商为 K。

2 对 T 关于 y 作用算法 *4* 得到加法分解

$$T = \Delta_y(g_0 H) + r_0 H, \tag{5.2}$$

如果 $r_0 = 0$，那么返回 $(1, g_0 H)$。

3 如果 r_0 的分母不是整线性的，那么返回“不存在邻差算子！”。

4 令 $N = \sigma_x(H)/H$ 且 $R = \ell_0 r_0$，其中 ℓ_0 为待定量。

对 $i = 1, 2, \ldots$ 执行：

4.1 将 $\sigma_x(r_{i-1})NH$ 看作以 K 为其核而 $\sigma_x(r_{i-1})N$ 为该核相应壳的超几何项；并对其关于 K 作用算法 *2* 和算法 *3*，得到 $g_i' \in \mathbb{F}$ 及关于 K 的留式 $\tilde{r}_i$ 使得 $\sigma_x(r_{i-1})NH = \Delta_y(g_i' H) + \tilde{r}_i H$。

4.2 记 $\tilde{g}_i = \sigma_x(g_{i-1})N + g_i'$，于是

$$\sigma_x^i(T) = \Delta_y(\tilde{g}_i H) + \tilde{r}_i H. \tag{5.3}$$

4.3 根据定理 *4.11* 的证明计算 $g_i, r_i \in \mathbb{F}(y)$ 使得 $r_i \equiv_y \tilde{r}_i \mod \mathbb{V}_K$，

$$\sigma_x^i(T) = \Delta_y(g_i H) + r_i H, \tag{5.4}$$

并且 $R + \ell_i r_i$ 仍是关于 K 的留式，其中 ℓ_i 为待定量。

4.4 更新 R 为 $R + \ell_i r_i$。

4.5 令 $R = 0$ 以导出关于 $\ell_0, \ldots, \ell_i$ 的线性方程组并对其在 $\mathbb{F}$ 中进行求解。如果该方程组存在 $\mathbb{F}$ 中的一组非平凡解，那么令

$$L = \sum_{j=0}^{i} \ell_j S_x^j \quad \text{且} \quad G = \sum_{j=0}^{i} \ell_j g_j H,$$

并返回结果 (L, G)。

定理 5.2. 设 T 为 $\mathbb{F}(y)$ 上的超几何项。如果 T 存在邻差算子，那么对 T 作用算法 5 后，程序在一定时间后将终止并返回 T 的一个极小邻差算子。

证明. 由定理 3.6 知，当步骤 2 中 $r_0 = 0$ 时，超几何项 T 是可求和的，因而 1 为其极小邻差算子。

设步骤 2 中 $r_0 = a_0/b_0 + q_0/v$，其中 $a_0, b_0, v \in \mathbb{F}[y]$，$\deg_y(a_0) < \deg_y(b_0)$，$b_0$ 关于 y 是无平移的且与 K 强互素，$q_0 \in \mathbb{W}_K$，并且 v 为 K 的分母。根据 [8, 定理 8] 可知，K 是整线性的；从而 v 也是整线性的。于是 b_0 是整线性的当且仅当 $b_0 v$ 是整线性的。再由定理 5.1 推出 T 存在邻差算子当且仅当 r_0 的分母是整线性的。因此步骤 2 和 3 是正确的。

根据等式 (5.2) 及 $\sigma_x(r_0 H) = \sigma_x(r_0) NH$ 可得等式 (5.3) 对于 $i = 1$ 成立。由定理 4.11 知存在关于 K 的留式 $r_1 \in \mathbb{F}(y)$ 满足 $r_1 \equiv_y \tilde{r}_1 \mod \mathbb{V}_K$，使得对于任意的 $\ell_0, \ell_1 \in \mathbb{F}$，都有 $R + \ell_1 r_1$ 依旧是关于 K 的留式。事实上，利用第 4.4 节中的一系列引理及定理 4.11 的证明，我们不仅可以计算留式 r_1，而且还能同时得到有理函数 $u_1 \in \mathbb{F}(y)$ 使得 $\tilde{r}_1 = K\sigma_y(u_1) - u_1 + r_1$。通过令 $g_1 = \tilde{g}_1 + u_1$，可以看出等式 (5.4) 对 $i = 1$ 成立。对 i 运用数学归纳法，容易证明在步骤 4 的每步循环中等式 (5.4) 都成立。

假设 $L = \sum_{i=0}^{\rho} c_i S_x^i$ 是 T 的极小邻差算子，其中 $\rho \in \mathbb{N}$，$c_i \in \mathbb{F}$ 且 $c_\rho \neq 0$。那么由定义知，$L(T)$ 关于 y 是可求和的。于是由定理 3.6 有 $\sum_{i=0}^{\rho} c_i r_i = 0$。因此由 $\sum_{i=0}^{\rho} \ell_i r_i = 0$ 导出的线性齐次方程组在 $\mathbb{F}$ 中存在一组非平凡解，并且这组非平凡解对应的线性算子即为 T 的极小邻差算子。 □

注 5.1. 算法 5 可以将邻差算子及其验证函数的计算分离开来。在实际应用中，如果不要求验证函数的信息，那么我们可以省去步骤 4.2 及步骤 4.3 中关于 g_i 的所有相关计算，并且最后忽略 $\sum_{j=0}^{i} \ell_j g_j H$ 的计算，而只输出极小邻差算子。

注 5.2. 算法 5 中的步骤 4.1 是对超几何项 $\sigma_x(r_{i-1})NH$ 关于 y 作用算法 4。实际上，我们还可以选择对超几何项 $\sigma_x^i(T)$ 关于 y 直接作用算法 4，同样可以得到最终结果。但是实验结果告诉我们，较前者而言，后者花费相当多的时间。这一做法和文献 [6] 中例子 6 的建议不谋而合。

下面我们通过一个简单的例子来说明算法 5 构造极小邻差算子的过程。

例 5.1. 考虑超几何项

$$T = \binom{x}{y}^3.$$

由计算可知

$$f = \frac{\sigma_x(T)}{T} = \frac{(x+1)^3}{(x-y+1)^3} \quad \text{且} \quad g = \frac{\sigma_y(T)}{T} = \frac{(x-y)^3}{(y+1)^3}.$$

可以看出 g 关于 y 是平移既约的，从而 g 本身是 T 的核，并且其相应的壳为 1。于是在算法 5 的步骤 1 中，我们有 $H = T$。接着在步骤 4 中，我们相继得到 $\sigma_y^i(T) \equiv_y (q_i/v)H \mod \mathbb{U}_H$，其中 $i = 0, 1, 2$，$v = (y+1)^3$，

$$q_0 = \frac{1}{2}(x+1)(x^2 - x + 3y(y-x+1)+1), \quad q_1 = (x+1)^3, \quad \text{并且}$$
$$q_2 = \frac{(x+1)^3}{(x+2)^2}\left(11x^2 - 12xy + 17x + 20 + 12y + 12y^2\right).$$

通过找寻 q_0, q_1, q_2 在 $\mathbb{F}$ 中的线性相关性，我们最终得到

$$L = (x+2)^2 S_x^2 - (7x^2 + 21x + 16)S_x - 8(x+1)^2$$

为 T 的极小邻差算子。

5.4 算法实现与时间测试

我们已经在计算机代数系统 Maple 18 中实现了相关算法，并囊括在第 3.4 节所提及的 Maple 程序包 ShiftReductionCT 中。

在本节中，我们将主要介绍程序包 ShiftReductionCT 中程序 ReductionCT 的用法。利用该程序，我们对实际例子进行测试，并给出相应运行时间表以比较它与 Maple 程序 SumTools[Hypergeometric][Zerilberger] 之间的效率。

5.4.1 程序实现及使用说明

ShiftReductionCT: 计算超几何项极小邻差算子的 Maple 程序包

```
> with(ShiftReductionCT);
```

$$[BoundReductionCT,\ IsSummable,\ KernelReduction,\ ModifiedAbramovPetkovsekReduction,\ PolynomialReduction,\ ReductionCT,\ ShellReduction,\ ShiftHomDecomp,\ TranslateDRF,\ VerifyMAPReduction,\ VerifyRCT]$$

```
> T := binomial(x,y)^3; # 考虑例子5.1中的超几何项
```

$$T := \mathrm{binomial}(x,y)^3$$

```
> ReductionCT(T,x,y,Sx); # 对 T 关于 y 作用算法5(即基于约化的邻差算子构造算法),并要求仅输出其(首一的)极小邻差算子
```

$$-\frac{8(x^2+2x+1)}{x^2+4x+4}-\frac{(7x^2+21x+16)Sx}{x^2+4x+4}+Sx^2$$

```
> res := ReductionCT(T,x,y,Sx,output = unnormalized); # 对 T 关于 y 作用算法5,并要求输出其极小邻差算子及相应未规范化的验证函数
> L := res[1]: G := res[2,1]*res[2,2]: # 使用算法 5 中的符号标记结果
```

$$\begin{aligned}
res := \Bigg[&-\frac{8(x^2+2x+1)}{x^2+4x+4}-\frac{(7x^2+21x+16)Sx}{x^2+4x+4}+Sx^2,\ \Bigg[\frac{4(x^2+2x+1)}{x^2+4x+4}\\
&+\frac{(7x^2+21x+16)(x+1)^3}{(x^2+4x+4)(x+1-y)^3}-\frac{(x+1)^3(10x^2-15xy+6y^2+25x-18y+16)}{(x^2+4x+4)(x+1-y)^3}\\
&+\frac{1}{(x^2+4x+4)(x+1-y)^3}(11x^5-12x^4y+12x^3y^2+62x^4-48x^3y+36x^2y^2\\
&+140x^3-72x^2y+36xy^2+158x^2-48xy+12y^2+89x-12y+20)\\
&-\frac{1}{(x+1-y)^3}\left(\frac{12(x^3+3x^2+3x+1)y^2}{x^2+4x+4}-\frac{12(x^4+4x^3+6x^2+4x+1)y}{x^2+4x+4}\right.\\
&\left.+\frac{11x^5+62x^4+140x^3+158x^2+89x+20}{x^2+4x+4}\right)-\frac{(x+2)^3(x+1)^3}{(x+2-y)^3(x+1-y)^3},\\
&\mathrm{binomial}(x,y)^3\Bigg]\Bigg]
\end{aligned}$$

> res := ReductionCT(T,x,y,Sx,output = normalized); # 对 T 关于 y 作用算法5，并要求输出其极小邻差算子及相应规范化的验证函数

