Teoría de Algoritmos
(TB024) Curso Buchwald - Genender

Trabajo Práctico 3
Problemas NP-Completos para la defensa de la Tribu del Agua

17 de noviembre de 2025

Alen Davies
107.084

Hugo Huzan
67.910

Joaquin Vedoya
110.282

Franco Altieri Lamas
105.400

Trabajo Práctico 3:
Problemas NP-Completos para la defensa de la Tribu del Agua

1. Introducción

Es el año 95 DG. La Nación del Fuego sigue su ataque, esta vez hacia la Tribu del Agua, luego de una humillante derrota a manos del Reino de la Tierra, gracias a nuestra ayuda. La tribu debe defenderse del ataque.

El maestro Pakku ha recomendado hacer lo siguiente: Separar a todos los Maestros Agua en k grupos $(S_1, S_2, \cdots, S_k)$. Primero atacará el primer grupo. A medida que el primer grupo se vaya cansando entrará el segundo grupo. Luego entrará el tercero, y de esta manera se busca generar un ataque constante, que sumado a la ventaja del agua por sobre el fuego, buscará lograr la victoria.

En función de esto, lo más conveniente es que los grupos estén parejos para que, justamente, ese ataque se mantenga constante.

Conocemos la fuerza/maestría/habilidad de cada uno de los maestros agua, la cual podemos cuantificar diciendo que para el maestro i ese valor es x_i, y tenemos todos los valores $x_1, x_2, \cdots, x_n$ (todos valores positivos).

Para que los grupos estén parejos, lo que buscaremos es minimizar la adición de los cuadrados de las sumas de las fuerzas de los grupos. Es decir:

$$\text{mín} \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{x_j \in S_i} x_j \right)^2$$

El Maestro Pakku nos dice que esta es una tarea difícil, pero que con tiempo y paciencia podemos obtener el resultado ideal.

Resolución

2. El problema es NP

Se demostrará que el problema pertenece a la clase de complejidad **NP**, presentando un *certificador eficiente* capaz de verificar un *certificado* en tiempo polinomial.

Certificado

Un vector $C = (S_1, \ldots, S_k)$, donde cada S_j es un subconjunto de índices que indica a qué grupo pertenece cada elemento x_i.

Algoritmo del certificador

El certificador debe verificar las siguientes condiciones:

- Que la cantidad de subconjuntos S_j sea exactamente k.
- Que cada elemento x_i pertenezca a algún subconjunto S_j.
- Que ningún elemento x_i aparezca en más de un subconjunto.
- Que la suma de los cuadrados de las sumas de los elementos de cada S_j sea menor o igual a B.

La implementación del certificador se encuentra en `certificador.py`

```python
def es_particion_valida(maestros, k, B, particion):
    if len(particion) != k:
        return False

    vistos = set()
    for grupo in particion:
        for m in grupo:
            if m in vistos:
                return False
            vistos.add(m)

    if len(vistos) != len(maestros):
        return False

    suma_total = 0
    for grupo in particion:
        suma_grupo = 0
        for maestro in grupo:
            suma_grupo += maestros[maestro]
        suma_total += suma_grupo**2

    if suma_total > B:
        return False

    return True
```

Justificación de la complejidad

Sean:

- n: la cantidad de elementos (maestros) a agrupar,
- k: la cantidad de grupos permitidos,
- B: el valor máximo permitido para la suma de los cuadrados.

El certificador realiza las siguientes verificaciones:

1. Que la cantidad de grupos sea exactamente k.
2. Que ningún elemento se repita en más de un grupo.
3. Que todos los elementos estén asignados a algún grupo.
4. Que la suma total de los cuadrados de las sumas de cada grupo se calcule correctamente.
5. Que el resultado obtenido se compare con el valor límite B.

El análisis de complejidad de cada paso es el siguiente:

Paso	**Descripción**	**Complejidad**
1	Comparar la cantidad de grupos con k	$O(1)$
2	Recorrer todos los elementos para verificar repeticiones	$O(n)$
3	Verificar que no falte ningún elemento	$O(1)$
4	Calcular la suma total de los cuadrados	$O(n)$
5	Comparar el resultado con B	$O(1)$

Por lo tanto, la complejidad total del certificador es:

$$O(1) + O(n) + O(1) + O(n) + O(1) = O(n)$$

Es decir, el certificador se ejecuta en tiempo lineal con respecto a la cantidad de elementos n. Dado que la verificación de una solución candidata puede realizarse en tiempo polinomial respecto del tamaño de la entrada, el **Problema de la Tribu del Agua pertenece a la clase NP**.

3. El problema es NP-Completo

Habiendo demostrado que el Problema de la Tribu del Agua pertenece a NP, vamos a probar que es NP-Completo mediante una reducción desde el problema Partition.

Primero demostramos que Partition es NP-Completo, usando una reducción desde Subset Sum (que sabemos que es NP-Completo).

Problema de decisión Partition

Dado un conjunto de enteros positivos

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\},$$

queremos saber si es posible dividir ese conjunto en dos subconjuntos disjuntos y que la suma de los elementos de cada subconjunto sea igual.

En otras palabras:

¿Existe una forma de separar los elementos en dos grupos de manera que ambas sumas sean iguales?

El problema Partition es NP-Completo

Partition pertenece a NP

Para verificar una solución, podrían darnos dos subconjuntos, A' y su complemento $A \setminus A'$.

Podemos chequear en tiempo polinomial:

- Que los dos subconjuntos no comparten elementos y juntos contienen a todos.
- Que la suma de los elementos del primer subconjunto es igual a la del segundo.

Hacer estas verificaciones sólo requiere recorrer los elementos y sumar, lo cual lleva tiempo lineal. Por eso, Partition pertenece a NP.

Reducción desde Subset Sum a Partition

Recordemos el problema Subset Sum:

- **Instancia**: un conjunto de enteros positivos $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ y un entero objetivo T.
- **Pregunta**: ¿existe un subconjunto $A' \subseteq A$ tal que

$$\sum_{a_i \in A'} a_i = T\,?$$

Sabemos que Subset Sum es NP-Completo.

Dada una instancia (A, T) de Subset Sum, construimos una instancia de Partition.

Normalización de la instancia

Sea

$$S = \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Podemos tratar algunos casos en tiempo polinomial:

- Si $T > S$, claramente no puede haber subconjunto que sume T. Devolvemos una instancia fija de Partition sin solución.
- Si $T = 0$ o $T = S$, la respuesta de Subset Sum es trivialmente *sí* y podemos devolver una instancia fija de Partition con solución.
- Si $T > S/2$, observamos que existe un subconjunto que suma T si y sólo si existe un subconjunto que suma $S - T$ (su complemento). En ese caso, reemplazamos T por $T' = S - T$ y obtenemos una instancia equivalente.

Luego de este preprocesamiento, podemos suponer que

$$0 < T < \frac{S}{2},$$

lo que implica en particular que $S - 2T > 0$.

Construcción de la nueva instancia

Partimos entonces de una instancia *normalizada* de Subset Sum: un conjunto de números $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ y un valor objetivo T con $0 < T < S/2$.

Transformamos esta instancia en una del problema Partition agregando un único número nuevo al conjunto. Una partición válida del nuevo conjunto A' debe dar una solución del Subset Sum original. Por eso, el número extra que agregamos no puede ser cualquier valor, sino uno que garantice que una partición correcta sólo exista si había un subconjunto que sumaba exactamente T.

En Subset Sum buscamos un subconjunto que sume T. En Partition queremos dividir en dos grupos de igual suma.

Para relacionar ambos problemas, necesitamos que:

- uno de los lados de la partición represente al subconjunto que suma T,
- y el otro lado represente al complemento que suma $S - T$.

Pero en Partition ambas mitades deben sumar lo mismo. Entonces necesitamos modificar el conjunto para que:

$$T + (\text{algo}) = S - T.$$

Ese “algo” es el número que debemos agregar.

Definir el número a agregar

A partir de la ecuación anterior:

$$\text{algo} = S - 2T,$$

definimos ese número como:

$$b = S - 2T.$$

Como $0 < T < S/2$, tenemos $S - 2T > 0$, luego b es un entero positivo, consistente con la definición de Partition.

Agregamos b para ajustar la suma del subconjunto U y llevarla al valor necesario para que sea una mitad válida.

Definir el nuevo conjunto A'

$$A' = A \cup \{b\}.$$

Agregamos sólo un número para no alterar demasiado la estructura del conjunto original. Esta construcción es claramente polinomial en el tamaño de la instancia (sólo sumamos los elementos y agregamos un valor).

