分形图形学(Fractal Graphics)

李红斌
办公室：30317
13007122572
lihb.wust@163.com

- 课程编码：1303077
- 课程类别：专业选修课
- 课程性质：任选
- 总 学 时：46　　讲课学时：36　　实验学时：10
- 学　　分：2.5
- 前导课程：《计算机图形学》

课程介绍

内　　　容	理论学时	实验学时
第1章　引论	2	
第2章　二维空间上的分形图形生成法	6	2
第3章　高维空间的分形图形生成	6	2
第4章　分形空间与迭代函数系统IFS	4	
第5章　测度与维	6	
第6章　分形插值	2	
第7章　分形混沌动力系统	2	2
第8章　随机分形	2	
第9章　分形图像压缩	4	4
复习	2	
总学时	36	10

课程介绍

教材与参考书

教　材：李水根，《分形(十五国家课题成果)》(第一版)，北京：高等教育出版社，2004

参考书：[1] 肯尼思.法尔科内[英]，《分形几何—数学基础及其应用》(第五版)，东北大学出版社，2003.4

[2] 陈守吉等编，《分形与图象压缩》，上海科技教育出版社

[3] 齐东旭 编，《分形及其计算机生成》，科学出版社

网站资源：

分形频道http://www.fractal.cn

耶鲁大学分形几何网站http://classes.yale.edu/fractals/

教学方式和考核方式

采取理论教学和实践教学相结合的方法。

教学方式：理念讲述，教师指导下实验操作。

课程考核办法：检查实验报告，笔试。

课程介绍

授课周次：3～11周（9周）

总学时：46

理论学时：36

实践学时：10

考核方式:考试（闭卷）

成绩组成比例:考试成绩70%+平时成绩30%

实验报告要求

1. 实验名称
2. 实验目的、要求
3. 实验主要内容（某某算法的实现）
4. 实验过程（程序流程图、源代码）
5. 实验结果
6. 实验小结

第 1 章

分形引论

1.1 分形简介

Fractal

英文单词**Fractal**，在大陆被译为“分形”，在台湾被译为“碎形”。它是由美籍法国数学家曼德勃罗特（**Benoit Mandelbrot**）创造出来的。其含义是不规则的、破碎的、分数的。

1973年，Mandelbrot在法兰西学院讲课时，首次提出了分维和分形几何的思想。1982年，曼德勃罗特的里程碑式名著《自然界的分形几何》出版。

曼德勃罗特用此词来描述自然界中传统欧几里得几何学所不能描述的一大类复杂无规的几何对象。

1.1 分形简介

不规则图形与病态函数

经典的几何学（欧几里得几何学、解析几何、射影几何、微分几何、拓扑学等）利用规则、简单的、光滑的形态去近似地表达复杂的事物形态。它们以规则的、光滑的（或可微分）的空间形态为自己的研究对象，为我们研究规则图形的空间关系和性质提供了有效的工具。

病态函数的出现，打破了传统观念，引起人们对曲线的关注

经典的几何学无法描述具有分形结构的事物形态。曼德勃罗特对此评述道（1982）：传统几何学不能描述云、山脉、海岸线、树木等物体的自然形状。由于云团不是球形，山脉不是锥形，海岸线不是圆的，树皮不是平滑的，闪电不是沿直线行进。自然界里还有许多其它种类的形态，都是一些非常不规则和破碎物体形状的模型。

1.1 分形简介

英国的海岸线地图

英国的海岸线有多长？

1967年Mandelbrot提出了“英国的海岸线有多长？”的问题。

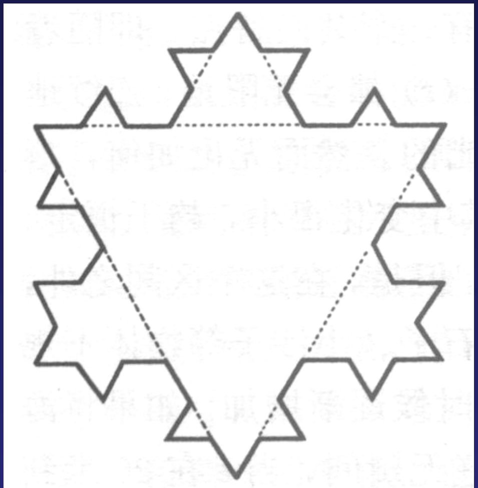
长度与测量单位有关

- 以1km为单位测量海岸线，就会将短于1km的迂回曲折长度忽略掉；
- 若以1m为单位测量，则能测出被忽略掉的迂回曲折，长度将变大；
- 若测量单位进一步地变小，测得的长度就会愈来愈大，

Mandelbrot发现：当测量单位变小时，所得的长度是无限增大的。他认为海岸线的长度是不确定的，或者说，在一定意义上海岸线是无限长的。这就是因为海岸线是极不规则和极不光滑的。

1.1 分形简介　Koch曲线（瑞典数学家科克）

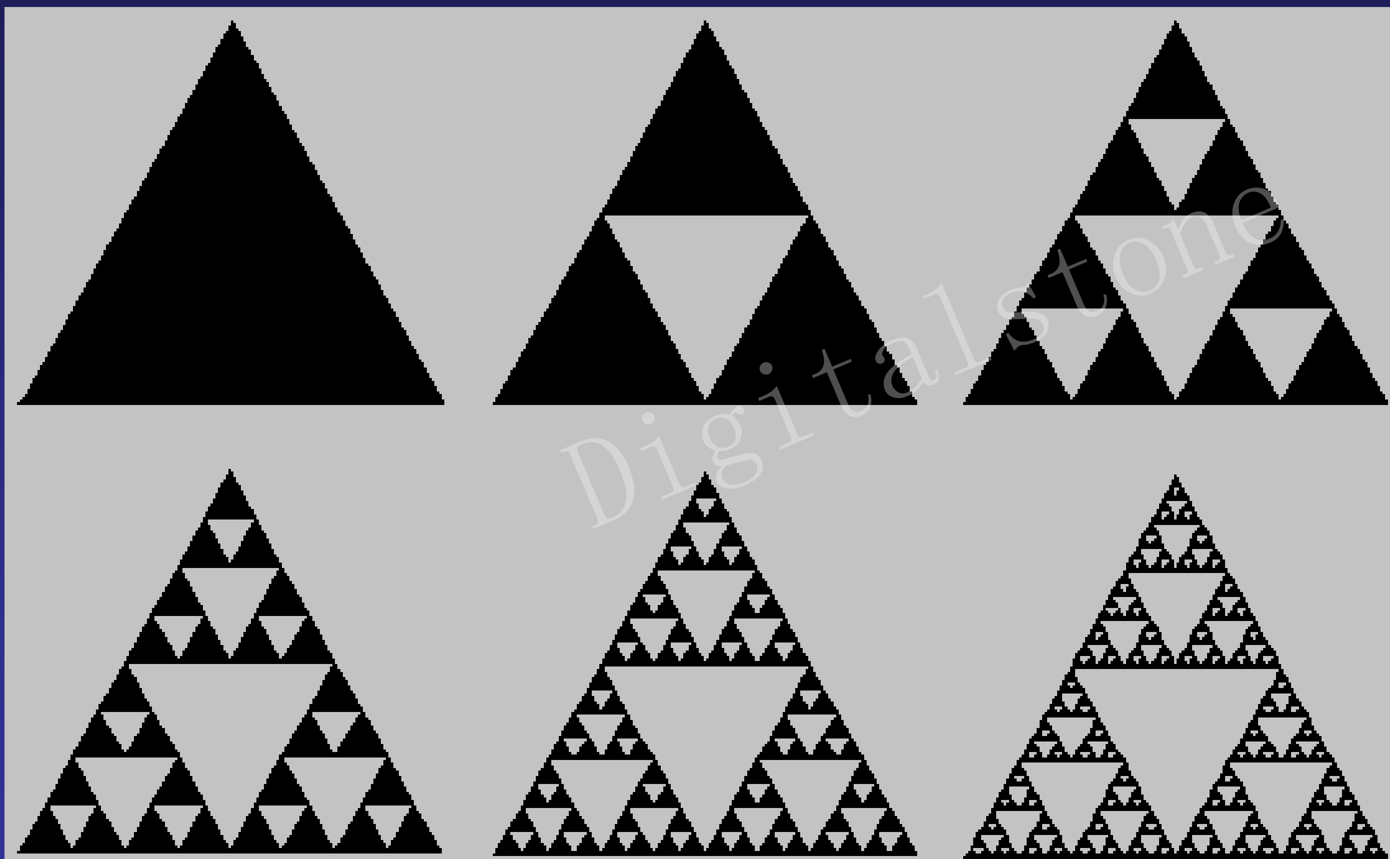
先从一个等边形开始。把每一边分成三等分。取走中间的三分之一，在被取走线段处向外作出两边为此线段三分之一长度的尖角，重复这一过程得到各个尖角，以致无穷。

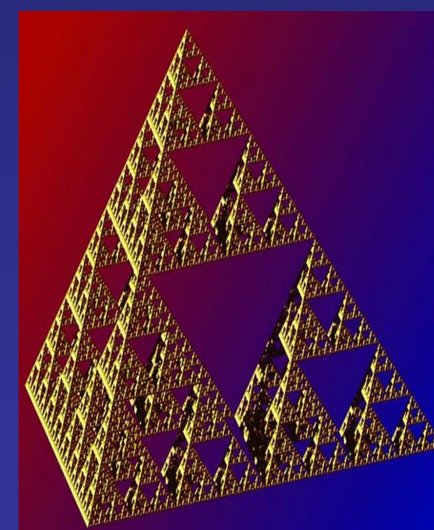


曲线的长度是无限的，而围成的面积等于原三角形面积的8 / 5

1.1 分形简介

Sierpinski三角形
(波兰数学家希尔宾斯基)





