第一章 信号与系统基础

一、 连续时间信号和离散时间信号

连续时间信号在$[t_1, t_2]$区间的能量与平均功率定义为：

$$\begin{aligned} E &= \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt \\ P &= \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt \end{aligned} \tag{1}$$

连续时间信号在$[n_1, n_2]$区间的能量与平均功率定义为：

$$\begin{aligned} E &= \sum_{n=n_1}^{n_2} |x(n)|^2 \\ P &= \frac{1}{n_2 - n_1 + 1} \sum_{n=n_1}^{n_2} |x(n)|^2 \end{aligned} \tag{2}$$

三类重要信号：

1. 能量信号：信号具有有限的总能量，平均功率为0
2. 功率信号：信号有无限的总能量，但平均功率有限
3. 信号的总能量和平均功率都是无限的。

二、 自变量的变换

时移、反转、尺度（仅连续信号）、抽取

周期信号：$x(t) = x(t+T), x[n] = x[n+T]$，满足此关系的最小$T$为基波信号

奇信号与偶信号：任何信号都能分解成一个偶信号与一个奇信号

三、 复指数信号与正弦信号

1. 复数基础知识

直角坐标形式：

$$\begin{aligned} z &= x + jy \\ x &= Re(z) = r\cos\theta \\ y &= Im(z) = r\sin\theta \end{aligned} \tag{3}$$

极坐标形式：

$$\begin{aligned} z &= re^{j\theta} \\ r &= |z| = \sqrt{x^2 + y^2}(\text{幅值}) \\ \theta &= \arctan(\frac{y}{x} = \angle z)(\text{相位}) \end{aligned} \tag{4}$$

欧拉方程：

$$\begin{aligned} e^{j\theta} &= \cos\theta + j\sin\theta \\ \cos\theta &= Re\{e^{j\theta}\} = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{\ } \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\cos\theta = Re\{e^{j\theta}\} = \frac{e^{j\theta}+e^{-j\theta}}{2} \\
\sin\theta = Im\{e^{j\theta}\} = \frac{e^{j\theta}-e^{-j\theta}}{2j} \\
|e^{j\theta}| = 1 \\
e^{j\pi n} = (-1)^n
\end{aligned}
\tag{5}
$$

共轭复数：

$$
\begin{aligned}
zz^\star = r^2 \\
\frac{z}{z^\star} = e^{j2\theta}
\end{aligned}
\tag{6}
$$

2. 连续时间正弦信号

$$
\begin{aligned}
x(t) = A\cos(\omega_0 t+\phi) = A\cos(2\pi f_0 t+\phi) \\
T_0 = \frac{2\pi}{|\omega_0|} = \frac{1}{|f_0|}(T_0 \in R)
\end{aligned}
\tag{7}
$$

3. 连续时间复指数信号

$x(t) = Ce^{at}$，其中C、a为复数$C = |C|e^{j\theta}, a = r + j\omega_0$

- 若$\theta = 0, \omega_0 = 0$

  $x(t) = |C|e^r t$
- 若$C = 1, \theta = 0, r = 0$

  $x(t) = e^{j\omega_0 t} = \cos\omega_0 t + j\sin\omega_0 t$

  平均功率为$P_T = 1$

  实部虚部都是正弦信号
- 一般情况下

  $x(t) = |C|e^{rt}\cos(\omega_0 t + \theta) + j|C|e^{rt}\sin(\omega_0 t + \theta)$

  实部虚部都是振幅呈实指数规律变化的正弦振荡

4. 离散时间正弦信号

$$
x[n] = A\cos(\omega_0 n + \Phi) \tag{8}
$$

与连续时间正弦信号的区别：

- 当ω_0上升时，连续时间正弦信号的振荡频率越来越高不会发生逆转；离散时间正弦信号的振荡速率增加，在$\omega_0 = \pi$达到最大，然后速率减小，在$\omega_0 = 2\pi$时，与$\omega_0 = 0$相同
- 离散时间正弦信号在ω_0与$\omega_0 + 2\pi k$时是完全一样的，离散时间正弦信号的有效频率范围只有2π区间。
- 连续时间正弦信号一定是周期的离散时间正弦信号不一定是周期的

  判断是否为周期信号：

  - 若$\frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{k}{N}(k, N \in Z)$，能写成两个整数比值形式的数，则为周期信号
  - 若K, N无公因子，则N为基波

