1-7-1-H-现代控制理论导读

1-7-2-H-状态空间描述基础知识

一、 基本概念

1. 状态变量：个数等于系统独立储能元件个数
2. 状态矢量：$x(t)$
3. 状态空间：$x(t)$的全体集合
4. 状态方程：$\dot{x} = \mathrm{A}x + \mathrm{B}u$
5. 输出方程：$y = \mathrm{C}x + \mathrm{D}$

二、 状态空间表达式

1. 状态空间表达式

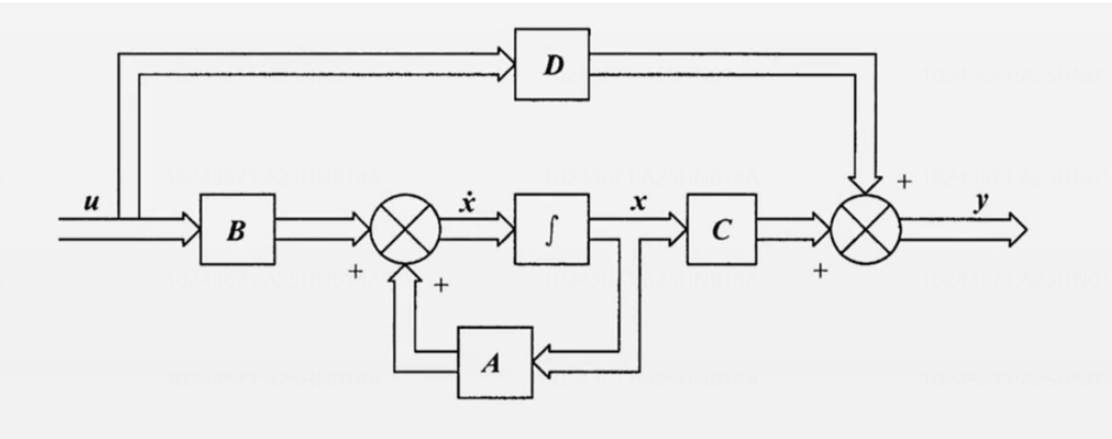
$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mathrm{A}x + \mathrm{B}u \\ y &= \mathrm{C}x + \mathrm{D}u \end{aligned} \tag{1}$$

D一般为0

三、 模拟系统框图

1. 系统框图

   用双线箭头表示矢量



2. 模拟结构图

   ①积分器的个数等于状态变量的个数②只有加法元件，比例元件和积分元件③使用单线箭头表示标量

1-7-3-H-如何建立状态空间表达式

建立状态空间表达式的途径：

- 由系统结构图来建立;
- 由系统的物理机理出发进行建立;
- 由高阶微分方程进行建立;

- 由传递函数进行建立;

1-7-4-H-状态空间表达式的各种标准型

$$\begin{aligned} W(s) &= \tfrac{b_n s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + s_0} \\ &= b_n + \tfrac{\beta_{n-1}s^{n-1} + \beta_{n-2}s^{n-2} + \cdots + \beta_1 s + \beta_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + s_0} \\ &= b_n + \tfrac{N(s)}{D(s)} \end{aligned} \tag{2}$$

由于分母阶次一般大于分子阶次，故一般$b_n = 0$，故一般$\mathrm{D} = b_n = 0$

一、能控标准型

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{3}$$

$$C = \begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_1 & \cdots & \beta_{n-2} & \beta_{n-1} \end{bmatrix}$$

二、能观标准型

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-2} \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix} \tag{4}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

三、 对角标准型

$$W(s) = \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{(s - \lambda_i)}$$

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \tag{5}$$

$$C = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix}$$

或者$\bar{C} = B^T, \bar{B} = C^T$

四、约旦标准型

$$W(s) = \frac{c_{1q}}{(s-\lambda_1)^q} + \frac{c_{1(q-1)}}{(s-\lambda_1)^{q-1}} + \cdots + \frac{c_{12}}{(s-\lambda_1)^2} + \frac{c_{11}}{(s-\lambda_1)^1} + \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{(s-\lambda_i)} \tag{6}$$

$$
\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{q-1} \\ \dot{x}_q \\ \dot{x}_{q+1} \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
\lambda_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \lambda_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_{q+1} & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{q-1} \\ x_q \\ x_{q+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}
+
\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} u
$$

$$
y = \begin{pmatrix} c_{1q}, & c_{1(q-1)}, & \cdots, & c_{12}, & c_{11}, & c_{q+1}, & \cdots, & c_n \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{q-1} \\ x_q \\ x_{q+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}
$$