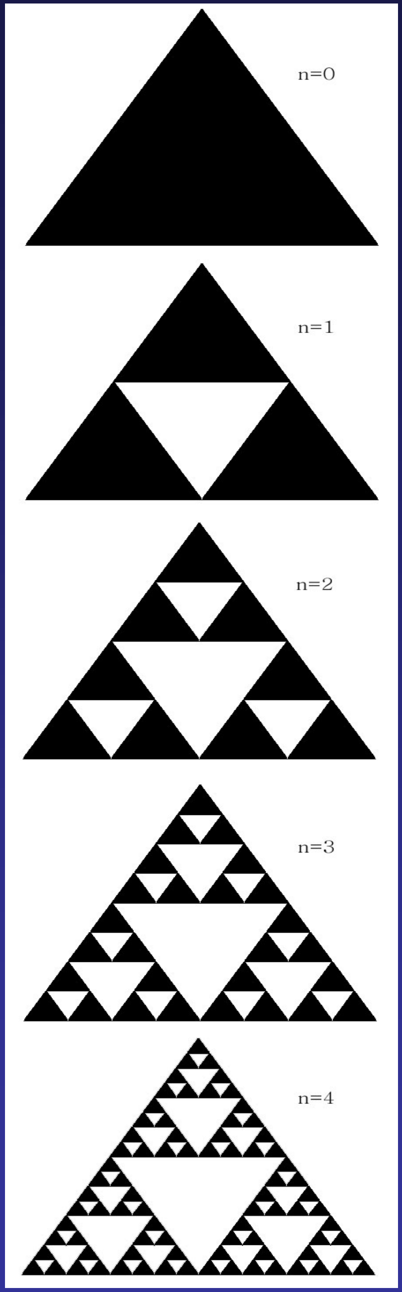
- 著名的巴黎爱菲尔铁塔正是以它作为平面图。

希氏三角形 的生成过程

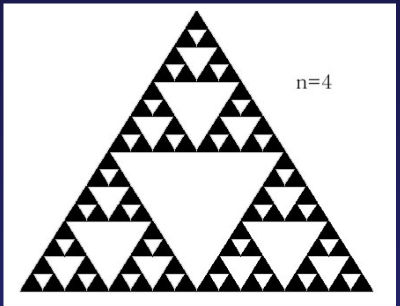
•取一个大的正三角形，即等边三角形。连接各边的中点，得到4个 完全相同的小正三角形，挖掉中间的一个。

•然后将剩下的三个小正三角形按照上述办法各自取中点、各自分出4个小正三角形，去掉中 间的一个小正三角形。

•依次类推，不断划分出小的正三角形，同时去掉中间的一个小正三角形。



希尔宾斯基三角形



直观上可以想像，最后得到的极限图形面积为零。

设初始三角形面积为S，

则第一步 完成后去掉的面积为1/4S。

第二步完成后去掉的面积为1/4S+3×(1/4)^2 S。

第三步完成后总共去掉的面积为1/4S+3×(1/4)^2S+3^2× (1/4)^3S。

……

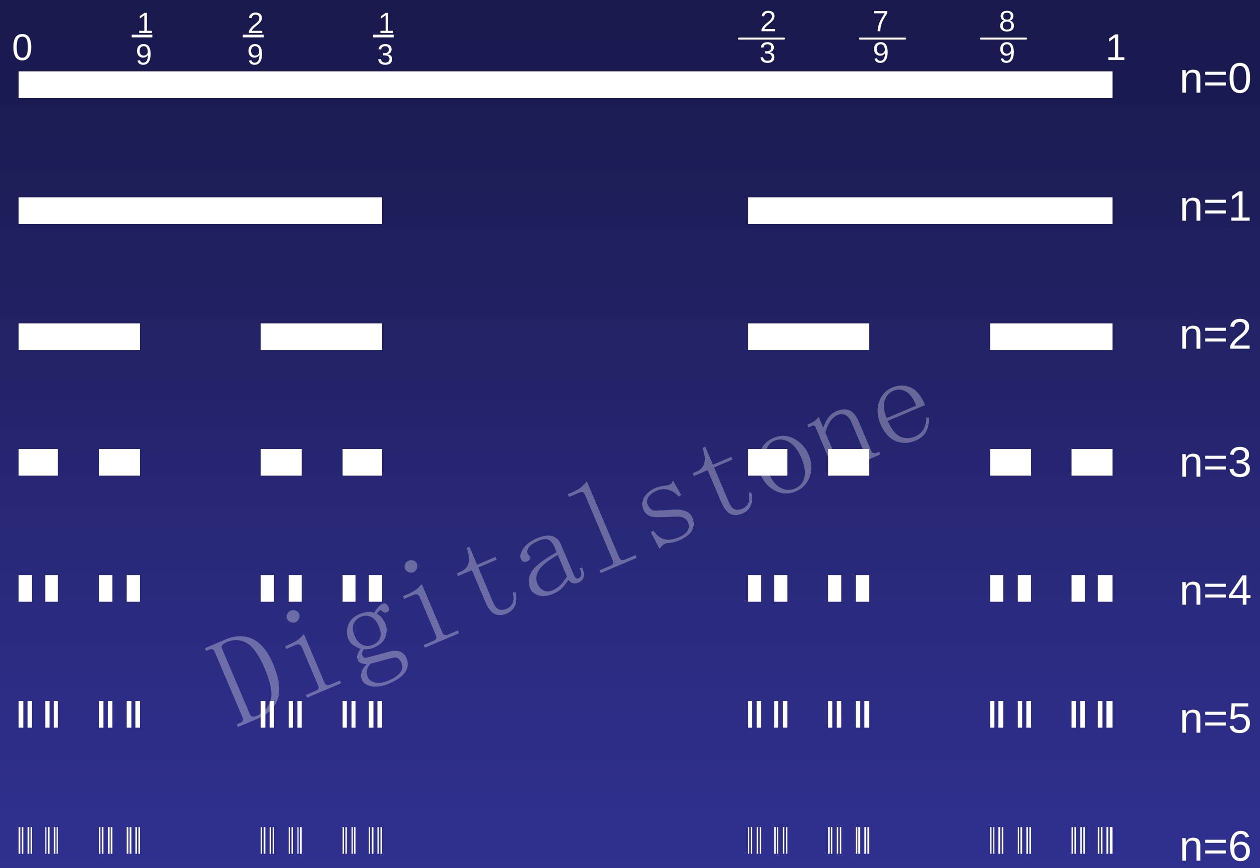
第n步后去掉的总面积为：

S_n(去掉)=S/4×［1+3/4+…+(3/4)^n-1］=S×［1-(3/4)^n］

显然，当n→∞时，S_n(去掉)→S，即剩下的面积为零。在几乎所有规则分形的生成过程中，n取20便足可以认为是∞!

在挖取三角形的过程中，我们发现，每一步骤构造出的小三角形与整个三角形是相似的，特别是当步数n较大时，相似性更是明显，有无穷多个相似，每一小三角形与任何其他三角形也都是相似的。

Cantor （康托尔）集



1. 将闭区间［0,1］均分为三段，去掉开区间(1/3,2/3),剩下［0,1/3］和［2/3,1］
2. 将剩下的两个闭区间各自均分为三段，同样去掉中间1/3的开区间： ［1/9,2/9］和［7/9,8/9］，剩下四段闭区间：［0,1/9］，［2/9,1/3］，[2/3,7/9]和[8/9,1]。
3. 第三步，重复上述操作，删除每一小闭区间中间的1/3。
4. ……

上述操作最后剩下的 点组成的集合称作康托尔集合(Cantor set)。

传统测量方法不适应于分形图形

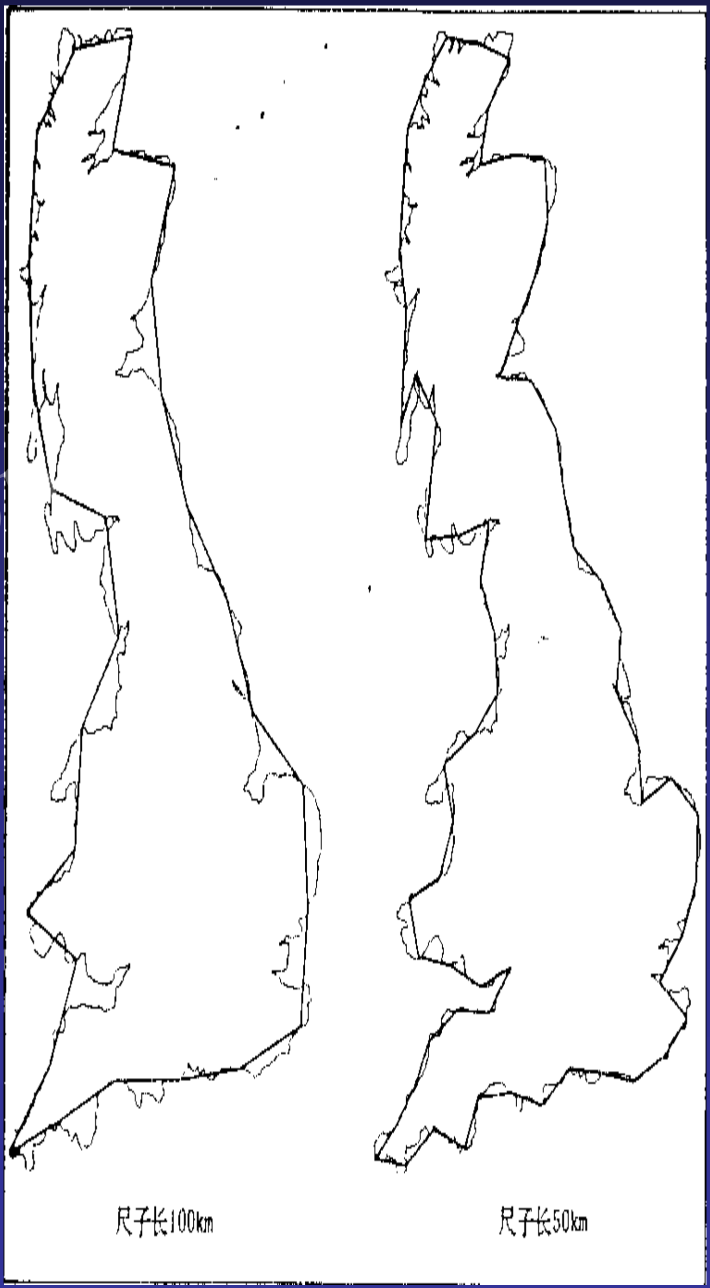
可微函数所对应的曲线长度，可用积分公式求解。那么，没有导数的函数曲线长度又怎样确定呢？英国一位科学家在查阅了西班牙、葡萄牙、比利时、荷兰的百科全书之后，惊奇的发现各国各自测量的共同的国境海岸线长度竟相差20%。

百科全书
西班牙:616 mile
葡萄牙:758 mile

1.1　分形简介

传统测量方法不适应于分形图形

- 事实上，假设A、B分别用1公里、1米作度量单位测量海岸线，它们得到的值很不一样。B测得的长度比A测得的长度要大得多，这里的问题就出在所用的度量单位上。B用的度量单位小，可以把1公里以内的弯曲部分也量进去。如果A使用50厘米作为度量单位重新测量，那么测得的数值比B用1米作为度量单位的结果就大了很多。
- 从这里就可以发现一个重要的数学问题：不可微曲线的长度将随着度量单位的无限变小而趋于无穷大。曼德勃罗特认为：因为不可微曲线的维数是大于1的分数，而度量它的尺子的维数是1；根据分形的维数理论，其测量结果必然随着量尺的缩短而变成无穷长。
- 传统测量方法只能应用于具有规整的、光滑的、可微的几何图形的量度，而不适合于度量不规整的、粗糙的、不可微的几何图形 。



