Aula 8 - Integração por Partes

Prof. Dr. Edward Landi Tonucci

11 de abril de 2022

Integração por Partes

Cada regra de derivação tem outra correspondente de integração. Por exemplo, a Regra de Substituição para a integração corresponde à Regra da Cadeia para a derivação. Aquela que corresponde à Regra do Produto para a derivação é chamada *integração por partes*.

A Regra do Produto afirma que se f e g forem funções deriváveis, então

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

Na notação para integrais indefinidas, essa equação se torna

$$\int [f(x)g'(x) + g(x)f'(x)]\,dx = f(x)g(x)$$

ou

$$\int f(x)g'(x)\,dx + \int g(x)f'(x)\,dx = f(x)g(x)$$

Podemos rearranjar essa equação como

1

$$\boxed{\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\,dx}$$

A Fórmula 1 é chamada **fórmula para integração por partes**. Talvez seja mais fácil lembrar com a seguinte notação. Sejam $u = f(x)$ e $v = g(x)$. Então as diferenciais são $du = f'(x)\,dx$ e $dv = g'(x)\,dx$ e, assim, pela Regra da Substituição, a fórmula para a integração por partes torna-se

2

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}$$

EXEMPLO 1 Encontre $\int x \operatorname{sen} x \, dx$.

SOLUÇÃO USANDO A FÓRMULA 1 Suponha que escolhamos $f(x) = x$ e $g'(x) = \operatorname{sen} x$. Então $f'(x) = 1$ e $g(x) = -\cos x$. (Para g, podemos escolher qualquer antiderivada de g'.) Assim, utilizando a Fórmula 1, temos

$$\begin{aligned}
\int x \operatorname{sen} x \, dx &= f(x)g(x) - \int g(x)f'(x) \, dx \\
&= x(-\cos x) - \int (-\cos x) \, dx \\
&= -x \cos x + \int \cos x \, dx \\
&= -x \cos x + \operatorname{sen} x + C
\end{aligned}$$

É aconselhável verificar a resposta derivando-a. Se fizermos assim, obteremos $x \operatorname{sen} x$, como esperado.

SOLUÇÃO USANDO A FÓRMULA 2 Sejam

$$u = x \qquad dv = \operatorname{sen} x\, dx$$

Então, $$du = dx \qquad v = -\cos x$$

de modo que

$$\int x \operatorname{sen} x\, dx = \int \underbrace{x}_{u}\, \underbrace{\operatorname{sen} x\, dx}_{dv} = \underbrace{x}_{u}\, \underbrace{(-\cos x)}_{v} - \int \underbrace{(-\cos x)}_{v}\, \underbrace{dx}_{du}$$

$$= -x\cos x + \int \cos x\, dx$$

$$= -x\cos x + \operatorname{sen} x + C$$

É útil usar o padrão:

$$u = \square \qquad dv = \square$$
$$du = \square \qquad v = \square$$

OBSERVAÇÃO Nosso objetivo ao usarmos a integração por partes é obter uma integral mais simples que aquela de partida. Assim, no Exemplo 1, iniciamos com $\int x \operatorname{sen} x \, dx$ e a expressamos em termos da integral mais simples $\int \cos x \, dx$. Se tivéssemos escolhido $u = \operatorname{sen} x$ e $dv = x \, dx$, então $du = \cos x \, dx$ e $v = x^2/2$ e, assim, a integração por partes daria

$$\int x \operatorname{sen} x\, dx = (\operatorname{sen} x)\,\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\int x^2 \cos x\, dx$$

Embora isso seja verdadeiro, $\int x^2 \cos x\, dx$ é uma integral mais difícil que aquela com a qual começamos. Em geral, ao decidirmos sobre uma escolha para u e dv, geralmente tentamos escolher $u = f(x)$ como uma função que se torna mais simples quando derivada (ou ao menos não mais complicada), contanto que $dv = g'(x)\, dx$ possa ser prontamente integrada para fornecer v.

EXEMPLO 2 Avalie $\int \ln x \, dx$.

SOLUÇÃO Aqui não temos muita escolha para u e dv. Considere

$$u = \ln x \qquad dv = dx$$

Então,
$$du = \frac{1}{x}\,dx \qquad v = x$$

Integrando por partes, temos

$$\begin{aligned}\int \ln x\,dx &= x\ln x - \int x\,\frac{dx}{x}\\ &= x\ln x - \int dx\\ &= x\ln x - x + C\end{aligned}$$

A integração por partes é eficaz neste exemplo porque a derivada da função $f(x) = \ln x$ é mais simples que f.

EXEMPLO 3 Encontre $\int t^2 e^t \, dt$.

SOLUÇÃO Observe que t^2 se torna mais simples quando derivada (enquanto e^t permanece inalterada quando a derivamos ou a integramos). Assim, escolhemos

$$u = t^2 \qquad dv = e^t\,dt$$

Então,
$$du = 2t\,dt \qquad v = e^t$$

A integração por partes resulta em

3
$$\int t^2 e^t\,dt = t^2 e^t - 2\int t e^t\,dt$$

A integral que obtivemos, $\int te^t\,dt$, é mais simples que a integral original, mas ainda não é óbvia. Portanto, usamos a integração por partes mais uma vez, mas agora com $u = t$ e $dv = e^t\,dt$. Então, $du = dt$, $v = e^t$ e

$$\int te^t\,dt = te^t - \int e^t\,dt$$

$$= te^t - e^t + C$$

Colocando isso na Equação 3, obtemos

$$\begin{aligned}\int t^2 e^t\,dt &= t^2 e^t - 2\int te^t\,dt \\ &= t^2 e^t - 2(te^t - e^t + C) \\ &= t^2 e^t - 2te^t + 2e^t + C_1 \qquad \text{onde } C_1 = -2C\end{aligned}$$

EXEMPLO 4 Calcule $\int e^x \operatorname{sen} x \, dx$.