5. 离散时间复指数信号

$x[n]=Ce^{\beta n}$，令$\alpha=e^{\beta}$，可写为更一般的形式$x[n]=C\alpha^{n}$，C,α为负数

- 实指数信号：C,α均为实数

  $x[n]=C\alpha^{n}$

- 周期函数

  $x[n]=Ce^{\beta n},a=r+j\omega_0$，令$C=1,r=0$

  $x[n]=e^{j\omega_0 n}=\cos\omega_0 n+j\sin\omega_0 n$

  若满足$\frac{\omega_0}{2\pi}=\frac{k}{N}(k,N\in Z)$，则是周期信号

四、 单位冲激与阶跃函数

1. 离散时间单位脉冲与单位阶跃

$\delta[n]$和$u[n]$之间的关系：

- $\delta[n]=u[n]-u[n-1]$一次差分
- $u[n]=\sum_{m=-\infty}^{n}\delta[m_0]$
- $u[n]=\sum_{k=0}^{+\infty}\delta[n-k]$

$\delta[n]$具有提取信号$x[n]$中某一点的作用

- $x[n]\delta[n]=x[0]\delta[n]$
- $x[n]\delta[n-n_0]=x[n_0]\delta[n-n_0]$

2. 连续时间单位冲激与单位阶跃

$\delta(t)=\frac{du(t)}{dt},u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau$

$\delta(t)$具有提取信号$x(t)$中某一点的作用

- $x(t)\delta(t)=x(0)\delta(t)$
- $x(t)\delta(t-t_0)=x(t_0)\delta(t-t_0)$

五、 连续时间和离散时间系统

六、 基本系统性质

1. 记忆系统与无记忆系统

在任何时刻，系统的输出都只与当前时刻的输入有关，而与该时刻以外的输入无关，则称该系统是无记忆系统，否则就是记忆系统

2. 可逆性和逆系统

如果一个系统对任何不同的输入都能产生不同的输出，即输入与输出是一一对应的，则称该系统是可逆系统

如果一个可逆系统与另一个系统级联后构成一个恒等系统，则称后者是前者的逆系统

3. 因果性

如果一个系统在任何时刻的输出都只与当时这个时刻的输入以及该时刻以前的输入有关，而和该时刻以后的输入无关就称该系统是因果的，否则就是非因果的

4. 稳定性

如果一个系统当输入有界时，产生的输出也是有界的，则该系统是稳定系统，否则，就是不稳定系统

5. 时不变性

如果一个系统当输入信号有一个时移时，输出响应也产生同样的时移。除此之外，输出响应无任何其它变化，则称该系统是时不变的，否则就是时变的

检验步骤

1. 令输入为$x_1(t)$，根据系统的描述，确定此时的输出$y_1(t)$
2. 将输入信号变为$x_2(t)$，再根据系统的描述确定输出$y_2(t)$
3. 令$x_2(t)=x_1(t-t_0)$根据自变量变换求出此时的$y_2(t)$
4. 检验$y_1(t-t_0)$是否等于$y_2(t)$

6. 线性

若$x_1(t)\rightarrow y_1(t)\quad x_2(t)\rightarrow y_2(t);\quad ax_1(t)+bx_2(t)\rightarrow ay_1(t)+by_2(t)$其中$a,b$是常数满足此关系的系统是线性的。

第二章 线性时不变系统

一、 离散时间线性时不变系统：卷积和

用脉冲表示离散时间信号：

$$x[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]\delta[n-k] \tag{9}$$

离散时间线性时不变系统的单位脉冲响应及卷积和表示：

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h[n-k] \tag{10}$$

二、 连续时间线性时不变系统：卷积积分

用冲激信号表示连续时间信号：

$$x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \tag{11}$$

连续时间线性时不变系统的单位脉冲响应及卷积积分表示：

$$y(t)=x(t)\star h(t)=x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau \tag{12}$$