1.2 Mandelbrot和分形几何

• Mandelbrot--广泛涉取的博学家

1947年毕业于巴黎理工学院

1948年获美国加利福尼亚理工学院硕士学位

1952年获巴黎大学哲学（数学）博士学位

1958年，曼德勃罗特接受了国际商用机器公司沃森研究中心的聘请，并于同年移居美国。

他曾先后在哈佛大学教过经济学，在耶鲁大学教过工程学，在爱因斯坦医学院教过生理学。曼德勃罗特的研究领域横跨数学、物理学、地学、经济学、生理学、计算机、天文学、情报学、信息与通讯、城市与人口、哲学与艺术等众多学科与专业 。

曼德勃罗特曾形象地称自己是一位“游牧者”。他在《大自然的分形几何》中写道：“非常感谢这些研究领域的变化，正是因为对这些领域的问题的研究，才使得整个理论渐渐地形成……，最后导致了分形几何的建立。”

词频分布研究（１９５１年）

曼德勃罗特注意到美国语言学家齐普夫关于词频（即单词在一篇文章中或一本书中出现的频率）分布研究结果，由此引发了曼德勃罗特对分形几何的研究。

词频分布是各种情报学的基本问题。齐普夫通过大量实验数据的统计分析，得到了齐普夫定律（1949），曼德勃罗特运用标度不变性概念，进一步对词频分布的规律进行了分析，得到了比齐普夫定律更精确的结果：词频分布几乎完全服从双曲分布，齐普夫定律代表着中频区的词频分布情况，而在高频区或低频区的分布表现着不同程度的自相似，而这恰恰是分形图形的基本特征。

1.2 Mandelbrot和分形几何

价格变动规律

在曼德勃罗特之前的学者，一般采用巴舍勒（1900）的观点：任何竞争价格都遵从“一维的布朗运动”的函数B(t)，这是一个关于时间t的连续（或几乎处处连续）的函数。

曼德勃罗特通过棉花价格的研究，再一次使用了标度不变性方法。他从实验中获得的结果表明，实际数据并不能很好的满足B(t)，而竞争价格也不必是连续的，用一个连续函数去刻划一个不连续的随机变量显然是不合理的。受词频研究中所使用的标度不变性方法的启发，曼德勃罗特对价格规律作了适当的修正，而得出一个猜想：价格变化是服从稳定的非正态分布 。

曼德勃罗特在1963年和1967年把自己的理论用于许多商品的价格、利率以及19世纪的一些证券价格的检验，法玛在1963年对当时的证券价格，罗尔于1970年对其他的利率的研究，都验证了他的猜想对实践是有效的 。

湍流研究与海岸线长度的分维思想（1962~1964年）

曼德勃罗特在哈佛大学任客座教授期间，经伯克霍夫教授的指点，注意到标度方法与湍流研究方法很类似，于是从几何学的角度探讨了湍流的机理，并形成了海岸线长度的分维思想。

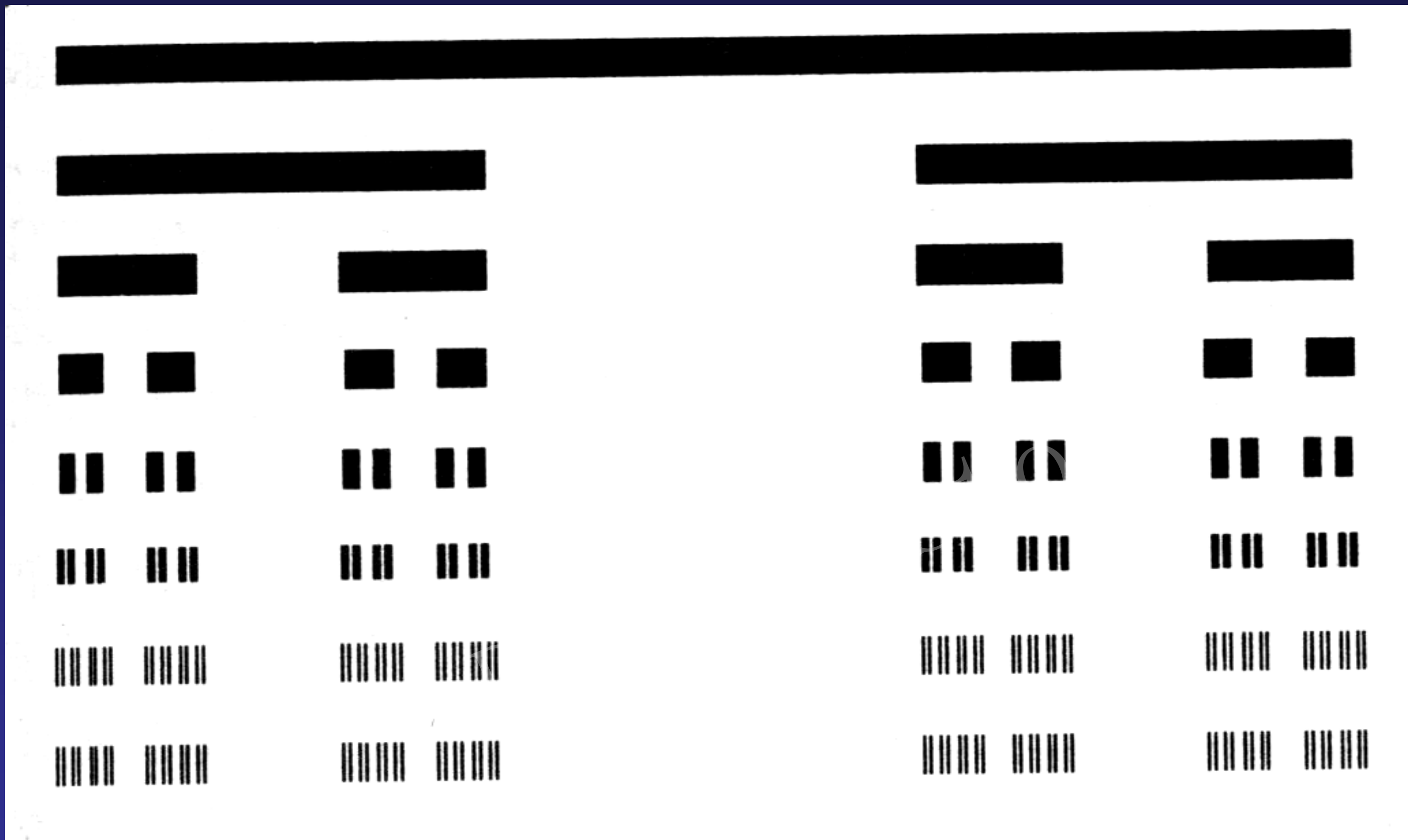
由于湍流的几何研究的首要问题是区域的边界形态，这确实是一个比较复杂的问题。为了研究的方便，曼德勃罗特先选取比较简单的形状，把它限制在平稳的范围内，即湍流尾流或实验断面。他通过对这样的边界的仔细考察后发现，这个相当明显而复杂的“局部”结构，明显地具有自相似的特点 。

噪声研究与康托三分集
（自相似图形的数学模型之一）

噪声是表示不规则的、随机的波动和误差。在当代物理学中，误差分布造成的噪声分布是离散的，用指标函数加以刻划：在没有误差的的刻t1内取值为0，而在有误差的时刻t2内取值为1。

曼德勃罗特对于误差的分析是采用如下逐渐加细的方法。首先，初步确定一段没有误差的时间段，就称这段时间为0级中断，称在这个0级中两侧的时间间隔为0级误差脉冲；然后再对这个0级误差脉冲分为三段来虑，这时称比较短的没有误差的时间段为1级中断，相应地称其两边的时间间隔为1级误差脉冲。同样的办法，我们会继续得到2级中断和2级误差脉冲，等等，每次都将上一级的误差脉冲分为三段 。他很快把自己的究和三分康托集联系了起来。

1.2 Mandelbrot和分形几何



三分康托集——自相似图形的数学模型

曼德勃罗特认为可以用三分康托集作为描述噪声主要特征的数学模型。但是，三分康托集实在是太规则了，经过对康托三分集的改造，1963年曼德勃罗特与伯格终于得到了与噪声的实际数据拟合相当好的数学模型。至此，分形几何已基本形成了它的数学雏型。

标度不变性——分形几何学的基本性质

曼德勃罗特通过对词频分布、价格波动、海岸线长度以及湍流的实际题的研究，找到了共同的研究方法——标度不变性方法，并且发现了这类象的共同特点：粗糙和自相似。使自己的感性认识上升为理性认识，用数模型描述这些现象的标度不变性，便成为曼德勃罗特进一步的研究课题。后曼德勃罗特对于噪声——这个工程技术的问题研究，使他把“病态函数”进一步做为“粗糙和自相似”形态的数学模型。

所谓标度不变性，是指在不规则点集（即分形集）上任选一局部区域它进行放大或缩小量尺，这时原来看上去是光滑的部分又会再现出原图的杂性质。因此，对于分形图，不论将其放大或缩小，它的形态、复杂程度、不规则性等各种特征都不会发生变化。标度不变性刻画了一种图形的自相性质。

应用标度不变性处理问题的方法称为“标度不变性”方法。

1.3 分形的几何特征

自相似性

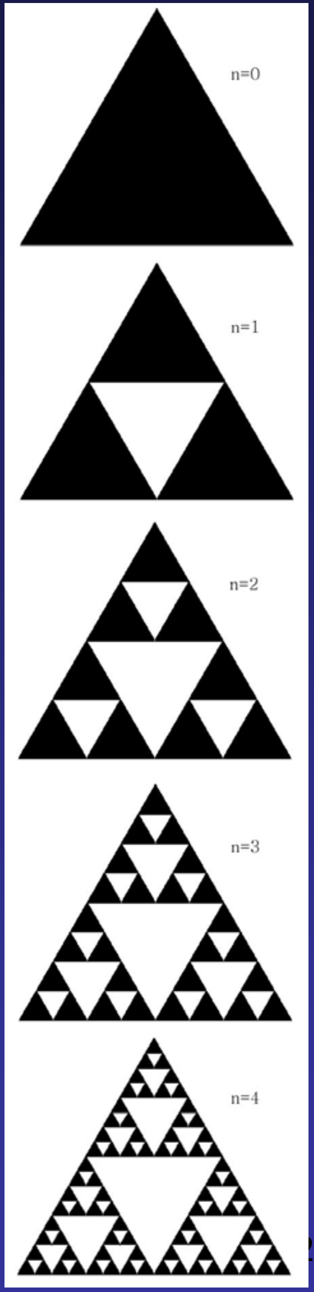
自相似，便是局部与整体的相似。

自仿射性

自仿射性是自相似性的一种拓展。如果，将自相似性看成是局部到整体在各个方向上的等比例变换的结果的话，那么，自仿射性就是局部到整体在不同方向上的不等比例变换的结果。前者称为自相似变换，后者称为自仿射变换。