Calcular la nueva suma total S'

La suma de A' es:

$$S' = S + b.$$

Al reemplazar b, obtenemos:

$$S' = S + (S - 2T) = 2(S - T).$$

Esto confirma que la mitad de S' es:

$$\frac{S'}{2} = S - T.$$

Queremos que si existe un subconjunto U con suma T, entonces:

- el complemento $A \setminus U$ suma $S - T$,
- y $U \cup \{b\}$ también suma $S - T$.

De esta manera, la partición construida a partir de una solución de Subset Sum coincide con dos mitades iguales en Partition.

La nueva pregunta de Partition

La pregunta para la instancia transformada es:

$$\text{¿Se puede dividir } A' \text{ en dos partes que sumen } \frac{S'}{2} = S - T \text{ cada una?}$$

Demostración de la reducción

Ida $\Rightarrow$

Si Subset Sum tiene solución, entonces Partition tiene solución.

Si hay solución de Subset Sum, significa que existe un subconjunto $U \subseteq A$ que suma exactamente T:

$$\sum_{a_i \in U} a_i = T.$$

En la instancia de Partition ya construida, la mitad deseada es $S - T$. El complemento $A \setminus U$ ya suma ese valor, así que es directamente uno de los dos grupos de la partición:

$$S_1 = A \setminus U.$$

Para formar el otro grupo, tomamos el subconjunto U y le agregamos el número especial b que incorporamos en la construcción. Ese número fue elegido de manera tal que:

$$T + b = T + (S - 2T) = S - T.$$

Entonces definimos:

$$S_2 = U \cup \{b\}.$$

Así, los dos grupos S_1 y S_2 tienen la misma suma $S - T = S'/2$, por lo que (S_1, S_2) es una partición válida de A'.

Entonces, toda solución del Subset Sum se convierte en una solución válida de Partition.

Vuelta $\Leftarrow$

Si Partition tiene solución, entonces Subset Sum tiene solución.

Si hay solución de Partition significa que se pueden dividir los elementos de A' en dos grupos que suman ambos $S - T = S'/2$.

En esa partición, el número agregado b debe encontrarse en exactamente uno de los dos grupos (porque sólo aparece una vez). Sin pérdida de generalidad, supongamos que $b \in S_2$.

Entonces:

$$\sum_{x \in S_2} x = (S - T),$$

y esta suma puede escribirse como:

$$\sum_{x \in S_2} x = b + \sum_{a_i \in S_2 \cap A} a_i = (S - 2T) + \sum_{a_i \in S_2 \cap A} a_i.$$

Igualando ambas expresiones:

$$(S - 2T) + \sum_{a_i \in S_2 \cap A} a_i = S - T \implies \sum_{a_i \in S_2 \cap A} a_i = T.$$

Es decir, el conjunto

$$U = S_2 \cap A$$

es un subconjunto formado únicamente por elementos de A que suman exactamente T.

Y eso es precisamente una solución de la instancia original de Subset Sum.

Por lo tanto, toda solución de Partition nos permite reconstruir una solución de Subset Sum.

Conclusión sobre Partition

Hemos construido una reducción polinomial desde Subset Sum a Partition y probado que:

$$(A, T) \text{ tiene solución de Subset Sum} \iff A' \text{ tiene solución de Partition.}$$

Como Subset Sum es NP-Completo y Partition pertenece a NP, concluimos que:

Partition es NP-Completo.

Problema de decisión de la Tribu del Agua

Dado un conjunto de n valores positivos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ que representan las habilidades de los maestros agua, un número entero k y un valor entero B, el problema de decisión de la Tribu del Agua pregunta:

¿Existe una partición de los n elementos en k grupos disjuntos $S_1, S_2, \ldots, S_k$ tal que

$$\sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{x_j \in S_i} x_j \right)^2 \leq B?$$

Cada elemento x_i debe pertenecer a exactamente un grupo.

Reducción desde Partition al Problema de la Tribu del Agua

Ahora reducimos Partition al Problema de la Tribu del Agua para probar que éste es NP-Completo.

Elección de los parámetros de la nueva instancia

Sea una instancia de Partition dada por un conjunto

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\},$$

y definamos

$$S = \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Si S es impar, la respuesta de Partition es *no* (no se puede dividir en dos partes de igual suma entera). En ese caso, podemos devolver una instancia fija del Problema de la Tribu del Agua que no tenga solución. Por lo tanto, podemos suponer que S es par.

- **Valores x_i:** Tomamos los mismos valores que en Partition:

  $$x_i = a_i \quad \text{para todo } i.$$

- **Número de grupos k:** Elegimos $k = 2$ porque Partition pregunta justamente si se pueden separar los elementos en dos subconjuntos de suma igual.

- **Construcción del parámetro B:**

  En el Problema de la Tribu del Agua, la condición a satisfacer es:

  $$\sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{x_j \in S_i} x_j \right)^2 \leq B.$$

  Como fijamos $k = 2$, esto se convierte en:

  $$\left(\sum_{x_j \in S_1} x_j \right)^2 + \left(\sum_{x_j \in S_2} x_j \right)^2 \leq B.$$

  Si llamamos x a la suma del primer grupo, entonces la del segundo es $S - x$. La expresión total depende únicamente de x:

$$f(x) = x^2 + (S - x)^2.$$

Expandimos:

$$f(x) = x^2 + S^2 - 2Sx + x^2 = 2x^2 - 2Sx + S^2.$$

Derivamos:

$$f'(x) = 4x - 2S.$$

Igualamos a cero para hallar el punto crítico:

$$4x - 2S = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{S}{2}.$$

La segunda derivada es:

$$f''(x) = 4 > 0,$$

así que el punto crítico es un mínimo local y, como f es una función cuadrática con coeficiente principal positivo, es el mínimo global.

Evaluamos el valor mínimo:

$$f\left(\frac{S}{2}\right) = \left(\frac{S}{2}\right)^2 + \left(S - \frac{S}{2}\right)^2 = \frac{S^2}{4} + \frac{S^2}{4} = \frac{S^2}{2}.$$

Para todo x se cumple

$$f(x) \geq f\left(\frac{S}{2}\right) = \frac{S^2}{2},$$

y la igualdad ocurre sólo cuando $x = \frac{S}{2}$.

Por lo tanto, definimos:

$$B = \frac{S^2}{2}.$$

Éste es el valor mínimo posible de la expresión. Cualquier partición donde la suma de uno de los grupos sea distinta de $\frac{S}{2}$ produce un valor estrictamente mayor que B, por lo que no puede satisfacer la desigualdad.

Con esta construcción, la pregunta del Problema de la Tribu del Agua queda:

$$\text{¿Existe una partición } (S_1, S_2) \text{ tal que } \left(\sum_{x_j \in S_1} x_j\right)^2 + \left(\sum_{x_j \in S_2} x_j\right)^2 \leq B?$$

Demostración de la reducción

Debemos demostrar que:

$$\text{Hay solución de Partition} \iff \text{Hay solución de la Tribu del Agua con } k = 2.$$

Ida $\Rightarrow$
Si hay solución del problema Partition, entonces hay solución del Problema de la Tribu del Agua.

Si existe un subconjunto $A' \subseteq A$ tal que:

$$\sum_{a_i \in A'} a_i = \sum_{a_i \in A \setminus A'} a_i = \frac{S}{2},$$

tomamos la partición:

$$S_1 = A', \qquad S_2 = A \setminus A'.$$

En esta partición, las sumas de los grupos son:

$$\sum_{x_j \in S_1} x_j = \frac{S}{2}, \qquad \sum_{x_j \in S_2} x_j = \frac{S}{2}.$$

La expresión del Problema de la Tribu del Agua con $k = 2$ es:

$$\left(\sum_{x_j \in S_1} x_j\right)^2 + \left(\sum_{x_j \in S_2} x_j\right)^2 = \left(\frac{S}{2}\right)^2 + \left(\frac{S}{2}\right)^2 = \frac{S^2}{2} = B.$$

Por lo tanto, la partición (S_1, S_2) cumple la condición:

$$\left(\sum_{x_j \in S_1} x_j\right)^2 + \left(\sum_{x_j \in S_2} x_j\right)^2 \leq B.$$

Entonces, si existe una solución de Partition, existe una solución para la instancia construida del Problema de la Tribu del Agua con $k = 2$.

Vuelta $\Leftarrow$
Si hay solución del Problema de la Tribu del Agua, entonces hay solución de Partition.

