

- 3 (ENEM)** Ao iniciar suas atividades, um ascensorista registra tanto o número de pessoas que entram quanto o número de pessoas que saem do elevador em cada um dos andares do edifício onde ele trabalha. O quadro apresenta os registros do ascensorista durante a primeira subida do térreo, de onde partem ele e mais três pessoas, ao quinto andar do edifício.

Número de pessoas	Térreo	Andar				
		1º	2º	3º	4º	5º
que entram no elevador	4	4	1	2	2	2
que saem do elevador	0	3	1	2	0	6

Com base no quadro, qual é a moda do número de pessoas no elevador durante a subida do térreo ao quinto andar?

- a) 2 d) 5
b) 3 e) 6
c) 4

- 4 (ENEM)** Descargas atmosféricas, objetos estranhos e quedas de árvores, entre outros motivos, podem gerar interrupções na rede elétrica. Em certo município, um levantamento realizado pela companhia de fornecimento de energia relacionou, durante 30 dias, o número de interrupções na rede elétrica com o número de dias em que elas ocorreram.

Número de interrupções	Número de dias
0	5
1	6
2	6
3	10
4	3
Total	30

A moda e a média diária do número de interrupções são, respectivamente, iguais a

- a) 3 e 2,0.
b) 3 e 2,4.
c) 3 e 6,0.
d) 10 e 2,0.
e) 10 e 2,4.

Amplitude

As medidas de tendência central – **média**, **mediana** e **moda** – procuram representar um conjunto de dados com um único valor. Agora, vamos estudar outro tipo de medida, a **amplitude**.

Para escalar o time titular, um técnico de futebol de salão avalia dois jogadores para a posição de atacante. Inicialmente, ele observa o número de gols marcados pelos jogadores nas primeiras cinco partidas do campeonato.

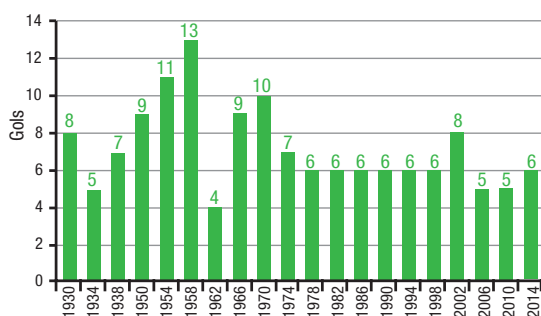
Jogador	Número de gols por partida				
Luiz	1	3	2	1	3
Hugo	0	4	1	3	2

- a) Determine a média de gols por partida de cada jogador.

Como ambos os jogadores estão com as mesmas condições físicas e com a mesma média de gols por partida, o técnico decidiu analisar outra medida.



- 2** O gráfico a seguir mostra as quantidades de gols marcados pelos artilheiros das Copas do Mundo de 1930 a 2014. Em 1942 e 1946, não ocorreu o campeonato em razão da Segunda Guerra Mundial.



Com relação ao conjunto das 20 quantidades de gols marcados pelos artilheiros das Copas do Mundo, calcule:

- a) a média;

- b) a amplitude.

- 3** Ao final do semestre, uma professora de um curso de informática analisou o desempenho de seus 10 alunos a partir da amplitude e da média das notas obtidas.

Estudante	Média	Amplitude
Maria	7	5
Pedro	5	6
Isaac	6	6
Carlos	6	8
Janaína	8	7
Beatriz	4	9
Fábio	8	6
José	7	2
Anna	6	4
Cristina	8	3

Qual estudante obteve desempenho mais regular no semestre?

- 4** Um centro meteorológico registrou as seguintes temperaturas médias ao longo de uma semana:

Dom	Seg	Ter	Qua	Qui	Sex	Sáb
24 °C	27 °C	26 °C	20 °C	19 °C	17 °C	23 °C

Qual foi a amplitude das temperaturas médias registradas?