> L := res[1]: G := res[2,1]*res[2,2]: # 使用算法 5 中的符号标记结果

$$res := \left[-\frac{8(x^2+2x+1)}{x^2+4x+4} - \frac{(7x^2+21x+16)Sx}{x^2+4x+4} + Sx^2, \left[-\frac{1}{(x+1-y)^3(x^2+4x+4)(x+2-y)^3} \left(y^3(14x^5 - 27x^4y + 18x^3y^2 - 4x^2y^3 + 102x^4 - 147x^3y + 66x^2y^2 - 8xy^3 + 290x^3 - 291x^2y + 78xy^2 - 4y^3 + 402x^2 - 249xy + 30y^2 + 272x - 78y + 72) \right), \text{binomial}(x,y)^3 \right] \right]$$

> SumTools[Hypergeometric][Zeilberger](T,x,y,Sx); # Maple 的 Zeilberger 算法

$$\left[Sx^2(x^2+4x+4) + (-7x^2-21x-16)Sx - 8x^2 - 16x - 8, \frac{1}{(x+2-y)^3(x+1-y)^3} \left(\left(y^3 + \left(-\frac{9}{2}x - \frac{15}{2} \right) y^2 + \left(\frac{27}{4}x^2 + \frac{93}{4}x + \frac{39}{2} \right) y - \frac{7}{2}x^3 - \frac{37}{2}x^2 - 32x - 18 \right) y^3 \,\text{binomial}(x,y)^3 (4x^2+8x+4) \right) \right]$$

5.4.2 实例测试及时间比较

为了测试相关程序的效率，在本小节中我们对上述程序与已有 MAPLE 程序的运行时间及存储空间进行比较。所有测试都是在具有 388GB 内存和 12 个 2.80GHz 双核处理器的 Linux 计算机中进行；并且其运行时间都是以秒为单位。为了简洁，我们约定

- Z：MAPLE 18 中的程序 SumTools[Hypergeometric][Zeilberger]；
- RCT_{tc}：同时计算极小邻差算子及其相应（规范化的）验证函数的程序 ShiftReductionCT[ReductionCT];
- RCT_t：仅计算极小邻差算子的程序 ShiftReductionCT[ReductionCT]。

- order: 计算所得的极小邻差算子的阶数。

例 5.2. 考虑具有如下形式的超几何项

$$T = \frac{f(x,y)}{g_1(x+y)g_2(2x+y)} \frac{\Gamma(2\alpha x+y)}{\Gamma(x+\alpha y)},$$

其中 $f \in \mathbb{Z}[x,y]$ 是次数为 $n \in \mathbb{N}$ 的整系数多项式，$\alpha \in \mathbb{Z}$，并且对 $i=1,2$ 都存在次数为 $m \in \mathbb{N}$ 的整系数多项式 $p_i \in \mathbb{Z}[z]$ 及非负整数 $0 \le \lambda \le \mu$ 使得 $g_i = p_i \sigma_y^{\lambda}(p_i) \sigma_y^{\mu}(p_i)$。针对五元组 (m,n,α,λ,μ) 的不同取值，我们随机生成具有上述形式的超几何项 T 来进行测试。表格 5.1 给出该输入下上述三个程序运行时间的比较结果。

(m,n,α,λ,μ)	Z	RCT_{tc}	RCT_t	order
$(1,0,1,5,5)$	17.12	5.00	1.80	4
$(1,0,2,5,5)$	74.91	26.18	5.87	6
$(1,0,3,5,5)$	445.41	92.74	17.34	7
$(1,8,3,5,5)$	649.57	120.88	23.59	7
$(2,0,1,5,10)$	354.46	58.01	4.93	4
$(2,0,2,5,10)$	576.31	363.25	53.15	6
$(2,0,3,5,10)$	2989.18	1076.50	197.75	7
$(2,3,3,5,10)$	3074.08	1119.26	223.41	7
$(2,0,1,10,15)$	2148.10	245.07	11.22	4
$(2,0,2,10,15)$	2036.96	1153.38	153.21	6
$(2,0,3,10,15)$	11240.90	3932.26	881.12	7
$(2,5,3,10,15)$	10163.30	3954.47	990.60	7
$(3,0,1,5,10)$	18946.80	407.06	43.01	6
$(3,0,2,5,10)$	46681.30	2040.21	465.88	8
$(3,0,3,5,10)$	172939.00	5970.10	1949.71	9

表 5.1: Zeilberger 算法以及在计算或不计算验证函数两种情形下的基于约化的邻差算子构造算法的运行时间比较（以秒为单位）

注 5.3. 程序 RCT_{tc} 与 RCT_t 的主要差别在于将验证函数 gH 中的 g 规范为完整的有理函数所用的时间。如果允许 g 以若干有理函数的线性组合形式输出，那么此时程序所需的运行时间将与 RCT_t 大致相同。

第六章　极小邻差算子阶数的上界和下界

6.1　前言

邻差算子的构造算法是解决超几何项定求和或者恒等式证明问题的主要工具，其中最经典的要数于 1990 年提出的 Zeilberger 算法 [38, 46, 48]。在过去 25 年间，Zeilberger 算法以多种方式被推广和改进，比如文献 [12–15, 21, 33] 中的算法，以及第五章所提出的算法 5 等等。在这些算法中，最新一代的是所谓的基于约化的邻差算子构造算法，始于 2010 年 [13] 。这类算法的主要特性是可以在构造邻差算子的同时避免计算其相应的验证函数。考虑到验证函数在许多实际应用中往往是多余的，并且其规模一般远大于邻差算子（从而计算代价更大），因此新一代算法在实际应用中用途更广。基于约化的邻差算子构造算法最先是在微分情形下发展起来的 [13–15, 21]，其基本思想阐述如下。首先将给定函数（超指数函数或超几何项）及其相应变化（导数或平移）约化成特定的"标准形式"（后称之为余式），使得原函数与余式之间仅相差可求导或者可求和部分。接着通过找出这些余式之间的线性关系来给出邻差算子。为了验证算法的终止性，一种可能的方法是验证这些余式所张成的线性空间是有限维的。那么只要所得余式的个数超过该线性空间的维数，算法就会终止并返回邻差算子。这种方法在文献 [14, 15, 21] 中被采用。值得注意的是，该方法不仅提供关于邻差算子存在性的独立证明，而且还可以给出极小邻差算子阶数的上界。然而，在第五章证明算法 5 的终止性时，我们并没有采用上述方法。不同的，我们证明超几何项可求和当且仅当其余式为零。于是在定理 5.1 即邻差算子存在性判定准则的保证下，算法依旧可以终止并将返回极小邻差算子，但是我们并不能得到关于邻差算子阶数的任何信息。在本章中，我们将验证差分情形下这些余式也构成有限维线性空间，以消除与微分情形的差异。

本章的主要结果是采用新的方法证明算法 5 的终止性，并利用该方法推导出极小邻差算子阶的上界和下界。对于一般的 (generic) 超几何项，新的上界与已知的上界相等。这是因为对于一般的超几何项，已知的界是最优的。关于一般超几何项的定义见第 6.5.1 节。然而，对于一些特殊的超几何项，我们的上下

界均比已知的上下界更加接近极小邻差算子的真实阶数。此外，无论在任何情况下，新的界都不会差于已知界。利用所得的下界，我们还在一定程度上改进第五章中基于约化的构造算法，并通过实例比较了二者的效率。

本章内容安排如下：在第 6.2 节中，我们介绍本章所需的基本知识。利用第 4.3 节中离散留式的重要性质，我们在第 6.3 节揭示超几何项及其平移项的离散留式之间的关系。在第 6.4 节中，我们计算邻差算子阶数的上界和下界，并利用所得界在一定程度上改进算法 5。在第 6.5 节中，我们将所得界与已知界进行比较。最后在第 6.6 节中，我们给出上述算法的程序实现，并进行实例测试和比较。

6.2 预备知识

在本节中，我们继续沿用第五章的相关符号。首先我们将第四章中多项式平移等价的概念及差分齐次分解推广到双变元情形，接着讨论整线性多项式的进一步性质，最后对相关符号进行约定。

6.2.1 有理函数的差分齐次分解

已知 $\mathcal{C}$ 特征为 0 的域，且 x, y 为 $\mathcal{C}$ 上的未定元。而 σ_x, σ_y 分别为 $\mathcal{C}(x, y)$ 上关于 x 和 y 的平移算子。

定义 6.1. 设 p, q 为 $\mathcal{C}[x, y]$ 中的多项式。如果存在整数 m, n 使得 $p = \sigma_x^m \sigma_y^n(q)$，那么我们称 p 和 q 关于 x, y 是平移等价的 (shift-equivalent)，记作 $p \sim_{x,y} q$。

注意到当 $m = 0$ 或 $n = 0$ 时，上述定义即为定义 4.1。从而如果 $p \sim_y q$ 或 $p \sim_x q$，那么 $p \sim_{x,y} q$。容易验证 $\sim_{x,y}$ 是等价关系。选定纯字典序 $x \prec y$，如果 $\mathcal{C}[x, y]$ 中一个多项式的最高项系数为 1，则称该多项式是首一的。如果 $\mathcal{C}(x, y)$ 中一个有理函数的分子和分母的所有非平凡首一不可约因子都属于同一等价类，那么我们称该有理函数是*差分齐次的* (shift-homogeneous)。通过合并分子分母中属于相同等价类的首一不可约因子，$\mathcal{C}(x, y)$ 中的任意有理函数 r 都可以分解为

$$r = c\, r_1 \cdots r_s, \tag{6.1}$$

其中 $c \in \mathcal{C}$，$s \in \mathbb{N}$，每个 r_i 都是 $\mathcal{C}(x, y)$ 中的差分齐次有理函数，并且当 $i \neq j$ 时，r_i 和 r_j 中的任意两个非平凡首一不可约因子彼此不平移等价。我们称等式 (6.1) 为有理函数 r 的一个*差分齐次分解* (shift-homogeneous decomposition)。由多项式因式分解的唯一性可知，在忽略因式次序以及非零常数的数乘时差分齐次分解是唯一的。