Supongamos que hay solución del Problema de la Tribu del Agua para la instancia construida. Es decir, existe una partición (S_1, S_2) con $k = 2$ tal que:

$$\left(\sum_{x_j \in S_1} x_j\right)^2 + \left(\sum_{x_j \in S_2} x_j\right)^2 \leq B,$$

donde

$$B = \frac{S^2}{2}.$$

Sea

$$x = \sum_{x_j \in S_1} x_j, \qquad \sum_{x_j \in S_2} x_j = S - x.$$

La expresión total es:

$$f(x) = x^2 + (S - x)^2.$$

Sabemos que

$$f(x) = 2x^2 - 2Sx + S^2,$$

y que

$$f'(x) = 4x - 2S, \qquad f''(x) = 4 > 0.$$

Como $f''(x) > 0$, el único punto crítico $x = S/2$ es su mínimo global. Además, ya calculamos que

$$f\left(\frac{S}{2}\right) = \frac{S^2}{2} = B.$$

Para todo $x \neq S/2$ se verifica

$$f(x) > f\left(\frac{S}{2}\right) = B.$$

Pero en nuestra instancia de la Tribu del Agua se cumple

$$f(x) \leq B.$$

La única forma de que una función tome un valor menor o igual a su mínimo global es que esté exactamente en el punto de mínimo. Por lo tanto, necesariamente

$$x = \frac{S}{2} \quad \Longrightarrow \quad S - x = \frac{S}{2}.$$

Es decir:

$$\sum_{x_j \in S_1} x_j = \sum_{x_j \in S_2} x_j = \frac{S}{2}.$$

Por definición de $x_i = a_i$, esto significa que (S_1, S_2) define una partición del conjunto A en dos subconjuntos de igual suma, lo cual es una solución del problema Partition.

Conclusión

Habiendo demostrado que:

- Partition es NP-Completo.
- Existe una reducción polinomial desde Partition al Problema de la Tribu del Agua.
- La instancia de Partition tiene solución si y sólo si la instancia construida del Problema de la Tribu del Agua tiene solución.

y dado que el Problema de la Tribu del Agua pertenece a NP, concluimos que el **Problema de la Tribu del Agua es NP-Completo**.

4. Backtracking

El algoritmo de *Backtracking* constituye una estrategia exacta para la resolución del Problema de la Tribu del Agua, ya que permite explorar todas las posibles particiones de los maestros agua en k grupos, garantizando así la obtención de la solución óptima. Dada la naturaleza combinatoria del problema, la cantidad de particiones crece exponencialmente con el número de maestros y grupos, por lo que la implementación cuidadosa de podas y optimizaciones es fundamental para mantener la ejecución dentro de tiempos razonables.

En este contexto, el *Backtracking* recorre de manera sistemática el espacio de soluciones, asignando progresivamente cada maestro a uno de los grupos disponibles y evaluando la función objetivo en cada etapa. La incorporación de criterios de poda permite descartar ramas del árbol de búsqueda que no pueden mejorar la solución encontrada hasta el momento, reduciendo drásticamente el número de combinaciones evaluadas.

Podas Implementadas:

- Poda por Cota Superior: `if sum_cuad_actual >= mejor_valor: Podar`
- Poda de simetría básica para evitar permutaciones de grupos vacíos. `ya_uso_vacio = False ....`

Mejoras sobre el algoritmo backtracking básico:

- Ordenamiento previo de habilidades en forma descendente; tiende a encontrar mejores soluciones temprano y permitir mayor poda.
- Actualización incremental de `suma_cuad_actual`. Evita recalcular toda la suma en cada nodo.

4.1. Código Python

```python
import math


def backtracking(i, habilidades, k, sumas, sum_cuad_actual, particion, mejor_valor, mejor_particion):

    if sum_cuad_actual >= mejor_valor:
        return mejor_valor, mejor_particion

    if i == len(habilidades):
        if sum_cuad_actual < mejor_valor:
            mejor_valor = sum_cuad_actual
            mejor_particion = [list(g) for g in particion]
        return mejor_valor, mejor_particion

    valor, indice = habilidades[i]

    ya_uso_vacio = False  # para evitar algunas permutaciones de los conjuntos
    for g in range(k):
        if sumas[g] == 0:
            if ya_uso_vacio:
                continue
            ya_uso_vacio = True

        suma_anterior = sumas[g]

        incremento = (suma_anterior + valor) ** 2 - (suma_anterior ** 2)

        particion[g].append(indice)
        sumas[g] += valor
        sum_cuad_actual += incremento

        mejor_valor, mejor_particion = backtracking(
```

```
33              i + 1, habilidades, k, sumas, sum_cuad_actual, particion, mejor_valor,
    mejor_particion)
34
35          sumas[g] -= valor
36          sum_cuad_actual -= incremento
37          particion[g].pop()
38
39      return mejor_valor, mejor_particion
40
41
42  def resolver(k, habilidades, ordenar=True):
43
44      tuplas = sorted([(v, i)
45                       for i, v in enumerate(habilidades)], reverse=True) if ordenar
    else [(v, i) for i, v in enumerate(habilidades)]
46
47      mejor_valor, mejor_particion = math.inf, None
48
49      sumas = [0] * k
50      sum_cuad_actual = 0
51      particion = [[] for _ in range(k)]
52
53      return backtracking(0, tuplas, k, sumas, sum_cuad_actual, particion,
    mejor_valor, mejor_particion)
```

4.2. Mediciones

Para evaluar la eficiencia del algoritmo de *Backtracking* y el efecto de las optimizaciones implementadas, se realizaron pruebas con distintos conjuntos de datos y números de grupos k. Los experimentos se centraron en comparar:

- La ejecución con ordenamiento previo descendente de las habilidades versus sin ordenamiento.
- El impacto de las podas implementadas sobre el número de nodos explorados en el árbol de búsqueda.

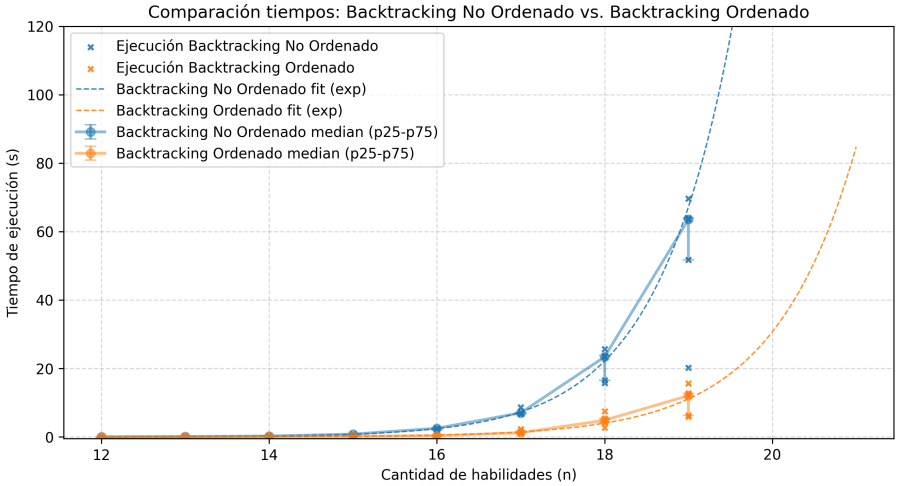
Cada conjunto de datos consistió en un número creciente de maestros agua, generando instancias que van desde casos pequeños, manejables por cualquier implementación, hasta instancias de tamaño medio donde la exploración exhaustiva se vuelve costosa.

Los resultados muestran que:

- El ordenamiento previo de habilidades permite encontrar soluciones cercanas al óptimo muy temprano en la exploración, aumentando la efectividad de la poda por cota superior y reduciendo significativamente el tiempo total de ejecución.
- La poda de simetría y la actualización incremental de la función objetivo contribuyen a una disminución notable del número de combinaciones evaluadas, lo que se refleja en tiempos de ejecución más bajos y en una mejora en la escalabilidad del algoritmo.

Con o Sin Ordenamiento Previo

Se muestra el efecto de realizar o no el Ordenamiento previo descendente de las habilidades.



En la Figura se observa claramente el efecto del ordenamiento previo: los tiempos de ejecución se reducen aproximadamente a un octavo cuando se ordenan los maestros de mayor a menor habilidad, evidenciando la relevancia de esta estrategia de optimización en problemas combinatorios de este tipo.