Neste capítulo, estudamos as medidas de tendência central e a amplitude para auxiliar na interpretação de dados de uma pesquisa. Complete a tabela com as principais ideias a respeito de cada tópico.

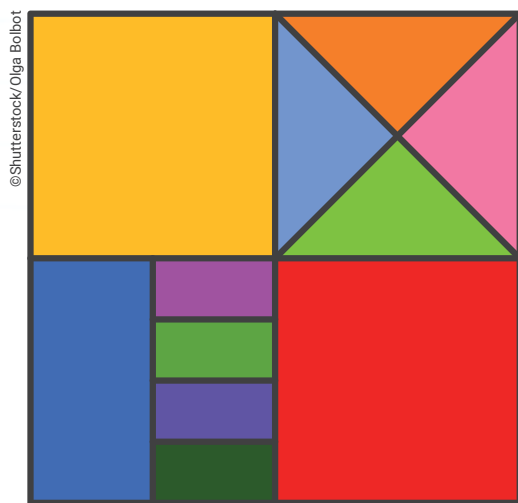
Média aritmética	Média aritmética ponderada	Mediana	Moda	Amplitude

OBJETIVOS

- ☐ Compreender o significado de congruência de polígonos.
- ☐ Aplicar os casos específicos de congruência de triângulos no cálculo de medidas desconhecidas.
- ☐ Identificar algumas propriedades de triângulos especiais.

Congruência de polígonos

Na imagem a seguir, é possível verificar uma das versões do tradicional jogo de Tangram.



a) Quais formas geométricas compõem essa versão do jogo?

b) Quais dessas formas parecem ser iguais entre si?

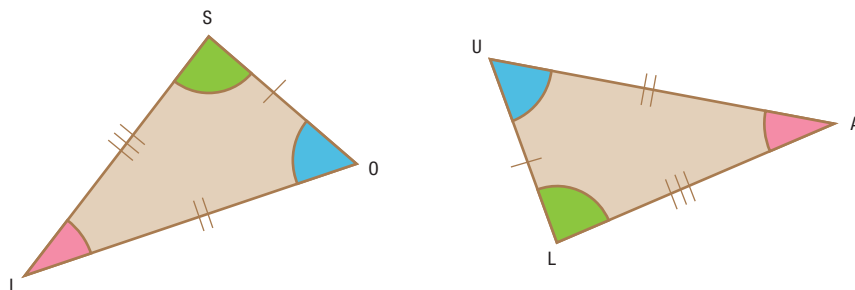
Dizemos que as figuras iguais que aparecem nesse jogo são congruentes entre si, pois têm a mesma forma e as mesmas medidas.

» Com auxílio de régua e transferidor, verifique e compare as medidas dos lados e dos ângulos dos polígonos que têm o mesmo formato.



Congruência de triângulos

Vamos estudar agora os triângulos congruentes, ou seja, triângulos que, quando sobrepostos, coincidem. Observe a seguir os triângulos **SOL** e **LUA**.



Note que as medidas dos lados do primeiro são iguais às medidas dos lados correspondentes do segundo. O mesmo ocorre para as medidas dos ângulos.

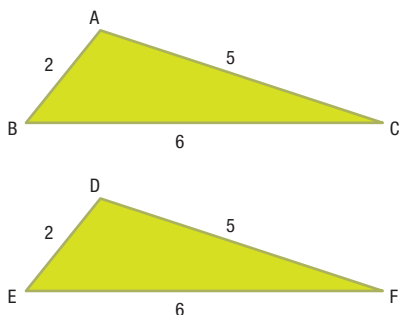
Portanto, os triângulos SOL e LUA são congruentes. Podemos indicar assim:

$$\triangle SOL \equiv \triangle LUA$$

Para verificar que os triângulos SOL e LUA são congruentes, comparamos seis medidas, dos três lados e dos três ângulos. Apesar de ser realmente necessário que essas medidas sejam iguais nos dois triângulos, veremos que não precisamos comparar todas elas, como fazemos para outros polígonos. Para isso, vamos estudar os chamados **casos de congruência** de dois triângulos.

