

记 x 为模型输入向量, y 为模型输出 (二分类)

$$P(Y=1|x) = p$$

$$P(Y=0|x) = 1-p$$

$$\text{故 } P(Y=k) = p^k (1-p)^{1-k} \quad (k=0 \text{ 或 } 1)$$

显然 $p \in [0, 1]$

而 sigmoid 函数接受 $w \cdot x$ 输入, 输出一个数 p

$$p \in [0, 1], \quad w \cdot x \in (-\infty, +\infty)$$

$$\text{记作: } p = \text{sigmoid}(w \cdot x)$$

$$\Rightarrow \ln \frac{p}{1-p} = \ln \frac{\text{sigmoid}(w \cdot x)}{1 - \text{sigmoid}(w \cdot x)} \in (-\infty, +\infty)$$

$$\Rightarrow \ln \frac{\text{sigmoid}(w \cdot x)}{1 - \text{sigmoid}(w \cdot x)} = w \cdot x$$

$$\text{则 } \frac{\text{sigmoid}(w \cdot x)}{1 - \text{sigmoid}(w \cdot x)} = \exp(w \cdot x)$$

$$\text{解得: } \text{sigmoid}(w \cdot x) = \frac{\exp(w \cdot x)}{1 + \exp(w \cdot x)}$$