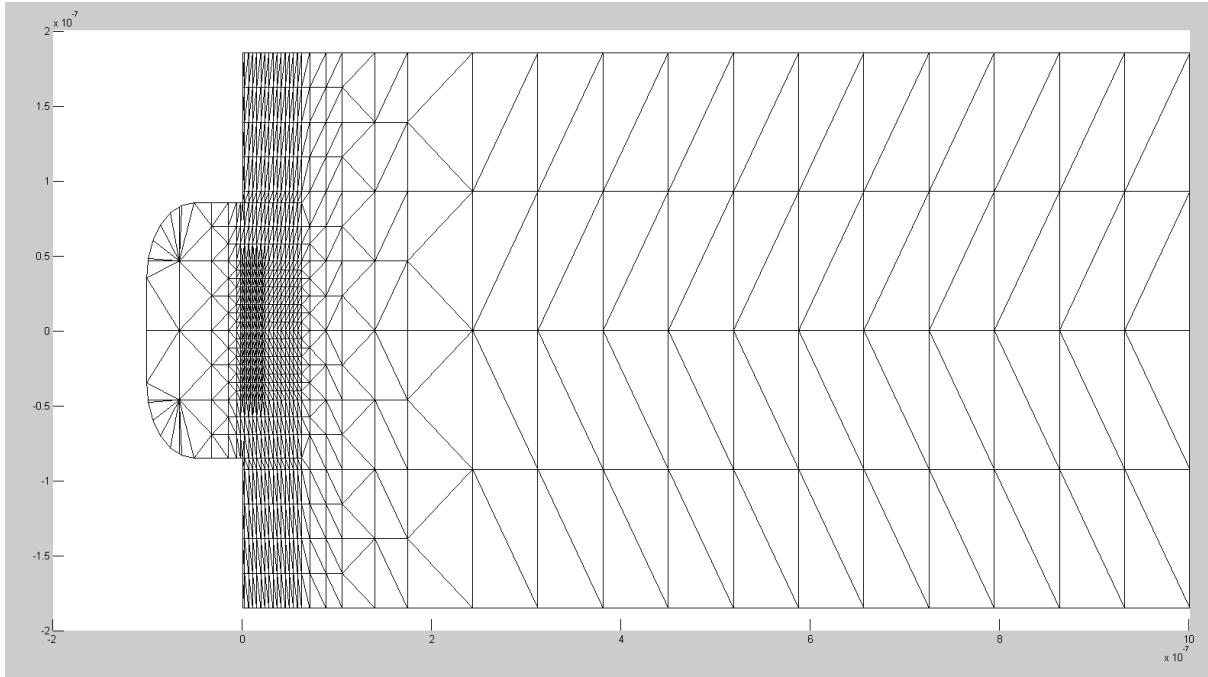
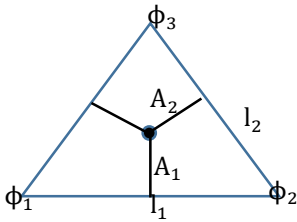


Problem #1



이번 과제는 위의 구조에 대해서 Laplace equation을 푸는 과제로, element의 형태가 삼각형이다. 각 vertex의 Voronoi cell을 control volume으로 해서 계산을 해주면 된다.



삼각형(element)에 대해서 외심이 있고, 외심으로부터 한 변까지의 거리가 vertex의 control volume의 일부라고 생각할 수 있다. 각 vertex의 좌표와 element를 구성하는 vertex에 대한 정보는 주어졌다. 따라서, element를 구성하는 vertex의 좌표로부터 세 변의 길이(l_i)를 구할 수 있고, 넓이(Area)를 구할 수 있다. 이로부터 외심원의 반경(R) 또한 얻을 수 있다. 이 정보들을 바탕으로 control volume의 정보인 A_i 를 구할 수 있게 된다. 이 정보들은 vertex의 좌표들과 삼각형에 대한 공식들로 다 구할 수 있는 값들이다. 구한 정보를 가지고 ϕ_2 의 vertex에서의 residue와 Jacobian은 아래와 같다.

$$\text{residue} = \frac{\phi_1 - \phi_2}{l_1} A_1 + \frac{\phi_3 - \phi_2}{l_2} A_2$$

$$\frac{\partial \text{res}}{\partial \phi_1} = \frac{A_1}{l_1}, \quad \frac{\partial \text{res}}{\partial \phi_2} = -\frac{A_1}{l_1} - \frac{A_2}{l_2}, \quad \frac{\partial \text{res}}{\partial \phi_3} = \frac{A_2}{l_2}$$