三、 线性时不变系统的性质

1. 卷积积分与卷积和性质

交换律、分配律、结合律

【注】前提为系统必须是LTI系统；所有涉及的卷积运算必须收敛

2. 线性时不变系统的性质

- 记忆性

  无记忆性系统的单位脉冲/冲激响应为：$h[n]=k\delta[n] \quad h(t)=k\delta(t)$

  此时$x[n]*h[n]=kx[n] \quad x(t)*h(t)=kx(t)$
- 可逆性

  若可逆，则存在一个逆系统$h_1(t)$使得$h(t)*h_1(t)=\delta(t) \quad h[n]*h_1[n]=\delta[n]$
- 因果性

  LTI系统具有因果性的充要条件：

  $h[n]=0,n<0$

  $h(t)=0,t<0$
- 稳定性

  若稳定则应有：

  $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h[n]|<\infty$
  $\int_{-\infty}^{+\infty}|h(t)|<\infty$

四、 用微分和差分方程描述的因果线性时不变系统

1. 线性常系数微分方程

对于一个给定的$x(t)$，方程的完全解为

$$y(t)=y_p(t)+y_h(t) \tag{13}$$

$y_p(t)$是方程特解（强迫响应分量），$y_h(t)$是方程通解（自然响应分量）

五、奇异函数

单位冲激性质

$$\int_{-\infty}^{+\infty}g(\tau)\delta(\tau-t)d\tau=g(t) \tag{14}$$

第三章 周期信号的傅里叶级数表示

一、 线性时不变系统对复指数信 号的响应

对于频率都是ω_0的整数倍的复指数信号，如$1(e^0),e^{\pm j\omega_0 t},e^{\pm j2\omega_0 t},\cdots,e^{\pm jk\omega_0 t}$，都与$e^{j\omega_0 t}$成谐波关系，他们的集合表示为$\Phi_k(t)$

LTI系统对复指数信号的响应也是一个复指数信号，不同的只是在幅值上的变化

二、 连续时间周期信号的傅里叶级数表示

如果周期信号$x(t)$能由一组成谐波关系的复指数信号的线性组合来表示

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk(\frac{2\pi}{T})t} \\
a_k &= \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk(\frac{2\pi}{T})t}dt
\end{aligned} \tag{15}
$$

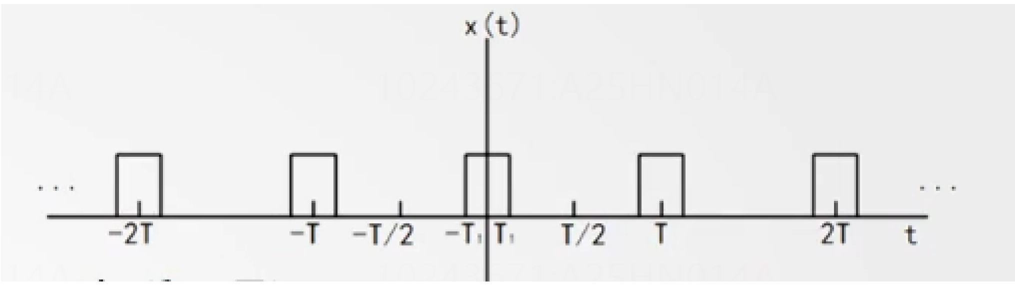
傅里叶级数的收敛条件：

- 当$x(t)$在一个周期内具有有限能量时就保证收敛。（一般使用此条件）
- 狄里赫利条件:
  条件一:在任何周期内，$x(t)$必须绝对可积

  条件二:在任意有限区间内，$x(t)$具有有限个起伏变化;最大值和最小值数目有限

  条件三:在$x(t)$的任何有限区间内，只有有限个不连续点，而且在这些不连续点上函数是有限值。

常见傅里叶级数系数



$$
\begin{aligned}
x(t) &= \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & T_1 < |t| < T/2 \end{cases} \\
a_k &= \begin{cases} \frac{2T_1}{T}, & k = 0 \\ \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi}, & k \neq 0 \end{cases}
\end{aligned} \tag{16}
$$

三、 连续时间傅里叶性质

1. 线性

   $Ax(t) + By(t) \to Aa_k + Bb_k$

2. 时移

   $x(t-t_0) \to a_k e^{-jk\omega_0 t_0}$

3. 反转

   $x(-t) \to a_{-k}$

4. 尺度变换

   $x(at) \to a_k$

5. 相乘

   $x(t)y(t) \to a_k * b_k$

6. 微分

   $\frac{dx(t)}{dt} \to jk\omega_0 a_k$

7. 积分

$\int_{-\infty}^{t} x(t)dt \rightarrow \frac{1}{jk\omega_0}a_k$

8. 共轭对称性

$x^*(t) \rightarrow a^*_{-k}$

9. 连续时间周期信号的帕斯瓦尔定理

$\frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2$

表明：一个周期信号的平均功率就等于它所有谐波分量的平均功率之和

四、 离散时间周期信号的傅里叶级数表示

对于满足周期性的信号($\frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{k}{N}$)

