

HW2

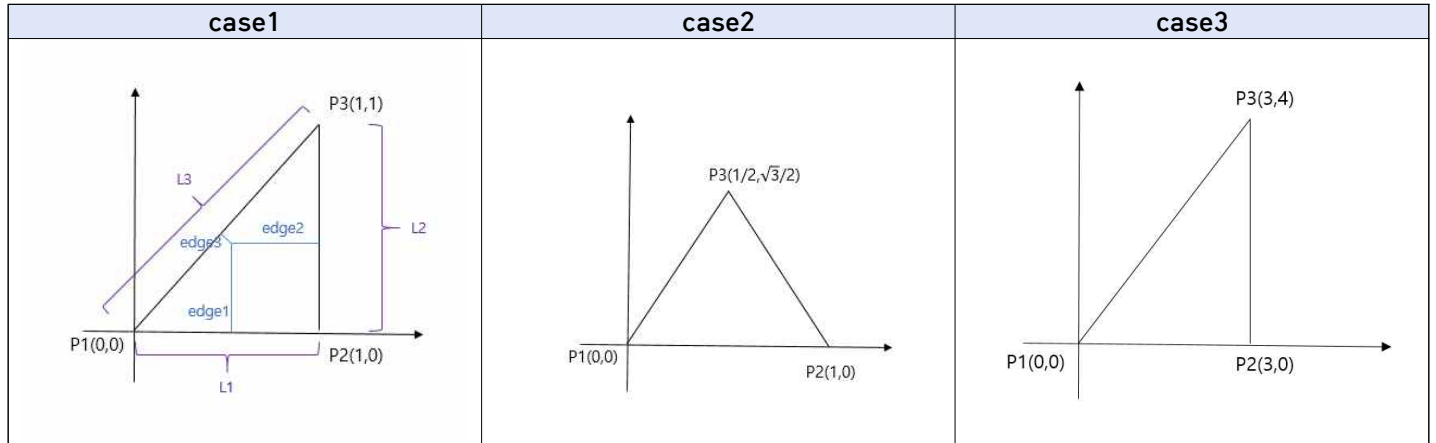
written by Seong-Min, Han (20221060)

Due: AM 08:00, March 10, 2022

Case1) (0, 0) (1,0) (1,1)

Case2) An equilateral triangle

Case3) (0,0) (3,0) (3,4)

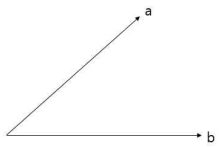


case1을 기준으로 결과값을 설명하겠습니다.

3X2 배열 P를 만들고 기본 case1, 2, 3에 대해서 좌표를 지정해주었습니다.

다음으로, 좌표 P1을 기준으로 P2, P3 사이의 벡터인 v21(P1과 P2), v31(P1과 P3)을 구해주었습니다.

각 vector의 norm값과 벡터의 내적 값을 구해



식 $Area = \frac{1}{2} \sqrt{|a|^2 |b|^2 - (a \cdot b)^2}$ 을 이용하여 계산할 수 있습니다.

v21	v31	norm(v21)	norm(v31)
[1, 0]	[0.6667, 1.5]	1	1.6415

$$area = \frac{1}{2} \sqrt{|norm21|^2 |norm31|^2 - (v21 \cdot v31)^2} = 0.75$$

각 vertex 사이의 거리의 경우 다음과 같이 나왔습니다.

L1 (1 - 2)	L2 (2 - 3)	L3 (3 - 1)
1	1.5266	1.6415

control volume의 접점은 세 좌표를 외접하는 삼각형의 외심이므로 위 삼각형을 외접하는 삼각형의 면적은

$$area = \frac{L_1 L_2 L_3}{4R}$$

입니다. 이를 정리하여 외접원의 반지름을 구하면 $R = \frac{L_1 L_2 L_3}{4 \times area} = 0.8408$ 입니다.

외심으로부터 각 변에 이르는 최단거리(edge)는 $edge = \sqrt{R^2 - (\frac{L}{2})^2}$ 로 control volume의 edge를 구했습니다.

edge(1)	edge(2)	edge(3)
0.6759	0.3415	0.1824

3X3 jac matrix, 3X1 res matrix, 3X1 phi matrix를 만들어 $\phi = jac^{-1} res$ 로 potential 값을 구했습니다.

조건에서 first and third vertex는 0과 1이므로 res matrix의 행은 3번째 값을 제외하고 0으로 설정했습니다.