精细结构

任意小局部总是包含细致的结构。



1.4 分形维数

（1）长度的测量

Length(n=0)=1

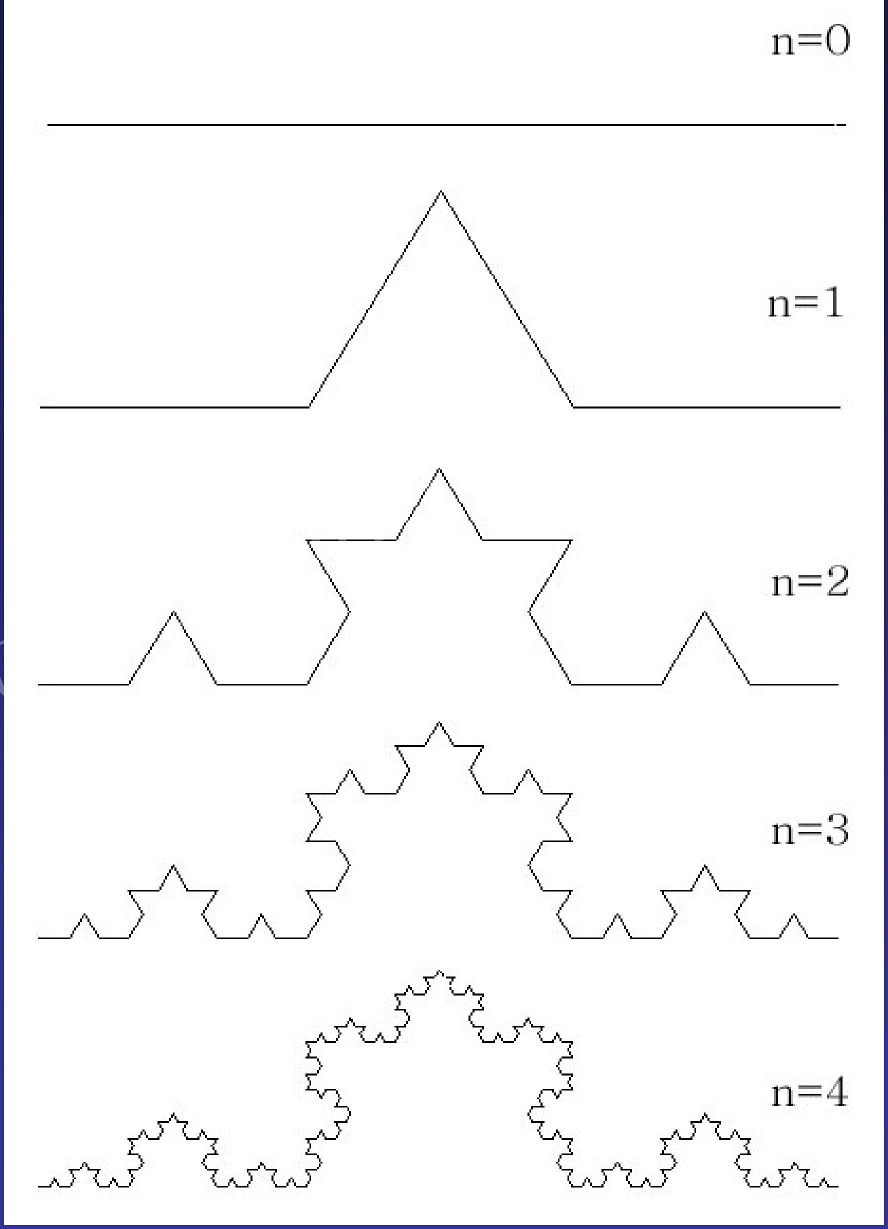
Length(n=1)=4/3

Length(n=2)=16/9

…………

$$\text{Length}=\lim_{n\to\infty}(\text{Length}(n))$$

$$=\lim_{n\to\infty}(4/3)^n=\infty$$



1.4 分形维数

（2）面积的测量

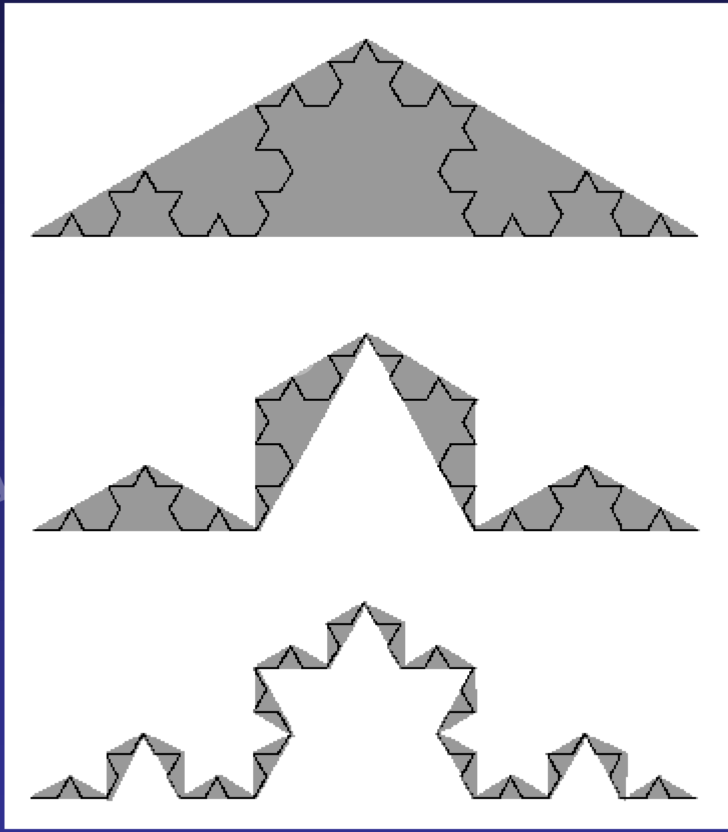
$$\mathrm{Area}(n0)=(1\times\sqrt{3}/6)/2=\sqrt{3}/12$$

$$\mathrm{Area}(n1)=\sqrt{3}/12\times(4/9)$$

$$\mathrm{Area}(n2)=\sqrt{3}/12\times(4/9)^2$$

…………

$$\mathrm{Area}(n)=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{3}/12\times(4/9)^n)=0$$

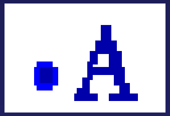


如上所述，koch曲线在一维欧氏空间中的度量为∞，在二维欧氏空间中的面积为0。如此看来，Koch曲线在传统欧氏空间中不可度量。

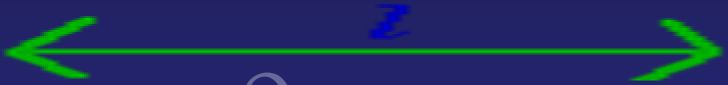
1.4 分形维数

整数维（拓扑维或传统的维数）

a. 点 —— 零维

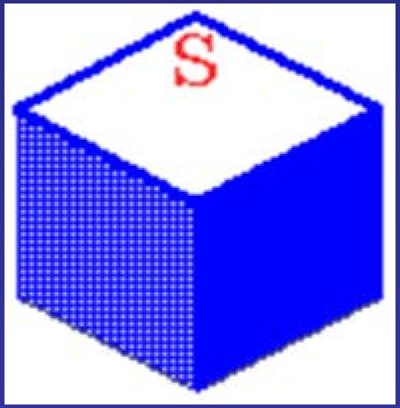


b. 线 —— 一维



c. 面 —— 二维

d. 体 —— 三维



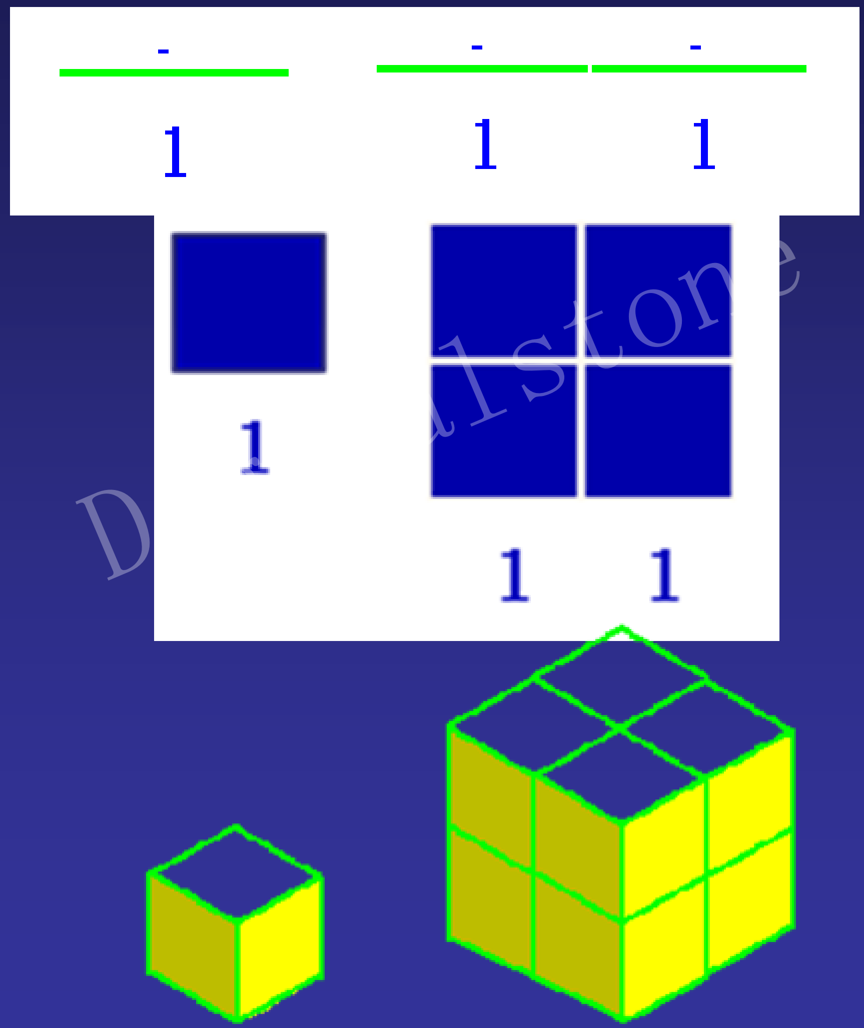
1.4 分形维数

平面中的曲线和空间的曲线是几维呢？

答案：一维

1.4 分形维数

让我们对维数有更多的理解：



1.4 分形维数

图形名称	维数	复制个数
线段	1	$2 = 2^1$
正方形	2	$4 = 2^2$
立方体	3	$8 = 2^3$

1.4 分形维数

自相似几何体线度的2倍所得复制个数

$$k = 2^d$$

自相似几何体线度的 λ 倍所得复制个数

$$k = \lambda^d$$

其中: **d** 是几何体的维数

k 是复制个数

1.4 分形维数

对于复杂的几何形体，普通维数的概念可能随尺度不同而改变。例如，直径10厘米的球用1毫米粗的细线做成。

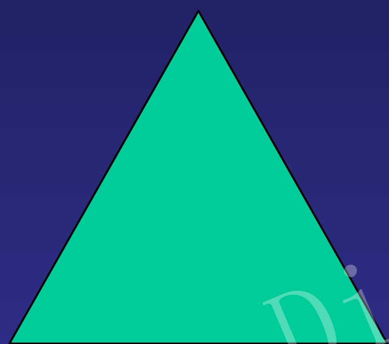
- 从远处看，球是一点（0维）。
- 离10厘米远，是三维的球。
- 再近一些，贴近表面，是二维的球面或平面。
- 再近一些，看一根毛线，是一维的线。
- 再细看，是三维的柱体。
- 再近些，是二维的柱面或平面。
- ……