이런 방식으로 1번과 3번 vertex에서도 residue와 Jacobian을 구할 수 있다. 하지만, 이러한 방식은 예각, 직각 삼각형에서만 유효하다. 둔각삼각형에서는 외심이 삼각형 외부에 생기고, 다른 삼각형과 둔각삼각형이 만나는 부분에서 A_i 에 영향을 주게 된다. 둔각 삼각형의 둔각을 마주보는 변에서는 A_i 의 값이 0이되고, 다른 삼각형의 A_i 는 둔각 삼각형의 외심과 변 사이의 거리만큼 줄어들어야 한다. 따라서, element 별로 돌면서 둔각 삼각형에서는 A_i 를 음수로 사용하고, 다른 삼각형에서는 원래의 A_i 를 사용하여 전체적인 결과를 같게 하였다. 위의 삼각형의 notation을 사용하되, ϕ_3 를 둔각이라고 하면 ϕ_2 vertex에서의 residue와 Jacobian은 다음과 같다.

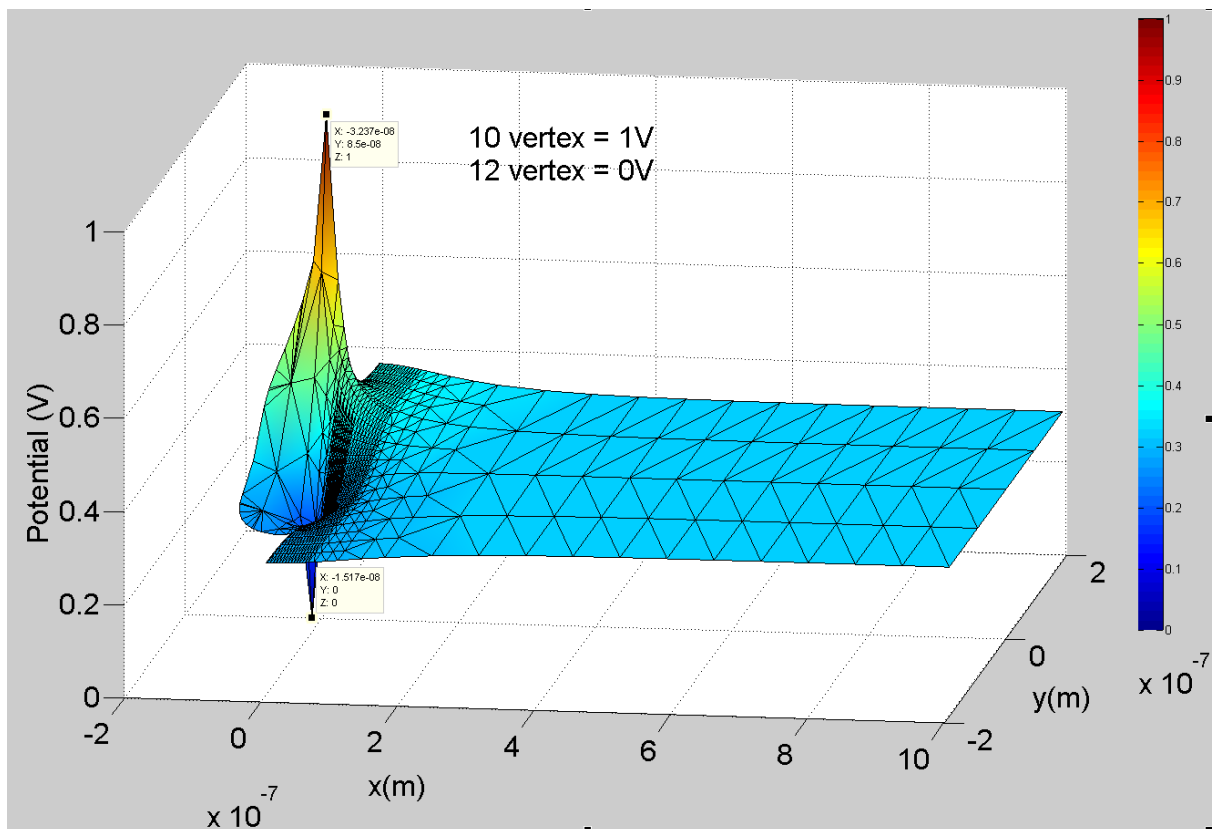
$$\text{residue} = -\frac{\phi_1 - \phi_2}{l_1}A_1 + \frac{\phi_3 - \phi_2}{l_2}A_2$$

$$\frac{\partial \text{res}}{\partial \phi_1} = -\frac{A_1}{l_1}, \quad \frac{\partial \text{res}}{\partial \phi_2} = \frac{A_1}{l_1} - \frac{A_2}{l_2}, \quad \frac{\partial \text{res}}{\partial \phi_3} = \frac{A_2}{l_2}$$