1º caso: lado, lado, lado (LLL)

Quando dois triângulos têm os três lados respectivamente congruentes, eles são congruentes.



Veja que:

$$\overline{AB} \equiv \overline{DE} \text{ (lados congruentes)}$$

$$\overline{AC} \equiv \overline{DF} \text{ (lados congruentes)}$$

$$\overline{BC} \equiv \overline{EF} \text{ (lados congruentes)}$$

Portanto, $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$.

Com isso, já sabemos que os dois triângulos são congruentes ao verificarmos que os lados de um triângulo são congruentes aos lados de outro, não sendo necessário comparar os ângulos.

2º caso: lado, ângulo, lado (LAL)

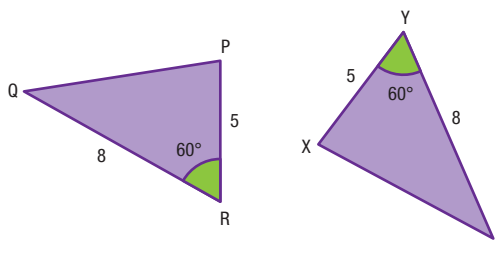
Quando dois triângulos têm dois lados e o ângulo formado por esses lados respectivamente congruentes, eles são congruentes.

$$\overline{PR} \equiv \overline{XY} \text{ (lados congruentes)}$$

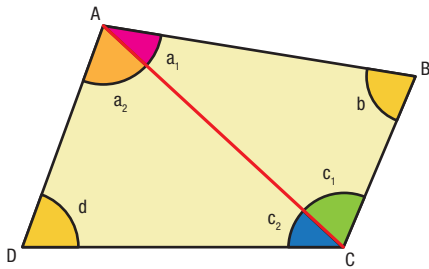
$$\hat{R} \equiv \hat{Y} \text{ (ângulos congruentes)}$$

$$\overline{RQ} \equiv \overline{YZ} \text{ (lados congruentes)}$$

Portanto, $\triangle PRQ \equiv \triangle XYZ$.



Podemos mostrar que, em qualquer quadrilátero, a soma das medidas dos ângulos internos é igual a 360° . Para isso, vamos decompor o quadrilátero ABCD da figura em dois triângulos, ABC e ADC.



Veja que o ângulo interno \hat{A} foi dividido em dois outros, o mesmo acontecendo com o ângulo interno \hat{C} . Assim:

$$\begin{aligned} \text{med}(\hat{A}) &= a_1 + a_2 & \text{med}(\hat{C}) &= c_1 + c_2 \\ \text{med}(\hat{B}) &= b & \text{med}(\hat{D}) &= d \end{aligned}$$

A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180° . Assim, no triângulo ABC, temos: $a_1 + b + c_1 = 180^\circ$

No triângulo ADC: $a_2 + d + c_2 = 180^\circ$

Podemos usar as duas igualdades anteriores para obter a soma das medidas dos ângulos internos do quadrilátero ABCD. Como $a_1 + b + c_1 = 180^\circ$ e $a_2 + d + c_2 = 180^\circ$, então:

$$a_1 + b + c_1 + a_2 + d + c_2 = 180^\circ + 180^\circ$$

Reorganizando as parcelas, temos:

$$(a_1 + a_2) + b + (c_1 + c_2) + d = 360^\circ$$

$$\text{med}(\hat{A}) + \text{med}(\hat{B}) + \text{med}(\hat{C}) + \text{med}(\hat{D}) = 360^\circ$$

A soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero é igual a 360° .

