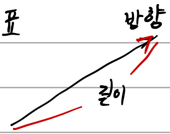
Chapter 1. Vectors, what even are they?

벡터 - 근본적인 선형대수의 구성조각

벡터를 바라 보는 세가지 관점

· 물리학 - 화살표



방향과 길이가 같으면 같다.
(2~3 차원 벡터)

· 컴퓨터 과학 - 순차 숫자 리스트 (숫자 쌍)

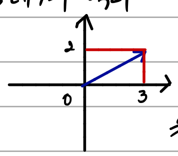
$$\left.\begin{bmatrix} 2{,}600\ ft^2 \\ \$300{,}000 \end{bmatrix}\right\}$$

2 dimentional
순서가 바뀌면 안된다

?
· 수학 - 두 벡터를 합한다는 개념에 맞고, 벡터에 숫자를 곱한다는 개념에 맞으면 모두 벡터이다.

자세한 예시가 궁금하긴 한데, 마지막 강의에 설명했다고 한다.

선형대수의 벡터 - 시작점이 원점인 화살표



$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

원점을 중심으로 하기 때문에
일대일 대응된다.

벡터 × 상수 ⇒ 길이의 변화 or 방향 뒤집기
스칼라 ⇒ 스케일링 (Scaling)
(Scalar)

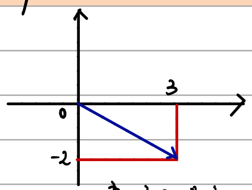
선형대수에서 숫자의 주요 역할 = Scaling
∴ 숫자 = Scalar

?

Chapter 1 8:32 ~ 8:45

공간상 화살표로 보면 좋은 수치 표현법이 되고,
숫자 리스트로 벡터를 보면 좋은 기하학적 해석을 제공한다는데,
화살표가 기하학적으로 우수하지 않을까?
수치로 이해하기 힘든 걸 화살표로 이해하면 편하고,
기하학적으로 이해하기 힘든 것을 수치로 보면
이해하기 편할 수 있다는 것을 말하는 것인가?

⇒ 데이터 과학자, 복잡한 수치데이터들을 벡터로 변환하여
공간에 나타내어 특징을 파악할 수 있다.
그래픽 전문가, 복잡한 그래픽 요소들을 숫자로 표현하여
컴퓨터로 동작시킬 수 있다.



$\begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix}$의 각 좌표값을 하나의 Scalar로 생각해 보자.

⇓

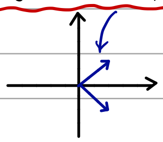
좌표계의 기저 (basis) { x축 단위 벡터 = $\hat{i}$ - hat, y축 단위벡터 = $\hat{j}$ - hat

Scaling

$\begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix} \Leftrightarrow (3)\hat{i} + (-2)\hat{j}$

Scalar

x축 y축 방향이 아닌 기저 벡터 선택 ⇒ 완전한 새 좌표계!



> 다른 "모든" 벡터들을 두 기저벡터에 적절한 두 개의 스칼라를 선택하여 표현할 수 있다.

두 벡터를 스케일링한 후 더하기

= 두 벡터의 선형 조합 (linear combination)

의미?

? 왜 그럴까?

어떤 벡터 = $\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$ (단, a, b는 실수)

basis = $\begin{bmatrix}m\\n\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}p\\q\end{bmatrix}$ (단, m, n, p, q는 실수)

$m+p=a$, $n+q=b$인 경우 존재 ⇒ 두 기저벡터로 모든 벡터를 표현가능.

m, n, p, q는 실수이므로 가정이 성립한다. ∴ 참.

좀 더 보완할 수 없을까?

수치로 벡터를 표현할 때, 우리는 암묵적으로 특정 basis 벡터를 선택한 것이다.

선형 조합시, 3가지 가능성 (2차원에서의 예시)
- 모든 가능한 2차원 벡터 표현
- 원점을 통과하는 직선만 표현
- 원점 (모두 zero 벡터)

→ 두 벡터 쌍의 조합으로 나타낼 수 있는 결과 벡터의 집합 ⇔ 두 벡터의 span

Vectors vs Points

벡터가 많은 경우 혼잡! ⇒ 끝 점을 하나의 점으로 표현

⇒ '점, 선, 면, 공간'을 이룰 수 있다

Points의 관점으로 2차원에서의 벡터의 Span은 {점, 선, 면} ⊂ Span

Span의 축소 없이 하나 이상의 벡터를 제외시켜도 되는 경우

⇔ 선형 종속 (linear dependent)

⇔ 벡터들 중 하나가 다른 벡터들의 선형 조합으로 표현 가능한 경우

다른 벡터의 Span에 포함되는 경우

이외의 경우 ⇔ 선형 독립 (linear independent)

✩ The basis of a vector space is a set of linearly independent vectors that span the full space.

Chapter 3. Linear transformations and matrices

* 선형 변환 (linear transformations)과 행렬과의 관계

functions - 특정 벡터를 다른 벡터로 바꾸는 변환

함수라는 말 대신에 변환을 택한 이유

: 변환은 입력-출력을 시각화 하는 특정 방법을 암시해주기 때문이다.

가능한 입력벡터들로
만들어진 출력 벡터들을
점으로 생각하며 움직임을 보면
공간의 뒤틀림을 관찰할 수 있다.

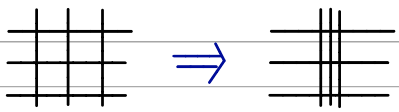
이렇게 공간의
변형(변환)으로
입-출력을
시각화 할 수 있다.

변환이 선형적이다

= 두 가지 속성을 의미한다.
- 모든 선들은 변환 이후에도 휘지 않고 직선이다.
- 원점 위치 고정

수평, 수직선이 유지되더라도, 대각선이 변형될 수 있다.

ex)



선형 변환 ⇒ 격자라인들이 여전히 평행하고 동일한 간격으로 있어야 한다.

어떻게 쉽게 파악할까?

⇒ i-hat · j-hat 벡터를 관찰하면 된다.

∴ 4개의 숫자로 선형 변환을 표현할 수 있다.

2x2 Matrix $\left[\begin{array}{c|c} \hat{i} & \hat{j} \end{array}\right]$ ⇒ 기저 벡터들의 변형 후 좌표값

i와 j가 i_t, j_t로 변환 된다면,

$\vec{v} = x\cdot i + y\cdot j$ 는

$\vec{v_t} = x\cdot i_t + y\cdot j_t$ 가 된다.

ex) $i_t = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ $j_t = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\vec{v_t} = x\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + y\cdot\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x+3y \\ -2x+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+3y \\ -2x \end{bmatrix}$$

⇕ (행렬 곱!)

$$\begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$