1. 离散时间成谐波关系的复指数信号

$x[n] = x[x+N] \quad x[n] = e^{j\omega_0 n} = e^{j\frac{2\pi}{N}n}$

- 成谐波关系的复指数信号集: $\Phi_k[n] = \{e^{j\frac{2\pi}{N}kn}\}$

  该信号集中每一个信号都以N为周期，且该集合中只有N个信号

2. 离散时间傅里叶级数

$$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \tag{17}$$

其中k为N个相连的整数

这个级数称为离散时间傅里叶级数，其中a_k也称为周期信号$x[n]$的频谱

3. 傅里叶级数系数的确认

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{k=<N>} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \tag{18}$$

五、 离散时间傅里叶级数性质

1. 线性

$Ax[n] + By[n] \rightarrow Aa_k + Bb_k$

2. 时移

$x[n-n_0] \rightarrow a_k e^{-jk(2\pi/N)n_0}$

3. 共轭

$x^*[n] \rightarrow a^*_{-k}$

4. 反转

$x[-n] \rightarrow a_{-k}$

5. 尺度变换

$x_{(m)}[n] = \begin{cases} x[n/m], & \text{若}n\text{是}m\text{的整数倍} \\ 0, & \text{若}n\text{不是}m\text{的整数倍} \end{cases} \rightarrow \frac{1}{m}a_k$

6. 相乘

$x[n]y[n] \rightarrow \sum_{t=<N>} a_l b_{k-l}$

7. 差分

$x[n]-x[n-1] \rightarrow (1-e^{-jk(2\pi/N)})a_k$

8. 帕斯瓦尔定理

$\frac{1}{N}\sum_{n=<N>}|x[n]|^2=\sum_{k=<N>}|a_k|^2$

左边是信号在一个周期内的平均功率，右边是信号的各次谐波的总功率。

这表明：一个周期信号的平均功率等于它的所有谐波分量的功率之和，

也表明：周期信号的功率既可以由时域求得，也可以由频域求得。

第四章 连续时间的傅里叶变换

一、 连续时间非周期信号的傅里叶变换

1. 连续时间傅里叶变换

思路：把非周期信号看成周期趋于无穷大的周期信号

傅里叶（正）变换（分析公式）

$$\begin{gathered} X(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt \\ X(j\omega)=\mathcal{F}\{x(t)\} \end{gathered} \tag{19}$$

傅里叶逆变换（综合公式）

$$\begin{gathered} x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega \\ x(t)=\mathcal{F}^{-1}\{X(j\omega)\} \end{gathered} \tag{20}$$

傅里叶变换对：$x(t) \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(j\omega)$

傅里叶级数与傅里叶变换：

	周期信号：$\boldsymbol{x}_{\mathrm{T}}(t)$	非周期信号：$x(t)$
基本信号	$\left\{e^{jk\omega_0 t}\right\}, k\in\mathbb{Z}$(整数) 频率离散,谐波关系	$\left\{e^{j\omega t}\right\}, \omega\in\mathbb{R}$（实数） 频率连续，无谐波关系
信号分解	$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k e^{jk\omega_0 t}$ 无穷离散谐波分量加权和	$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$ 无穷连续频率分量加权积分
信号频谱	$\|a_k\|$：幅度谱 $\angle a_k$：相位谱 $\|\boldsymbol{a}_k\|^2$：功率谱	$\|X(j\omega)\|$：幅度（密度）谱 $\angle X(j\omega)$：相位谱 $\|X(j\omega)\|^2$：能谱密度

(21)

2. 傅里叶变换的收敛

两组条件：

（1）若$\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|dt<\infty$，则$X(j\omega)$存在

这表明能量有限的信号傅里叶变换一定存在

（2）狄利赫里条件

1. 绝对可积条件$\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|dt<\infty$
2. 在任意有限长的时间段内，极值点个数有限
3. 在任意有限长的时间段内，第一类间断点个数有限