Estos resultados confirman que, aunque el algoritmo sigue siendo exponencial en el peor caso, las mejoras implementadas permiten resolver instancias de tamaño moderado de manera eficiente y proporcionan una base sólida para la comparación con algoritmos aproximados o heurísticos.

TODO: Ampliar

5. Programación Lineal

En esta sección se planteará un modelo de Programación Lineal para la resolución de este problema. Primero se presentará la idea original, basada en una función no lineal con variables binarias, y luego se describirá un modelo lineal que aproxima la solución óptima.

Lo que se buscará al resolverlo con programación lineal en este informe es que, al recibir una secuencia de n maestros y un número k, se devuelva la menor diferencia posible entre el grupo de mayor suma y el de menor suma, además de los grupos asignados.

La idea central consiste en introducir una variable binaria y_{ij} que indique si el maestro j pertenece al grupo i:

$$y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si el maestro } j \text{ pertenece al grupo } i, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Con esta definición, la función original a minimizar es:

$$\text{mín} \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{j=1}^{n} x_j y_{ij} \right)^2 .$$

Dado que esta expresión no es lineal, se optará por formular un modelo lineal que proporcione una aproximación razonable.

5.1. Variables

- $y_{ij} \in \{0, 1\}$: indica si el maestro j pertenece al grupo i.
- $s_i \in \mathbb{R}$: suma total de fuerzas asignadas al grupo i.
- $Z_{\text{máx}}, Z_{\text{mín}} \in \mathbb{R}$: valor máximo y mínimo, respectivamente, entre todas las sumas s_i.

5.2. Restricciones

Las restricciones del modelo aseguran la correcta asignación de maestros a grupos y la relación entre s_i, $Z_{\text{máx}}$ y $Z_{\text{mín}}$.

- **Asignación de maestros:** Lo principal será limitar a cuántos grupos i puede pertenecer cada maestro j. En este caso se busca que cada maestro esté asignado a un solo grupo, por lo tanto, tendremos una restricción tal que:

$$\sum_{i=1}^{k} y_{ij} = 1 \quad \forall j.$$

  Esto garantiza que ningún maestro quede sin asignar ni aparezca en más de un grupo.

- **Definición de las sumas s_i:** Para cada grupo i, la suma de fuerzas es igual a la suma de los valores x_j de los maestros asignados a él:

$$s_i = \sum_{j=1}^{n} x_j y_{ij} \quad \forall i.$$

  Se sumarán todas las fuerzas de cada maestro j solo si pertenece al grupo i ($y_{ij} = 1$).

- **Relación con $Z_{\text{máx}}$ y $Z_{\text{mín}}$:** Para que $Z_{\text{máx}}$ y $Z_{\text{mín}}$ representen efectivamente el mayor y el menor valor entre los s_i, se imponen:

$$s_i \leq Z_{\text{máx}} \quad \forall i,$$

$$s_i \geq Z_{\text{mín}} \quad \forall i.$$

Se tendría un total de $n + 3k$ inecuaciones.

5.3. Función Objetivo

La aproximación lineal consiste en minimizar la diferencia entre la suma más grande y la suma más pequeña:

$$\text{mín}\left(Z_{\text{máx}} - Z_{\text{mín}}\right).$$

Este criterio es razonable porque minimizar la diferencia entre los grupos tiende a equilibrar sus sumas, lo cual aproxima el objetivo original basado en la minimización de los cuadrados.

5.4. Implementación en Python con PuLP

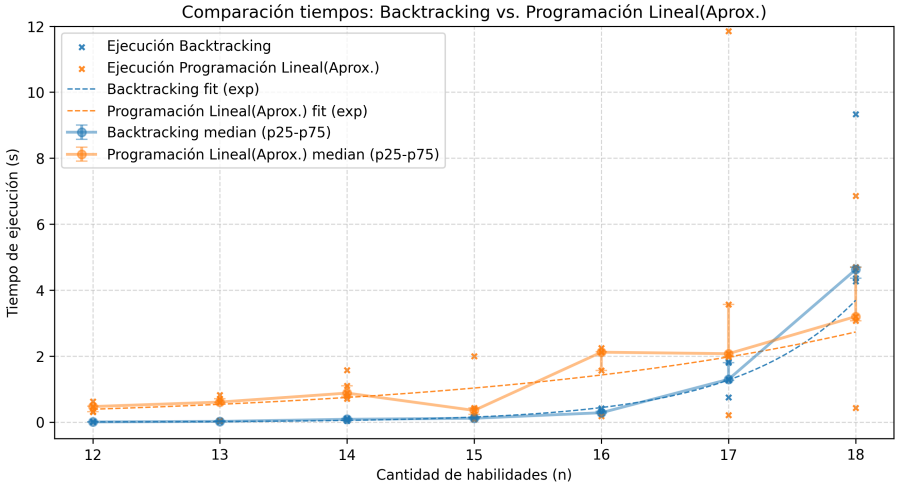
```python
import pulp
from pulp import PULP_CBC_CMD

def obtener_particiones(n, k, y):
    particion = [[] for _ in range(k)]
    for i in range(k):
        for j in range(n):
            if y[i][j].value() == 1:
                particion[i].append(j)

    return particion


def prog_lineal(k, habilidades):
    n = len(habilidades)

    modelo = pulp.LpProblem("Tribu_del_Agua", pulp.LpMinimize)

    # Variables
    y = pulp.LpVariable.dicts("y", (range(k), range(n)), cat="Binary")
    s = pulp.LpVariable.dicts("s", range(k))
    zmax = pulp.LpVariable("Zmax")
    zmin = pulp.LpVariable("Zmin")

    # Restricciones

    # Asignacion de maestros
    for j in range(n):
        modelo += pulp.lpSum(y[i][j] for i in range(k)) == 1

    # Definicion de sumas, zmax y zmin
    for i in range(k):
        modelo += s[i] == pulp.lpSum(habilidades[j] * y[i][j]
                                     for j in range(n))
        modelo += s[i] <= zmax
        modelo += s[i] >= zmin

    modelo += zmax - zmin

    modelo.solve(PULP_CBC_CMD(msg=False))

```

```
    particion = obtener_particiones(n, k, y)
    suma = sum((s[i].value())**2 for i in range(k))

    valor_objetivo = (zmax.value() - zmin.value())

    return suma, particion, valor_objetivo
```

5.5. Mediciones

TODO: Agregar contexto

Tiempos de Ejecución



TODO: Agregar Interpretación

Ratio de la Aproximación

TODO: Agregar contexto

TODO: Agregar Gráfico

TODO: Agregar Interpretación

6. Greedy - Algoritmo de Pakku

Se implementó el algoritmo propuesto por el maestro Pakku.

Para determinar el "grupo con menos habilidad hasta ahora", se consideró la suma de habilidades del grupo, por corresponder el mínimo de esta suma al mínimo del cuadrado de la suma.

6.1. Código Python

```python
def greedy_pakku(k, habilidades):
    ordenadas = sorted([(v, i)
                        for i, v in enumerate(habilidades)], reverse=True)
    sumas = [0]*k
    particion = [[] for _ in range(k)]
    for valor, indice in ordenadas:
        j = min(range(k), key=lambda x: sumas[x])
        particion[j].append(indice)
        sumas[j] += valor
    return sum(s*s for s in sumas), particion
```

6.2. Análisis de Complejidad

Complejidad Temporal

El algoritmo ordena la lista de habilidades de tamaño n, con costo $\mathcal{O}(n \log n)$.

Luego, para cada uno de los n elementos, selecciona el grupo con menor suma actual mediante una búsqueda lineal entre los k grupos, lo que cuesta $\mathcal{O}(k)$ por iteración.

El costo total de esta fase es $\mathcal{O}(nk)$.

Por lo tanto, la complejidad temporal total es

$$T(n, k) = \mathcal{O}(n \log n + nk).$$

Para situaciones las que $k \ll n$, el término dominante resulta $n \log n$, mientras que para k grandes predomina el término lineal en kn.

Complejidad Espacial

El algoritmo usa las siguientes estructuras:

(i) la lista ordenada: $\mathcal{O}(n)$, (ii) el arreglo de sumas: $\mathcal{O}(k)$, (iii) las particiones: $\mathcal{O}(n)$.

En consecuencia, el uso total de memoria es

$$S(n, k) = \mathcal{O}(n + k).$$

6.3. Calidad de la Aproximación

El objetivo del problema consiste en particionar los n maestros en k grupos $S_1, \ldots, S_k$ de forma tal que, si denotamos por L_j a la suma de habilidades del grupo j, se minimice la función

$$f(S_1, \ldots, S_k) = \sum_{j=1}^{k} L_j^2.$$

Para una instancia I, denotamos por $OPT(I)$ al valor óptimo de esta función y por $A(I)$ al valor obtenido por el algoritmo Greedy de Pakku.