위의 과정을 통해서 Laplace equation을 풀 수 있다. 먼저, 각 변의 길이와 넓이, 외심의 반경, control area(A_i)를 구해준다. 그 다음, 둔각 삼각형을 판별한 뒤, 각각의 vertex에서 그에 따른 residue와 Jacobian을 구해서 문제를 풀면 된다. 이 경우는 선형 문제이므로, Newton-Raphson으로 1번만 푼 결과가 수렴된 결과이며, Laplace equation에 따른 식으로 바꿔주어도 같은 결과를 얻을 수 있다.

결과는 아래와 같다.

1.



```
>> vertex(10,:), vertex(12,:)
```

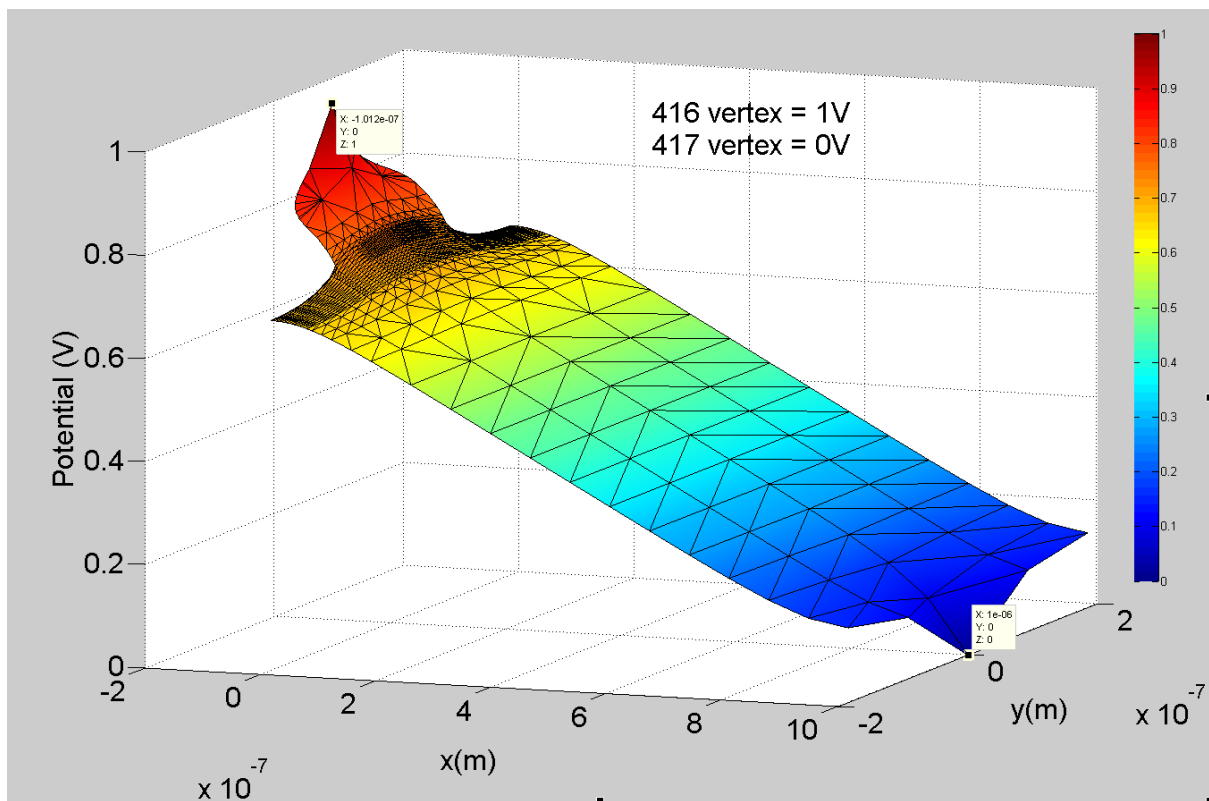
```
ans =
```

```
1.0e-07 *  
-0.3237  0.8500    0
```

```
ans =
```

```
1.0e-07 *  
-0.1517    0    0
```

2.



```
>> vertex(416,:), vertex(417,:)
```

```
ans =
```

```
1.0e-06 *  
-0.1012    0    0
```

```
ans =
```

```
1.0e-06 *  
1.0000    0    0
```