二、 典型连续时间非周期信号的傅里叶变换

1. 单边指数信号

$x(t) = e^{-at}u(t), a > 0$

$X(j\omega) = \frac{1}{a+j\omega}$

2. 双边指数信号

$x(t) = e^{-a|t|}, a > 0$

$X(j\omega) = \frac{2a}{a^2+\omega^2}$

3. 时域单位冲激信号

$x(t) = \delta(t)$

$X(j\omega) = 1$

4. 频域单位冲激信号

$X(j\omega) = \delta(\omega)$

$x(t) = \frac{1}{2\pi}$

5. 常值信号

$x(t) = 1$

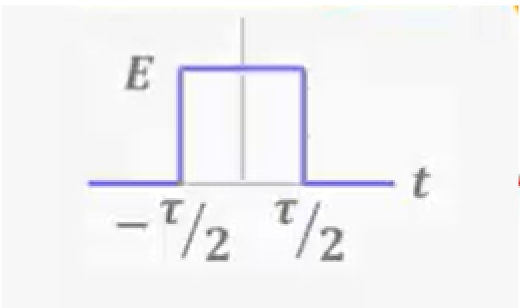
$X(j\omega) = 2\pi\delta(\omega)$

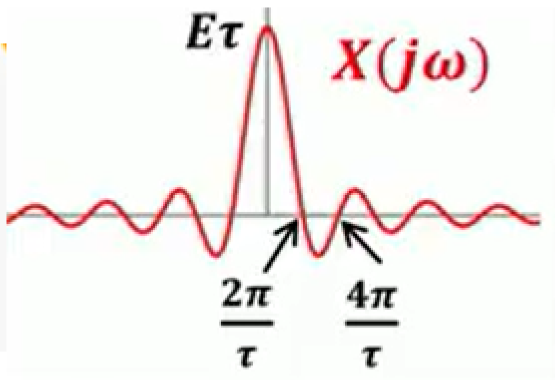
6. 偶对称门信号

$x(t) = \begin{cases} 1, |t| < T_1 \\ 0, |t| > T_1 \end{cases}$

$X(j\omega) = 2\frac{\sin\omega T_1}{\omega} = E\tau \cdot Sa(\frac{\omega\tau}{2})$

$(Sa(x) = \frac{\sin(x)}{x})$





频谱位偶对称门信号

$x(j\omega) = \begin{cases} 1, |\omega| < W \\ 0, |\omega| > W \end{cases}$

$x(t) = \frac{\sin Wt}{\pi t}$

7. 阶跃信号

$X(j\omega)=\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$

8.

$e^{j\omega_0 t}\leftrightarrow 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$

$e^{-j\omega_0 t}\leftrightarrow 2\pi\delta(\omega+\omega_0)$

三、 连续时间周期信号的傅里叶变换

$$\mathcal{F}\{x_T(t)\}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}2\pi a_k\delta(\omega-k\omega_0)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_0(jk\omega_0)\omega_0\delta(\omega-k\omega_0) \tag{22}$$

四、 连续时间傅里叶变换性质

$x(t)\leftrightarrow X(j\omega)$

1. 线性
2. 时移与频移

   $x(t-t_0)\leftrightarrow X(j\omega)e^{-j\omega t_0}$

   这表明信号的时移只影响它的相频特性其相频特性会增加一个线性相移。

   $e^{j\omega_0 t}x(t)\leftrightarrow X(j\omega-j\omega_0)$
3. 共轭和共轭对称性质

   $x^*(t)\leftrightarrow X^*(-j\omega)$

   实信号：$X(j\omega)=X^*(-j\omega)$

   - 若$x(t)$为实偶函数，则$X(j\omega)=X(-j\omega)$，且$X(j\omega)$为实偶函数
   - 若$x(t)$为实奇函数，则$X(j\omega)=-X(-j\omega)$，且$X(j\omega)$为虚奇函数
   - $Ev\{x(t)\}\leftrightarrow Re\{X(j\omega)\},Od\{x(t)\}\leftrightarrow jIm\{X(j\omega)\}$
4. 时域微分与积分性质

$$\begin{gathered}\frac{dx(t)}{dt}\leftrightarrow j\omega X(j\omega)\\(-jt)X(t)\leftrightarrow\frac{dX(j\omega)}{d\omega}\\\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau\leftrightarrow\frac{1}{j\omega}X(j\omega)+\pi X(0)\delta(\omega)\\-\frac{1}{jt}x(t)+\pi x(0)\delta(t)\leftrightarrow\int_{-\infty}^{\infty}X(j\Omega)d\Omega\end{gathered} \tag{23}$$