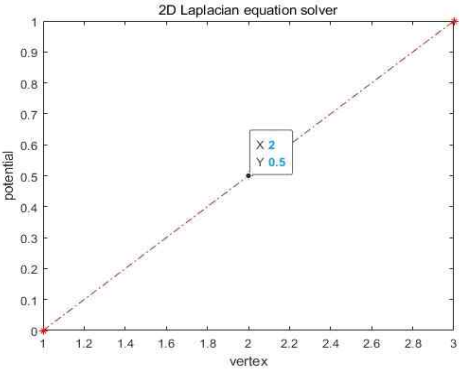
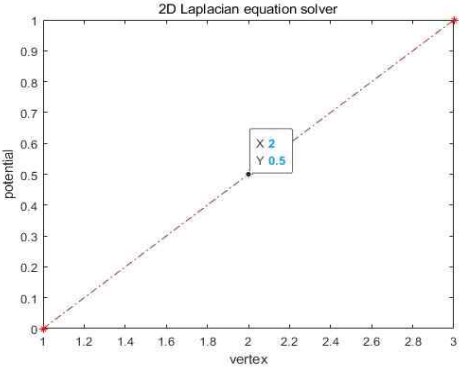
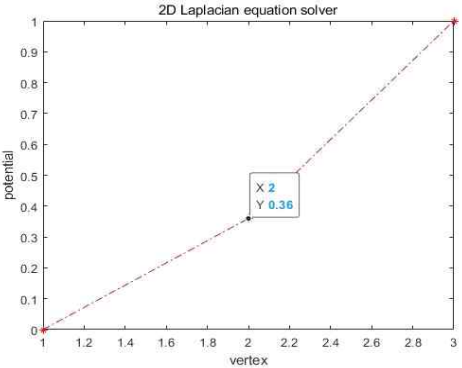
각 노드 사이의 관계를 파악해 jac matrix를 구성했습니다. 1, 3번째 행의 (i,i)은 1로 설정하고 2번째 행의 경우 2D Laplacian을 풀어 값을 대입했습니다.

2D Laplacian의 경우, $\int_{\Omega} \nabla \phi \cdot \hat{n} da = 0$ 로 나타낼 수 있으므로 다음과 같이 나타낼 수 있습니다.

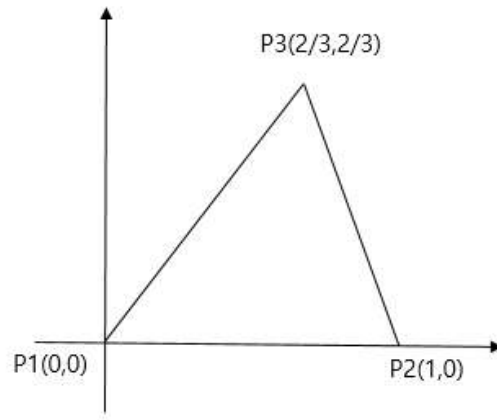
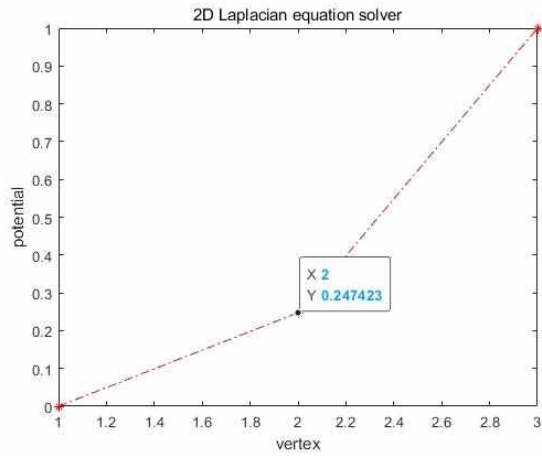
P1	$\frac{\phi_2 - \phi_1}{L_1} \cdot \frac{edge1}{2} + \frac{\phi_3 - \phi_1}{L_3} \cdot \frac{edge3}{2}$	
P2	$\frac{\phi_1 - \phi_2}{L_1} \cdot \frac{edge1}{2} + \frac{\phi_3 - \phi_2}{L_2} \cdot \frac{edge2}{2}$	$\frac{edge1}{2L_1} \phi_{i-1} - (\frac{edge1}{2L_1} + \frac{edge2}{2L_2}) \phi_i + \frac{edge2}{2L_2} \phi_{i+1}$
P3	$\frac{\phi_1 - \phi_3}{L_3} \cdot \frac{edge3}{2} + \frac{\phi_2 - \phi_3}{L_2} \cdot \frac{edge2}{2}$	

우리는 ϕ_2 의 값을 구해야 하므로 jac matrix 행의 P2에 해당하는 값을 (i-1,i), (i,i), (i+1,i) 자리에 대입합니다.

Result

Case1) (0, 0) (1,0) (1,1)	
	<p>case1 은 직각 이등변 삼각형 구조입니다. $\phi_2 = 0.5$가 나오는 것을 확인할 수 있습니다.</p> <p>직각 삼각형 구조의 경우 외심이 빗변 위에 위치하게 되며 P1과 P3 사이의 edge 부분(edge3)은 0이 됩니다.</p>
Case2) An equilateral triangle	
	<p>case2 는 정삼각형 구조입니다. 좌표는 [0,0], [1,0], [1/2, $\sqrt{3}/2$] 로 설정하였으며, $\phi_2 = 0.5$가 나오는 것을 확인할 수 있습니다. 정삼각형 구조의 경우 외심과 무게 중심이 일치하며, 각 L과 edge는 $L(i) \times \frac{\sqrt{3}}{6} = edge(i)$ 관계를 가집니다.</p>
Case3) (0.0) (3,0) (3,4)	
	<p>case3은 case1과 마찬가지로 직각 삼각형 구조입니다. 외심은 빗변에 위치하게 되며 빗변의 edge에 해당하는 edge3=0이고, $\phi_2 = 0.36$가 나오는 것을 확인할 수 있습니다.</p>

Case4) (0.0) (1,0) (2/3, 2/3)



case4은 예각 삼각형 구조입니다. $\phi_2 = 0.247423 V$ 가 나오는 것을 확인할 수 있습니다.