

TEORÍA DE ALGORITMOS  
(TB024) CURSO BUCHWALD - GENENDER

# Trabajo Práctico 3

## Problemas NP-Completo para la defensa de la Tribu del Agua

12 de noviembre de 2025

Alen Davies  
107.084

Hugo Huzan  
67.910

Joaquin Vedoya  
110.282

Franco Altieri Lamas  
105.400

## Trabajo Práctico 3: Problemas NP-Completo para la defensa de la Tribu del Agua

### 1. Introducción

Es el año 95 DG. La Nación del Fuego sigue su ataque, esta vez hacia la Tribu del Agua, luego de una humillante derrota a manos del Reino de la Tierra, gracias a nuestra ayuda. La tribu debe defenderse del ataque.

El maestro Pakku ha recomendado hacer lo siguiente: Separar a todos los Maestros Agua en  $k$  grupos  $(S_1, S_2, \dots, S_k)$ . Primero atacará el primer grupo. A medida que el primer grupo se vaya cansando entrará el segundo grupo. Luego entrará el tercero, y de esta manera se busca generar un ataque constante, que sumado a la ventaja del agua por sobre el fuego, buscará lograr la victoria.

En función de esto, lo más conveniente es que los grupos estén parejos para que, justamente, ese ataque se mantenga constante.

Conocemos la fuerza/maestría/habilidad de cada uno de los maestros agua, la cual podemos cuantificar diciendo que para el maestro  $i$  ese valor es  $x_i$ , y tenemos todos los valores  $x_1, x_2, \dots, x_n$  (todos valores positivos).

Para que los grupos estén parejos, lo que buscaremos es minimizar la adición de los cuadrados de las sumas de las fuerzas de los grupos. Es decir:

$$\min \sum_{i=1}^k \left( \sum_{x_j \in S_i} x_j \right)^2$$

El Maestro Pakku nos dice que esta es una tarea difícil, pero que con tiempo y paciencia podemos obtener el resultado ideal.

## Resolución

### 2. El Problema es NP

Se mostrará que el problema pertenece a la clase de complejidad **NP** presentando un *Certificador Eficiente* que puede validar un *certificado* en tiempo polinomial.

#### Certificado.

Un vector  $C = (S_1, \dots, S_k)$  siendo cada  $S_j$  un vector de índices que indica que  $x_i$  pertenecen a cada grupo.

#### Algoritmo

El certificador debe verificar:

- Que la cantidad de vectores  $S_j$  sea  $K$
- Que cada  $x_i$  pertenezca a algún vector  $S_j$
- Que cada  $x_i$  aparezca una sola vez.
- Que la suma de los cuadrados de las sumas de los elementos de cada  $S_j$  sea menor o igual a  $B$ .

TODO: Mostrar que es polinómico

### 3. Backtracking

```
1 import math
2
3
4 def suma_cuadrados(sumas):
5     return sum(s * s for s in sumas)
6
7
8 def backtracking(i, habilidades, k, sumas, particion, mejor_valor, mejor_particion)
9     :
10
11     sum_cuad_actual = suma_cuadrados(sumas)
12
13     if sum_cuad_actual >= mejor_valor:
14         return mejor_valor, mejor_particion
15
16     if i == len(habilidades):
17         if sum_cuad_actual < mejor_valor:
18             mejor_valor = sum_cuad_actual
19             mejor_particion = [list(g) for g in particion]
20             return mejor_valor, mejor_particion
21
22     valor, indice = habilidades[i]
23
24     ya_uso_vacio = False # para evitar permutaciones de los conjuntos
25     for g in range(k):
26         if sumas[g] == 0:
27             if ya_uso_vacio:
28                 continue
29             ya_uso_vacio = True
30
31     particion[g].append(indice)
32     sumas[g] += valor
33
34     mejor_valor, mejor_particion = backtracking(
35         i + 1, habilidades, k, sumas, particion, mejor_valor, mejor_particion)
36
37     sumas[g] -= valor
38     particion[g].pop()
39
40     return mejor_valor, mejor_particion
41
42 def resolver(k, habilidades, ordenar=True):
43
44     tuplas = sorted([(v, i)
45                     for i, v in enumerate(habilidades)], reverse=True) if ordenar
46     else [(v, i) for i, v in enumerate(habilidades)]
47
48     mejor_valor, mejor_particion = math.inf, None
49
50     sumas = [0] * k
51     particion = [[] for _ in range(k)]
52
53     return backtracking(0, tuplas, k, sumas, particion, mejor_valor,
54                         mejor_particion)
```