SOLUÇÃO Nem e^x nem sen x tornam-se mais simples quando derivadas, mas tentamos escolher $u = e^x$ e $dv = \text{sen}\, x\, dx$ de qualquer maneira. Então, $du = e^x\, dx$ e $v = -\cos x$. Assim, a integração por partes resulta em

$$\boxed{4} \qquad \int e^x \operatorname{sen} x \, dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx$$

A integral que obtivemos, $\int e^x \cos x\, dx$, não é mais simples que a integral original, mas pelo menos não é mais complicada. Como tivemos sucesso no exemplo anterior integrando por partes duas vezes, insistiremos e integraremos por partes novamente. Dessa vez usaremos $u = e^x$ e $dv = \cos x\, dx$. Então $du = e^x\, dx$, $v = \operatorname{sen} x$, e

$$\boxed{5} \qquad \int e^x \cos x\, dx = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x\, dx$$

A princípio, parece que não fizemos nada, já que chegamos a $\int e^x \operatorname{sen} x\, dx$,, isto é, onde começamos. No entanto, se substituirmos a expressão por $\int e^x \cos x\, dx$ da Equação 5 na Equação 4, obtemos

$$\int e^x \operatorname{sen} x\, dx = -e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x\, dx$$

$$2\int e^x \operatorname{sen} x\, dx = -e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x$$

Dividindo por 2 e adicionando a constante de integração, temos

$$\int e^x \operatorname{sen} x\, dx = \tfrac{1}{2}e^x(\operatorname{sen} x - \cos x) + C$$

Se combinarmos a fórmula de integração por partes com a Parte 2 do Teorema Fundamental do Cálculo, poderemos calcular integrais definidas por partes. Calculando ambos os lados da Fórmula 1 entre a e b, supondo f' e g' contínuas, e usando o Teorema Fundamental do Cálculo, obtemos

6

$$\boxed{\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)\,dx}$$

EXEMPLO 5 Calcule $\int_0^1 \operatorname{tg}^{-1} x \, dx$.

SOLUÇÃO Seja

$$u = \operatorname{tg}^{-1} x \qquad dv = dx$$

Então,

$$du = \frac{dx}{1 + x^2} \qquad v = x$$

Assim, a Fórmula 6 resulta em

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \operatorname{tg}^{-1} x \, dx &= x \operatorname{tg}^{-1} x \Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1 + x^2} \, dx \\
&= 1 \cdot \operatorname{tg}^{-1} 1 - 0 \cdot \operatorname{tg}^{-1} 0 - \int_0^1 \frac{x}{1 + x^2} \, dx \\
&= \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{x}{1 + x^2} \, dx
\end{aligned}$$

Para calcularmos essa integral, usamos a substituição $t = 1 + x^2$ (já que u tem outro significado neste exemplo). Então $dt = 2x\,dx$ e, assim, $x\,dx = \frac{1}{2}\,dt$. Quando $x = 0$, $t = 1$; quando $x = 1$, $t = 2$; portanto

$$\int_0^1 \frac{x}{1 + x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t|\Big]_1^2$$

$$= \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln 1) = \frac{1}{2}\ln 2$$

Logo,
$$\int_0^1 \operatorname{tg}^{-1} x \, dx = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{x}{1 + x^2} \, dx = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$$

EXEMPLO 6 Demonstre a fórmula de redução

$$\boxed{7} \qquad \int \operatorname{sen}^n x\,dx = -\frac{1}{n}\cos x \operatorname{sen}^{n-1} x + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} x\,dx$$

onde $n \geqslant 2$ é um inteiro.

SOLUÇÃO Seja

$$u = \operatorname{sen}^{n-1}x \qquad dv = \operatorname{sen} x\, dx$$

Então,

$$du = (n-1)\operatorname{sen}^{n-2}x \cos x\, dx \qquad v = -\cos x$$

de modo que a integração por partes resulta em

$$\int \operatorname{sen}^n x\, dx = -\cos x \operatorname{sen}^{n-1}x + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2}x \cos^2 x\, dx$$

Uma vez que $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$, temos

$$\int \operatorname{sen}^n x\, dx = -\cos x \operatorname{sen}^{n-1} x + (n-1) \int \operatorname{sen}^{n-2} x\, dx - (n-1) \int \operatorname{sen}^n x\, dx$$

Como no Exemplo 4, nessa equação isolamos a integral desejada, levando o último termo do lado direito para o lado esquerdo. Então, temos

$$n \int \operatorname{sen}^n x \, dx = -\cos x \operatorname{sen}^{n-1} x + (n-1) \int \operatorname{sen}^{n-2} x \, dx$$

ou

$$\int \operatorname{sen}^n x \, dx = -\frac{1}{n} \cos x \operatorname{sen}^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \int \operatorname{sen}^{n-2} x \, dx$$

A fórmula de redução $\boxed{7}$ é útil porque usando-a repetidas vezes podemos eventualmente expressar $\int \operatorname{sen}^n x \, dx$ em termos de $\int \operatorname{sen} x \, dx$ (se n for ímpar) ou $\int (\operatorname{sen} x)^0 \, dx = \int dx$ (se n for par).