Cota inferior para el óptimo

Sea $S = \sum_{i=1}^{n} x_i$ la suma total de habilidades. Para cualquier partición de los maestros en k grupos, se cumple

$$\sum_{j=1}^{k} L_j = S.$$

Usando que la función x^2 es convexa, obtenemos la siguiente cota inferior válida para *toda* partición:

$$\sum_{j=1}^{k} L_j^2 \;\geq\; k \left(\frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} L_j \right)^2 = k \left(\frac{S}{k} \right)^2 = \frac{S^2}{k}.$$

Por lo tanto, para toda instancia I se cumple

$$OPT(I) \;\geq\; \frac{S^2}{k}.$$

Cota superior para el algoritmo Greedy

Analicemos ahora el comportamiento del algoritmo de Pakku.

- ordena las habilidades de mayor a menor,
- y asigna cada maestro al grupo con menor suma actual.

Sea p la habilidad máxima (es decir, $p = \text{máx}_i\, x_i$). En el momento en que se asigna el maestro de habilidad p, la suma de habilidades ya asignadas es $S - p$, con lo cual la carga promedio de los grupos en ese instante es

$$\frac{S-p}{k}.$$

Como el algoritmo elige siempre el grupo con menor suma, la carga de ese grupo antes de asignar p es, a lo sumo,

$$L_{\text{antes}} \;\leq\; \frac{S-p}{k}.$$

Luego de agregar p, la carga de ese grupo queda acotada por

$$L_{\text{después}} \;\leq\; \frac{S-p}{k} + p = \frac{S}{k} + \left(1 - \frac{1}{k}\right) p.$$

En consecuencia, si denotamos por M_G a la carga máxima en la solución Greedy, tenemos

$$M_G \;\leq\; \frac{S}{k} + \left(1 - \frac{1}{k}\right) p.$$

Por otro lado, como la suma de las cargas es S, podemos acotar el valor de la función objetivo de la solución Greedy como

$$A(I) = \sum_{j=1}^{k} L_j^2 \;\leq\; M_G \sum_{j=1}^{k} L_j = M_G \cdot S \;\leq\; \left(\frac{S}{k} + \left(1 - \frac{1}{k}\right) p \right) S.$$

Factor de aproximación

Combinando la cota inferior del óptimo con la cota superior del algoritmo, se obtiene

$$\frac{A(I)}{OPT(I)} \;\leq\; \frac{\left(\frac{S}{k} + \left(1 - \frac{1}{k}\right) p\right) S}{\frac{S^2}{k}} = 1 + (k-1)\frac{p}{S}.$$

Como $p \leq S$ (la habilidad máxima no puede exceder la suma total), se tiene

$$\frac{p}{S} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{A(I)}{OPT(I)} \;\leq\; 1 + (k-1) \;=\; k.$$

Es decir, el algoritmo de Pakku es un algoritmo de *aproximación k-aproximado*: para cualquier instancia I con k grupos, el valor de la solución Greedy satisface

$$A(I) \;\leq\; k \cdot OPT(I).$$

Además, la cota más fina

$$\frac{A(I)}{OPT(I)} \;\leq\; 1 + (k-1)\frac{p}{S}$$

muestra que, cuando ningún maestro domina fuertemente la suma total (es decir, cuando el cociente p/S es pequeño), el factor de aproximación real es mucho más cercano a 1 que a k. En las mediciones experimentales presentadas más adelante se observa justamente que, para las instancias consideradas, el algoritmo Greedy produce soluciones muy cercanas al óptimo.

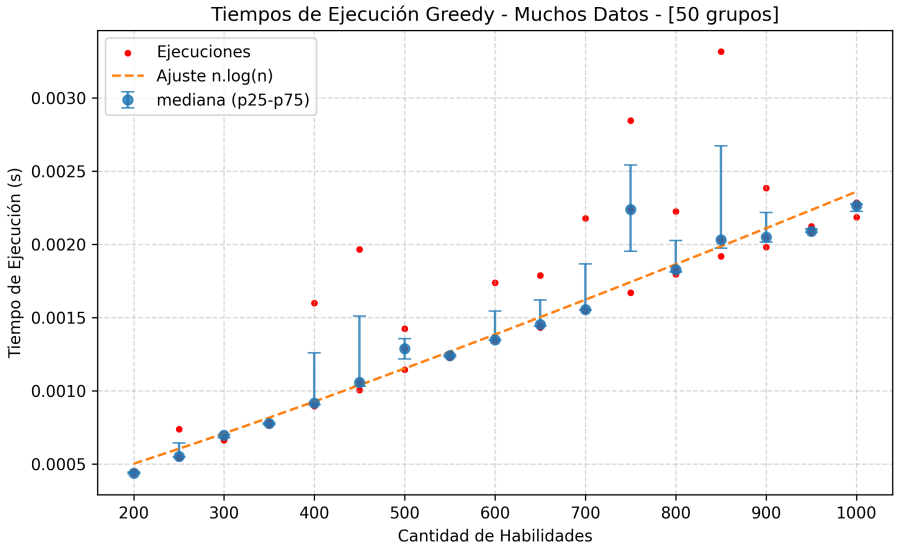
6.4. Mediciones

Tiempos de Ejecución - Datasets Grandes

Para contrastar la estimación teórica de la complejidad temporal con observaciones experimentales, se generaron diversos conjuntos de datos aleatorios de tamaños variables. En total se realizaron mediciones para $17 * 5 = 85$ conjuntos distintos de habilidades, cada uno con entre 200 y 1000 elementos.:

- Se generó un conjunto de datos con 85 sets de tamaño comprendido entre 200 y 1000 elementos (habilidades).
- Cada habilidad con un valor comprendido entre 10 y 1000.
- Se definieron 50 grupos ($k = 50$)
- Para cada set de ese conjunto de datos, se midió el tiempo de procesamiento.

Finalmente, se graficaron los tiempos medidos junto con la curva de ajuste correspondiente a la complejidad teórica estimada.



Se observa que, si bien hay elevada dispersión en los resultados, los valores medidos se ajustan bien al estimado teórico $n.log(n)$.

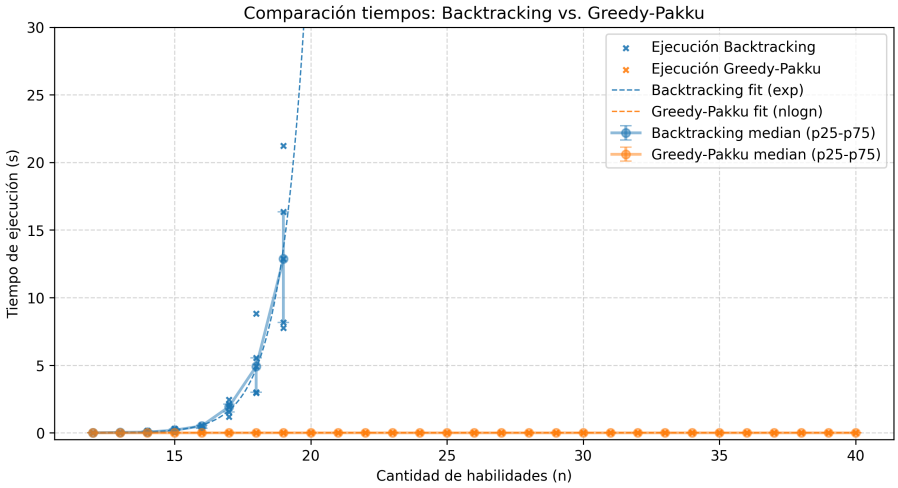
Comparación Tiempos - Backtraking vs. Greedy-Pakku

Para observar el rendimiento del algoritmo Greedy-Pakku, se realizaron experimentos que comparan su tiempo de ejecución con respecto al algoritmo exacto basado en Backtracking.

Se evaluaron instancias con distintos valores de maestros n y grupos k, registrando tanto los tiempos de ejecución.

Dado que el problema es NP-completo, el algoritmo exacto presenta un crecimiento exponencial en función de n. Por este motivo en las pruebas se limitó su uso sets de datos con ≤ 20.

Por otro lado, la heurística Greedy mantiene tiempos de ejecución polinomiales.