6.2.2 整线性多项式的单元化

设 $p \in \mathcal{C}[x, y] \setminus \mathcal{C}$ 为不可约整线性多项式。那么根据定义 5.3，存在单变元多项式 $P \in \mathcal{C}[z]$ 以及不全为零的整数 λ, μ 使得 $p = P(\lambda x + \mu y)$。不失一般性，我们进一步假设 $\mu \geq 0$ 并且 $\gcd(\lambda, \mu) = 1$。由 Bézout 关系式可知，存在唯一的整数 α, β 满足 $|\alpha| < |\mu|$ 和 $|\beta| < |\lambda|$，使得 $\alpha\lambda + \beta\mu = 1$。为了简洁，我们定义 $\delta^{(\lambda,\mu)} = \sigma_x^\alpha \sigma_y^\beta$；并且当二元组 (λ, μ) 可以从上下文得知时，将其直接缩写为 δ。注意到如果将 $\lambda x + \mu y$ 看做单个变元 z，那么 $\delta(P(z)) = P(z + 1)$。据此我们可以将整线性多项式作为单变元多项式来处理。对于一个关于 δ 的整系数洛朗多项式 $\xi = \sum_{i=\ell}^{\rho} m_i \delta^i \in \mathbb{Z}[\delta, \delta^{-1}]$，其中 $\ell, \rho, m_i \in \mathbb{Z}$，且 $\ell \leq \rho$，定义

$$p^\xi = \delta^\ell(p^{m_\ell})\delta^{\ell+1}(p^{m_{\ell+1}}) \cdots \delta^\rho(p^{m_\rho}).$$

设 p, q 为 $\mathcal{C}[x, y]$ 中的不可约整线性多项式，并且分别具有形式

$$p = P(\lambda_1 x + \mu_1 y) \quad 和 \quad q = Q(\lambda_2 x + \mu_2 y),$$

其中 $P, Q \in \mathcal{C}[z]$，$\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2 \in \mathbb{Z}$，$\mu_1, \mu_2 \geq 0$ 且 $\gcd(\lambda_1, \mu_1) = \gcd(\lambda_2, \mu_2) = 1$。容易验证 $p \sim_{x,y} q$ 当且仅当 $\lambda_1 = \lambda_2$，$\mu_1 = \mu_2$ 且存在整数 k 使得 $p = q^{\delta^k}$，这里 $\delta = \delta^{(\lambda_1,\mu_1)} = \delta^{(\lambda_2,\mu_2)}$。根据等式 (6.1)，任意 $\mathcal{C}(x, y)$ 中的整线性有理函数 r 都可以分解为如下形式

$$r = c_r\, h_1^{\xi_1} \cdots h_s^{\xi_s}, \tag{6.2}$$

其中 $c_r \in \mathcal{C}$，$s \in \mathbb{N}$，每个 h_i 都是 $\mathcal{C}[x.y]$ 中的首一不可约整线性多项式，即存在 $P_i \in \mathcal{C}[z]$ 和 $\lambda_i, \mu_i \in \mathbb{Z}$ 满足 $\gcd(\lambda_i, \mu_i) = 1$ 及 $\mu_i \geq 0$，使得 $h_i = P_i(\lambda_i x + \mu_i y)$；此外 $\xi_i \in \mathbb{Z}[\delta^{(\lambda_i,\mu_i)}, (\delta^{(\lambda_i,\mu_i)})^{-1}]$，且当 $i \neq j$ 时 $h_i \nsim_{x,y} h_j$。不失一般性，这里可以进一步假设 $\xi_i \in \mathbb{Z}[\delta^{(\lambda_i,\mu_i)}]$。

6.2.3 符号约定

为了方便，我们对相关符号进行约定。

符号约定 6.1. 设 T 是 $\mathcal{C}(x,y)$ 上的超几何项，且 $T=SH$ 为其乘法分解，其中 $S\in\mathcal{C}(x,y)$，而 H 为超几何项且满足 $K=\sigma_y(H)/H$ 关于 y 是平移既约的。根据 [8, 定理 8] 可知，K 在 $\mathcal{C}$ 上是整线性的。此外，假设 $K=u/v$，其中 $u,v\in\mathcal{C}(x)[y]$ 且 $\gcd(u,v)=1$。

6.3 离散留式的平移关系

在本节中，我们将描述超几何项及其平移项的留式之间的关系，并据此得到这些留式相应首分母序列的一个“公倍式”，为下一节做准备。在此之前，我们需要引入以下引理。

引理 6.1. *在符号约定 6.1 的假设下，设 r 为 S 关于 K 的留式。那么 $\sigma_x(K)$ 与 $\sigma_x(S)$ 分别是 $\sigma_x(T)$ 关于 y 的核与相应的壳。此外，$\sigma_x(r)$ 为 $\sigma_x(S)$ 关于 $\sigma_x(K)$ 的留式。*

证明. 根据符号约定 6.1 可知，$\sigma_x(T)=\sigma_x(S)\sigma_x(H)$ 且 $\sigma_x(K)$ 为 $\sigma_x(H)$ 关于 y 的差商。观察到对任意两个多项式 $p_1,p_2\in\mathcal{C}(x)[y]$ 都有 $\gcd(\sigma_x(p_1),\sigma_x(p_2))=1$ 当且仅当 $\gcd(p_1,p_2)=1$。从而可知 $\sigma_x(K)$ 关于 y 是强互素的。令 $r=a/b+q/v$，其中 $a,b,q\in\mathcal{C}(x)[y]$ 满足 $\deg_y(a)<\deg_y(b)$，b 是无平移的且与 K 强互素，并且 $q\in\mathbb{W}_K$。易知 $\deg_y(\sigma_x(a))<\deg_y(\sigma_x(b))$。由上述观察同理可证 $\sigma_x(b)$ 关于 y 是无平移的且与 $\sigma_x(K)$ 强互素。

注意到 $\sigma_x\circ\deg_y=\deg_y\circ\sigma_x$ 且 $\sigma_x\circ\mathrm{lc}_y=\mathrm{lc}_y\circ\sigma_x$，其中 $\mathrm{lc}_y(p)$ 代表的是 $\mathcal{C}(x)[y]$ 中多项式 p 关于 y 的首项系数。根据第 3.3.2 节中的分类讨论可知，多项式约化算法中的标准补空间 $\mathbb{W}_K$ 和 $\mathbb{W}_{\sigma_x(K)}$ 具有相同的阶梯形基。由于 $q\in\mathbb{W}_K$, 我们有 $\sigma_x(q)\in\mathbb{W}_{\sigma_x(K)}$。综上所述，$\sigma_x(r)$ 是 $\sigma_x(S)$ 关于 $\sigma_x(K)$ 的留式。 □

下面的命题揭示了超几何项及其平移项的留式之间非平凡的内在联系, 是本节的重要结论。

命题 6.2. *在符号约定 6.1 的假设下，对于任意的非负整数 i，进一步假设*

$$\sigma_x^i(T) = \Delta_y(g_i H) + \left(\frac{a_i}{b_i} + \frac{q_i}{v}\right) H, \tag{6.3}$$

其中 $g_i \in \mathcal{C}(x,y)$，$a_i, b_i \in \mathcal{C}(x)[y]$，$\deg_y(a_i) < \deg_y(b_i)$，$\gcd(a_i, b_i) = 1$，$b_i$ 关于 y 是无平移的且与 K 强互素，并且 $q_i \in \mathbb{W}_K$。那么 $b_i \approx_y \sigma_x^i(b_0)$。

证明. 我们只需验证 $b_1 \approx_y \sigma_x(b_0)$。接着对 i 直接运用数学归纳法即证命题。

对 $i = 0$ 时的等式 (6.3) 两边同时作用 σ_x，得到

$$\begin{aligned}\sigma_x(T) &= \sigma_x(\Delta_y(g_0 H)) + \sigma_x\left(\frac{a_0}{b_0} + \frac{q_0}{v}\right)\sigma_x(H)\\ &= \Delta_y(\sigma_x(g_0 H)) + \left(\frac{\sigma_x(a_0)}{\sigma_x(b_0)} + \frac{\sigma_x(q_0)}{\sigma_x(v)}\right)\sigma_x(H).\end{aligned}$$

根据引理 6.1 可知，$(\sigma_x(K), \sigma_x(S))$ 是 $\sigma_x(T)$ 关于 y 的差商的有理正规形式，并且 $\sigma_x(a_0)/\sigma_x(b_0) + \sigma_x(q_0)/\sigma_x(v)$ 是 $\sigma_x(S)$ 关于 $\sigma_x(K)$ 的留式。由于 $\gcd(a_0, b_0) = 1$，因此 $\gcd(\sigma_x(a_0), \sigma_x(b_0)) = 1$。于是 $\sigma_x(b_0)$ 为上述留式的首分母。

另一方面，令 $N = \sigma_x(H)/H$。易知 $(K, \sigma_x(S)N)$ 也是 $\sigma_x(T)$ 关于 y 的差商的有理正规形式。由 $i = 1$ 时的等式 (6.3) 可知，$a_1/b_1 + q_1/v$ 是 $\sigma_x(S)N$ 关于 K 的留式。注意到 $\gcd(a_1, b_1) = 1$，因而 b_1 为留式 $a_1/b_1 + q_1/v$ 的首分母。

根据命题 4.6，我们有 $\sigma_x(b_0) \approx_y b_1$。 □

为更好地利用命题 6.2 以得到留式相应首分母序列的“公倍式”，我们下面引入两个引理。

第一个引理说明在符号约定 6.1 的假设下，对任意的多项式 f, 总存在一个多项式 g 使得 $f \approx_y g$ 且 g 与 K 强互素。

引理 6.3. *在符号约定 6.1 的假设下，设 p 是 $\mathcal{C}(x)[y]$ 中的不可约多项式。那么存在整数 $m \in \mathbb{Z}$ 使得 $\sigma_y^m(p)$ 与 K 强互素。*

