HW 3

EECS, 20191123, 이광운

Problem #1

문제 1의 경우는 수업에서 했던 예제와 큰 차이가 없다. Laplace equation을 Ax=b의 형태로 나타낸다 했을 때, A 행렬에서는 (1,1) = (N,N) = 1, (i,i) = -2, (i,i-1) = (i,i+1) = 1 의 값을 가지고 나머지 성분은 0 값을 가질 것이다. b 벡터의 경우 boundary condition이 다르기 때문에, (1,1) = 1, (N,1) = -1 의 값을 가지게 된다. 간단히 N=5인 경우에 대해서 식을 써보면 아래와 같다.

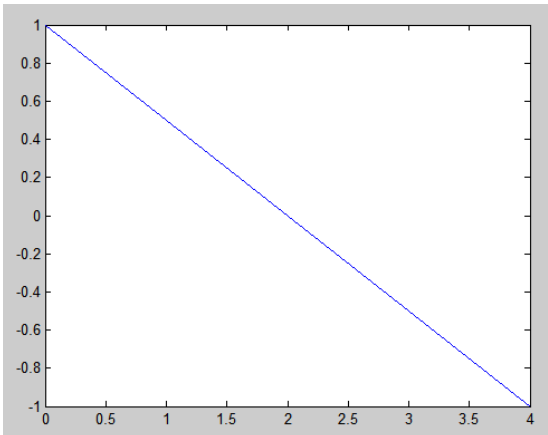
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

위 식을 풀어주게 되면 아래의 결과를 얻을 수 있다. 이 경우는 문제에서의 a가 4인 경우이다. (x 축이 Position, y 축은 potential)

```
A =

     1     0     0     0     0
     1    -2     1     0     0
     0     1    -2     1     0
     0     0     1    -2     1
     0     0     0     0     1
```

```
b =

     1
     0
     0
     0
    -1
```

```
x =

    1.0000
    0.5000
         0
   -0.5000
   -1.0000
```