5. 时间与频率的尺度变换性质

   $x(at)\leftrightarrow\frac{1}{|a|}X(j\frac{\omega}{a})$
6. 对偶性质

   $x(t)\leftrightarrow X(j\omega)$则$X(jt)\leftrightarrow 2\pi x(-\omega)$
7. 帕塞瓦尔定理

   $\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|X(j\omega)|^2d\omega$

这表明:信号的能量既可以在时域求得，也可以在频域求得。由于$|X(j\omega)|^2$表示了信号能量在频域的分布，因而称其为“能量谱密度”函数。

五、 相乘性质

$x(t)*h(t) \leftrightarrow X(j\omega)H(j\omega)$

LTI系统的频域分析法:

1. 有$x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$
2. 根据系统的描述，求出$H(j\omega)$
3. $Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega)$
4. $y(t) = \mathcal{F}[Y(j\omega)]$

六、 相乘性质

$$\begin{aligned} s(t)\cdot p(t) &\leftrightarrow \tfrac{1}{2\pi}S(j\omega)*P(j\omega) \\ \mathrm{r(t)} &\leftrightarrow R(j\omega)=\tfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}S(j\theta)P(j(\omega-\theta))d\theta \end{aligned} \tag{24}$$

第五章 离散时间的傅里叶变换

一、 离散时间非周期信号的傅里叶变换

分析公式:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \tag{25}$$

综合公式:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega \tag{26}$$

正变换收敛性：$x[n]$绝对可和

	$x[n]$	$x(t)$
单元信号	$\left\{e^{j\omega n}\right\}$ 时域周期、频域周期 (2π)	$\left\{e^{j\omega t}\right\}$ 时域周期、频域非周期(单频)
分析公式	$X\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j\omega n}$ 频域连续、周期 (2π)	$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt$ 频域连续、非周期(一般)
综合公式	$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega$	$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$

(27)

低频分量：集中于偶数倍π附近的频率

高频分量：集中于奇数倍π附近的频率

二、 典型离散非周期信号的傅里叶变换

1. $x[n]=a^{n}u[n], \quad 0<|a|<1$

$X(e^{j\omega})=\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$

2. $x[n]=a^{|n|}, \quad |a|<1$

$X(e^{j\omega})=\frac{1-a^{2}}{1-2a\cos\omega+a^{2}}$

3. $x[n]=\begin{cases}1, & |n|\le N_1\\ 0, & |n|>N_1\end{cases}$

$X(e^{j\omega})=\dfrac{\sin\omega(N_1+0.5)}{\sin(\omega 2)}$

4. $x[n]=\delta[n]$

$X(e^{j\omega})=1$

5. $x[n]=1$

$X(e^{j\omega})=2\pi\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-2\pi l)$

三、 离散周期信号的傅里叶变换

$\tilde{x}[n]\leftrightarrow X\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{k=<N>}a_k\sum_{l=-\infty}^{\infty}2\pi\delta\left(\omega-k\omega_0-2\pi l\right)=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k\delta\left(\omega-\frac{2\pi}{N}k\right)$

这表明：周期信号的傅立叶变换由一系列冲激组成，每一个冲激分别位于信号的各次谐波的频率处，其冲激强度正比于对应的傅立叶级数的系数$2\pi a_k$

四、 离散傅里叶变换的性质

设 $x[n]\stackrel{\mathrm{FT}}{\longleftrightarrow}X\left(\mathrm{e}^{j\omega}\right), x_1[n]\stackrel{\mathrm{FT}}{\longleftrightarrow}X_1\left(\mathrm{e}^{j\omega}\right), x_2[n]\stackrel{\mathrm{FT}}{\longleftrightarrow}X_2\left(\mathrm{e}^{j\omega}\right)$, 则具有以下的性质。

1. 周期性

   $X\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega+2\pi)}\right)=X\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}\right)$

2. 线性性
3. 时移性

   $x\left[n-n_0\right]\stackrel{\mathrm{FT}}{\longleftrightarrow}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n_0}X\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}\right)$

4. 频移性

   $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 n}x[n]\stackrel{\mathrm{FT}}{\longleftrightarrow}X\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega-\omega_0)}\right)$