如此等等，维数“交叉”反复从一个值到另一个值。

1.4 分形维数

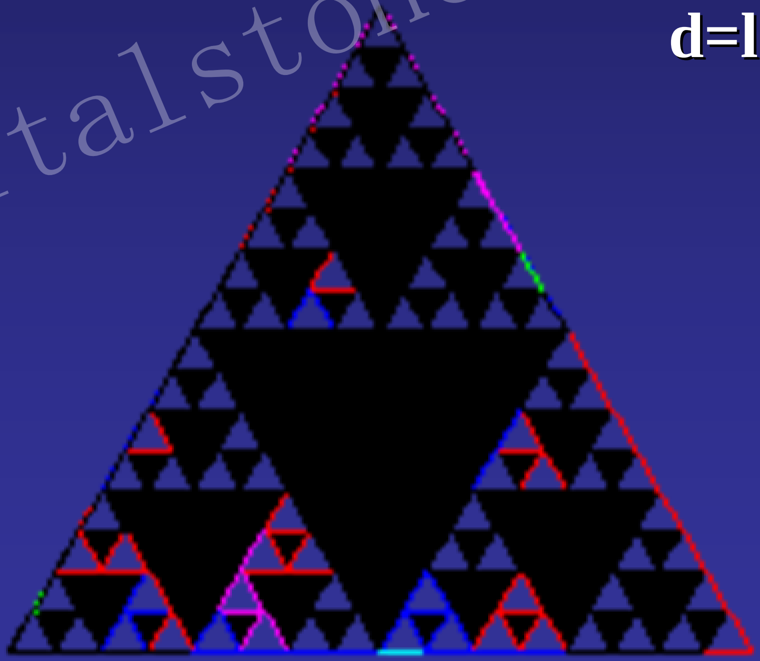
让我们看下面的两个图形：

a. 谢尔平斯基缕垫或海绵



$3 = 2^d$

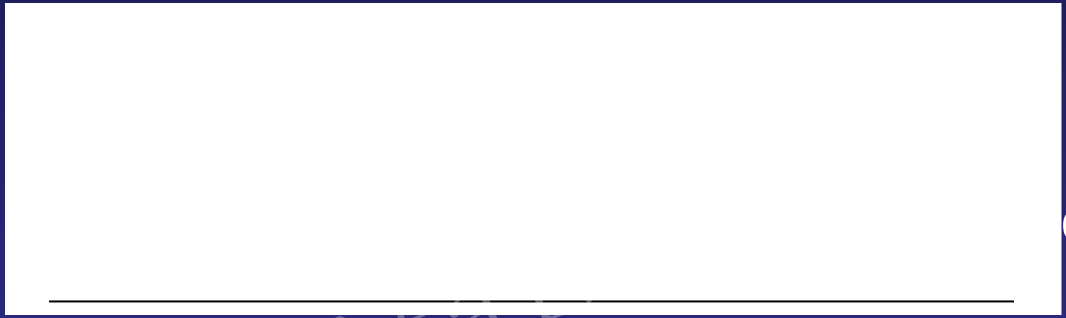
$d=\log3/\log2$



?

1.4 分形维数

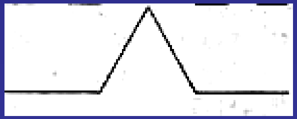
b. Koch曲线

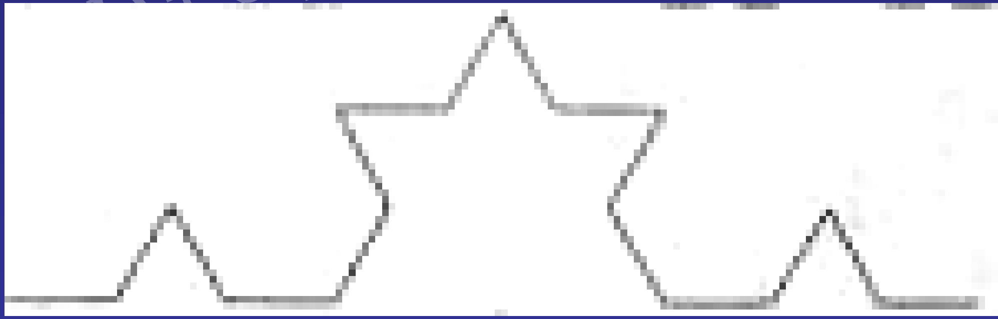


$$4 = 3^d$$

$$d=\log 4/\log 3$$

?





1.4 分形维数

维数和测量有着密切的关系：

一根直线，如果我们用 0维的点来量它，其结果为无穷大，因为直线中包含无穷多个点；如果我们用一块平面来量它，其结果是 0，因为直线中不包含平面。

那么，用怎样的尺度来量它才会得到有限值呢？

看来只有用与其同维数的小线段来量它才会得到有限值，而这里直线的维数为 1(大于0、小于2)。

对于我们上面提到的科赫曲线，其整体是一条无限长的线折叠而成，显然，用小直线段量，其结果是无穷大，而用平面量，其结果是 0(此曲线中不包含平面)。

1.4 分形维数

那么只有找一个与科赫曲线维数相同的尺子量它才会得到有限值，而这个维数显然大于 1、小于 2，那么只能是小数（即分数）了，所以存在分维！

分数维

现在我们从测量的角度引入了维数概念，将维数从整数扩大到分数。即：

如果某图形是由把原图缩小为1/λ的相似的k个图形所组成，有： $k = \lambda^D$

D即维数 $D = \log k / \log \lambda$

其中： λ 为线度的放大倍数

k 为“体积”的放大倍数

1.4 分形维数

$$D = \log k / \log \lambda$$

由于这样定义的维数D是一个分式所得出的值，因此人们称之为**分数维**。

易见，这样定义的维数包括规整的对象（线、面、体）的整数维。

$D_{线}=\log 2/\log 2=1$

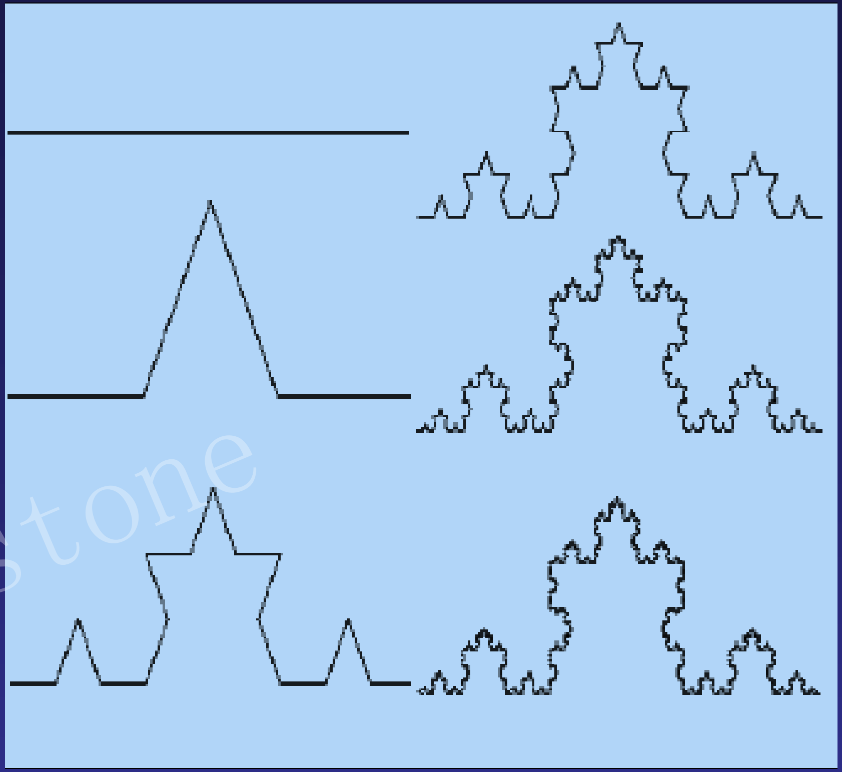
$D_{面}=\log 4/\log 2=2$

$D_{体}=\log 8/\log 2=3$

1.4 分形维数

对Koch曲线而言，在第n步时,其等长折线段总数为4^n,每段的长度为

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n$$



Koch曲线的维数为:

