向量范数与矩阵范数的理解

要更好的理解范数，就要从函数、几何与矩阵的角度去理解。我们都知道，函数与几何图形往往是有对应的关系，这个很好想象，特别是在三维以下的空间内，函数是几何图像的数学概括，而几何图像是函数的高度形象化，比如一个函数对应几何空间上若干点组成的图形。但当函数与几何超出三维空间时，就难以获得较好的想象，于是就有了映射的概念，映射表达的就是一个集合通过某种关系转为另外一个集合。通常数学书是先说映射，然后再讨论函数，这是因为函数是映射的一个特例。为了更好的在数学上表达这种映射关系，（这里特指线性关系）于是就引进了矩阵。这里的矩阵就是表征上述空间映射的线性关系。而通过向量来表示上述映射中所说的这个集合，而我们通常所说的基，就是这个集合的最一般关系。于是，我们可以这样理解，一个集合（向量），通过一种映射关系（矩阵），得到另外一个集合（另外一个向量）。　　那么向量的范数，就是表示这个原有集合的大小。　　而矩阵的范数，就是表示这个变化过程的大小的一个度量。　　那么说到具体几几范数，其不过是定义不同，一个矩阵范数往往由一个向量范数引出，我们称之为算子范数，其物理意义都如我上述所述。
0范数，向量中非零元素的个数。1范数，为绝对值之和。2范数，就是通常意义上的模。

1、向量范数

1-范数：$\|x\|_1=\sum_{i=1}^{N}|x_i|$ ，即向量元素绝对值之和，matlab调用函数norm(x, 1) 。

2-范数：$\|x\|_2=(\sum_{i=1}^{N}|x_i|^2)^{\frac{1}{2}}$ ，Euclid范数（欧几里得范数，常用计算向量长度），即向量元素绝对值的平方和再开方，matlab调用函数norm(x, 2)。

∞-范数：$\|x\|_\infty=\max_i|x_i|$ ，即所有向量元素绝对值中的最大值，matlab调用函数norm(x, inf)。

-∞-范数：$\|x\|_{-\infty}=\min_i|x_i|$ ，即所有向量元素绝对值中的最小值，matlab调用函数norm(x, -inf)。

p-范数：$\|x\|_p=(\sum_{i=1}^{N}|x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$ ，即向量元素绝对值的p次方和的1/p次幂，matlab调用函数norm(x, p)。

2、矩阵范数

1-范数：$\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{m} |a_{i,j}|$，列和范数，即所有矩阵列向量绝对值之和的最大值，matlab调用函数norm(A, 1)。

2-范数：$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_1}, \lambda_1$为$A^T A$的最大特征值，谱范数，即A'A矩阵的最大特征值的开平方。matlab调用函数norm(x, 2)。

∞-范数：$\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$，行和范数，即所有矩阵行向量绝对值之和的最大值，matlab调用函数norm(A, inf)。

F-范数：$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$，Frobenius范数，即矩阵元素绝对值的平方和再开平方，matlab调用函数norm(A,’ fro ’)。