Nota: si bien los tiempos para el algoritmo Greedy parecen constantes, eso es debido al pequeño intervalo considerado y a la gran diferencia de escala con los tiempos de Backtraking. Como se vio en gráfico anterior, la solución Greedy tiene un orden $n.log(n)$

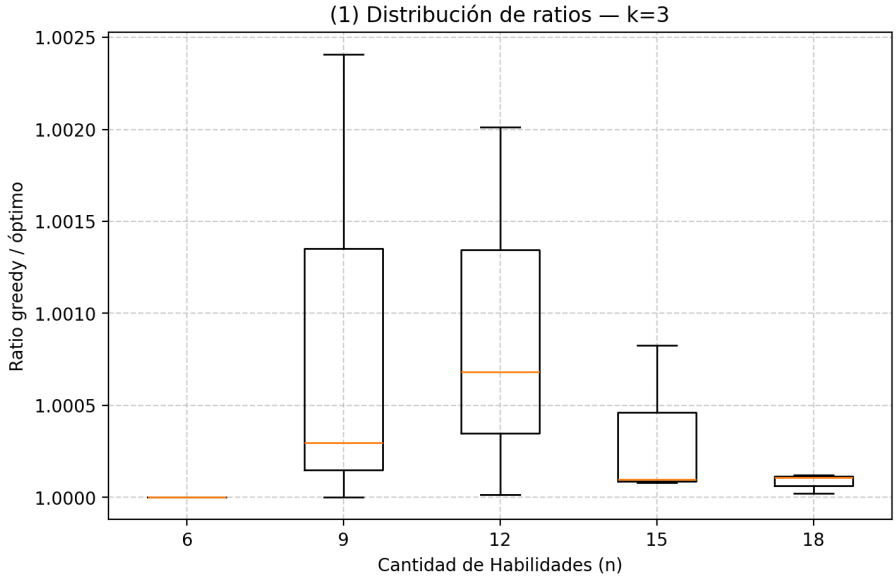
Ratio de la Aproximación

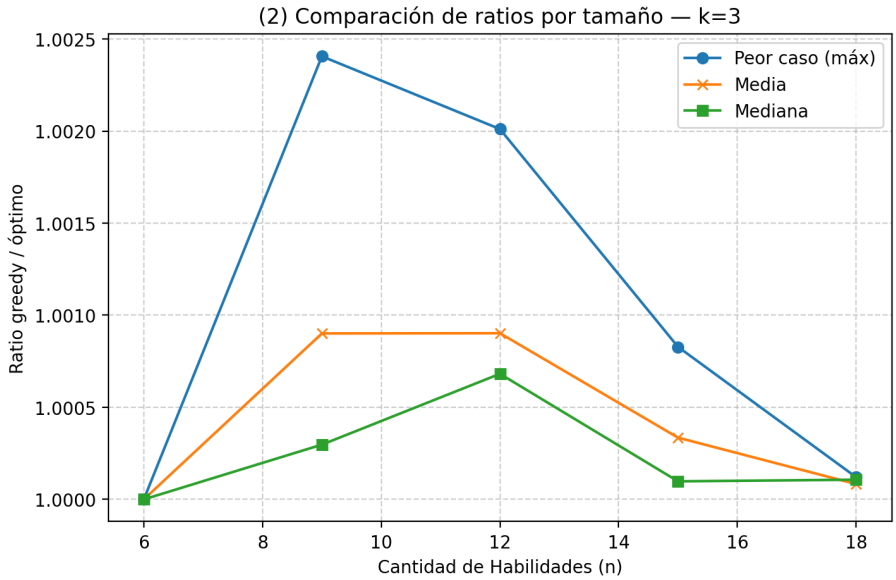
Para analizar cuán cercana es la solución entregada por Greedy-Pakku respecto del valor óptimo obtenido mediante backtracking, se realizaron múltiples experimentos sobre instancias de distinto tamaño n.

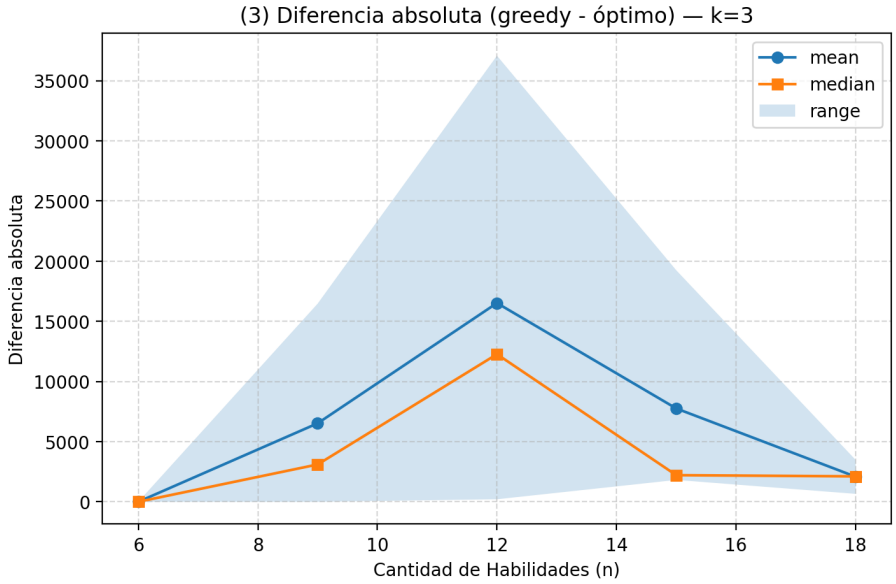
Las figuras siguientes resumen estos resultados a través de tres métricas complementarias:

- Ratio Greedy/Óptimo: indica cuán lejos está la solución heurística del valor óptimo. Un ratio igual a 1 implica solución perfecta. El primer panel muestra la distribución completa de estos ratios para cada n mediante boxplots.
- Peor, media y mediana del ratio: el segundo panel sintetiza el desempeño del Greedy para cada tamaño de instancia, destacando su comportamiento típico (media y mediana) y su peor caso observado.
- Diferencia absoluta (Greedy - Óptimo): el tercer panel muestra cuánto se desvía en valores absolutos la solución heurística. Se grafican la media, la mediana y el rango completo (mínimo -máximo) para cada nn.

En conjunto, estas métricas permiten evaluar tanto la estabilidad del método heurístico como su ajuste relativo y absoluto respecto de la solución óptima.







Los resultados indican que Greedy-Pakku ofrece una adecuada aproximación al óptimo:

Los ratios Greedy/Óptimo se mantienen cercanos a 1, tanto en su distribución (panel 1) como en sus valores medio, mediano y peor caso (panel 2).

Además, las diferencias absolutas entre ambas soluciones permanecen acotadas en todos los tamaños evaluados (panel 3).

Esto indica que el método heurístico logra soluciones de buena calidad con un costo computacional significativamente menor.

7. Greedy - FFD

En esta sección se presenta una segunda aproximación greedy para el Problema de la Tribu del Agua, distinta de la propuesta por el Maestro Pakku. Mientras que la heurística original asigna cada maestro al grupo cuya suma total de habilidades es mínima, la aproximación aquí analizada considera explícitamente el efecto cuadrático del costo objetivo. En particular, cada elemento es asignado al grupo que produce el *menor aumento posible en el costo total*, definido como

$$(S_g + x_i)^2 - S_g^2,$$

donde S_g denota la suma actual del grupo g y x_i la habilidad del maestro considerado.

7.1. Descripción del Algoritmo

Dado un conjunto de habilidades $x_1, \ldots, x_n$ y una cantidad k de grupos, el algoritmo procede del siguiente modo:

1. Ordena las habilidades de manera no creciente.
2. Para cada maestro x_i en ese orden, evalúa para cada grupo g cuál sería el aumento del costo total si x_i fuese insertado en dicho grupo.
3. El maestro es asignado al grupo que produzca el mínimo incremento del costo.
4. Se actualiza la suma del grupo seleccionado y se continúa con el siguiente maestro.

El código correspondiente es el siguiente:

```python
def greedy_ffd(k, habilidades):
    ordenadas = sorted([(v, i) for i, v in enumerate(habilidades)], reverse=True)

    sumas = [0] * k
    particion = [[] for _ in range(k)]

    for valor, indice in ordenadas:
        mejor_g = None
        mejor_aumento = float('inf')

        for g in range(k):
            aumento = (sumas[g] + valor)**2 - (sumas[g]**2)
            if aumento < mejor_aumento:
                mejor_aumento = aumento
                mejor_g = g

        particion[mejor_g].append(indice)
        sumas[mejor_g] += valor

    return sum(s*s for s in sumas), particion
```

7.2. Complejidad Temporal

El algoritmo realiza dos pasos principales:

- Ordenar las habilidades: $O(n \log n)$.
- Evaluar, para cada uno de los n maestros, el aumento de costo en cada uno de los k grupos: $O(nk)$.