证明. 根据与 K 强互素的定义可知，以下三种情形有且仅有一种成立。

(i) 如果 p 与 K 强互素，那么令 $m = 0$，即证引理。

(ii) 如果存在整数 $k \geq 0$ 使得 $\sigma_y^k(p) \mid u$，那么由 K 的平移既约性可知，对任意的整数 ℓ 都有 $\gcd(\sigma_y^\ell(p), v) = 1$。令

$$m = \max\{i \in \mathbb{N} \mid \sigma_y^i(p) \mid u\} + 1.$$

从而 $\sigma_y^m(p)$ 与 K 强互素。

(iii) 如果存在整数 $k \le 0$ 使得 $\sigma_y^k(p) \mid v$，那么由 K 的平移既约性可知，对任意的整数 ℓ 都有 $\gcd(\sigma_y^\ell(p), u) = 1$。令

$$m = \min\{i \in \mathbb{N} \mid \sigma_y^i(p) \mid v\} - 1.$$

从而 $\sigma_y^m(p)$ 与 K 强互素。

综上所述，引理成立。 □

第二个引理说明对于任意的 $\mathcal{C}(x, y)$ 中的整线性多项式，其关于单变元的任意次平移所产生的关于 y 的平移等价类是有限的。

引理 6.4. 设 q 是 $\mathcal{C}[x, y]$ 中的整线性多项式，即存在 $P \in \mathcal{C}[z]$ 和 $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$，使得 $q = P(\lambda x + \mu y)$。那么 q 关于 x 或 $z = \lambda x + \mu y$ 的任意次正向平移均与某个 $\delta^j(q)$ 关于 y 平移等价，其中 $\delta = \delta^{(\lambda,\mu)}$ 且整数 $0 \le j \le \mu - 1$。等价的说，令

$$S = \{\delta^j(q) \mid j = 0, \ldots, \mu - 1\},\ S_1 = \{\sigma_x^i(q) \mid i \in \mathbb{N}\} \text{ 且 } S_2 = \{\delta^j(q) \mid j \in \mathbb{N}\}.$$

那么对 S_1 或 S_2 中的任意元素 f，都存在 $g \in S$ 使得 f 与 g 关于 y 平移等价。

证明. 设 $f \in S_1 \cup S_2$。因为 $\sigma_x = \delta^\lambda$，所以存在非负整数 i 使得

$$f = \delta^i(q) = P(\lambda x + \mu y + i).$$

由带余除法可知，存在唯一整数 j, k 满足 $0 \le j \le \mu - 1$，使得 $i = k\mu + j$。从而

$$f = \sigma_y^k(P(\lambda x + \mu y + j)) = \sigma_y^k(\delta^j(q)).$$

令 $g = \delta^j(q)$，引理即证。 □

下面的命题给出基于约化的邻差算子构造算法（即算法 5）产生的留式的相应首分母序列的一个“公倍式”。

命题 6.5. 在符号约定 *6.1* 的假设下，设

$$T = \Delta_y(gH) + \left(\frac{a}{b} + \frac{q}{v}\right) H, \tag{6.4}$$

其中 $g \in \mathcal{C}(x,y)$, $a,b \in \mathcal{C}(x)[y]$, $\deg_y(a) < \deg_y(b)$, $\gcd(a,b)=1$，b 关于 y 是无平移的且与 K 强互素，以及 $q \in \mathbb{W}_K$。进一步假设 b 是整线性的。那么存在多项式 $B \in \mathcal{C}(x)[y]$ 满足 B 关于 y 是无平移的且与 K 强互素，使得 $b \mid B$；并且对任意非负整数 i，都有 $\sigma_x^i(T)$ 可以被分解为

$$\sigma_x^i(T) = \Delta_y(g_i H) + \left(\frac{a_i}{B} + \frac{q_i}{v}\right) H, \tag{6.5}$$

其中 $g_i \in \mathcal{C}(x,y)$, $a_i \in \mathcal{C}(x)[y]$，$\deg_y(a_i) < \deg_y(B)$ 以及 $q_i \in \mathbb{W}_K$。

证明. 当 $b \in \mathcal{C}(x)$ 时，根据改进的 Abramov-Petkovšek 约化算法可知，对任意正整数 $i > 0$ 都有等式 (6.3) 成立。由命题 6.2，$b_i \in \mathcal{C}(x)$。从而令 $B=1$ 即证命题。假设 $b \notin \mathcal{C}(x)$。由于 b 是整线性的，根据等式 (6.2)，b 具有如下分解

$$b = c_b \cdot h_1^{\xi_1} \cdots h_t^{\xi_t}, \tag{6.6}$$

其中 $c_b \in \mathcal{C}(x)$，$t \in \mathbb{N}$，每个 h_j 都是 $\mathcal{C}[x,y] \setminus \mathcal{C}[x]$ 中的首一不可约整线性多项式，从而存在 $P_j \in \mathcal{C}[z]$ 和 $\lambda_j, \mu_j \in \mathbb{Z}$ 满足 $\gcd(\lambda_j, \mu_j) = 1$ 及 $\mu_j > 0$，使得 $h_j = P_j(\lambda_j x + \mu_j y)$；此外 $\xi_j \in \mathbb{N}[\delta^{(\lambda_j,\mu_j)}]$，且当 $j \neq k$ 时 $h_j \nsim_{x,y} h_k$。由 h_j 之间的互素性及 a/b 的部分分式分解可知，我们只需证明局部情形下命题成立，即当 $c_b = t = 1$ 并且

$$b = P(\lambda x + \mu y)^{\sum_{i=0}^{s} m_i' \delta^i},$$

其中 $P \in \mathcal{C}[z]$，$s, m_i' \in \mathbb{N}$，$\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$，$\mu > 0$ 且 $\delta = \delta^{(\lambda,\mu)}$。

根据引理 6.4 可知，存在唯一整数 j, k_j 满足 $0 \le j \le \mu - 1$，使得

$$P(\lambda x + \mu y)^{\delta^i} = P(\lambda x + \mu y + j)^{\sigma_y^{k_j}}.$$

上式等价于

$$P(\lambda x + \mu y + i) = P(\lambda x + \mu y + \mu k_j + j).$$

由于 P 是不可约，我们有 $\mu k_j + j = i$。令 $m_j'' = m_{\mu k_j + j}'$。注意到 b 关于 y 是无平移的，因此

$$b = \prod_{j=0}^{\mu-1} P(\lambda x + \mu y + j)^{m_j'' \sigma_y^{k_j}}.$$

当 $m_j'' \neq 0$ 时，令 $\ell_j = k_j$。而当 $m_j'' = 0$ 时，根据引理 6.3 可知存在 ℓ_j 使得 $P(\lambda x + \mu y + j)^{\sigma_y^{\ell_j}}$ 与 K 强互素。设 $m = \max_{0 \le j \le \mu-1}\{m_j''\}$ 且

$$B = \prod_{j=0}^{\mu-1} P(\lambda x + \mu y + j)^{m\sigma_y^{\ell_j}}. \tag{6.7}$$

因为 $m_j'' \neq 0$ 时 $\ell_j = k_j$，所以 b 的每个不可约因子都整除 B。再由重数 m 的极大性有 $b \mid B$。由于 $0 \le j \le \mu - 1$，因此 B 关于 y 是无平移的。此外，根据 ℓ_j 的取法可知，B 与 K 强互素。

下面我们证明对任意非负整数 i 都有等式 (6.5) 成立。

为此，我们先证明 $\sigma_x(B) \approx_y B$。根据等式 (6.7)，我们有

$$B \approx_y \prod_{j=0}^{\mu-1} P(\lambda x + \mu y + j)^m.$$

从而

$$\sigma_x(B) \approx_y \prod_{j=0}^{\mu-1} P(\lambda x + \mu y + j + \lambda)^m.$$

根据引理 6.4 可知，存在唯一整数 $0 \le k \le \mu - 1$ 使得

$$P(\lambda x + \mu y + j + \lambda) \sim_y P(\lambda x + \mu y + k). \tag{6.8}$$

反之，对于任意整数 $0 \le k \le \mu - 1$，存在唯一整数 $0 \le j \le \mu - 1$ 使得式子 (6.8) 成立。于是

$$\sigma_x(B) \approx_y \prod_{k=0}^{\mu-1} P(\lambda x + \mu y + k)^m \approx_y B.$$

对于 $i = 0$，令 $g_0 = g$，$a_0 = aB/b$ 且 $q_0 = q$ 即证等式 (6.5)。因为 $\sigma_x(B) \approx_y B$，所以对于任意的正整数 $i > 0$，我们都有 $\sigma_x^i(B) \approx_y \sigma_x^{i-1}(B)$。于是 $\sigma_x^i(B) \approx_y B$。另一方面，根据改进的 Abramov-Petkovšek 约化算法可知，对于任意非负整数 $i \ge 0$ 都有等式 (6.3) 成立，其中 $b_0 = b$。根据命题 6.2 可知，$b_i \approx_y \sigma_x^i(b)$。因为 $b \mid B$，所以 $\sigma_x^i(b) \mid \sigma_x^i(B)$。综上所述，我们有

$$b_i \approx_y \sigma_x^i(b) \mid \sigma_x^i(B) \approx_y B.$$

于是存在多项式 $\tilde{b}_i \in \mathcal{C}(x)[y]$ 使得 $\tilde{b}_i \mid B$ 并且 $\tilde{b}_i \approx_y b_i$。再由于 B 与 K 强互素，因此 $\tilde{b}_i$ 也与 K 强互素。于是由 “首分母平移” 性质（即引理 4.10 及注释 4.2）可知，存在 $\tilde{g}_i \in \mathcal{C}(x,y)$，$\tilde{a}_i \in \mathcal{C}(x)[y]$ 及 $\tilde{q}_i \in \mathbb{W}_K$ 满足 $\deg_y(\tilde{a}_i) < \deg_y(\tilde{b}_i)$，且

$$\sigma_x^i(T) = \Delta_y(\tilde{g}_i H) + \left(\frac{\tilde{a}_i}{\tilde{b}_i} + \frac{\tilde{q}_i}{v}\right) H.$$

从而

$$\sigma_x^i(T) = \Delta_y(\tilde{g}_i H) + \left(\frac{\tilde{a}_i B/\tilde{b}_i}{B} + \frac{\tilde{q}_i}{v}\right) H.$$

命题得证。 □

在上述命题的假设下，对 T 关于 y 作用算法 4 得到加法分解

$$T = \Delta_y(gH) + rH,$$

其中 r 是关于 K 的留式。根据命题 4.2 和命题 4.6 可知，r 的首分母与 b 关于 y 平移相关。于是等式 (6.6) 中的 h_j $(1 \le j \le t)$ 所代表的等价类与 b 的选取无关。从而多项式 B 关于 y 的次数是固定的，即为 $\deg_y(B) = \sum_{j=1}^{t} \mu_j m_j \deg_y(P_j)$。其中 m_j 为 ξ_j 的最大系数。综上所述，我们有如下注释。

注 6.1. 虽然命题 6.5 中多项式 B 的形式依赖于 b 的选取，但是在给定超几何项 T 时，B 的平移等价类以及关于 y 的次数就已经被确定了。

6.4　极小邻差算子阶数的上下界

在本节中，我们证明当满足等式 (6.3) 的一组无平移多项式 $\{b_i\}_{i\ge 0}$ 存在公倍式时，对应留式序列 $\{a_i/b_i + q_i/v\}_{i\ge 0}$ 张成 $\mathcal{C}(x)$ 中的有限维线性空间；从而由维数可导出超几何项极小邻差算子阶数的上界。

定理 6.6. *在命题 6.5 中的假设条件及符号约定下，超几何项 T 关于 y 的极小邻差算子的阶数不超过*

$$\max\{\deg_y(u), \deg_y(v)\} - [\![\deg_y(v-u) \le \deg_y(u) - 1]\!] + \sum_{j=1}^{t} \mu_j m_j \deg(P_j),$$

其中 m_j 为 ξ_j 的最大系数，符号 $[\![\varphi]\!]$ 代表的含义是如果表达式 φ 成立则取值为 1，否则取值为 0.