1-7-5-L-求取传递函数阵

$$
W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D \tag{7}
$$

或者根据标准型，反求传递函数

1-7-6-H-线性变换基础知识

$$
\begin{matrix} \dot{x} = \mathrm{A}x + \mathrm{B}u \\ y = \mathrm{C}x + \mathrm{D}u \end{matrix}
\xrightarrow[z=T^{-1}x]{x=Tz}
\begin{matrix} \dot{x} = \mathrm{A}x + \mathrm{B}u \\ y = \mathrm{C}x + \mathrm{D}u \end{matrix} \tag{8}
$$

线性变换性质：

- 系统的特征向量不变
- 系统的传递矩阵不变
- 系统的能控性和能观性不变

1-7-7-P-线性变换:变为能控标准型，变为能观标准型

需要先证明是否能控/能观

一、 变成能控标准型

$$|\lambda I - A| = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

$$T_c = (A^{n-1}b, \quad A^{n-2}b, \quad \cdots, \quad Ab, b)\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ a_{n-1} & 1 & & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ a_2 & a_3 & \cdots & 1 & \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \end{pmatrix} \tag{9}$$

$$\bar{A} = T_c^{-1}AT_c$$

$$\bar{b} = T_c^{-1}b$$

$$\bar{c} = cT_c$$

二、 变成能观标准型

$$|\lambda I - A| = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

$$T_0^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & a_3 & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} cA^{n-1} \\ cA^{n-2} \\ \vdots \\ cA \\ c \end{pmatrix} \tag{10}$$

$$\bar{A} = T_0^{-1}AT_0$$

$$\bar{b} = T_0^{-1}b$$

$$\bar{c} = cT_0$$

1-7-8-L-线性变换:变为约旦阵，变为对角阵

只要最后的变换，A阵为对角阵或约旦阵时，此时系统就称为对角标准型或约旦标准型

一、 A变为对角阵

A无重根

(1) A阵为任意形式

设λ_i是A的n个互异特征根$(i = 1, 2, \ldots, n)$，求出λ_i的特征矢量P_i，则变换矩阵由A的特征矢量$P_1, P_2, \cdots, P_n$构成，即

$$|\lambda I - A| = 0$$

$$T = (P_1, P_2, \cdots, P_n)$$

$$\Lambda = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix} \tag{11}$$

$$B^{'} = T^{-1}B$$

$$C^{'} = CT$$

(1) A阵为标准型

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{12}$$

$$\begin{bmatrix} -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

则

$$T=\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \tag{13}$$

一、 A变为约旦阵

(1) A阵为任意形式

设λ_i是A的n个互异特征根$(i=1,2,\ldots,n)$，求出λ_i的特征矢量P_i，则变换矩阵由A的特征矢量$P_1,P_2,\cdots,P_n$构成，即

设A的特征根有q个λ_1的重根, 其余$(n-q)$个根为互异根, 这里给出变换矩阵T的计算公式如下:

其中

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 P_1 - AP_1 = 0 \\ \lambda_1 P_2 - AP_2 = -P_1 \\ \vdots \\ \lambda_1 P_q - AP_q = -P_{q-1} \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

显然, P_1仍为λ_1对应的特征矢量, 其余$P_2,\cdots,P_q$则称为广义特征矢量。

(2) A阵为标准形式

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \tag{15}$$

则

$$T=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & 1 & 0 & \cdots & \lambda_4 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & 2\lambda_1 & 1 & \cdots & \lambda_4^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \frac{d}{d\lambda_1}(\lambda_1^{n-1}) & \frac{1d^2}{2d\lambda_1^2}(\lambda_1^{n-1}) & \cdots & \lambda_4^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \tag{16}$$