## 4. Greedy - Pakku

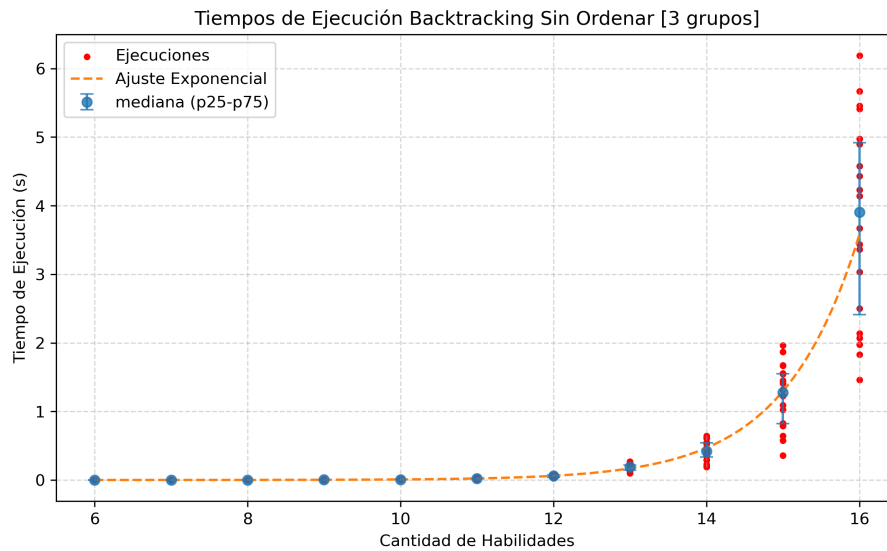
```
1 def greedy_pakku(k, habilidades):  
2     ordenadas = sorted([(v, i)  
3                         for i, v in enumerate(habilidades)], reverse=True)  
4     sumas = [0]*k  
5     particion = [[] for _ in range(k)]  
6     for valor, indice in ordenadas:  
7         j = min(range(k), key=lambda x: sumas[x])  
8         particion[j].append(indice)  
9         sumas[j] += valor  
10    return sum(s*s for s in sumas), particion
```