$$D=-\frac{\ln 4^n}{\ln\left(\frac{1}{3}\right)^n}=\frac{\ln 4}{\ln 3}=1.26186$$

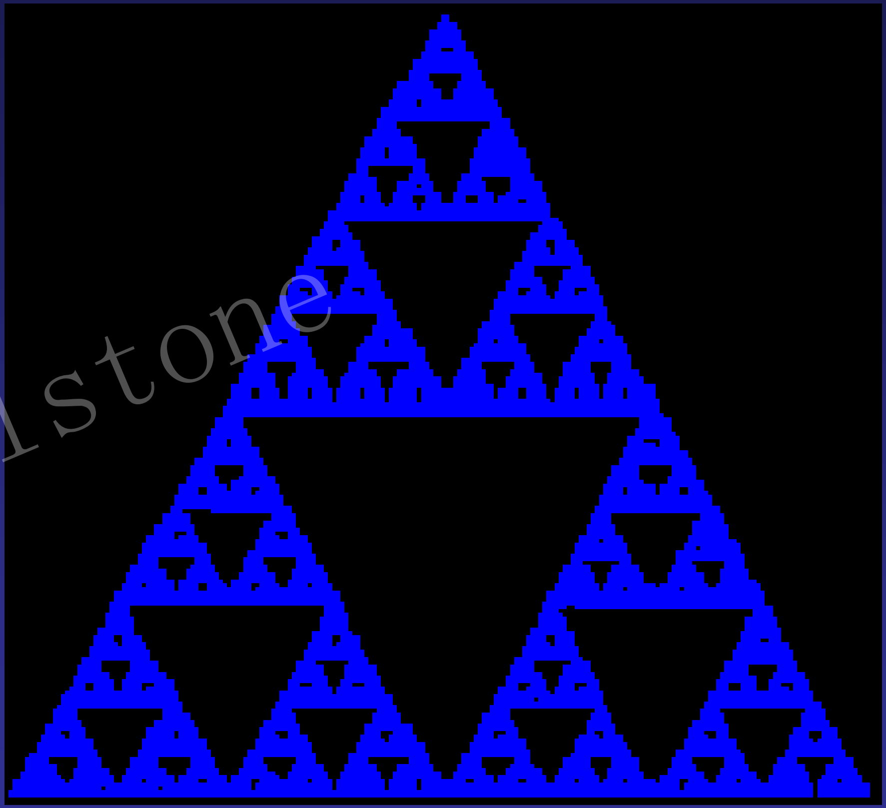
1.4 分形维数

- Sierpinski三角形

其$n = 3, r = ½$

于是

$$D = \ln 3/\ln 2 = 1.585$$



象相对论发展了传统力学一样，分维是对传统维数概念的进一步发展！

1.4 分形维数

准确的说，我们把上面定义的分数维称为相似性维数。相似性维数通常被定义为具有严格自相似性的维数。

还有其他一些方法定义的维数，如容量维数、豪斯道夫维数、信息维数、关联维数等。

1.4 分形维数

柯尔莫戈洛夫(Kolmogorov)曾给分维这样定义：

对于d维空间中的一个小集合E，我们可以用一些直径r的d维小球去覆盖它，如果完全覆盖所需的小球数目的最小值为$N(r)$，则该子集的柯尔莫戈洛夫容量维为：

$$D = \frac{\log N(r)}{\log(1/r)} \quad \text{或} \quad D = \lim_{r \to 0} \frac{\log N(r)}{\log(1/r)}$$

一般地，我们就把这样定义的容量维叫做豪斯道夫维数，把豪斯道夫维数是分数的物体称为分形，把此时的D值称为该分形的分形维数，简称分维。也有人把该维数称为分数维。

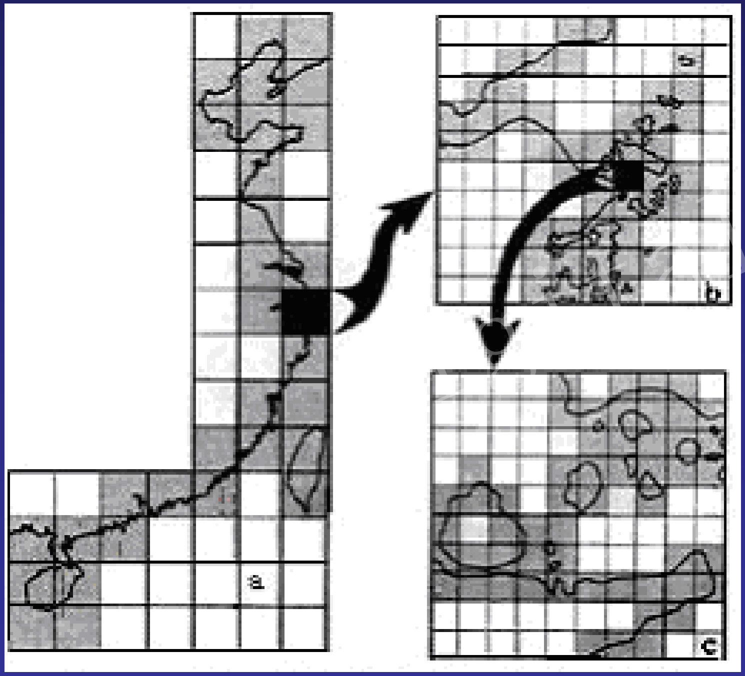
1.4 分形维数

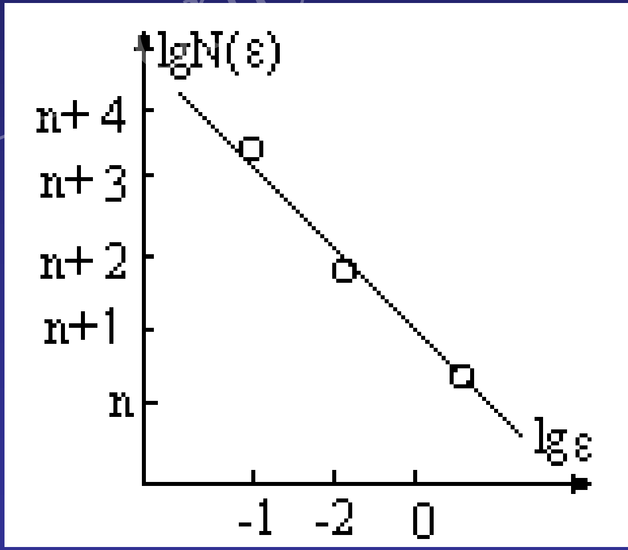
曼德勃罗特认为，对于同一个几何形可以有不同种类的维数，而不同的维数定义可以使同一个几何形具有不同的维数值，这些不同的维值又表明这个集合的不同的数学性质。

例如，海岸线可以有自己的拓扑维数（1维），也可以有自己的分形维数（不同的海岸线有不同的分维数值）。前者是在连续变换下的变量，而后者反映了海岸线本身的曲折程度。

1.4 分形维数

对于实际的自然景物，我们可以用计盒维数的方法测量分维。





1.5 什么是分形

K. Falconner对分形集合的描述：

（i）分形集都具有任意小尺度下的比例细节，或者说它具有精细的结构。

（ii）分形集不能用传统的几何语言来描述，它既不是满足某些条件的点的轨迹，也不是某些简单方程的解集。

（iii）分形集具有某种自相似形式，可能是近似的自相似或者统计的自相似。

（iv）一般，分形集的“分形维数”，严格大于它相应的拓扑维数。

（v）在大多数令人感兴趣的情形下，分形集由非常简单的方法定义，可能以变换的迭代产生。

分形几何与几何比较

Euclid几何	分形几何
• 经典的（2000多年历史）	• 现代怪物（20多年历史）
• 基于特征长度与比例	• 无特征长度与比例
• 适合于人工制品	• 适用于大自然现象
• 用公式描述	• 用（递归或迭代）算法描述

1.5 什么是分形

分形是一种方法论

沃尔夫奖（Wolf Prize）在颁发给分形理论创始人曼德勃罗时的评语所说的，“分形几何改变了我们对世界的看法”。

分形理论至少会在三个方面改变我们对世界的认识。首先，自然界中许多不规则的形态其背后都有规则，都可以用分形的方法建立模型并在计算机上构造出以假乱真的景象来，显然利用这套方法我们可以把世界压缩到几个分形规则中，便于携带和传播。其次，许多以前被认为是随机的现象，从分形理论的角度看并不是随机的，比如布朗运动、股票价格的波动、传染病的流行传播等，这为我们控制这些貌似随机的现象奠定了理论基础。最后，分形理论中的分数维概念，为我们认识世界中的复杂形态提供了一个新的尺度。复杂性科学是现代科学的前沿，在这门科学的研究过程中，发现了许多符合分形规则的复杂形态，而分数维是测量这些形态复杂程度的一种度量。也就是说，我们找到了对复杂性做定量分析的工具。

1.6 分形与计算机图形学

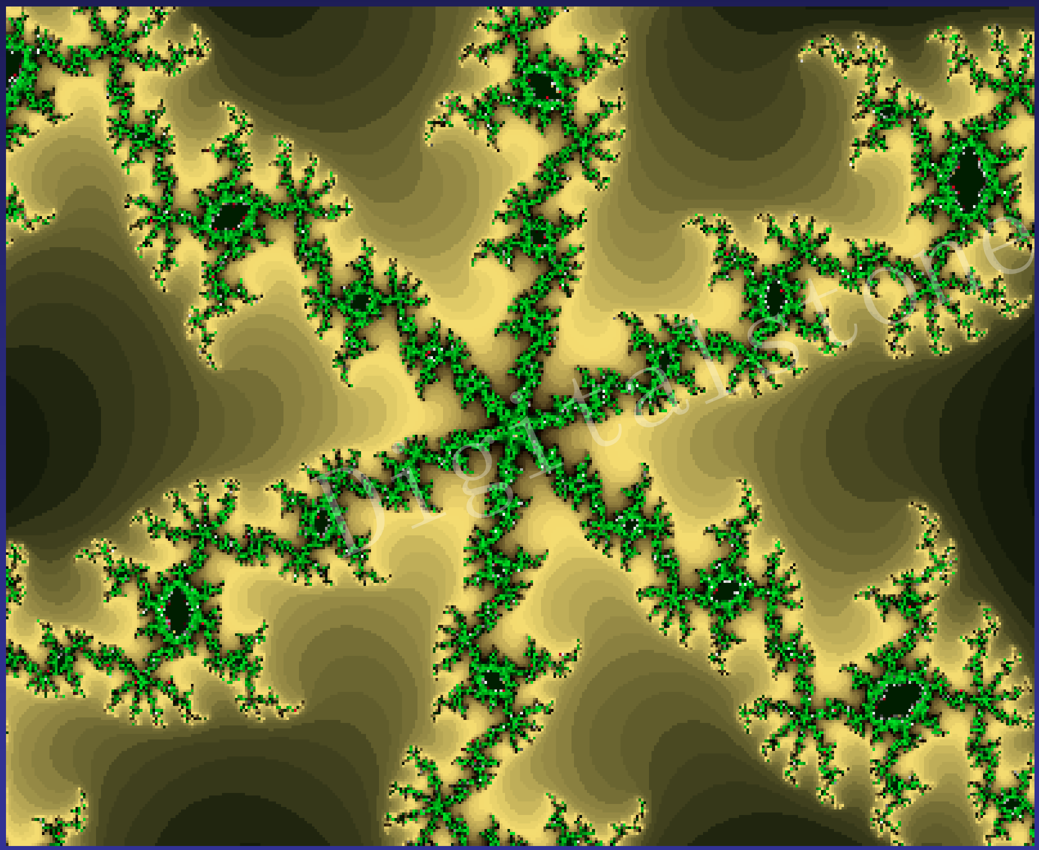
分形理论的发展离不开计算机图形学的支持，如果一个分形构造的表达，不用计算机的帮助是很难让人理解的。不仅如此，分形法与现有计算机图形学的其他算法相结合，还会产生出非常美丽的形，而且可以构造出复杂纹理和复杂形状，从而产生非常逼真的物形态和视觉效果。