5. 共轭及共轭对称性

   $x^{*}[n]\stackrel{\mathrm{FT}}{\longleftrightarrow}X^{*}\left(e^{-j\omega}\right)$

6. 差分与求和

$$x[n]-x[n-1]\stackrel{\mathrm{FT}}{\longleftrightarrow}\left(1-\mathrm{e}^{-j\omega}\right)X\left(\mathrm{e}^{j\omega}\right)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{n}x(k)\stackrel{\mathrm{FT}}{\longleftrightarrow}\frac{X(e^{j\omega})}{1-e^{-j\omega}}+\pi X(e^{j0})\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-2\pi k)$$

7. 时域反转

   $x[-n]\stackrel{\mathrm{FT}}{\leftrightarrow}X\left(\mathrm{e}^{-j\omega}\right)$

8. 时域扩展

$x_{(k)}[n] \stackrel{FT}{\leftrightarrow} X\left(\mathrm{e}^{jk\omega}\right)$

式中,$x_{(k)}[n]=\begin{cases}x[n/k], & n \text{ 为 } k \text{ 的倍数} \\ 0, & n \text{ 不为 } k \text{ 的倍数}\end{cases}$

9. 频域微分

$nx[n] \stackrel{\text{FT}}{\leftrightarrow} \mathrm{j} \frac{X\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}\right)}{\mathrm{d}\omega}$

10. 帕斯瓦尔定理

$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x[n]|^2=\frac{1}{2\pi} \int_{2\pi}\left|X\left(\mathrm{e}^{j\omega}\right)\right|^2 \mathrm{~d}\omega$

$|X(j\omega)|^2$称为$x[n]$的能量谱密度函数

11. 卷积定理

$y[n]=x[n] * h[n] \stackrel{\text{FT}}{\leftrightarrow} Y\left(\mathrm{e}^{j\omega}\right)=X\left(\mathrm{e}^{j\omega}\right) H\left(\mathrm{e}^{j\omega}\right)$

12. 乘积性质

$y[n]=x_1[n] \cdot x_2[n] \stackrel{\text{FT}}{\leftrightarrow} Y\left(\mathrm{e}^{j\omega}\right)=\frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X_1\left(\mathrm{e}^{j\theta}\right) X_2\left(\mathrm{e}^{j(\omega-\theta)}\right) d\theta=\frac{1}{2\pi} X_1(e^{j\omega}) * X_2(e^{j\omega})$

13. 对偶性

离散与离散:

$x[n] \stackrel{DFS}{\longleftrightarrow} a_k$

$a_n \stackrel{DFS}{\longleftrightarrow} \frac{1}{N} x[-k]$

连续与离散:

$x[n] \stackrel{DTFT}{\longleftrightarrow} X\left(e^{j\omega}\right)$

$X\left(e^{jt}\right) \stackrel{CFS}{\longleftrightarrow} x[-k]$

第六章 信号与系统的时域与频域特性

一、 傅里叶变换的模和相位表示

二、 线性时不变系统频率响应的模和相位表示

系统对输入信号所起的作用包括两个方面:

1. 改变输入信号各频率分量的幅度;
2. 改变输入信号各频率分量的相对相位。

$$Y(j\omega)=X(j\omega)H(j\omega) \quad Y\left(e^{j\omega}\right)=X\left(e^{j\omega}\right)H\left(e^{j\omega}\right)$$
$$|Y(j\omega)|=|X(j\omega)||H(j\omega)|$$
$$\measuredangle Y(j\omega)=\measuredangle H(j\omega)+\measuredangle X(j\omega)$$

该系统对中心频率为$\omega=\omega_0$窄带输入信号的近似效果就是:

$$Y(j\omega)=X(j\omega)|H(j\omega)|e^{-j\phi}e^{-j\omega\alpha} \tag{28}$$

对非线性相位系统，定义群时延为$\alpha=\tau(\omega)=-\frac{d}{d\omega}\measuredangle H(j\omega)$

三、 理想频率选择性滤波器

通过系统改变信号中各频率分量的相对大小和相位，甚至完全去除某些频率分量的过程称为滤波

1. 频率成形滤波器
2. 频率选择性滤波器

   理想频率选择性滤波器的频率特性在某一个(或几个)频段内频率响应为常数，而在其它频段内频率响应等于零，理想滤波器可分为低通、高通、带通、带阻。

四、 非理性滤波