证明. 设 $L=\sum_{i=0}^{\rho}e_iS_x^i$ 为 T 的极小邻差算子，其中 $\rho\in\mathbb{N}$，$e_0,\dots,e_\rho\in\mathcal{C}(x)$ 且不全为零。根据命题 6.5，对任意非负整数 i，都存在多项式 $B\in\mathcal{C}(x)[y]$ 使得等式 (6.5) 成立。根据定理 5.2 的证明可知，留式序列 $\{a_i/B+q_i/v\}_{i=0}^{\rho}$ 在 $\mathcal{C}(x)$ 中线性相关；等价的说，如下以 $\{e_0,\dots,e_\rho\}$ 为未知变元的线性方程组

$$\begin{cases} A_\rho = e_0a_0 \ + \ e_1a_1 \ + \ \cdots \ + \ e_\rho a_\rho = 0 \\ Q_\rho = e_0q_0 \ + \ e_1q_1 \ + \ \cdots \ + \ e_\rho q_\rho = 0 \end{cases} \tag{6.9}$$

在 $\mathcal{C}(x)$ 中存在一组非平凡解。由 $\deg_y(a_i)<\deg_y(B)$ 可知，

$$\deg_y(A_\rho)<\deg_y(B)=\sum_{j=1}^{t}\mu_jm_j\deg_y(P_j). \tag{6.10}$$

由于 $\mathbb{W}_K$ 是个线性空间，因此 $Q_\rho\in\mathbb{W}_K$。根据命题 3.5，Q_ρ 中关于 y 的非零项数不超过

$$\dim_{\mathcal{C}(x)}(\mathbb{W}_K)\le\max\{\deg_y(u),\deg_y(v)\}-[\![\deg_y(v-u)\le\deg_y(u)-1]\!]. \tag{6.11}$$

通过比较方程组 (6.9) 中关于 y 的所有系数，至多得到 $\deg_y(A_\rho)+\dim_{\mathcal{C}(x)}\mathbb{W}_K+1$ 个方程。当变元个数超过方程个数，即 $\rho>\deg_y(A_\rho)+\dim_{\mathcal{C}(x)}\mathbb{W}_K$ 时，该线性方程组必有非平凡解。注意到线性方程组 (6.9) 的非平凡解与 T 的邻差算子一一对应，于是 T 的极小邻差算子阶数不超过 $\deg_y(A_\rho)+\dim_{\mathcal{C}(x)}\mathbb{W}_K+1$。结合不等式 (6.10) 和 (6.11) 可知定理成立。 □

除此之外，我们可以进一步得到超几何项 T 的邻差算子阶数的下界。

定理 6.7. *在命题 6.5 中的假设条件下，进一步假设 T 关于 y 是不可求和的。那么 T 关于 y 的邻差算子阶数至少为*

$$\max_{\substack{p\text{为}b\text{的首一不可约因子}\\ \text{重数为 }\alpha,\ \deg_y(p)>0}}\ \min\left\{\rho\in\mathbb{N}\setminus\{0\}:\ \text{存在 }\ell\in\mathbb{Z}\text{ 使得 }\sigma_y^{\ell}(p)^{\alpha}\mid\sigma_x^{\rho}(b)\right\}.$$

证明. 设 $L=\sum_{i=0}^{\rho}e_iS_x^i$ 为 T 的极小邻差算子，其中 $\rho\in\mathbb{N}$，$e_0,\dots,e_\rho\in\mathcal{C}(x)$ 且不全为零。由于 T 关于 y 是不可求和的，因此 $\rho\ge1$。根据改进的 Abramov-Petkovšek 约化算法，对整数 $1\le i\le\rho$，我们有等式 (6.3) 成立。结合等式 (6.4) 并注意到 L 是极小邻差算子，从而 $e_0\neq0$ 且由定理 5.2 的证明知

$$e_0\frac{a}{b}\ +\ e_1\frac{a_1}{b_1}\ +\ \cdots\ +\ e_\rho\frac{a_\rho}{b_\rho}=0.$$

根据部分分式分解，对 b 的任意重数为 $\alpha > 0$ 的关于 y 非平凡首一不可约因子 p，总存在正整数 i 满足 $1 \le i \le \rho$，使得 p 是 b_i 的重数至少为 α 的因子。根据命题 6.2，$b_i \approx_y \sigma_x^i(b)$。于是存在 $\sigma_x^i(b)$ 的重数至少为 α 的因子 p' 使得 $p' \sim_y p$。令 i_p 为满足上述性质的最小正整数。于是对 b 的任意一个关于 y 非平凡的首一不可约因子 p，都有 T 的邻差算子的阶数至少为 i_p。从而定理成立。 □

利用上述定理所给出的阶数下界，我们可以省去判定达到下界之前满足等式 (6.3) 的留式序列 $\{a_i/b_i + q_i/v\}_{i\ge 0}$ 在 $\mathcal{C}(x)$ 中的线性相关性，从而进一步如下改进算法 5。

算法 6: 基于约化及阶数界的邻差算子构造算法

输入: $\mathcal{C}(x,y)$ 上的超几何项 T。

输出: 当邻差算子存在时，输出 T 的极小邻差算子 $L \in \mathcal{C}(x)\langle S_x\rangle$ 和相应的验证函数 $G \in \mathcal{C}(x,y)$。否则输出 “不存在邻差算子！”。

1–3 类似算法 *5* 的步骤 1 - 3。

4 分别计算 T 的极小邻差算子阶数的上下界，并记为 $ub,\ lb \in \mathbb{N}$。

5 令 $N = \sigma_x(H)/H$ 且 $R = \ell_0 r_0$，其中 ℓ_0 为待定量。

对 $i = 1, 2, \ldots, ub$ 执行：

5.1 类似算法 *5* 的步骤 4.1 - 4.3 计算 $g_i, r_i \in \mathcal{C}(x,y)$ 使得 (5.4) 成立，并且 $R + \ell_i r_i$ 仍是关于 K 的留式，其中 ℓ_i 为待定量。

5.4 更新 R 为 $R + \ell_i r_i$。若 $i < lb$ 则结束本轮循环。否则进入步骤 5.5。

5.5 令 $R = 0$ 以导出关于 $\ell_0, \ldots, \ell_i$ 的线性方程组并对其在 $\mathcal{C}(x)$ 中进行求解。如果该方程组存在 $\mathcal{C}(x)$ 中的一组非平凡解，那么令

$$L = \sum_{j=0}^{i} \ell_j S_x^j \quad 且 \quad G = \sum_{j=0}^{i} \ell_j u_j H,$$

并返回结果 (L, G)。

6.5 阶数界的比较

关于超几何项邻差算子阶数的上界和下界已于 2005 年分别在文献 [33] 及文献 [6] 中研究过。在本节中，我们将回顾这两个已知界，并将其与上一节所得到的上下界相比较。

6.5.1 Apagodu-Zeilberger 上界

设 T 是 $\mathcal{C}(x,y)$ 上的正则超几何项 (proper hypergeometric term), 即它可以写成如下形式

$$T = pw^x z^y \prod_{i=1}^{m} \frac{(\alpha_i x + \alpha_i' y + \alpha_i'' - 1)!(\beta_i x - \beta_i' y + \beta_i'' - 1)!}{(\mu_i x + \mu_i' y + \mu_i'' - 1)!(\nu_i x - \nu_i' y + \nu_i'' - 1)!}, \tag{6.12}$$

其中 $p \in \mathcal{C}[x,y]$，$w, z \in \mathcal{C}$，m 是个固定整数，$\alpha_i, \alpha_i', \beta_i, \beta_i', \mu_i, \mu_i', \nu_i, \nu_i'$ 均为非负整数，并且 $\alpha_i'', \beta_i'', \mu_i'', \nu_i'' \in \mathcal{C}$。进一步假设不存在整数 $1 \le i, j \le m$ 使得

$$\begin{array}{rl} & \{\alpha_i = \mu_j \quad \& \quad \alpha_i' = \mu_j' \quad \& \quad \alpha_i'' - \mu_j'' \in \mathbb{N}\} \\ \text{或者} & \{\beta_i = \nu_j \quad \& \quad \beta_i' = \nu_j'' \quad \& \quad \beta_i'' - \nu_j'' \in \mathbb{N}\}. \end{array}$$

我们将满足上述条件的正则超几何项称为一般 (generic) 超几何项。那么 Zeiberger 及其学生 Apagodu 在文献 [33] 中指出 T 的极小邻差算子的阶数不超过

$$B_{AZ} = \max \left\{ \sum_{i=1}^{m} (\alpha_i' + \nu_i'), \sum_{i=1}^{m} (\beta_i' + \mu_i') \right\}.$$

接下来我们证明上式所定义的 B_{AZ} 至少为定理 6.6 中得到的 T 的极小邻差算子阶数的上界。为此在允许对等式 (6.12) 中的阶乘项重新标号的前提下，定义集合 $\mathcal{S}$ 是由满足条件 $1 \le i \le m$ 及

$$\begin{array}{rl} & \{\alpha_i = \mu_i \quad \& \quad \alpha_i' = \mu_i' \quad \& \quad \mu_i'' - \alpha_i'' \in \mathbb{N}\} \\ \text{或者} & \{\beta_i = \nu_i \quad \& \quad \beta_i' = \nu_i' \quad \& \quad \nu_i'' - \beta_i'' \in \mathbb{N}\}. \end{array}$$

