HW5

20175186 최지호

The Elmore Delay as a Bound for RC Trees with Generalized Input Signals의 요약

1. 논문의 주요 내용
2. 필요한 사전지식
3. 논문 elmore delay와 다른 분석법과의 대조
4. Elmore delay의 심도 깊은 이해와 수학적 전개

1. 논문의 주요 내용

다음의 주요 내용은 다음과 같았다.

RC Tree는 digital logic gate와 이들의 interconnect path를 modeling하는데 쓰인다. 그 중에도 Elmore delay는 단순하여 자주 사용되는 timing performance metric으로서 예측의 불확실성의 단점이 있으나 이 논문은 Elmore delay가 실제 RC tree response 50% delay의 absolute upper bound 이며 input signal step function 뿐만 아니라 이들의 현실적인 form인 saturated ramp형에 대해서도 성립하며 rise time이 길어질수록 실제 회로의 delay가 Elmore delay에 점근적으로 가까워짐을 수학적으로 증명하였다. 또한 lower bound에 대해서도 보였으나 이에 대해서는 Penfield and Rubinstein's bound가 더 tight하게 예측하였다.

2. 필요했던 사전지식

A. Signal and system

For LTI system

Let's define x(t), h(t), y(t) are signal, impulse response and output, respectively.

$\mathrm{x(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(\tau - t)d\tau$

for LTI system, $\delta(\mathrm{t}-\tau) \rightarrow h(t-\tau)$

so $\mathrm{x(t)}\delta(\mathrm{t}-\tau) \rightarrow x(t)h(t-\tau)$

finally, $\mathrm{y(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = x(t) * h(t)$

B. 통계학

Moment of function

n-th moment of a real-valued continuous function f(x) of a real vaiable about a value c

$\mu_n = \int_{-\infty}^{\infty} (x-c)^n f(x)\,dx$

For n = 1, c = 0 the value is mean,

For n = 2 , c = mean the value is variance

3. 논문 Elmore delay와 다른 분석법과의 대조

A. Elmore delay 개요

50% delay는 Fig. 3. 에 제시된 unit impulse response, h(t)에 대하여 적분 값이 1/2일때의 t 값, τ 로 정의된다. 이때 h(t)를 연속확률분포라 가정하여 $T_D = m1 = \int_0^{\infty} th(t)dt$ 즉, h(t)의 평균값인 m1 이 delay로 근사 된다고 Elmore가 제시했다. 이 논문에서는 이 h(t)가 balanced한 distribution이 아닌 실제로는 positive skewness를 가지기 때문에 mean ≥ median ≥ mode의 부등식과 50% delay의 정의에 따라서 실제로 delay는 median이므로 Elmore delay는 upper bound 임을 보였다.

B. Dominant pole을 이용한 분석법

RC network에서의 transfer function H(s)은 generally 다음과 같이 표현되는데

$$H(s) = \frac{1 + a_1 s + a_2 s^2 + \cdots + a_n s^n}{1 + b_1 s + b_2 s^2 + \cdots + b_n s^n}$$

이를 Taylor series를 통해서 다항식으로 expansion하고 Laplace transform의 정의인

H(s) = $\int_0^{\infty} h(t) e^{-st} dt$을 조작하면 다음과 같이 표현된다. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^{\infty} t^k \,\mathrm{h(t)dt}$

moment에 대한 식이 있으므로($\int_0^{\infty} t^k \,\mathrm{h(t)dt}$)앞서 A에서 $T_D = m1$를 활용하여 Taylor expansion을 통해 얻은 $(a_1 - b_1)$s 과의 연관성을 보았을 때, 결과적으로 dominant pole만을 고려하여 time constant를 얻었다. 다만 위의 방법은 실제 delay와의 어느 정도 관련은 있으나 bound는 제공하지 못하였다.