## 5. Programación Lineal

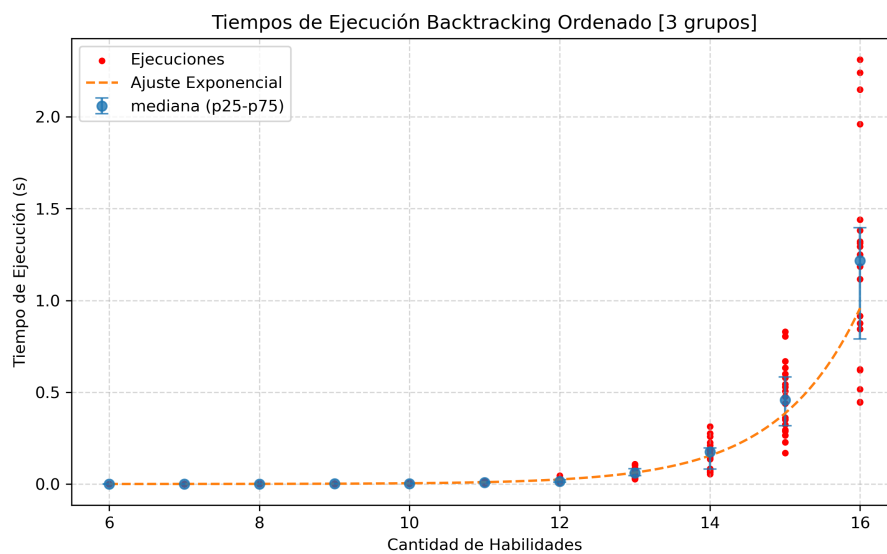
## 6. Ejemplo de Ejecuciones

## 7. Mediciones

### Backtracking - Con o Sin Ordenamiento Previo



(a) Sin Ordenar



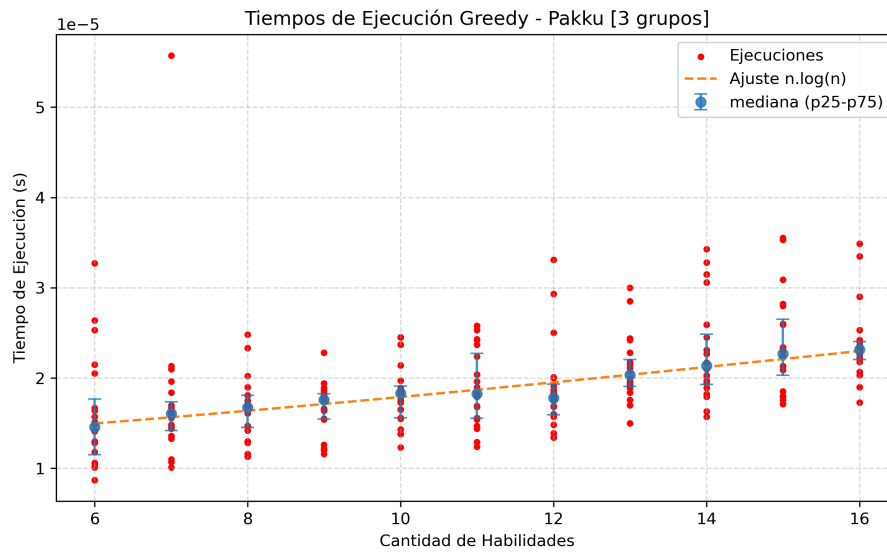
(b) Datos Ordenados

Figura 1: Comparación de Tiempos de Ejecución Con o Sin Ordenamiento Previo

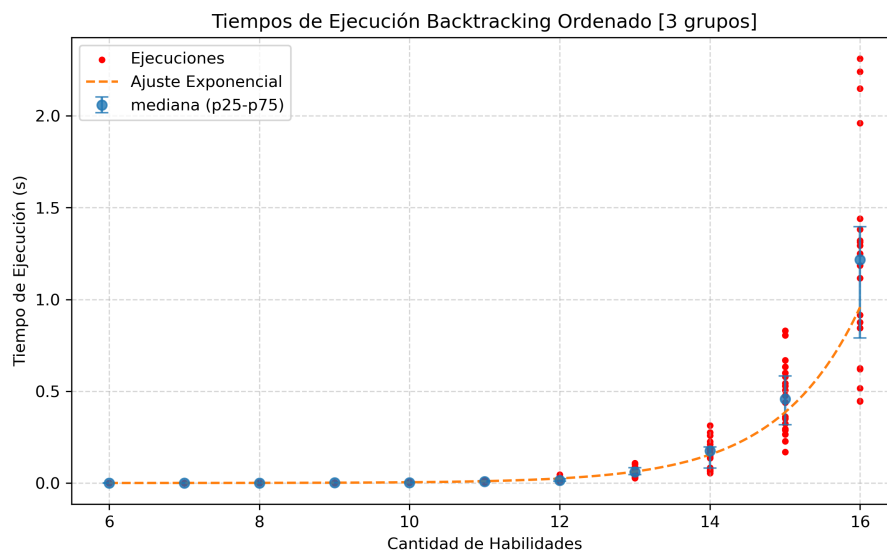
Se observa que ordenando en forma descendente los datos antes del realizar el backtracking, los tiempos de ejecución se reducen a aproximadamente un tercio.



## Greedy Pakku Vs. Backtraking



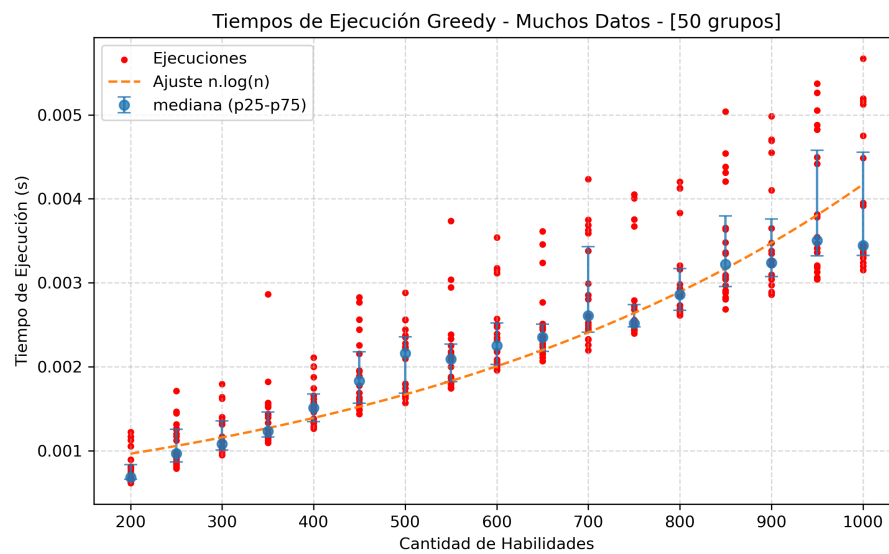
(a) Greedy



(b) Datos Ordenados

Figura 2: Comparación de Tiempos de Ejecución Greedy Vs. Backtracking

## Greedy Pakku - Dataset Grande



## 8. Conclusiones