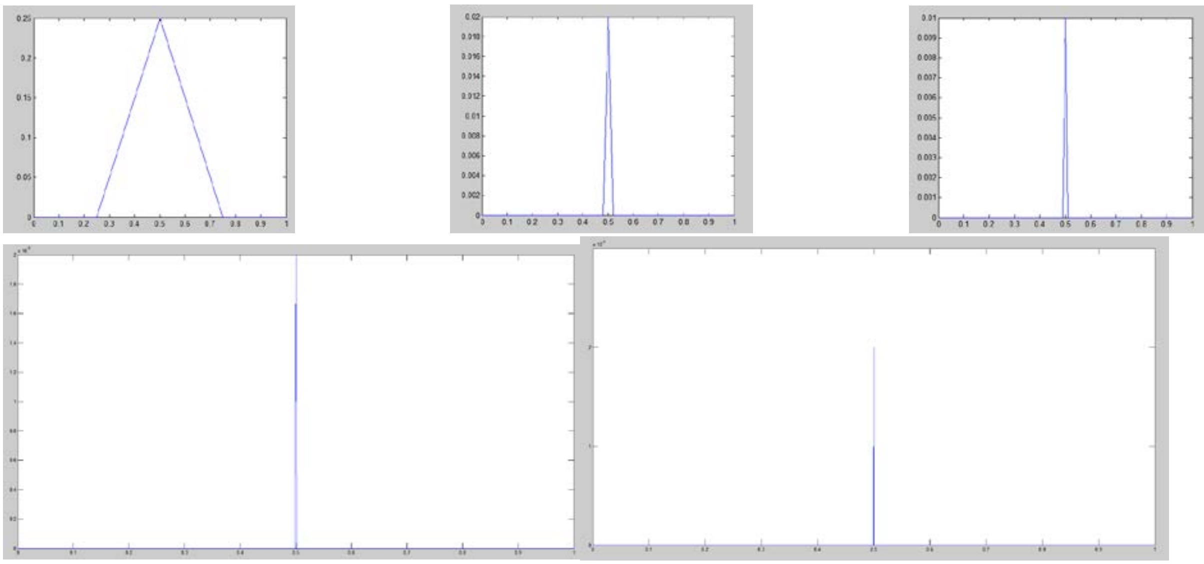


Problem #2

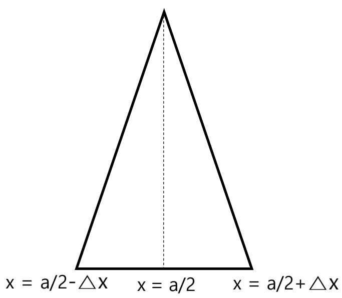
문제 2는 a/2 지점에서의 값이 필요하므로 N을 홀수로 사용하고 짝수인 경우에 대해서는 고려하지 않았다. Boundary condition이 x=0, x=a인 지점에서 0이므로, b 벡터의 꼴은

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \delta(x - \frac{a}{2}) \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

b 벡터를 연속하는 함수라 생각하고 N을 변화시키면서 그려보면 (N을 5, 51, 101, 501, 5001로 변화),



위의 결과처럼 델타 함수의 형태에 가까워지게 된다. 이러한 방식으로 생각했을 때, x = a/2를 기준으로 -△x ~ +△x인 구간에 아래 그림과 같은 삼각형 형태의 델타 함수를 생각할 수 있다. 이 삼각형의 넓이가 1이 되어야 하므로, 델타 함수의 크기는 1/△x가 된다.

