有限元上机作业

黄晃数院 1701210098

2017 年 12 月 29 日

1 问题

求解在平面应变或平面应力假设下的二维弹性力学问题

- 计算区域为10cm×10cm的正方形
- 边界条件:下边界固定,其余三边自由.
- 受力情况:左上角受到大小为f,方向为$\frac{3}{2}\pi$的力
- 参数:$\lambda = 3.65 \times 10^4 Mpa, \lambda + 2\mu = 6.70 \times 10^4 Mpa$

1.1 弹性力学方程

位移为$\mathbf{u} = [u, v, w]^T \in \mathbb{R}^3$,应力$\sigma \in S^{3\times 3}$,应变$\epsilon \in S^{3\times 3}$ 满足:

- 平衡方程
$$-div(\sigma) = g$$
- 几何方程
$$\epsilon = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T)$$
- 本构方程
$$\sigma = 2\mu\epsilon + \lambda tr(\epsilon)I$$
- 消去应力应变,得:

$$-\mu\triangle\mathbf{u} - (\lambda + \mu)\nabla(\nabla\mathbf{u}) = g,\ \mathbf{x} \in \Omega$$

边界条件

$$\sum_{j=1}^{3}\sigma_{ij}n_j = f_i,\ \mathbf{x}\in\Gamma_1$$

$$\mathbf{u}=0,\ \mathbf{x}\in\Gamma_0$$

1.2 二维弹性力学问题

选择平面应变假设:

$$u=u(x,y),v=v(x,y),w=0$$

则有

$$u_z=v_z=0,w_x=w_y=w_z=0$$

我们将方程写成分量形式

$$-\mu\begin{bmatrix}u_{xx}+u_{yy}\\ v_{xx}+v_{yy}\end{bmatrix}-(\lambda+\mu]\begin{bmatrix}u_{xx}+v_{xy}\\ u_{xy}+v_{yy}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}g_x\\ g_y\end{bmatrix} \tag{1}$$

其中g_x,g_y分别是体力g在x,y方向上的分量.由于$w=0$,之后我们记$\mathbf{u}=[u,v]\in\mathbb{R}^2$

1.3 变分问题

在方程 1两端同乘检验函数$\mathbf{v}=[p,q]\in\mathbb{R}^2,\mathbf{v}|_{\Gamma_0}=0$,有

$$-\mu(\triangle up+\triangle vq)-\mu(div(\mathbf{u}_x)p+div(\mathbf{u}_y)q)-\lambda(div([u_x+v_y,0])p+div([0,u_x+v_y])q)=g_xp+g_yq.$$

在Ω上积分,由Green公式,有

$$\int_\Omega -\mu(\triangle up+\triangle vq)d\mathbf{x}=\int_\Gamma -\mu(\nabla up\cdot n+\nabla vq\cdot n)ds+\int_\Omega \mu(\nabla u\nabla p+\nabla v\nabla q)d\mathbf{x}$$

$$\int_\Omega -\mu(div(\mathbf{u}_x)p+div(\mathbf{u}_y)q)=\int_\Gamma -\mu(\mathbf{u}_xp\cdot n+\mathbf{u}_yq\cdot n)ds+\int_\Omega \mu(\mathbf{u}_x\nabla p+\mathbf{u}_y\nabla q)d\mathbf{x}$$

$$\begin{aligned}\int_\Omega -\lambda(div([u_x+v_y,0])p+div([0,u_x+v_y])q)&=\int_\Gamma -\lambda([u_x+v_y,0]p\cdot n+[0,u_x+v_y]q\cdot n)ds\\ &+\int_\Omega \lambda([u_x+v_y,0]\nabla p+[0,u_x+v_y]\nabla q)d\mathbf{x}\end{aligned}$$

而

$$\int_\Gamma -\mu(\nabla up\cdot n+\nabla vq\cdot n)ds-\int_\Gamma \mu(\mathbf{u}_x p\cdot n+\mathbf{u}_y q\cdot n)ds-\int_\Gamma \lambda([u_x+v_y,0]p\cdot n+[0,u_x+v_y]q\cdot n)ds$$
$$=\int_\Gamma((-\mu(\nabla u+\mathbf{u}_x)-\lambda[u_x+v_y,0])p+((-\mu(\nabla v+\mathbf{u}_y))-\lambda[0,u_x+v_y])q)\cdot nds$$
$$=\int_\Gamma p(-\mu(\nabla u+\mathbf{u}_x)-\lambda[u_x+v_y,0])\cdot nds+\int_\Gamma q(-\mu(\nabla v+\mathbf{u}_y))-\lambda[0,u_x+v_y])\cdot nds$$
$$=-\int_\Gamma p[\sigma_{11},\sigma_{12}]\cdot nds-\int_\Gamma q[\sigma_{21},\sigma_{22}]\cdot nds$$

