凸优化第二次上机作业

黄晃数院 1701210098

2017 年 12 月 1 日

1 问题

原问题为

$$min\ \frac{1}{2}\|Ax-b\|_2^2+\mu\|x\|_1 \tag{1}$$

1.1 cvx calling mosek or gurobi

因为primal 1是个凸问题,cvx下可以直接

$$minimize(1/2sum\_square(A*x-b)+mu*norm(x,1))$$

2 smoothed primal problem

一共使用了三种光滑函数:$huber, log-sum-exp, sqrt$,光滑化的程度由参数lambda给出.

2.1 gradient method

使用bb步长的梯度方法求解,光滑函数选择为sqrt,加上对μ的同伦:$\mu=[10,1,0.1,0.01,0.001]$,对应的参数$lambda=[1e-1,1e-2,1e-3,1e-5,1e-6]$,因为$\mu$较大时的解只是作为之后的初值,所以为了加速收敛,相应的使用较大的lambda.

2.2 fast gradient method

使用Nesterov加速,因为作用在光滑之后的函数上,所以可以视作

$$f(x) = g(x) + h(x)\ ,\ h(x) = 0;$$

所以有

$$prox_h(x) = x$$

所以迭代格式为

$$\begin{aligned} y &= x_{k-1} + \frac{k-2}{k+1}(x_{k-1} - x_{k-2}) \\ x_k &= y - t\nabla f(y) \end{aligned} \tag{2}$$

参数 参数选择为$\mu = [10, 0.1, 0.001]$,对应的参数$lambda = [1e-2, 1e-4, 1e-6]$.步长选为恒定步长$t = \frac{1}{L}$,为使得L满足lipschtz,令$L = A^T A + 2\mu$

3 Proximal gradient method

问题为

$$\begin{aligned} f(x) =& g(x) + h(x) \\ g(x) =& \|Ax - b\|_2^2 \\ h(x) =& \mu\|x\|_1 \end{aligned} \tag{3}$$

所以$th(x)$的近似点逼近为

$$prox_{th}(x)_i = \begin{cases} x_i - \mu t & x_i \geq \mu t \\ 0 & -\mu t \leq x_i \leq \mu t \\ x_i + \mu t & x_i \leq \mu t \end{cases}$$

3.1 proximal gradient method for primal problem

迭代格式为

$$\begin{aligned} y =& x_{k-1} - t\nabla g(x_{k-1}) \\ x_(x) =& prox_{th}(y) \end{aligned} \tag{4}$$

参数 加上同伦$mu = [10, 1, 0.1, 0.01, 1e-3]$,步长$t_k = 1/L, L = \lambda_{max}(A^T A)$

3.2 fast proximal gradent method

迭代格式为

$$
\begin{aligned}
u =& x_{k-1} + \frac{k-2}{k+1}(x_{k-1} - x_{k-2}) \\
y =& x_{k-1} - t\nabla g(u) \\
x_(x) =& prox_{th}(y)
\end{aligned} \tag{5}
$$

参数 加上同伦$mu = [10, 1, 0.1, 0.01, 1e-3]$,步长$t_k = 1/L, L = \lambda_{max}(A^T A)$

4 计算结果

method	cpu	err
cvx-call-mosek:	1.35	0.00e+00
grdient for smoothed problem:	1.68	1.70e-07
fast gradient for smoothed problem:	1.55	2.02e-06
proximal gradient for primal:	4.00	3.21e-06
fast peximal gradient method for primal:	2.32	2.08e-06

4.1 结果分析

- 四个算法都达到了要求精度
- 对同一方法,使用了Nesterovs加速技巧后,收敛速度得到了提升.尤其对于proximal gradient方法,加速效果明显
- 相较于直接求解原问题,在对原问题进行了适当的光滑化之后的求解速度更快