ATIVIDADES

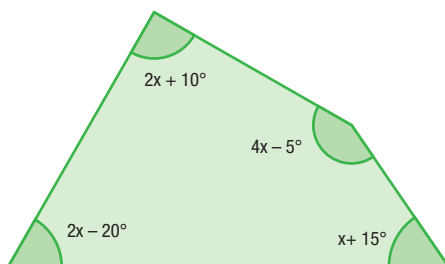
- 1 É possível construir um quadrilátero cujos ângulos internos medem 75° , 126° , 84° e 85° ? Justifique sua resposta.

- 2 Um quadrilátero tem três ângulos internos que medem 70° , 95° e 120° . Quanto mede seu quarto ângulo interno?

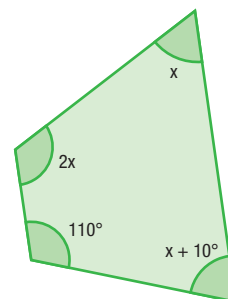
- 3 Em um quadrilátero, as medidas dos ângulos internos são dadas por $2x + 34^\circ$, x , $x + 20^\circ$ e $x + 26^\circ$. Determine as medidas dos quatro ângulos internos desse quadrilátero.

- 4 Em cada figura, calcule o valor de x .

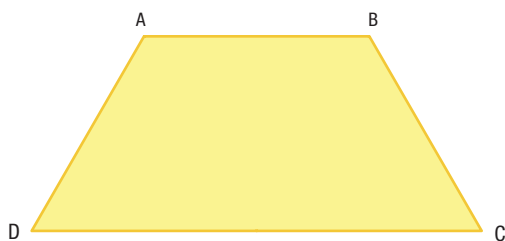
a)



b)

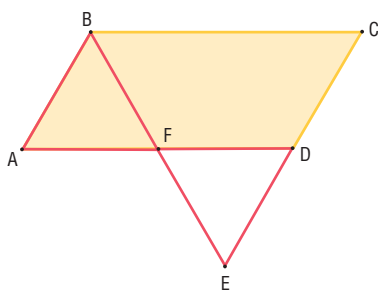


- 6** (OBMEP) No trapézio da figura dada, AB é paralelo a DC, $AD = AB = BC = 1$ cm e $DC = 2$ cm. Quanto mede o ângulo \widehat{DAC} ?



- a) 30° d) 90°
b) 45° e) 120°
c) 60°

- 7** Sendo ABCD um paralelogramo, $\triangle ABF$ e $\triangle DEF$ triângulos equiláteros congruentes e $BF = 12$ cm, determine o perímetro desse paralelogramo.



- a) 96 cm d) 60 cm
b) 84 cm e) 36 cm
c) 72 cm

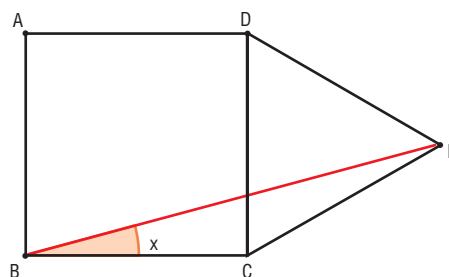
- 8** Em um paralelogramo, ao traçar uma de suas diagonais, obtêm-se dois triângulos retângulos isósceles congruentes entre si. Sobre o paralelogramo, afirma-se:

- I. É um quadrado.
II. É um losango.
III. É um trapézio isósceles.

Das afirmativas acima, estão corretas:

- a) Somente I e II.
b) Somente I e III.
c) Somente II e III.
d) Somente III.
e) Todas.

- 9** Na figura a seguir, ABCD é um quadrado e $\triangle CDE$ é um triângulo equilátero.



Indique a medida de x .

- a) 15°
b) 20°
c) 30°
d) 45°
e) 60°

- 10** A base média de um trapézio mede 20 cm e a base menor corresponde a $\frac{1}{4}$ da base maior. A base menor e a maior medem, respectivamente:

- a) 5 cm e 20 cm
b) 8 cm e 20 cm
c) 8 cm e 32 cm
d) 20 cm e 25 cm
e) 20 cm e 32 cm