1-7-9-H-状态转移矩阵的求解及其性质

一、 定义及求解方法

(1) 定义

$\Phi(t)=e^{At}$表示$x(0)$到$x(t)$的转移矩阵

$\Phi(t-t_0)=e^{A(t-t_0)}$表示$x(t_0)$到$x(t)$的转移矩阵

(2) 基本求解方法

① 定义法

$$e^{At}=I+At+\frac{1}{2!}A^2t^2+\cdots+\frac{1}{n!}A^nt^n+\cdots \tag{17}$$

② 拉氏变换法

$$e^{At}=\Phi(t)=L^{-1}[(sI-A)^{-1}] \tag{18}$$

③ 对角矩阵法

$$A=\Lambda=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & 0\\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n\end{bmatrix}\rightarrow e^{At}=\Phi(t)=\begin{bmatrix}e^{\lambda_1} & & & 0\\ & e^{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{\lambda_n}\end{bmatrix} \tag{19}$$

$$T^{-1}AT=\Lambda\rightarrow e^{At}=\Phi(t)=T\begin{bmatrix}e^{\lambda_1} & & & 0\\ & e^{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{\lambda_n}\end{bmatrix}T^{-1} \tag{20}$$

④ 约旦矩阵

$$A=J=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & & & & \\ & \lambda & 1 & & 0 & \\ & & \lambda & \ddots & & \\ & & & \ddots & 1 & \\ & & 0 & & \lambda & 1\\ & & & & & \lambda\end{pmatrix}_{n\times n}\longrightarrow e^{J_t}=\Phi(t)=e^{\lambda t}\begin{pmatrix}1 & t & \frac{1}{2!}t^2 & \cdots & \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}\\ & & & & \frac{1}{(n-2)!}t^{n-2}\\ 0 & 1 & t & \cdots & \frac{1}{(n)}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & t\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix} \tag{21}$$

$$T^{-1}AT=J\quad\longrightarrow\quad e^{At}=\Phi(t)=Te^{Jt}T^{-1}$$

二、基本性质

· 性质一	$\Phi(t\pm\tau)=\Phi(t)\Phi(\pm\tau)=\Phi(\pm\tau)\Phi(t)$	$e^{A(t\pm\tau)}=e^{At}e^{\pm A\tau}=e^{\pm A\tau}e^{At}$
· 性质二	$\Phi(0)=I$	$e^{A(0)}=I$
· 性质三	$[\Phi(t)]^{-1}=\Phi(-t)$	$\left[e^{At}\right]^{-1}=e^{-At}$
· 性质四	$\dot{\Phi}(t)=A\Phi(t)=\Phi(t)A$	$\frac{d}{dt}e^{At}=Ae^{At}=e^{At}A$
· 性质五	$\Phi(t_2-t_0)=\Phi(t_2-t_1)\Phi(t_1-t_0)$	$e^{A(t_2-t_1)}e^{A(t_1-t_0)}=e^{At_2}e^{-At_t}e^{At_1}e^{-At_0}=e^{A(t_2-t_0)}$

(22)

1-7-10-L-齐次方程求解

齐次状态方程：

$$\dot{x}=Ax \tag{23}$$

若初始时刻t_0时的状态给定为$x(t_0)=x_0$，则有唯一解：

$$x(t)=e^{A(t-t_0)}x_0,\quad t\geq t_0 \tag{24}$$

若初始时刻从$t=0$开始，即$x(0)=x_0$，则有唯一解：

$$x(t)=e^{At}x_0,\quad t\geq 0 \tag{25}$$

1-7-11-H-非齐次方程求解

一、 基本方法

(1) 拉普拉斯变换法

非齐次状态方程：

$$\dot{x}=Ax+Bu \tag{26}$$

取拉式变换

$$X(s)=(sI-A)^{-1}x(0)+(sI-A)^{-1}BU(s) \tag{27}$$

进行反拉氏变换

$$X(t)=L^{-1}[(sI-A)^{-1}]x(0)+L^{-1}[(sI-A)^{-1}BU(s)] \tag{28}$$

(2) 积分法

非齐次状态方程为:

$$\dot{x}=Ax+Bu \tag{29}$$

当初始时刻为 t_0, 初始状态为 $x\left(t_0\right)$ 时, 解为:

$$x(t)=\Phi\left(t-t_0\right)x\left(t_0\right)+\int_{t_0}^{t}\Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau \quad \Phi\left(t-t_0\right)=e^{A\left(t-t_0\right)} \tag{30}$$