由边界条件,我们有

$$p,q=0,\ \mathbf{x}\in\Gamma_0$$
$$\sum_{i=1}^{2}\sigma_{1i}n_i=f_j,\ \mathbf{x}\in\Gamma_1$$

所以有

$$-\int_\Gamma p[\sigma_{11},\sigma_{12}]\cdot nds-\int_\Gamma q[\sigma_{21},\sigma_{22}]\cdot nds=-\int_{\Gamma_1} pf_1+qf_2ds$$

因此,我们有了弱形式:

$$a(\mathbf{u},\mathbf{v})=F(\mathbf{v}) \tag{2}$$

其中

$$a(\mathbf{u},\mathbf{v})=\int_\Omega \mu(\nabla u\nabla p+\nabla v\nabla q)d\mathbf{x}+\int_\Omega \mu(\mathbf{u}_x\nabla p+\mathbf{u}_y\nabla q)d\mathbf{x}+\int_\Omega \lambda([u_x+v_y,0]\nabla p+[0,u_x+v_y]\nabla q)d\mathbf{x}$$
$$=$$
$$F(\mathbf{v})=\int_{\Gamma_1} pf_1+qf_2ds+\int_\Omega g_xp+g_yqd\mathbf{x}$$

2 有限元方法

对于上面的变分问题,选择三角形P1元有限元方法求解.

2.1 网格

对区域Ω做三角形剖分,两个方向n等分,共$(n+1)^2$个节点,$2n^2$个单元.单元编号以及点编号都以行优先的顺序.n=3时网格如图 1

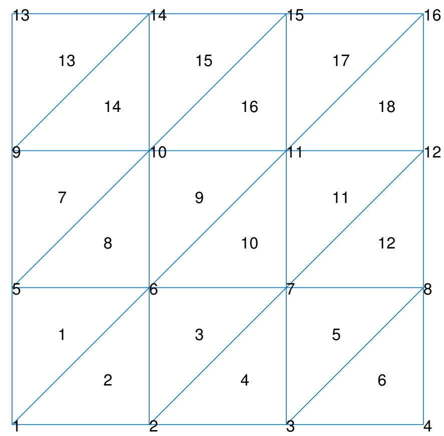


图 1: grid

2.2 自由度和基函数

由于我们的解空间为$V = \{v \in (H^1(\Omega))^2 : \ v|_{\Gamma_0} = 0\}$,所以在每个单元上有6个自由度:

$$\Sigma_K = \{u(a_i), v(a_i) : i = 1, 2, 3\}$$

对应的基函数为

$$\phi_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1(x,y) \\ 0 \end{bmatrix}, \ \phi_2 = \begin{bmatrix} \lambda_2(x,y) \\ 0 \end{bmatrix}, \ \phi_3 = \begin{bmatrix} \lambda_3(x,y) \\ 0 \end{bmatrix}, \ \phi_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda_1(x,y) \end{bmatrix}, \ \phi_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda_2(x,y) \end{bmatrix}, \ \phi_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda_3(x,y) \end{bmatrix} \tag{3}$$

因为双线性函数$a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$只有导数项,所以坐标系平移没影响,下面假定在每个单元上左下角节点为(0,,0),逆时针给节点编号,则质心坐标为:

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 - \frac{y}{h}, & \lambda_2 = \frac{x}{h} \quad \lambda_3 = \frac{y}{h} - \frac{x}{h} \quad 2 \nmid k \\ \lambda_1 = 1 - \frac{x}{h}, & \lambda_2 = \frac{x}{h} - \frac{y}{h} \quad \lambda_3 = \frac{y}{h} \quad 2|n \end{cases} \tag{4}$$

2.3 单刚

由于是规则网格,所以我们不借助参考单元,直接在单元K上计算单刚系数$a(\phi_i, \phi_j)$,

- 奇数单元上单刚为

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \mu & 0 & -\mu & 0 & -\mu & \mu \\ 0 & \lambda+2\mu & -\lambda-2\mu & -\lambda & 0 & \lambda \\ -\mu & -\lambda-2\mu & \lambda+3\mu & \lambda & \mu & -\lambda-\mu \\ 0 & -\lambda & \lambda & \lambda+2\mu & 0 & -\lambda-2\mu \\ -\mu & 0 & \mu & 0 & \mu & -\mu \\ \mu & \lambda & -\lambda-\mu & -\lambda-2\mu & -\mu & \lambda+3\mu \end{bmatrix}$$

