



TEORÍA DE ALGORITMOS
(TB024) CURSO BUCHWALD - GENENDER

Trabajo Práctico 3

Problemas NP-Completo para la defensa de la Tribu del Agua

[illegible]

12 de noviembre de 2025

Alen Davies
107.084

Hugo Huzan
67.910

Joaquin Vedoya
110.282

Franco Altieri Lamas
105.400

Trabajo Práctico 3: Problemas NP-Complejos para la defensa de la Tribu del Agua

1. Introducción

Es el año 95 DG. La Nación del Fuego sigue su ataque, esta vez hacia la Tribu del Agua, luego de una humillante derrota a manos del Reino de la Tierra, gracias a nuestra ayuda. La tribu debe defenderse del ataque.

El maestro Pakku ha recomendado hacer lo siguiente: Separar a todos los Maestros Agua en k grupos (S_1, S_2, \dots, S_k) . Primero atacará el primer grupo. A medida que el primer grupo se vaya cansando entrará el segundo grupo. Luego entrará el tercero, y de esta manera se busca generar un ataque constante, que sumado a la ventaja del agua por sobre el fuego, buscará lograr la victoria.

En función de esto, lo más conveniente es que los grupos estén parejos para que, justamente, ese ataque se mantenga constante.

Conocemos la fuerza/maestría/habilidad de cada uno de los maestros agua, la cual podemos cuantificar diciendo que para el maestro i ese valor es x_i , y tenemos todos los valores x_1, x_2, \dots, x_n (todos valores positivos).

Para que los grupos estén parejos, lo que buscaremos es minimizar la adición de los cuadrados de las sumas de las fuerzas de los grupos. Es decir:

$$\min \sum_{i=1}^k \left(\sum_{x_j \in S_i} x_j \right)^2$$

El Maestro Pakku nos dice que esta es una tarea difícil, pero que con tiempo y paciencia podemos obtener el resultado ideal.

Resolución

2. El Problema es NP

Se mostrará que el problema pertenece a la clase de complejidad **NP** presentando un *Certificador Eficiente* que puede validar un *certificado* en tiempo polinomial.

Certificado.

Un vector $C = (S_1, \dots, S_k)$ siendo cada S_j un vector de índices que indica que x_i pertenecen a cada grupo.

Algoritmo

El certificador debe verificar:

- Que la cantidad de vectores S_j sea K
- Que cada x_i pertenezca a algún vector S_j
- Que cada x_i aparezca una sola vez.
- Que la suma de los cuadrados de las sumas de los elementos de cada S_j sea menor o igual a B .

TODO: Mostrar que es polinómico

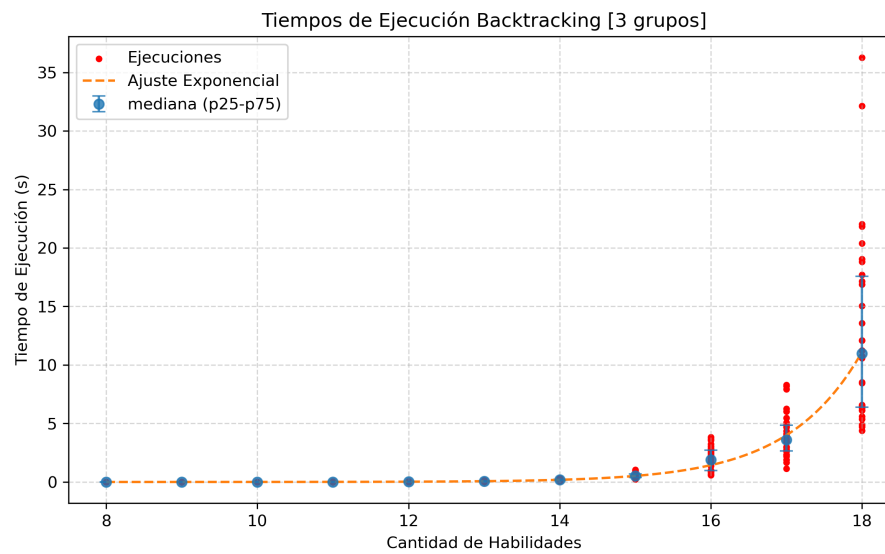
3. Backtracking

```
1 import math
2
3
4 def suma_cuadrados(sumas):
5     return sum(s * s for s in sumas)
6
7
8 def backtracking(i, habilidades, k, sumas, particion, mejor_valor, mejor_particion)
9     :
10
11     sum_cuad_actual = suma_cuadrados(sumas)
12
13     if sum_cuad_actual >= mejor_valor:
14         return mejor_valor, mejor_particion
15
16     if i == len(habilidades):
17         if sum_cuad_actual < mejor_valor:
18             mejor_valor = sum_cuad_actual
19             mejor_particion = [list(g) for g in particion]
20         return mejor_valor, mejor_particion
21
22     valor, indice = habilidades[i]
23
24     orden = sorted(range(k), key=lambda x: sumas[x])
25     ya_uso_vacio = False # para evitar permutaciones de los conjuntos
26     for g in orden:
27         if sumas[g] == 0:
28             if ya_uso_vacio:
29                 continue
30             ya_uso_vacio = True
31
32         particion[g].append(indice)
33         sumas[g] += valor
34
35         mejor_valor, mejor_particion = backtracking(
36             i + 1, habilidades, k, sumas, particion, mejor_valor, mejor_particion)
37
38         sumas[g] -= valor
39         particion[g].pop()
40
41     return mejor_valor, mejor_particion
42
43 def resolver(k, habilidades):
44
45     sumas = [0] * k
46     particion = [[] for _ in range(k)]
47
48     ordenadas = sorted(
49         [(v, i) for i, v in enumerate(habilidades)], reverse=True)
50
51     mejor_valor = math.inf
52     mejor_particion = None
53
54     return backtracking(
55         0, ordenadas, k, sumas, particion, mejor_valor, mejor_particion)
```

4. Programación Lineal

5. Ejemplo de Ejecuciones

6. Mediciones



7. Conclusiones