当初始时刻为 $t_0=0$, 初始状态为 $x\left(t_0\right)$ 时, 解为:

$$x(t)=\Phi(t)x(0)+\int_0^t\Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau \quad \Phi(t)=e^{At} \tag{31}$$

上式又可表示为

$$x(t)=\Phi(t)x(0)+\int_0^t\Phi(\tau)Bu(t-\tau)d\tau \tag{32}$$

1-7-12-H-线性连续定常系统的能控性

一、 能控性定义

所有状态均能控

二、 状态能控性判据

1. 基础判据

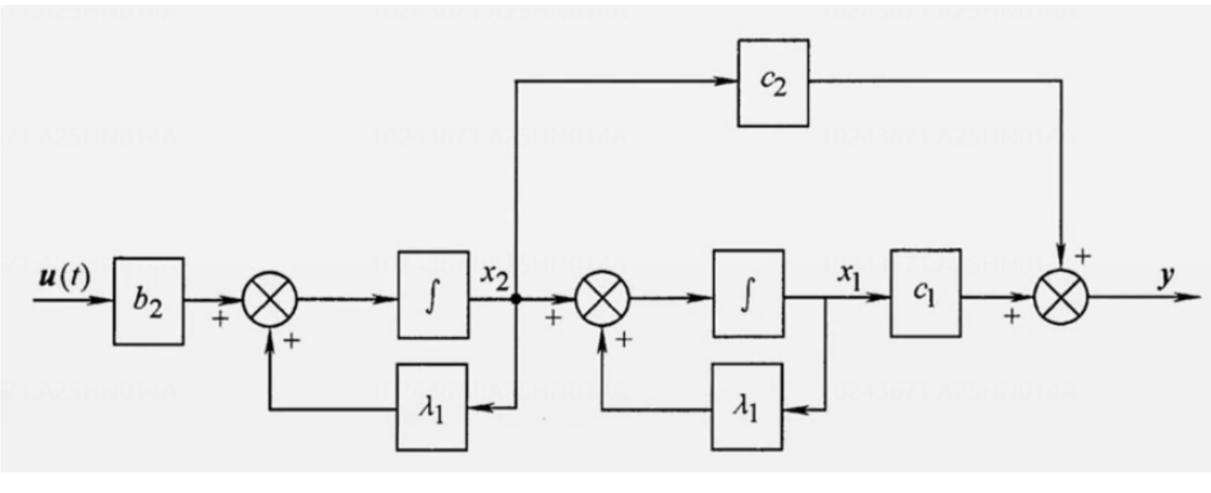
- 判秩法：$M=(B,AB,A^2B,\cdots,A^{n-1}B)$的秩为$n$
- PBH判据：对于矩阵的所有特征根λ_i，均有$rank[\lambda_iI-A,B]=n$

2. 根据特殊矩阵进行判断

- 能控标准型一定能控
- A阵为对角阵$\dot{x}=\Lambda x+bu$，则b中对应于互异特征根的部分，它的各行元素没有全为0的
- A阵为约旦阵$\dot{x}=Jx+bu$
  - b中对应于相同特征值的部分，它与每个约旦块最后一行相对应的一行的元素没有全为0的。
  - b中对应于互异特征值的部分，它的各行元素没有全为0的。
  - 若相同特征值对应不同的约旦块，b中与各个约旦块最后一行元素所形成的矢量线性无关