分形作为一种方法，在图形学领域主要是利用迭代、递归等技来实现某一具体的分形构造。

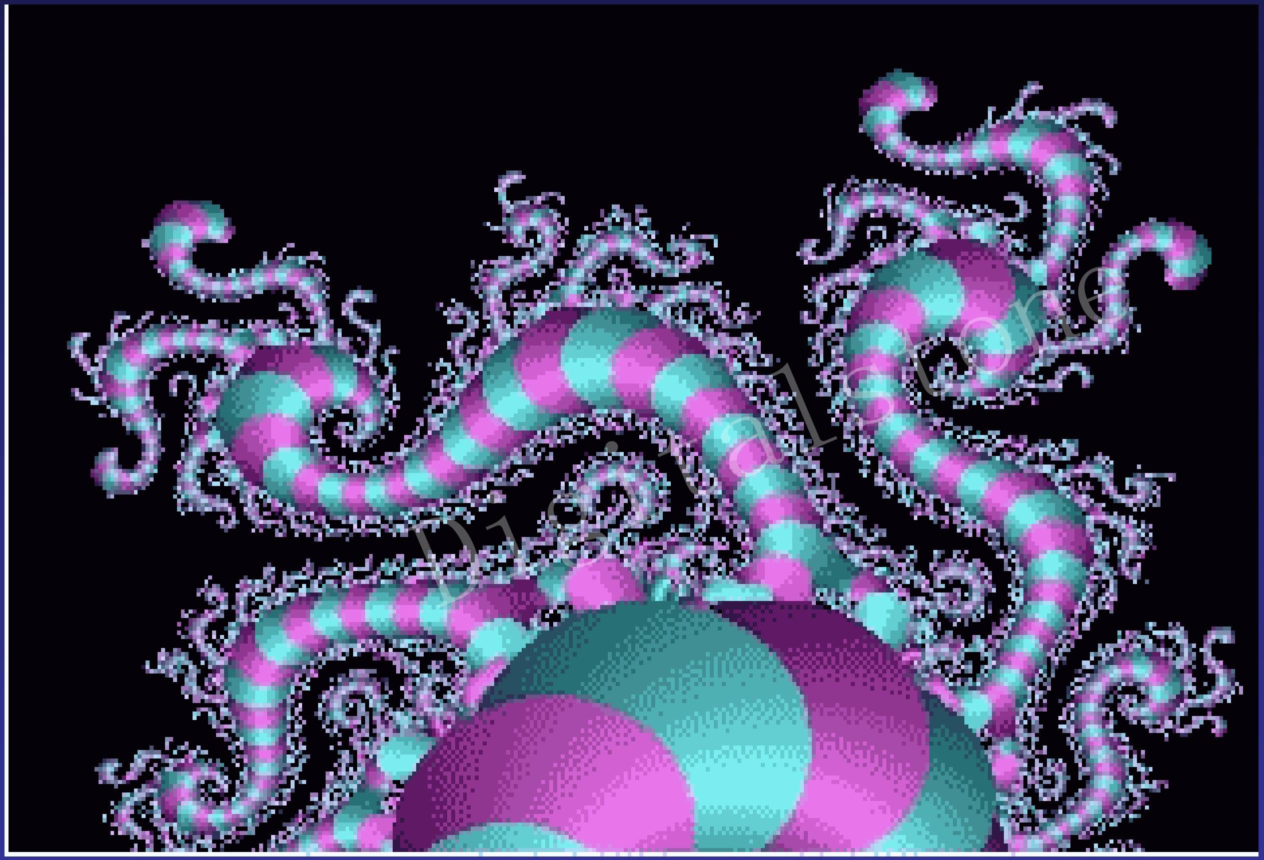
分形几何学与计算机图形学相结合，将会产生一门新的学科——分形图形学。它的主要任务是以分形几何学为数学基础，构造非规的几何图素，从而实现分形体的可视化，以及对自然景物的逼真模