的整数 i 所构成的最大集合。将 T 重新改写成如下形式

$$rw^x z^y \prod_{i=1, i\notin \mathcal{S}}^{m} \frac{(\alpha_i x + \alpha_i' y + \alpha_i'' - 1)!(\beta_i x - \beta_i' y + \beta_i'' - 1)!}{(\mu_i x + \mu_i' y + \mu_i'' - 1)!(\nu_i x - \nu_i' y + \nu_i'' - 1)!},$$

其中 $r \in \mathcal{C}(x,y)$。对于多项式 $q \in \mathcal{C}[x,y]$ 及非负整数 $m \in \mathbb{N}$，定义

$$q^{\overline{m}} = q(q+1)(q+2)\cdots(q+m-1),$$

并且约定 $q^{\overline{0}} = 1$。通过计算可知 T 关于 y 的一个核为

$$K = z\prod_i \frac{(\alpha_i x + \alpha_i' y + \alpha_i'')^{\overline{\alpha_i'}}(\nu_i x - \nu_i' y + \nu_i'' - \mu_i')^{\overline{\nu_i'}}}{(\mu_i x + \mu_i' y + \mu_i'')^{\overline{\mu_i'}}(\beta_i x - \beta_i' y + \beta_i'' - \beta_i')^{\overline{\beta_i'}}}, \tag{6.13}$$

其中乘积指标 i 满足 $1 \le i \le m$，$i \notin \mathcal{S}$, $\alpha_i', \beta_i' > 0$ 以及 $\mu_i', \nu_i' > 0$。此外，核 K 相应的壳为 $S = r$。记 $K = u/v$，其中 $u, v \in \mathcal{C}(x)[y]$ 且 $\gcd(u,v) = 1$。注意到等式 (6.13) 右侧已经为既约有理函数，于是通过简单的计算可推出

$$\deg_y(u) = \sum_{i=1, i\notin\mathcal{S}}^{m} (\alpha_i' + \nu_i') \quad 且 \quad \deg_y(v) = \sum_{i=1, i\notin\mathcal{S}}^{m} (\beta_i' + \mu_i').$$

对 T 关于 y 作用算法 4 可得等式 (6.4)，其中 b 是整线性的。由于 b 仅来自 r 分母的无平移部分，因此它可以分解为一次整线性多项式的乘积，并且这些多项式关于 x, y 要么平移等价于 $(\mu_i x + \mu_i' y + \mu_i'')$ 要么平移等价于 $(\beta_i x - \beta_i' y + \beta_i'')$，其中 $i \in \mathcal{S}$。注意到 $\mathcal{S}$ 中的每一个元素至多增加一次 b 中相应整线性因子的重数。从而定理 6.6 给出的关于 T 的极小邻差算子的阶数上界不超过

$$\max\{\deg_y(u), \deg_y(v)\} - [\![\deg_y(v-u) \le \deg_y(u) - 1]\!] + \sum_{i=1, i\in\mathcal{S}}^{m} (\beta_i' + \mu_i').$$

由于 $\sum_{i=1,i\in\mathcal{S}}^{m}(\alpha_i' + \nu_i') = \sum_{i=1,i\in\mathcal{S}}^{m}(\beta_i' + \mu_i')$，因此上式正好等于

$$B_{AZ} - [\![\deg_y(v-u) \le \deg_y(u) - 1]\!].$$

对于一般超几何项，定理 6.6 所得的上界与 B_{AZ} 几乎相同。然而，在某些特殊例子中定理 6.6 所得的上界可能远比 B_{AZ} 靠近极小邻差算子的真实阶数。

例 6.1. 考虑如下有理函数

$$T = \frac{\alpha^2 y^2 + \alpha^2 y - \alpha\beta y + 2\alpha x y + x^2}{(x + \alpha y + \alpha)(x + \alpha y)(x + \beta y)},$$

其中 α, β 均为正整数且 $\alpha \neq \beta$。将 T 改写成正则形式 (6.12) 后可以看出 $B_{AZ} = \alpha + \beta$。另一方面，由于 T 是有理函数，因此 1 是 T 的核。由改进的 Abramov-Petkovšek 约化算法得，等式 (6.4) 中 $b = x + \beta y$。根据定理 6.6，T 的极小邻差算子的阶数不超过 β。事实上，β 正是 T 的极小邻差算子的真实阶数。

注 6.2. 只有通过 [4, 定理 10]，文献 [33] 中所得到的关于极小邻差算子阶数的上界才可能适用于非正则超几何项。另一方面，定理 6.6 所给出的上界适用于任何存在邻差算子的超几何项。

6.5.2 Abramov-Le 下界

在符号约定 6.1 的假设下，进一步设 T 满足加法分解 (6.4)，其中 b 是整线性的。定义 $H' = H/v$。直接计算可知

$$\frac{\sigma_y(H')}{H'} = \frac{u}{\sigma_y(v)}.$$

易知上述有理函数关于 y 是平移既约的。设 $d' \in \mathcal{C}(x)[y]$ 为差商 $\sigma_x(H')/H'$ 的分母。那么文献 [6] 中的算法 LowerBound 声称 T 的邻差算子的阶数至少

$$B_{AL} = \max_{\substack{p\text{为}b\text{的首一不可约因子} \\ \deg_y(p)>0}} \min \left\{ \rho \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : \text{存在 } \ell \in \mathbb{Z} \text{ 使得 } \begin{array}{c} \sigma_y^\ell(p) \mid \sigma_x^\rho(b) \\ \text{或者} \\ \sigma_y^\ell(p) \mid \sigma_x^{\rho-1}(d') \end{array} \right\}.$$

和上式定义的 B_{AL} 相比较，容易看出定理 6.7 得到的下界可能更加接近真实值但绝不会低于 B_{AL}。

例 6.2. 考虑如下超几何项

$$T = \frac{1}{(x - \alpha y - \alpha)(x - \alpha y - 2)!},$$

其中 α 为不少于 2 的正整数。由算法 LowerBound 知，T 的邻差算子的阶数至少为 2。另一方面，根据定理 6.7，T 的邻差算子的阶数至少为 α。事实上，α 正是 T 的极小邻差算子的真实阶数。

6.6 算法实现与时间测试

我们已经在计算机代数系统 MAPLE 18 实现了极小邻差算子阶数上下界的计算以及算法 6，并囊括在前两章所提及的 MAPLE 程序包 ShiftReductionCT 中。在本节中，我们将主要介绍该程序包中程序 BoundReductionCT 的用法。利用该程序，我们对实际例子进行测试，并给出相应运行时间表以比较它与程序包中另一程序 ReductionCT 之间的效率。

6.6.1　程序实现及使用说明

ShiftReductionCT: 计算超几何项极小邻差算子的 Maple 程序包

```
> with(ShiftReductionCT);
```

$[BoundReductionCT, IsSummable, KernelReduction, ModifiedAbramovPetkovsekReduction, PolynomialReduction, ReductionCT, ShellReduction, ShiftHomDecomp, TranslateDRF, VerifyMAPReduction, VerifyRCT]$

```
> alpha := 5: T := 1/((x-alpha*y-alpha)*(x-alpha*y-2)!); # 考虑例子6.1中的超几何项
```

$$T := \frac{1}{(x-5y-5)(x-5y-2)!}$$

```
> BoundReductionCT(T,x,y); # 计算 T 的极小邻差算子的上下界
```

$$[5, 10]$$

```
> SumTools[Hypergeometric][LowerBound](T,x,y); # Maple 的 LowerBound 算法，仅计算 T 的邻差算子的下界
```

$$2$$

```
> BoundReductionCT(T,x,y,Sx); # 对 T 关于 y 作用算法 6，并要求仅输出（首一的）极小邻差算子
```

$$Sx^5 - 1$$

```
> res := BoundReductionCT(T,x,y,Sx,output = unnormalized); # 对 T 关于 y 作用算法 6，并要求输出其极小邻差算子及相应未规范化的验证函数
> L := res[1]: G := res[2,1]*res[2,2]: # 使用算法 6 中的符号标记结果
```

$$res := \left[Sx^5 - 1, \left[-\frac{5}{x-5y-5} + \frac{5}{x-1-5y} + \frac{20}{(x-5y-5)(x-1-5y)} + \frac{5}{(x-5y)^2(x-5y+3)(x+2-5y)(x+1-5y)(x-1-5y)}, -\frac{1}{5(x-5y-2)!}\right]\right]$$

```
> res := BoundReductionCT(T,x,y,Sx,output = normalized): # 对 T 关于 y 作用算法 6，并要求输出其极小邻差算子及相应规范化的验证函数
> L := res[1]: G := res[2,1]*res[2,2]: # 使用算法 6 中的符号标记结果
```

$$res := \left[Sx^5 - 1, \left[\frac{5}{(x-5y)^2(x-5y+3)(x+2-5y)(x+1-5y)(x-1-5y)}, -\frac{1}{5(x-5y-2)!}\right]\right]$$

6.6.2 实例测试及时间比较

为了测试相关程序的效率，在本小节中我们对程序包 ShiftReductionCT 中程序 BoundReductionCT 与程序 ReductionCT 的运行时间及存储空间进行比较。所有测试都是在具有 388GB 内存和 12 个 2.80GHz 双核处理器的 Linux 计算机中进行；并且其运行时间都是以秒为单位。为了简洁，我们约定

- RCT_t：仅计算极小邻差算子的程序 ReductionCT。
- RCT_{tc}：同时计算极小邻差算子及其相应（规范化的）验证函数的程序 ReductionCT;
- BRCT_t：仅计算极小邻差算子的程序 BoundReductionCT。
- BRCT_{tc}：同时计算极小邻差算子及其相应（规范化的）验证函数的程序 BoundReductionCT;
- LB: 计算所得的极小邻差算子阶数的下界。
- order: 计算所得的极小邻差算子的阶数。

例 6.3. 考虑例子 6.2 中的超几何项

$$T = \frac{1}{(x-\alpha y-\alpha)(x-\alpha y-2)!},$$

其中 α 为不少于 2 的正整数。针对 α 的不同取值，我们对相应的超几何项 T 进行测试。表格 6.1 给出该输入下上述四个程序运行时间的比较结果。注意到由于该例子中的验证函数比较简单，所以计算和不计算验证函数两种情形的运行时间相差不大。

α	RCT$_t$	BRCT$_t$	RCT$_{tc}$	BRCT$_{tc}$	LB	order
20	1.89	0.95	2.01	1.30	20	20
30	7.11	2.65	7.24	2.77	30	30
40	19.82	6.58	20.72	7.26	40	40
50	40.00	12.12	42.14	17.00	50	50
60	102.95	23.44	114.11	26.16	60	60
70	216.26	42.83	238.77	43.59	70	70