三、 能控性的直观理解

u直接控制x_1，并通过x_1间接控制x_2，故而系统能控



1-7-13-H-线性连续定常系统的能观性

一、 能观性定义

所有状态均能观

二、 状态能控性判据

1. 基础判据

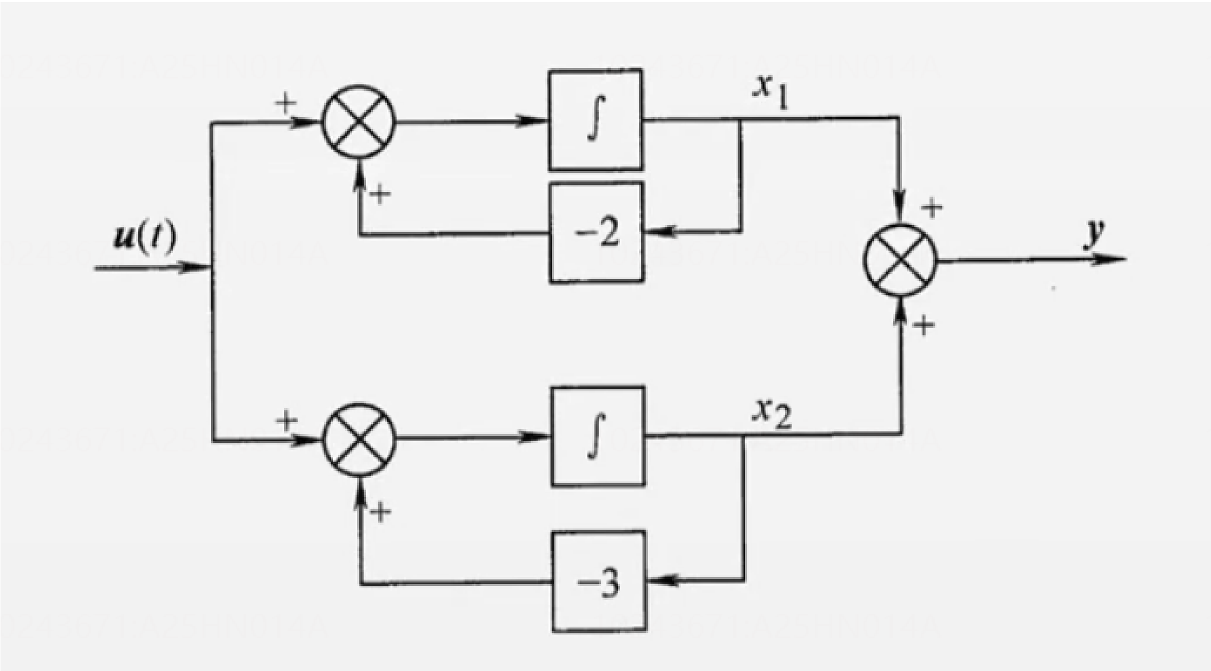
- 判秩法：$N=(C,CA,CA^2,\cdots,CA^{n-1})^T$的秩为$n$
- PBH判据：对于矩阵的所有特征根λ_i，均有$rank\begin{bmatrix}C\\\lambda_i I-A\end{bmatrix}=n$

2. 根据特殊矩阵进行判断

- 能观标准型一定能观
- A阵为对角阵$\dot{x}=\Lambda x+bu\quad y=cx$，则$c$中对应于互异特征根的部分，它的各列元素没有全为0的
- A阵为约旦阵$\dot{x}=Jx+bu\quad y=cx$
    - c中对应于相同特征值的部分，它与每个约旦块开头一列相对应的一列的元素没有全为0的。
    - c中对应于互异特征值的部分，它的各列元素没有全为0的。
    - 若相同特征值对应不同的约旦块，c中与各个约旦块开头一列元素所形成的矢量线性无关。

三、 能控性的直观理解

x_1x_2均流向y，故而系统能观



1-7-14-P-零极点对消与能控性和能观性的关系

若出现了零极点对消，则不能同时能观能控

1-7-15-P-对偶关系与对偶原理

若满足下述条件，则两系统互为对偶。

$$A_2=A_1^T\quad B_2=C_1^T\quad C_2=B_1^T \tag{33}$$

1. 对偶系统的传递函数矩阵是互为转置的。
2. 互为对偶的系统，其特征方程式是相同的。

- 对偶原理：若系统A,B互为对偶，若系统A能观（控），则系统B能控（观）

1-7-16-L-系统的能控性分解

目的：将状态分为能控与不能控部分

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx\end{aligned} \tag{34}$$

1. 其能控性判别矩阵：$M = \left(B, AB, \cdots, \quad A^{n-1}B\right)$的秩$\operatorname{rank} M = n_1 < n$则存在非奇异变换：$x = R_c\hat{x}$
2. $R_c = (R_1, \quad R_2, \quad \cdots, \quad R_{n_1}, \quad \cdots, \quad R_n)$，其中$1 - n_1$来自于$M$的线性无关部分，后部分任取使得$R_c$的秩为$n$
3. 则可变换为