Por lo tanto, la complejidad temporal total es:

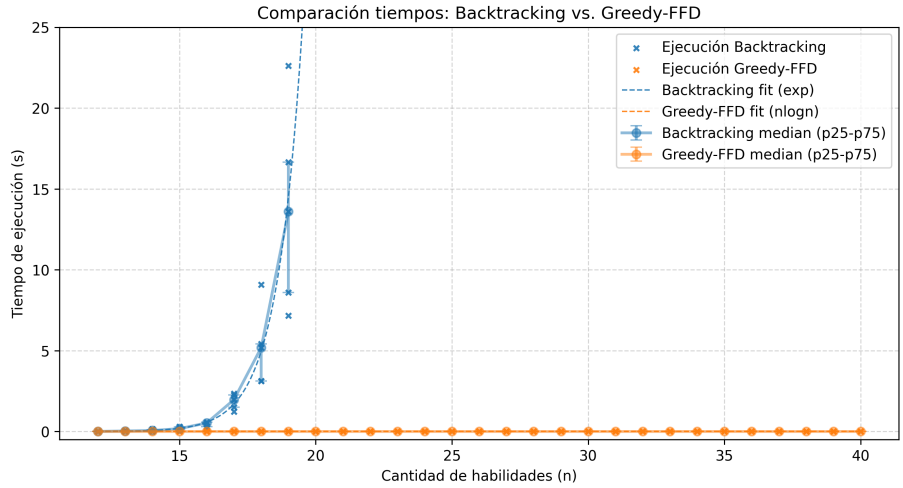
$$T(n,k) = O(n \log n + nk).$$

Para valores prácticos en los que $k \ll n$, el término dominante es $O(n \log n)$, mientras que para k grande el término lineal en k domina. La complejidad espacial es $O(n + k)$.

7.3. Mediciones

Comparación Tiempos - Backtraking vs. Greedy-ffd

Para evaluar el desempeño del algoritmo Greedy-FFD, se realizaron experimentos comparando su tiempo de ejecución y la calidad de la solución frente al algoritmo exacto por Backtracking. Se consideraron instancias con distinto número de maestros n y grupos k, registrando tanto los tiempos de cómputo como la función objetivo obtenida. Debido a la naturaleza NP-completa del problema, el algoritmo exacto crece exponencialmente con n, mientras que la heurística Greedy mantiene tiempos prácticamente polinomiales.



Nota: si bien los tiempos para el algoritmo Greedy parecen constantes, eso es debido al pequeño intervalo considerado y a la gran diferencia de escala con los tiempos de Backtraking. Como se vio anterioriormente, la solución Greedy tiene un orden $n.log(n)$

Comparación Tiempos - Backtracking vs. Greedy-FFD

La Figura muestra los tiempos de ejecución del algoritmo exacto por Backtracking frente al Greedy-FFD para distintas instancias del problema, aumentando el número de maestros n con k grupos fijos.

Se observan varios aspectos importantes:

- Los tiempos de Backtracking crecen de manera exponencial con n, como era de esperar para un algoritmo exacto que recorre todas las particiones posibles. Esto se refleja claramente en el ajuste de la curva (línea discontinua azul) con crecimiento exponencial.
- Los tiempos de Greedy-FFD permanecen prácticamente constantes incluso cuando n aumenta, mostrando el comportamiento polinómico previsto por su complejidad teórica $O(n \log n + nk)$. Esto se evidencia en el ajuste de la curva naranja, que sigue una tendencia logarítmica/lenta en la escala del eje vertical.

- La diferencia de escala entre ambos algoritmos es muy marcada: mientras que Backtracking supera varios segundos para $n \approx 20$, Greedy-FFD se mantiene por debajo de 0,1 s, haciendo que la heurística sea aplicable a instancias mucho más grandes donde Backtracking es inviable.
- Las barras de mediana y cuartiles muestran que la variabilidad de tiempos de ejecución es baja para Greedy-FFD, mientras que Backtracking presenta mayor dispersión, indicando que ciertas instancias son más costosas de resolver.

7.4. Calidad de la Aproximación para Greedy FFD

El algoritmo **Greedy FFD** consiste en procesar los maestros en orden decreciente de habilidad y asignar cada maestro al grupo que produce el *menor aumento incremental* en la función objetivo

$$f(S_1, \ldots, S_k) = \sum_{j=1}^{k} L_j^2,$$

donde L_j es la suma de habilidades del grupo j. Denotamos por $A_{\text{FFD}}(I)$ el valor obtenido por el algoritmo para la instancia I y por $OPT(I)$ el valor óptimo.

Cota inferior para el óptimo

Sea $S = \sum_{i=1}^{n} x_i$ la suma total de habilidades. Para cualquier partición en k grupos se cumple

$$\sum_{j=1}^{k} L_j = S.$$

Usando que la función x^2 es convexa, obtenemos la cota mínima válida para *toda* partición:

$$\sum_{j=1}^{k} L_j^2 \;\geq\; k \left(\frac{S}{k}\right)^2 = \frac{S^2}{k}.$$

Comportamiento del algoritmo

Dado que el algoritmo siempre asigna el siguiente maestro al grupo que produce el menor aumento en L_j^2, se garantiza que cada maestro se coloca en el grupo que mantiene las sumas lo más equilibradas posible en cada paso. Si $L_{\text{máx}} = \text{máx}_i\, x_i$ es la mayor habilidad individual, ningún grupo puede superar la suma

$$L_{\text{máx}} + \frac{S - L_{\text{máx}}}{k},$$

ya que el maestro más habilidoso se coloca primero y el resto se distribuye tratando de equilibrar las sumas.

De esta forma, podemos obtener una cota superior para la función objetivo bajo Greedy FFD:

$$A_{\text{FFD}}(I) \;\leq\; (L_{\text{máx}} + S/k)^2 + (k-1)\left(\frac{S}{k}\right)^2.$$

Interpretación

Aunque el algoritmo no garantiza optimalidad, minimiza localmente el aumento de la función objetivo en cada paso, produciendo particiones equilibradas. En la práctica, esto significa que

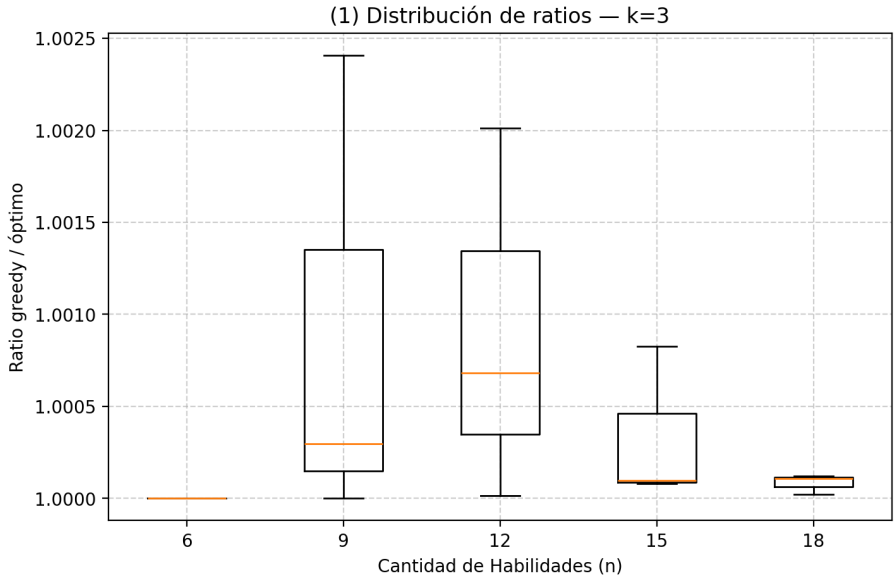
$$\frac{A_{\text{FFD}}(I)}{OPT(I)} \approx 1$$