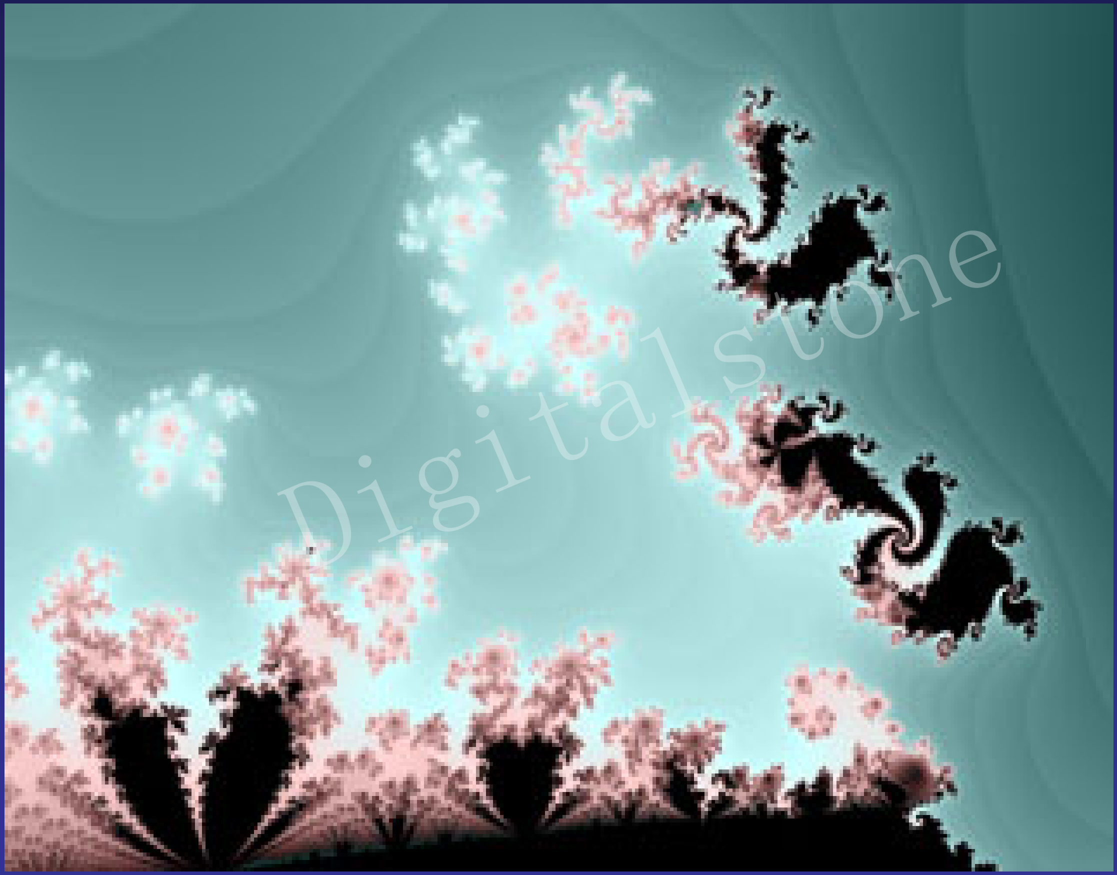
分形欣赏

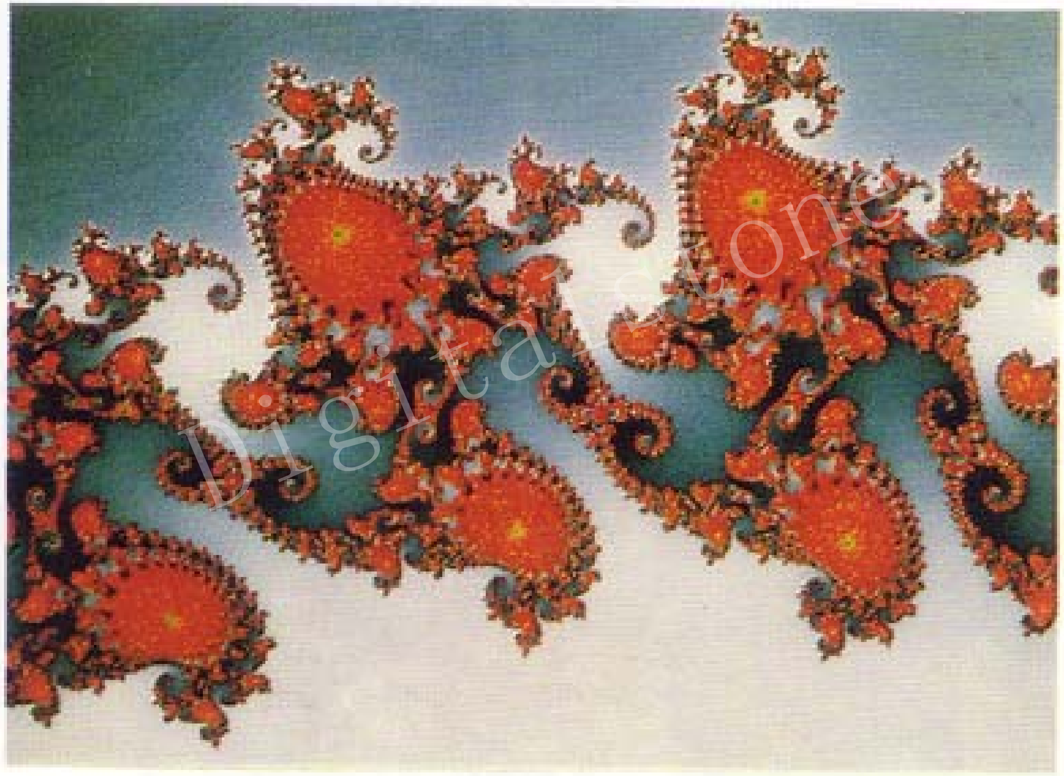
5. 四元数二次映射之下的一个 Julia 集


Digitalstone


Digitalstone




Digitalstone

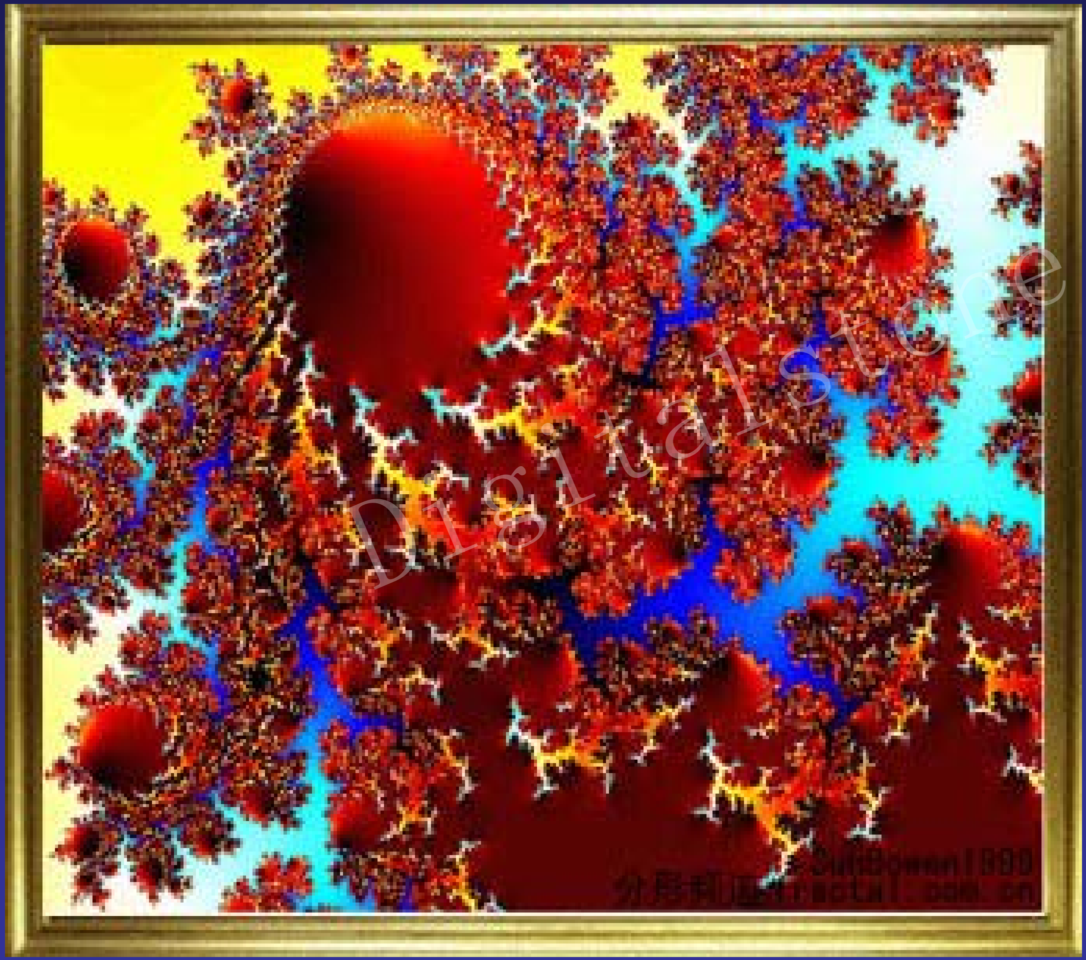


2. Julia 集

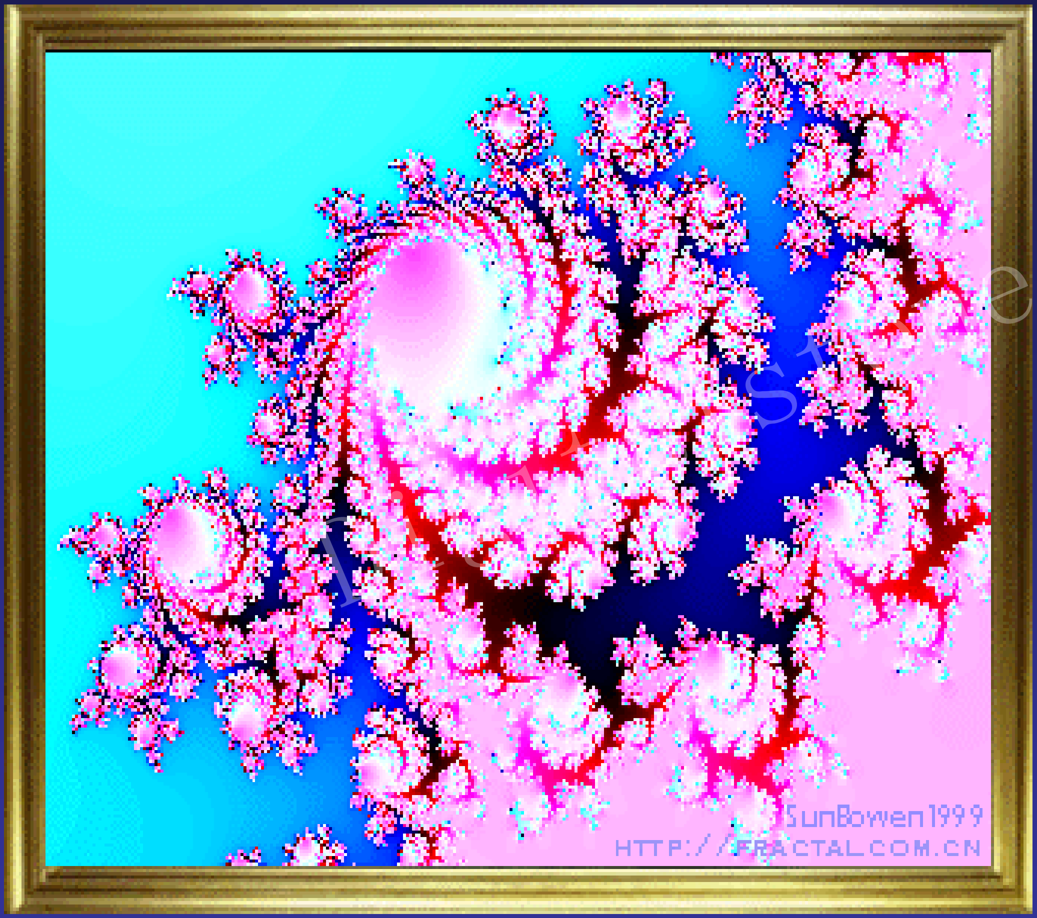

DigitalStone


Digitalstone


SunBowen1999
HTTP://FRACTAL.COM.CN
Digitalstone

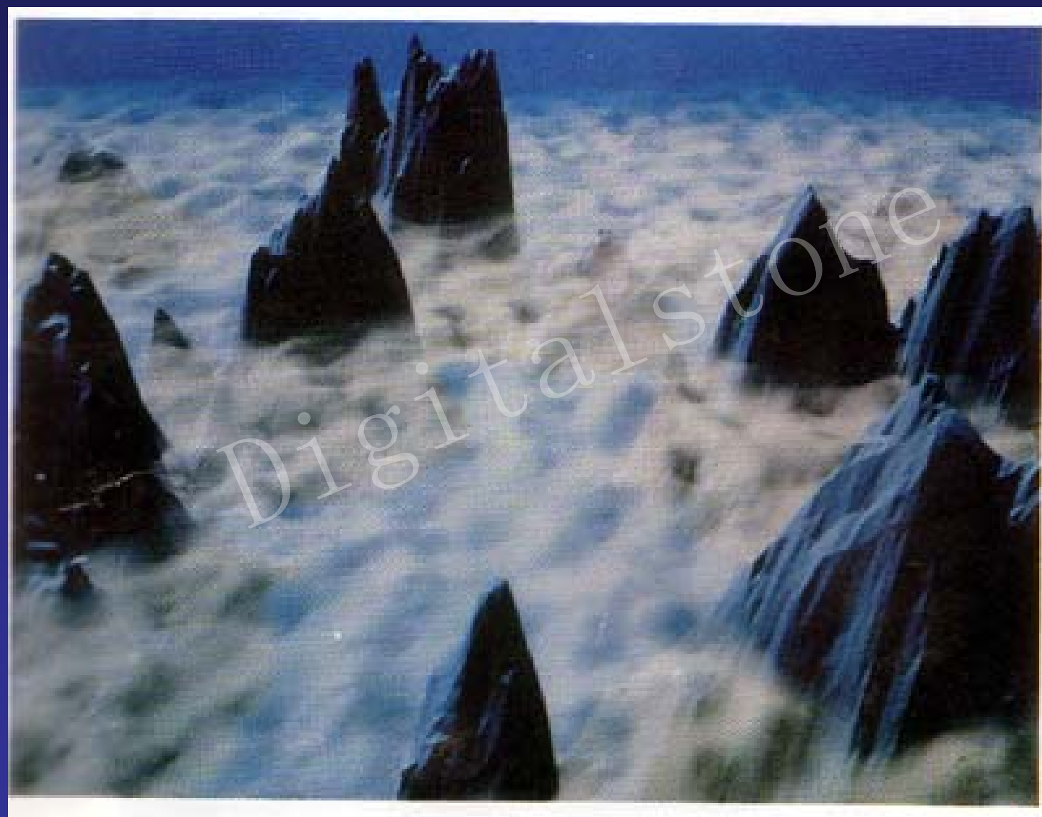

Digitalstone


DigitalStone

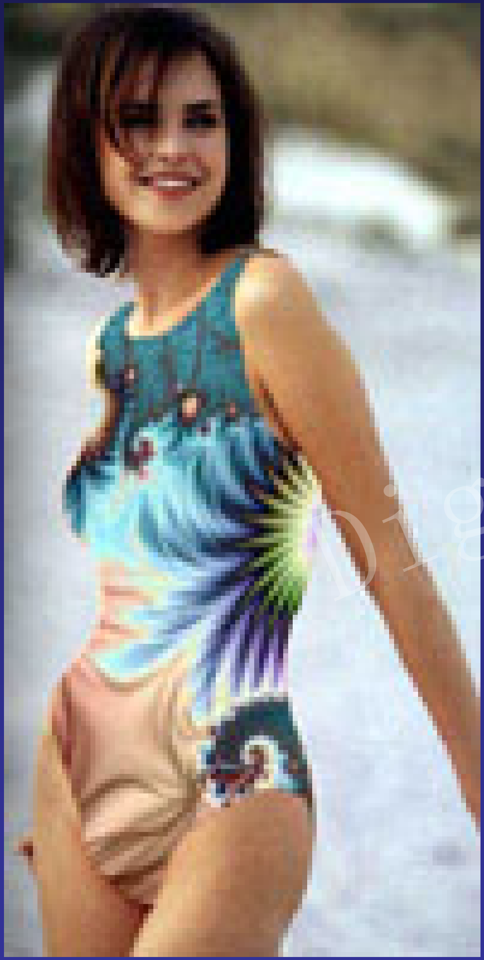

SunBowen1999
HTTP://FRACTAL.COM.CN


Digitalstone


Digitalstone



分形时装



分形音乐

- 相关主页：
- www.geocities.com/SiliconValley/Haven/4386
- http://www.fractal.com.cn/fxiy/index.htm

分形影院

- http://www.fractal.com.cn/fxyy/fs/fs005.htm

作业

- 习题一 1，2