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= \hat{A}\hat{x} + \hat{B}\hat{u} \\ y &= \hat{C}\hat{x}\end{aligned} \tag{35}$$

其中（A_{11}是秩为n_1的方阵）

$$\hat{A} = R_c^{-1}AR_c = \left(\begin{array}{c:c}\hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ 0 & \hat{A}_{22}\end{array}\right) \quad \hat{B} = R_c^{-1}B = \begin{pmatrix}\hat{B}_1 \\ 0\end{pmatrix} \quad \hat{C} = CR_c = \left(\hat{C}_1 : \hat{C}_2\right) \tag{36}$$

- 能控部分：

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_1 &= \hat{A}_{11}\hat{x}_1 + \hat{B}_1u + \hat{A}_{12}\hat{x}_2 \\ \hat{y}_1 &= \hat{C}_1\hat{x}_1\end{aligned} \tag{37}$$

- 不能控部分：

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_2 &= \hat{A}_{22}\hat{x}_2 \\ \hat{y}_2 &= \hat{C}_2\hat{x}_2\end{aligned} \tag{38}$$

1-7-17-L-系统的能观性分解

目的：将状态分为能观与不能观部分

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx\end{aligned} \tag{39}$$

1. 其能控性判别矩阵：$N = (C, CA, CA^2, \cdots, CA^{n-1})^T$的秩$\operatorname{rank} N = n_1 < n$则存在非奇异变换：$x = R_c\hat{x}$
2. $R_c^{-1} = (R_1, \quad R_2, \quad \cdots, \quad R_{n_1}, \quad \cdots, \quad R_n)^T$，其中$1 - n_1$来自于$N$的线性无关部分，后部分任取使得$R_c$的秩为$n$
3. 则可变换为

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= \hat{A}\hat{x} + \hat{B}\hat{u} \\ y &= \hat{C}\hat{x}\end{aligned} \tag{40}$$

其中（A_{11}是秩为n_1的方阵）

$$\hat{A} = R_c^{-1}AR_c = \left(\begin{array}{c:c}\hat{A}_{11} & 0 \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22}\end{array}\right) \quad \hat{B} = R_c^{-1}B = \begin{pmatrix}\hat{B}_1 \\ \hat{B}_2\end{pmatrix} \quad \hat{C} = CR_c = \begin{pmatrix}\hat{C}_1 & 0\end{pmatrix} \tag{41}$$

- 能观部分：

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_1 &= \hat{A}_{11}\hat{x}_1 + \hat{B}_1u \\ \hat{y}_1 &= \hat{C}_1\hat{x}_1\end{aligned} \tag{42}$$

- 不能控部分：

$$\dot{\hat{x}}_2 = \hat{A}_{21}\hat{x}_1 + \hat{A}_{22}\hat{x}_2 + \hat{B}_2u \tag{43}$$

1-7-18-H-最小实现

一、 最小实现的定义

$W(s)$的一个实现

$$\begin{aligned}\dot{x}&=Ax+Bu\\y&=Cx\end{aligned}\tag{44}$$

若不存在其他实现

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}&=\tilde{A}\tilde{x}+\tilde{B}u\\y&=\tilde{C}\tilde{x}\end{aligned}\tag{45}$$