C. Penfield and Rubinstein's bound

이는 Elmore delay를 활용하여 더욱 tight한 bound를 제공해주나, 이 논문에서는 Elmore delay를 중점으로 다루었다.

4. Elmore delay의 심도 깊은 이해와 수학적 증명

먼저, Elmore delay가 upper bound를 제공한다는 것을 보이기 위해서 다음 lemmas를 통해 Theory를 유도하였다.

Lemma 1: The impulse response h(t) at any node of an RC tree is a unimodal and positive function.

Mathematical induction을 통해서 증명하였다.

다만 n = 1을 유도함에 있어서, Signal and system의 배경지식이 필요하였고, $V_i(t) = \delta(t)$ 이므로, R, C등으로 이루어진 system이므로 LTI system이라 생각을 하면 $\delta(t) \rightarrow h(t)$ impulse function에 대하여 다음과 같은 impulse response를 얻었고 결과는 다음과 같았다.

$$h_1(t) = -i_{in}(t)R_1 = \alpha\left(\sum_i k_i e^{-p_i t}\right)R_1$$

또한 n = k 와 n = K + 1을 유도함에 있어서, frequency domain에서의 곱은 time domain에서의 convolution이고 two unimodal positive function의 convolution 연산 또한 unimodal함을 이용하였다.

Lemma 2: For the impulse response h(t) at any node of an RC tree, the coefficient of skewness γ Is always nonnegative

Theorem: For the impulse response h(t) at any node in an RC tree mean ≥ median ≥ mode

귀류법을 통해서 증명하였다.

Lower bound on delay

Corollary 1: A lower bound on the 50% delay for an RC tree is given by $\max(\mu - \sigma, 0)$

Where μ is mean, $\sigma = \sqrt{\mu_2}$

여기에서 impulse response h(t)를 $H(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\zeta)d\zeta$라 정의하면 다음과 같은 부등식이 성립하고 $H(\tau) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + \tau^2}$ 이때 $\tau = -\sigma$일 때, $H(-\sigma) \leq \frac{1}{2}$ 가 된다. 이를 통계적인 관점에서 바라 보았을 때

$\mu - \sigma \leq \text{median}$, 즉 delay의 lower bound가 $\mu - \sigma$로 표현된다. 다만 signal and system의 관점에서 RC tree system은 causal system이므로 median은 0이상이어야 하므로 최종적으로 $\max(\mu - \sigma, 0)$ 이다.

The Elmore delay upper bound

Corollary 2: For an RC circuit with a monotonically increasing, piecewise-smooth input $V_i(t)$ such that $V_i'(t)$ is a unimodal function, $\mathrm{Mode} \leq \mathrm{Median} \leq \mathrm{Mean}$ holds for the output response $V_o(t)$

이 부분에서 드디어 Elmore delay가 upper bound 임을 완성한다. 앞서 Theorem: For the impulse response h(t) at any node in an RC tree mean ≥ median ≥ mode 이였고, signal and system에서 LTI system은 $\mathrm{y(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)h(\tau - t)d\tau = x(t) * h(t)$ 이다.

Laplace transform과 moment's property under convolution 을 이용하여 최종적으로 $V_o'(t)$ 의 skewness가 positive임을 유도하여 $\mathrm{Mode} \leq \mathrm{Median} \leq \mathrm{Mean}$을 보였다.

Corollary 3: For a finite sized RC circuit with a monotonically increasing piecewise-smooth input $V_i(t)$ such that $V_i'(t)$ is a symmetric function, as the rise time of the input signal, $\mathrm{t}_r \rightarrow \infty$, the 50% delay of the output response $\rightarrow T_D$

마지막으로 rise time이 길수록 50% delay가 Elmore delay에 점진적으로 수렴함을 보였다.

결과적으로 다음과 같은 결과를 table에서 볼 수 있었는데 driving point에서 멀수록, rise time이 길수록 50% delay가 Elmore delay에 점진적으로 수렴함을 실제 data로 볼 수 있었다.