表 6.1: 两种基于约化的邻差算子构造算法在计算或不计算验证函数情形下对例子 6.3 的运行时间比较（以秒为单位）

例 6.4 ([6] 的例子 6). 考虑超几何项 $T = \Delta_y(T_1) + T_2$, 其中

$$T_1 = \frac{1}{(xy-1)(x-\alpha y-2)^m(2x+y+3)!}, \quad T_2 = \frac{1}{(x-\alpha y-2)(2x+y+3)!},$$

并且 α, m 为正整数。对于二元组 (α, m) 的不同取值，我们对相应的超几何项 T 进行测试。表格 6.2 给出该输入下上述四个程序运行时间的比较结果。

(m,α)	RCT$_t$	BRCT$_t$	RCT$_{tc}$	BRCT$_{tc}$	LB	order
(1,1)	0.20	0.20	0.24	0.23	1	2
(1,10)	5.25	4.60	9.56	8.74	10	11
(1,15)	57.06	37.73	76.01	58.69	15	16
(1,20)	538.59	264.04	656.99	324.09	20	21
(2,10)	5.29	4.43	9.11	8.36	10	11
(2,15)	79.34	40.26	96.48	54.85	15	16
(2,20)	574.00	282.54	658.20	377.84	20	21

表 6.2: 两种基于约化的邻差算子构造算法在计算或不计算验证函数情形下对例子 6.4 的运行时间比较（以秒为单位）

注 6.3. 与线性相关序列相比，判定线性无关序列不相关时所需时间相对较少。所以当邻差算子阶数下界与其真实值存在较大差距时，程序 BoundReductionCT 对程序 ReductionCT 的改进效果并不显著。事实上，二者此时用时相当。

第七章 结论与展望

7.1 结论

本文的主要工作分为两部分。

第一部分是改进了用于计算超几何项加法分解的 Abramov-Petkovšek 约化算法。改进后的约化算法将给定超几何项完全分解为可求和部分与不可求和部分之和，从而使得超几何项的可求和性一目了然。

第二部分是阐述了改进的 Abramov-Petkovšek 约化算法的两个重要应用。首先，利用改进后的约化算法，我们提出了用于构造双变元超几何项极小邻差算子的新算法。该算法可以将邻差算子及相应验证函数的计算分离开来。其次，我们给出了不同于以往的关于超几何项极小邻差算子阶数的新上下界。

此外，在计算机代数系统 Maple 上，我们实现了上述所有算法及上下界的计算，并做成程序包 ShiftReductionCT。

7.2 进一步工作的展望

本文的工作主要是围绕着双变元超几何项来展开的。相对于特殊函数整体而言，本文所涉及到的只是冰山一角，还有很多工作需要完成。与本文密切相关的主要有以下几个课题。

7.2.1 算法的复杂度分析及下界改进

在本文中，我们已经给出了超几何项极小邻差算子阶数的上下界。下一步，我们将尝试利用所得界分析基于约化的邻差算子构造算法的复杂度。

此外，在一些实际问题中，定理 6.7 所给的下界与邻差算子的真实阶数之间仍存在一定差距。缩小两者间的差距将有效提高算法 6 的改进效率。由于本文中我们仅利用超几何项初始加法分解得到下界，因此我们希望充分利用中间步骤的加法分解来找到比定理 6.7 更紧致的下界，从而更大程度地改进算法 5。

7.2.2 基于约化的 q-差分及混合情形下邻差算子的构造

在本文中，我们已经介绍了基于改进的 Abramov-Petkovšek 约化算法的超几何项邻差算子的构造算法。一个自然的问题就是能否将其推广到 q-差分及混合情形。在 q-差分情形下，一个非零项 $T(y)$ 被称为 *q-超几何项*当且仅当其 q-差商 $T(qy)/T(y)$ 是个有理函数，其中参数 q 既不为零也不为单位根。陈永川, 侯庆虎和穆彦平 [23] 于 2005 年提出了用于计算 q-超几何项加法分解的约化算法。利用本文相同的思路，我们下一步的工作是改进上述约化算法，并基于改进后的算法来有效地构造 q-超几何项的邻差算子。对于混合情形，即考虑超指数－超几何项－ q-超几何项，我们将研究如何利用纯微分、差分及 q-差分的约化算法来快速构造混合项的邻差算子。

7.2.3 多变元情形下邻差算子的高效构造

目前为止，已有的构造邻差算子的高效算法主要是针对双变元情形而设计的。鉴于多变元情形广泛存在于组合数学、数学物理等领域，比如多重积分及求和、高维网格上的行走计数等问题，所以设计构造多变元特殊函数邻差算子的高效算法也是我们下一步重要的工作。

7.2.4 超几何项验证函数的相关问题

在第五章中，我们指出基于约化的邻差算子构造算法允许在构造邻差算子的同时避免计算相应的验证函数。这在不要求（规范化的）验证函数的实际应用中意义重大。然而，给定一个具体问题，如何判定何时需要或不需要验证函数却还不是很明朗。给出关于验证函数需求性的统一判定方法将具有重要的实际意义。

此外，在许多实际应用中，验证函数在裂项相消后往往为零，于是得到关于原和式的线性差分方程是齐次的（即方程右侧为零）。如何在不知晓验证函数的前提下，保证邻差算子对应的线性差分方程是齐次的？这也是一个值得深究的问题。

参考文献

[1] Sergei A. Abramov. On the summation of rational functions. *Ž. Vyčisl. Mat. i Mat. Fiz.*, 11:1071–1075, 1971.

[2] Sergei A. Abramov. The rational component of the solution of a first order linear recurrence relation with rational right hand side. *Ž. Vyčisl. Mat. i Mat. Fiz.*, 15(4):1035–1039, 1090, 1975.

[3] Sergei A. Abramov. Indefinite sums of rational functions. In *ISSAC 1995—Proceedings of the 20th International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, pages 303–308. ACM, New York, 1995.

[4] Sergei A. Abramov. When does Zeilberger's algorithm succeed? *Adv. in Appl. Math.*, 30(3):424–441, 2003.

[5] Sergei A. Abramov, Jacques J. Carette, Keith O. Geddes, and Ha Q. Le. Telescoping in the context of symbolic summation in Maple. *J. Symbolic Comput.*, 38(4):1303–1326, 2004.

[6] Sergei A. Abramov and Ha Q. Le. On the order of the recurrence produced by the method of creative telescoping. *Discrete Math.*, 298(1-3):2–17, 2005.

[7] Sergei A. Abramov and Marko Petkovšek. Minimal decomposition of indefinite hypergeometric sums. In *ISSAC 2001—Proceedings of the 26th International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, pages 7–14 (electronic). ACM, New York, 2001.

[8] Sergei A. Abramov and Marko Petkovšek. Proof of a conjecture of Wilf and Zeilberger, 2001. Preprints Series of the Institute of Mathematics, Physics and Mechanics 39(748)(2001), Ljubljana, March 9, 2001.

[9] Sergei A. Abramov and Marko Petkovšek. On the structure of multivariate hypergeometric terms. *Adv. in Appl. Math.*, 29(3):386–411, 2002.

[10] Sergei A. Abramov and Marko Petkovšek. Rational normal forms and minimal decompositions of hypergeometric terms. *J. Symbolic Comput.*, 33(5):521–543, 2002. Computer algebra (London, ON, 2001).

[11] Gert Almkvist and Doron Zeilberger. The method of differentiating under the integral sign. *J. Symbolic Comput.*, 10(6):571–591, 1990.

[12] Moa Apagodu and Doron Zeilberger. Multi-variable Zeilberger and Almkvist-Zeilberger algorithms and the sharpening of Wilf-Zeilberger theory. *Adv. in Appl. Math.*, 37(2):139–152, 2006.

[13] Alin Bostan, Shaoshi Chen, Frédéric Chyzak, and Ziming Li. Complexity of creative telescoping for bivariate rational functions. In *ISSAC 2010—Proceedings of the 35th International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, pages 203–210. ACM, New York, 2010.

[14] Alin Bostan, Shaoshi Chen, Frédéric Chyzak, Ziming Li, and Guoce Xin. Hermite reduction and creative telescoping for hyperexponential functions. In *ISSAC 2013—Proceedings of the 38th International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, pages 77–84. ACM, New York, 2013.

[15] Alin Bostan, Pierre Lairez, and Bruno Salvy. Creative telescoping for rational functions using the Griffiths-Dwork method. In *ISSAC 2013—Proceedings of the 38th International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, pages 93–100. ACM, New York, 2013.

[16] Shaoshi Chen. *Some applications of differential-difference algebra to creative telescoping*. PhD thesis, École Polytechnique (Palaiseau, France), February 2011.

[17] Shaoshi Chen, Hui Huang, Manuel Kauers, and Ziming Li. A modified Abramov-Petkovšek reduction and creative telescoping for hypergeometric terms. In *ISSAC 2015—Proceedings of the 40th International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, pages 117–124. ACM, New York, 2015.

[18] Shaoshi Chen and Manuel Kauers. Order-degree curves for hypergeometric creative telescoping. In *ISSAC 2012—Proceedings of the 37th International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, pages 122–129. ACM, New York, 2012.

[19] Shaoshi Chen and Manuel Kauers. Trading order for degree in creative telescoping. *J. Symbolic Comput.*, 47(8):968–995, 2012.

[20] Shaoshi Chen, Manuel Kauers, and Christoph Koutschan. A generalized Apagodu-Zeilberger algorithm. In *ISSAC 2014—Proceedings of the 39th International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, pages 107–114. ACM, New York, 2014.

[21] Shaoshi Chen, Manuel Kauers, and Christoph Koutschan. Reduction-based creative telescoping for algebraic functions. In *ISSAC 2016—Proceedings of the 41st International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, page to appear. ACM, New York, 2016.

[22] Shaoshi Chen, Manuel Kauers, and Michael F. Singer. Telescopers for rational and algebraic functions via residues. In *ISSAC 2012—Proceedings of the 37th International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, pages 130–137. ACM, New York, 2012.

[23] William Y. C. Chen, Qing-Hu Hou, and Yan-Ping Mu. Applicability of the q-analogue of Zeilberger's algorithm. *J. Symbolic Comput.*, 39(2):155–170, 2005.

[24] Frédéric Chyzak. An extension of Zeilberger's fast algorithm to general holonomic functions. *Discrete Math.*, 217(1-3):115–134, 2000. Formal power series and algebraic combinatorics (Vienna, 1997).