- 偶数单元上单刚为

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \lambda+2\mu & -\lambda-2\mu & 0 & 0 & \lambda & -\lambda \\ -\lambda-2\mu & \lambda+3\mu & -\mu & \mu & -\lambda-\mu & \lambda \\ 0 & -\mu & \mu & -\mu & \mu & 0 \\ 0 & \mu & -\mu & \mu & -\mu & 0 \\ \lambda & -\lambda-\mu & \mu & -\mu & \lambda+3\mu & -\lambda-2\mu \\ -\lambda & \lambda & 0 & 0 & -\lambda-2\mu & \lambda+2\mu \end{bmatrix}$$

2.4 刚度矩阵

整体刚度矩阵的形成可以先将每个单元的单刚相加,然后将强制边界条件上的节点所在行,列除对角元全部置0即可.

2.5 右端项

首先该问题中体力项g=0,所以右端项只剩下$\int_{\Gamma_1} pf_1 + qf_2 ds$.我们将问题所给的集中力处理为只在左上单元处起作用的面力.则除了该单元(2n(n-1)+1),其余单元对应的右端项均为0.而该单元上产生的右端项为

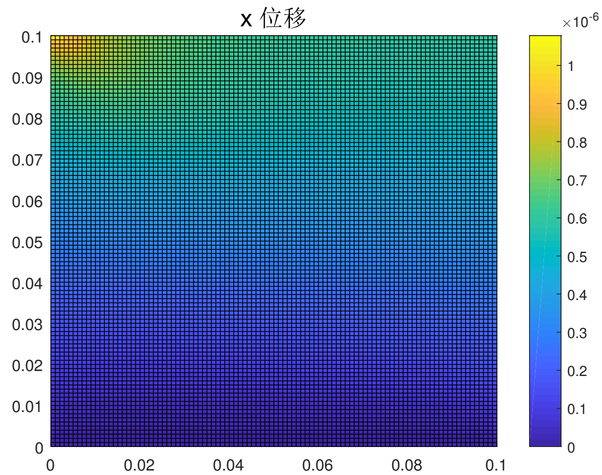
$$F(i) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{4}hf, & i = en(1, 2n(n-1)+1), en(3, 2n(n-1)+1) \\ -\frac{\sqrt{2}}{4}hf, & i = en(5, 2n(n-1)+1), en(6, 2n(n-1)+1) \end{cases}$$

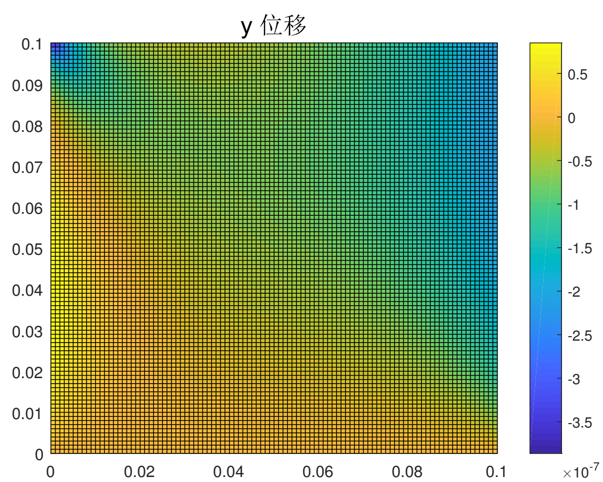
其中en(i,k)为第k个单元上第i个节点在整体的编号.