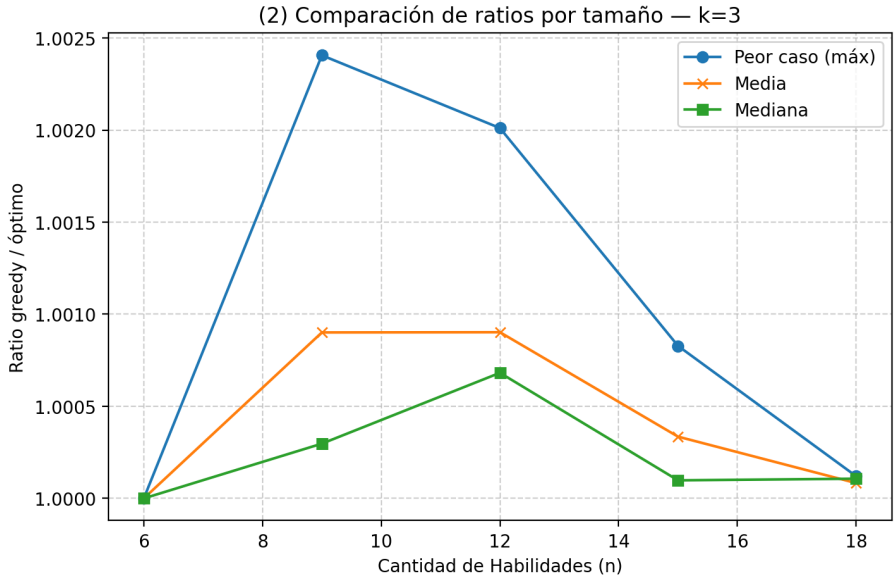
para instancias donde las habilidades no varían demasiado, y sigue siendo una heurística efectiva para el problema NP-completo de la Tribu del Agua.

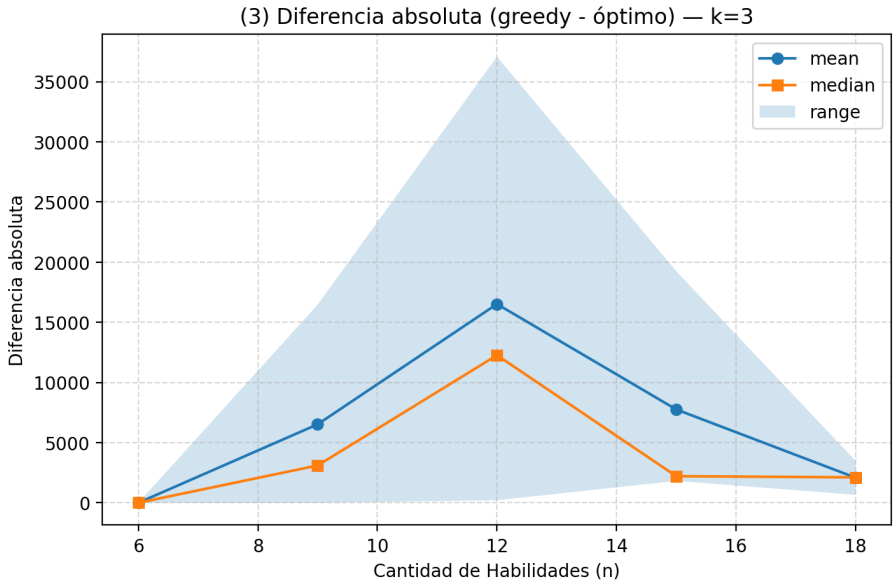
Ratio de la Aproximación

De manera análoga al análisis realizado para el método Greedy anterior, la siguiente figura evalúa la calidad de las soluciones obtenidas por el método Greedy-FFD.

Se presentan las mismas métricas: distribución del ratio Greedy/Óptimo, estadísticos de su evolución y diferencia absoluta entre ambas soluciones.







Los gráficos muestran que Greedy-FFD también produce soluciones muy cercanas al óptimo: los ratios se mantienen cercanos a /textbf1 y las diferencias absolutas quedan acotadas en todos los tamaños evaluados.

8. Ejemplo de Ejecuciones

En esta sección se presentan los tests realizados tanto para el algoritmo de backtracking como para las aproximaciones greedy. El objetivo es verificar que el cálculo del coeficiente mínimo y la distribución de maestros en grupos sea correcto y analizar cómo se comportan los algoritmos aproximados frente a la solución óptima.

8.1. Algoritmo de Backtracking

8.1.1. Test 1: Distribución general

Archivo: `test_uno.txt`

```
3
A, 8
B, 7
C, 6
D, 1
E, 2
F, 3
G, 5
H, 4
I, 2
J, 3
K, 4
L, 1
```

Resultados esperados:

- *Coeficiente mínimo:* 706
- *Grupos:*
  - Grupo 1: A, B, L
  - Grupo 2: C, G, K
  - Grupo 3: H, J, F, I, E, D

8.1.2. Test 2: Parejas perfectas

Archivo: `test_parejas_perfectas.txt`

```
4
Rohan, 300
Kya, 300
Bumi II, 300
Varrick, 300
Zhu Li, 200
Zaheer, 200
Ming-Hua, 200
Ghazan, 200
```

Motivación: Comprobar distribución óptima en grupos con habilidades parejas exactas.

Resultados esperados:

- *Coeficiente mínimo:* 1000000

- *Grupos:*
  - Grupo 1: Varrick, Ghazan
  - Grupo 2: Bumi II, Ming-Hua
  - Grupo 3: Kya, Zaheer
  - Grupo 4: Rohan, Zhu Li

8.2. Algoritmo de Aproximación Greedy

8.2.1. Test 1: Escalonado

Archivo: `test_escalonado.txt`

```
10
Maestro A1, 1000
Maestro A2, 1000
...
Maestro J10, 100
```

Motivación: Distribución con habilidades en bloques decrecientes. Permite analizar cómo el algoritmo greedy maneja grandes diferencias entre grupos y si logra balancear adecuadamente.

Resultados esperados:

- *Coeficiente:* 302500000.0
- *Grupos:*
  - Grupo 1: Maestro A10, Maestro B10, Maestro C10, Maestro D10, Maestro E10, Maestro F10, Maestro G10, Maestro H10, Maestro I10, Maestro J10
  - Grupo 2: Maestro A9, Maestro B9, Maestro C9, Maestro D9, Maestro E9, Maestro F9, Maestro G9, Maestro H9, Maestro I9, Maestro J9
  - Grupo 3: Maestro A8, Maestro B8, Maestro C8, Maestro D8, Maestro E8, Maestro F8, Maestro G8, Maestro H8, Maestro I8, Maestro J8
  - Grupo 4: Maestro A7, Maestro B7, Maestro C7, Maestro D7, Maestro E7, Maestro F7, Maestro G7, Maestro H7, Maestro I7, Maestro J7
  - Grupo 5: Maestro A6, Maestro B6, Maestro C6, Maestro D6, Maestro E6, Maestro F6, Maestro G6, Maestro H6, Maestro I6, Maestro J6
  - Grupo 6: Maestro A5, Maestro B5, Maestro C5, Maestro D5, Maestro E5, Maestro F5, Maestro G5, Maestro H5, Maestro I5, Maestro J5
  - Grupo 7: Maestro A4, Maestro B4, Maestro C4, Maestro D4, Maestro E4, Maestro F4, Maestro G4, Maestro H4, Maestro I4, Maestro J4
  - Grupo 8: Maestro A3, Maestro B3, Maestro C3, Maestro D3, Maestro E3, Maestro F3, Maestro G3, Maestro H3, Maestro I3, Maestro J3
  - Grupo 9: Maestro A2, Maestro B2, Maestro C2, Maestro D2, Maestro E2, Maestro F2, Maestro G2, Maestro H2, Maestro I2, Maestro J2
  - Grupo 10: Maestro A1, Maestro B1, Maestro C1, Maestro D1, Maestro E1, Maestro F1, Maestro G1, Maestro H1, Maestro I1, Maestro J1

8.2.2. Test 2: Balance perfecto

Archivo: `test_balance_perfecto.txt`

```
5
Aang, 100
Katara, 100
Sokka, 100
Toph, 100
Zuko, 100
Iroh, 100
Azula, 100
Mai, 100
Ty Lee, 100
Suki, 100
Jet, 100
Haru, 100
Bumi, 100
Pakku, 100
Jeong Jeong, 100
```

Motivación: Todos los maestros tienen la misma habilidad.

Resultados esperados:

- *Coeficiente mínimo (Greedy FFD):* 450000
- *Distribución de grupos:*
  - Grupo 1: Aang, Katara, Sokka
  - Grupo 2: Toph, Zuko, Iroh
  - Grupo 3: Azula, Mai, Ty Lee
  - Grupo 4: Suki, Jet, Haru
  - Grupo 5: Bumi, Pakku, Jeong Jeong

9. Conclusiones