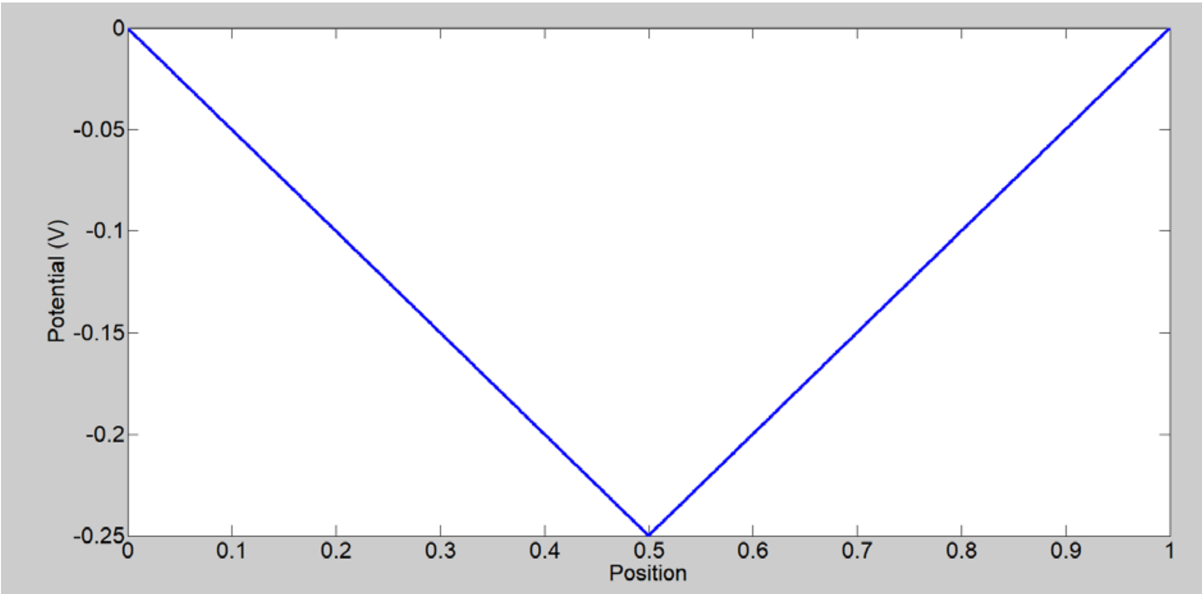


따라서 b 벡터의 ((N+1)/2, 1) 성분은 1/△x가 되어야 한다. 또한 A 행렬에서 이산화 과정에서 생

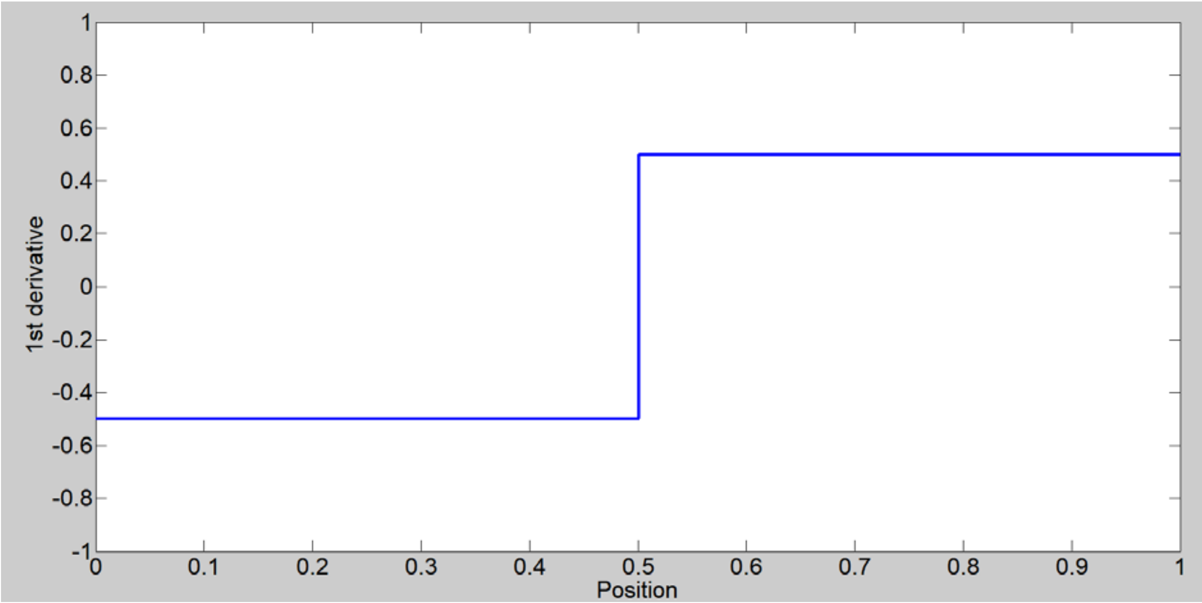
기는 $1/(\triangle x)^2$의 coefficient를 고려해줘야 하므로, 이 값의 역수를 b 벡터에 곱해야 한다. 이러한 과정으로 생기는 식을 정리해보면 아래와 같다. A 행렬은 문제 1의 경우와 같은 꼴의 값을 가진다.

$$\mathrm{A}\begin{bmatrix}\phi_1\\ \vdots\\ \phi_{\frac{N+1}{2}}\\ \vdots\\ \phi_N\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ \Delta x\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}$$

이 식을 풀어주게 되면 아래의 결과를 얻게 된다. 결과에서의 a는 1로 설정하였으며, x = a/2에서의 값은 -0.25 값을 가진다. (x 축이 Position, y 축은 potential)



비교를 위해 문제의 식을 analytic하게 풀어준다면, 한 번 적분을 했을 때는 델타 함수의 성질에 의해 스텝 함수가 나오게 된다. 이 때 x = a/2를 기준으로 대칭이 되는 것을 고려해주어야 한다. 결과는 아래와 같다. 이 결과에서 a = 1이며, 식으로 나타내면, $\frac{\mathrm{d}\phi(\mathrm{x})}{dx}=\begin{cases}-\frac{1}{2}, & 0<x\le\frac{a}{2}\\ \frac{1}{2}, & \frac{a}{2}<x<a\end{cases}$



여기서 한번 더 적분해주게 되면, potential을 얻을 수 있으며, 결과는 아래와 같다. 식으로 표현하면, $\phi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x, & 0 < x \leq \frac{a}{2} \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}a, & \frac{a}{2} < x < a \end{cases}$. 이 결과는 위의 numerical한 결과와 같다.