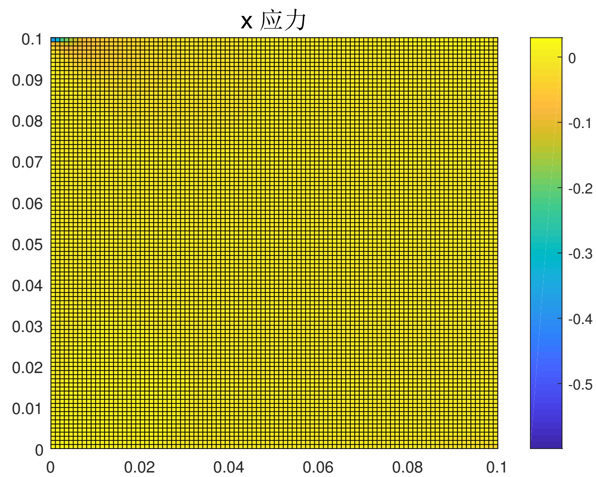
3 计算结果

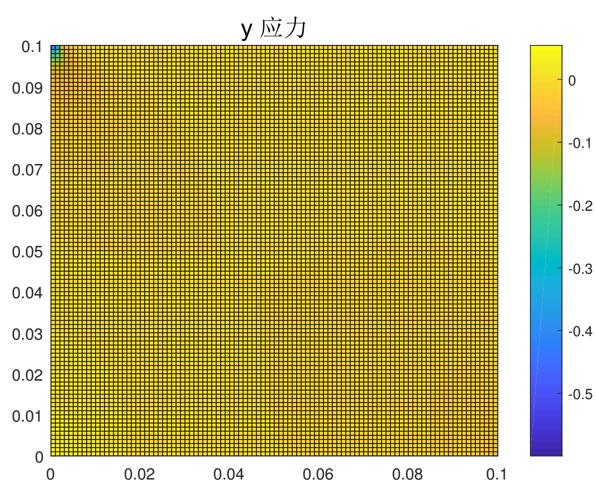
下面给出n=100,f=10时的计算结果.由于采用的应变假设,所以z方向应力计算公式为:

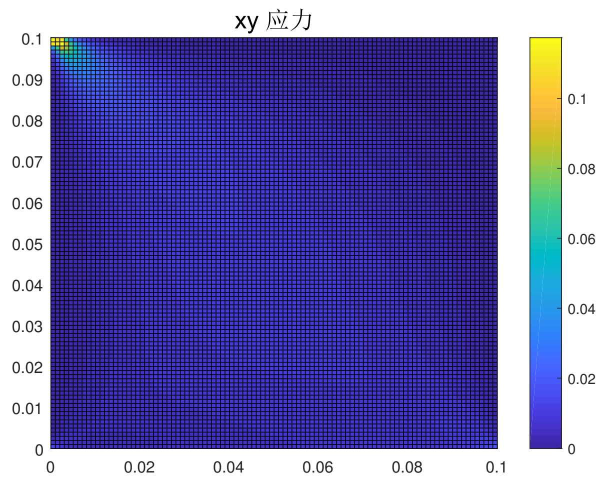
$$\sigma_z = \lambda tr(\epsilon)$$

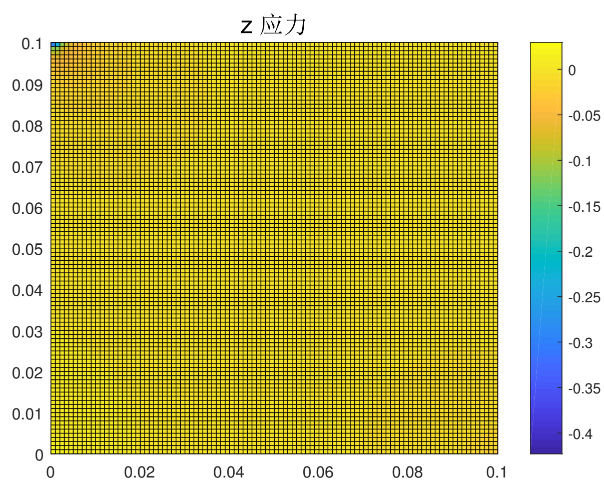

x 位移
×10^-6
0.1
0.09
0.08
0.07
0.06
0.05
0.04
0.03
0.02
0.01
0
0 0.02 0.04 0.06 0.08 0.1
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0


y 位移
0.1
0.09
0.08
0.07
0.06
0.05
0.04
0.03
0.02
0.01
0
0 0.02 0.04 0.06 0.08 0.1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5
-3
-3.5
×10^-7


x 应力
0.1
0.09
0.08
0.07
0.06
0.05
0.04
0.03
0.02
0.01
0
0
0.02
0.04
0.06
0.08
0.1
0
-0.1
-0.2
-0.3
-0.4
-0.5


y 应力
0.1
0.09
0.08
0.07
0.06
0.05
0.04
0.03
0.02
0.01
0
0
0.02
0.04
0.06
0.08
0.1
0
-0.1
-0.2
-0.3
-0.4
-0.5


xy 应力
0.1
0.09
0.08
0.07
0.06
0.05
0.04
0.03
0.02
0.01
0
0
0.02
0.04
0.06
0.08
0.1
0.1
0.08
0.06
0.04
0.02
0


z 应力
0.1
0.09
0.08
0.07
0.06
0.05
0.04
0.03
0.02
0.01
0
0
0.02
0.04
0.06
0.08
0.1
0
-0.05
-0.1
-0.15
-0.2
-0.25
-0.3
-0.35
-0.4