[25] Frédéric Chyzak and Bruno Salvy. Non-commutative elimination in Ore algebras proves multivariate identities. *J. Symbolic Comput.*, 26(2):187–227, 1998.

[26] Richard M. Cohn. *Difference algebra*. Interscience Publishers John Wiley & Sons, New York-London-Sydeny, 1965.

[27] Mary Celine Fasenmyer. Some generalized hypergeometric polynomials. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 53:806–812, 1947.

[28] Keith O. Geddes, Ha Q. Le, and Ziming Li. Differential rational normal forms and a reduction algorithm for hyperexponential functions. In *ISSAC 2004—Proceedings of the 29th International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, pages 183–190. ACM, New York, 2004.

[29] R. William Gosper, Jr. Decision procedure for indefinite hypergeometric summation. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 75(1):40–42, 1978.

[30] Hui Huang. New bounds for hypergeometric creative telescoping. In *ISSAC 2016—Proceedings of the 41st International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, page to appear. ACM, New York, 2016.

[31] Christoph Koutschan. *Advanced applications of the holonomic systems approach*. PhD thesis, RISC-Linz, Johannes Kepler University, September 2009.

[32] Ha Q. Le. *Algorithms for the construction of the minimal telescopers*. PhD thesis, University of Waterloo, Waterloo, Ont., Canada, 2003. AAINQ83003.

[33] Mohamud Mohammed and Doron Zeilberger. Sharp upper bounds for the orders of the recurrences output by the Zeilberger and q-Zeilberger algorithms. *J. Symbolic Comput.*, 39(2):201–207, 2005.

[34] Oystein Ore. Sur la forme des fonctions hypergéométriques de plusieurs variables. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 9(4):311–326, 1930.

[35] Peter Paule. Greatest factorial factorization and symbolic summation. *J. Symbolic Comput.*, 20(3):235–268, 1995.

[36] Peter Paule and Markus Schorn. A Mathematica version of Zeilberger's algorithm for proving binomial coefficient identities. *J. Symbolic Comput.*,

20(5-6):673–698, 1995. Symbolic computation in combinatorics Δ_1 (Ithaca, NY, 1993).

[37] Marko Petkovšek. Hypergeometric solutions of linear recurrences with polynomial coefficients. *J. Symbolic Comput.*, 14(2-3):243–264, 1992.

[38] Marko Petkovšek, Herbert S. Wilf, and Doron Zeilberger. $A = B$. A K Peters, Ltd., Wellesley, MA, 1996. With a foreword by Donald E. Knuth, With a separately available computer disk.

[39] Roberto Pirastu and Volker Strehl. Rational summation and Gosper-Petkovšek representation. *J. Symbolic Comput.*, 20(5-6):617–635, 1995. Symbolic computation in combinatorics Δ_1 (Ithaca, NY, 1993).

[40] John Riordan. *Combinatorial identities.* Robert E. Krieger Publishing Co., Huntington, N.Y., 1979. Reprint of the 1968 original.

[41] Nobuki Takayama. An approach to the zero recognition problem by Buchberger algorithm. *J. Symbolic Comput.*, 14(2-3):265–282, 1992.

[42] Herbert S. Wilf and Doron Zeilberger. Rational functions certify combinatorial identities. *J. Amer. Math. Soc.*, 3(1):147–158, 1990.

[43] Herbert S. Wilf and Doron Zeilberger. Towards computerized proofs of identities. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 23(1):77–83, 1990.

[44] Herbert S. Wilf and Doron Zeilberger. An algorithmic proof theory for hypergeometric (ordinary and "q") multisum/integral identities. *Invent. Math.*, 108(3):575–633, 1992.

[45] Herbert S. Wilf and Doron Zeilberger. Rational function certification of multisum/integral/"q" identities. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 27(1):148–153, 1992.

[46] Doron Zeilberger. A fast algorithm for proving terminating hypergeometric identities. *Discrete Math.*, 80(2):207–211, 1990.

[47] Doron Zeilberger. A holonomic systems approach to special functions identities. *J. Comput. Appl. Math.*, 32(3):321–368, 1990.

[48] Doron Zeilberger. The method of creative telescoping. *J. Symbolic Comput.*, 11(3):195–204, 1991.

完成和发表文章目录

[1] Shaoshi Chen, Hui Huang, and Ziming Li. Improved Abramov-Petkovšek's Reduction and Creative Telescoping for Hypergeometric Terms (Poster at ISSAC'14). In *ACM Commun. Comput. Algebra*, 48(3/4):106-108. ACM, New York, 2014.

[2] Shaoshi Chen, Hui Huang, Manuel Kauers, and Ziming Li. A Modified Abramov-Petkovšek Reduction and Creative Telescoping for Hypergeometric Terms. In *Proc. of ISSAC'15*, pp. 117–124. ACM, New York, 2015.

[3] Hui Huang. New Bounds for Hypergeometric Creative Telescoping. In *Proc. of ISSAC'16*, to appear, ACM, New York, 2016.

简　　历

黄辉，女，福建省罗源县人，1989 年出生。　E-mail: huanghui@amss.ac.cn

教育状况

2013.9–2016.7　中国科学院数学与系统科学研究院与奥地利林茨大学代数研究所中奥联合培养博士。
方向：符号计算，导师：李子明与 Manuel Kauers。

2011.9–2013.9　中国科学院数学与系统科学研究院，系统所，硕博连读。
方向：符号计算，导师：李子明。

2007.9–2011.7　厦门大学数学科学学院，本科，专业：数学与应用数学。

参加学术会议情况

2015 年 11 月，参加全国计算机数学学术会议 (CM2015) 并做报告，合肥。

2015 年 7 月，参加国际符号和代数计算会议 (ISSAC2015) 并做报告，英国巴斯。

2015 年 6 月，参加加拿大离散和算法数学会议 (CanaDAM2015) 并做报告，加拿大萨斯卡通。

2014 年 7 月，参加国际符号和代数计算会议 (ISSAC2014) 并展示海报，日本神户。

2014 年 1 月，参加关于离散算法的 ACM-SIAM 研讨会 (SODA2014)，美国波特兰。

2013 年 8 月，参加全国计算机数学学术会议 (CM2013) 并做报告，长春。

获奖经历

2014 年 9 月，中国科学院数学与系统科学研究院院长奖学金.

2014 年 8 月，第 39 届国际符号和代数计算会议 (ISSAC2014) 杰出海报奖。

2012 年 5 月，中国科学院大学三好学生。

致　谢

岁月如梭，转眼间五年的博士研究生活即将结束。回首过去，感慨良多。值此论文完成之际，谨在此向多年来给予我关心和帮助的老师、同学、朋友和家人表示衷心的感谢！

首先要特别感谢我的两位导师李子明研究员和 Manuel Kauers 教授。从论文开始的选题到最后的写作，自始至终都凝聚着两位老师的心血。李老师严谨认真的治学之道、高瞻远瞩的科学素养以及从容淡定的生活态度，使我终身受益。Manuel 孜孜不倦的事业追求、出神入化的编程技巧以及诙谐幽默的生活作风，让我钦佩不已。正是由于他们对论文一字一句的推敲，对报告精益求精的训练，对科研深入浅出的引导，才使我得以掌握基本写作技巧，得以在学术会议上流利报告，得以坚定走上学术道路。除了在学习方面的指导，李老师在生活方面也对我们关怀备至、体贴入微。谨此再次向两位老师表示最诚挚的谢意。

这五年来, 我要特别感谢中国科学院数学机械化重点实验室和奥地利林茨大学给我提供的优越学习及科研环境。

感谢数学机械化重点实验室的吴文俊院士、高小山研究员、李洪波研究员、刘卓军研究员、王定康研究员、支丽红研究员、冯如勇副研究员、袁春明副研究员、程进三副研究员、周代珍老师、李佳老师等在我五年学习期间给予的学业及生活上的帮助。感谢数学与系统科学研究院和中科院研究生院的各位老师的辛勤工作，让我们得以有良好的学习及生活环境。还有实验室的各位同学，在此由衷的感谢他们的陪伴。

感谢 RISC 的 Bruno Buchberger 教授、Peter Paule 教授、Franz Winkler 教授、Josef Schicho 副教授、Veronika Pillwein 博士、Christoph Koutschan 博士、Carsten Schneider 博士、Silviu Radu 博士、Jakob Ablinger 博士等，以及代数研究所的 Günter Pilz 教授、Erhard Aichinger 副教授、技术人员 Markus Hetzmannseder 等。你们的见解和指导让我受益匪浅。还要感谢秘书 Carmen Schacherreiter、Gabriela Hahn、Betina Curtis、Tanja Gutenbrunner 以及 Ilse Brandner-Foißner 在生活上的诸多帮助。

感谢吴敏师姐、陈绍示师兄、李子佳师兄、付国锋师兄、李伟师姐、周洁

师姐以及杜昊师妹。和你们的讨论让我获益良多。其中特别感谢陈绍示师兄为我的论文提供了很多理论支持以及中肯意见。每次一起讨论问题，师兄那活跃的思维、广博的知识以及独到的见解都让我印象深刻。

在学业上，我还想感谢天津南开大学组合数学中心的陈永川院士、侯庆虎教授以及杨立波教授等。感谢他们组织了“级数与分拆的组合学”国际会议（纪念 George Andrews 教授 75 岁生日），让我得以有机会一睹大师们的风采，并汲取许多书本外的知识。

特别感谢陪我从大学一路走来的好友张维、乔瑜以及从研一相识的好友李璇。感谢一起分担我的忧愁，分享我的喜悦，精彩我的生活。难忘我们一起品尝的美食，一起游过的风景，一起疯狂的时光。你们为我付出了很多，也让我收获了许多。有你们相伴，我觉得很幸运。感谢数学院的好友李露、许冬玲、丁素丽、刘珊等，以及林茨大学的 Miriam Schussler、Rika Yatchak、孙鹏、叶亮节等。感谢缘分让我们相识，感谢为我留下许多美好的回忆。再一次感谢我亲爱的海内外朋友们，铭记我们在一起的欢乐时光，期待以后的重聚，也祝大家都越来越好！

最后，谨以此文献给我挚爱的双亲。感谢你们二十多年来的养育。感谢我所有的家人无私的付出。正是你们默默承受所有的艰辛，自始至终不变的理解与支持，才让我安心继续学业，才有我今天论文的顺利完成。感谢你们成就了今天的我！