使得$\tilde{x}$的维数小于x，则上式为最小实现

- 判断方法：
    1. 即能控又能观
    2. 传递函数不存在零极点对消

1-7-19-H-线性反馈控制系统的基本结构

原理:改变闭环极点的位置，以改善系统的性能

一、 状态反馈

控制律：$u=Kx+v$

系统的能控性不变，能观性可能改变

二、 输出反馈

控制律：$u=Hy+v$

不改变系统的能控性与能观性

三、 输出到状态矢量导数反馈

应用对象：状态观测器

系统的能观性不变，能控性可能改变

1-7-20-H-状态反馈的极点配置

二、 普适方法

状态线性反馈控制律：

$$\begin{aligned}u&=v-Kx\\(u&=v+Kx)\end{aligned}\tag{46}$$

其中：

$$K=(K_0,K_1,\cdots,K_{n-1})\tag{47}$$

得状态反馈闭环系统的状态空间表达式：

$$\dot{x}=(A-bK)x+bv\quad y=cx\tag{48}$$

闭环系统特征多项式：

$$f(\lambda)=det[\lambda I-(A-bK)]=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0\tag{49}$$

期待特征多项式：

$$f^\star(\lambda)=\prod_{i=1}^{n}(\lambda-\lambda_i^\star)\tag{50}$$

令$f(\lambda)$与$f^*(\lambda)$系数一致，得K值

三、 技巧方法

在状态空间方程为能控标准型，且状态反馈为负反馈时

$$
\begin{aligned}
W(s) &= \frac{\beta_{n-1}s^{n-1}+\beta_{n-2}s^{n-2}+\cdots+\beta_1 s+\beta_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0} \\
W_k(s) &= \frac{\beta_{n-1}s^{n-1}+\beta_{n-2}s^{n-2}+\cdots+\beta_1 s+\beta_0}{s^n+(a_{n-1}+k_{n-1})s^{n-1}+\cdots+(a_1+k_1)s+(a_0+k_0)}
\end{aligned} \tag{51}
$$

则

$$
K=(a_0^*-a_0,a_1^*-a_1,\cdots,a_{n-1}^*-a_{n-1}) \tag{52}
$$

【注】状态反馈只改变极点，不改变零点

四、 解题步骤

1. 系统的可控性判别矩阵为：（$rank(M)$），系统可控，满足极点可配置条件
2. 设状态反馈阵为（K）
3. 闭环系统特征多项式为
4. 期望特征多项式
5. 比较$f(\lambda)$与$f^*(\lambda)$各对应项系数，……，得K

1-7-21-P-系统镇定问题

系统镇定，受控系统通过反馈使其极点均具有负实部，保证系统渐近稳定

若一个系统通过状态反馈能使其渐近稳定，则称系统是状态反馈能镇定的。

- 对系统采用状态反馈能镇定的充要条件是其不能控子系统是渐近稳定的
- 也不能控部分均为负实部

1-7-22-H-李雅普诺夫关于稳定性的定义

稳定性问题都是相对于某个平衡状态而言的。线性定常系统只存在原点这一个唯一的平衡点，对于其他系统可能存在多个平衡点，而不同平衡点可能表现出不同的稳定性

稳定性的几个定义

在定常系统下稳定和一致稳定是等价的

- 等幅振荡是李雅普诺夫意义下的稳定
- 线性定常系统如果是渐近稳定，那么他一定是大范围渐近稳定

状态稳定性和输出稳定性（针对线性定常系统）

- 状态稳定性（内部稳定性）：李雅普诺夫
- 输出稳定性（$BIBO$稳定，外部稳定性）：劳斯判据

当系统的传递函数没有零极点对消的现象，也就是系统是能控能观的，即矩阵A的特征值与系统传递函数的极点相同，此时系统的状态稳定性与其输出稳定性相一致。

1-7-23-H-李雅普诺夫第一法

一、 线性系统的稳定判据

线性定常系统$\sum:(A,b,c)$

- 平衡状态$x_e=0$渐近稳定的充要条件是矩阵A的所有特征值均具有负实部。
- 平衡状态$x_e=0$李雅普诺夫意义下稳定的充要条件是矩阵A的所有特征值均具有非正实部，且其具有零实部的特征值为其最小多项式的单根，也即在矩阵A的约旦标准型中，与A的零实部特征值相关联的约旦块均为一阶的。
  - 最小多项式求法

$$\varphi(s)=\frac{|sI-A|}{d(s)} \tag{53}$$

  其中$d(s)$是$adj(sI-A)$各元的最大公因子

二、 非线性系统的稳定性

设系统的状态方程为:

$$\dot{x}=f(x,t) \tag{54}$$

系统的线性化方程:

$$\Delta\dot{x}=A\Delta x \tag{55}$$

求雅可比矩阵

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{n\times n} \quad \longrightarrow \quad A=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_e} \tag{56}$$

平衡状态x_e渐近稳定的充要条件是矩阵A的所有特征值均具有负实部，如果至少有一个特征值的实部为零，需用其他方法判稳。

1-7-24-H-李雅普诺夫第二法

一、 基本原理

虚构的广义能量函数：

正定的标量函数$V(x)$也称之为李雅普诺夫函数

二、 预备知识

设$V(x)$是标量函数, 且在$x=0$处, 恒有$V(x)=0$,对于其他x,如果:

1. $V(x)>0$,则称$V(x)$为正定的, 例如: $V(x)=x_1^2+x_2^2$
2. $V(x)\geq 0$,则称$V(x)$为半正定 (或非负定) 的, 例如: $V(x)=(x_1+x_2)^2$
3. $V(x)<0$,则称$V(x)$为负定的, 例如: $V(x)=-\left(x_1^2+2x_2^2\right)$
4. $V(x)\leq 0$,则称$V(x)$为半负定（或非正定）的, 例如: $V(x)=-(x_1+x_2)^2$
5. $V(x)>0$或$V(x)<0$,则称$V(x)$为不定的, 例如: $V(x)=x_1+x_2$

三、 稳定判据

设系统的状态方程为：$\dot{x} = f(x)$

平衡状态为$x_e = 0$满足$f(x_e) = 0$

如果存在一个标量函数$V(x)$，它满足:

1. $V(x)$对所有x都具有连续的一阶偏导数。
2. $V(x)$是正定的。

则$V(x)$沿状态轨迹方向计算的时间导数$\dot{V}(x)$分别满足下列条件:

1. 稳定判据：若$\dot{V}(x)$为半负定，那么平衡状态x_e为在李雅普诺夫意义下稳定。
2. 渐近稳定判据：若$\dot{V}(x)$为负定;或者虽然$\dot{V}(x)$为半负定，但对任意初始状态$x(t_0) \neq 0$来说，除去$x = 0$外，对$x \neq 0, \dot{V}(x)$不恒为零。那么原点平衡状态是渐近稳定的。如果进一步还有当$||x|| \to \infty$时，$V(x) \to \infty$，则系统是大范围渐近稳定的。
3. 不稳定判据：若$\dot{V}(x)$为正定，那么平衡状态x_e是不稳定的。

1-7-25-H-李雅普诺夫第二法在线性系统中的应用

1. 二次型标量函数

2. 希尔维斯特判据

设Δ_i是P的各阶顺序主子式

1. 若$\Delta_i > 0(i = 1, 2, \cdots, n)$,则$P$为正定的, 同时$V(x)$也是正定的。_
2. 若$\Delta_i \begin{cases} > 0, i \text{ 为偶数} \\ < 0, i \text{ 为奇数} \end{cases}$则$P$为负定的, 同时$V(x)$为负定的。
3. 若$\Delta_i \begin{cases} \geq 0, i = 1, 2, \cdots, n-1 \\ = 0, i = n \end{cases}$，则$P$为半正定（非负定）的，同时$V(x)$为半正定（非负定）的。
4. 若$\Delta_i \begin{cases} \geq 0, i \text{ 为偶数} \\ \leq 0, i \text{ 为奇数} \\ = 0, i = n \end{cases}$则$P$为半负定（非正定）的, 同时$V(x)$为半负定（非正定）的。

3. 李雅普诺夫第二法在线性系统中的应用

李雅普诺夫方程为：

$$A^T P + PA = -Q \tag{57}$$

如果满足P正定，Q正定，则平衡状态就是渐近稳定的。

注意:

- 实际应用时，通常先取一个正定矩阵Q，常取$Q = I$，然后带入李雅普诺夫方程，判定P的正定性。
- 若$\dot{V}(x)$不恒为零，那么Q可取为半正定的。

解题步骤

1. 设P、Q
2. 代入李雅普诺夫方程求得P
3. 根据希尔维斯特判据知P正定，因而系统的平衡点是大范围渐近稳定的