Aula 7 - Aplicação das Integrais: Volume

Prof. Dr. Edward Landi Tonucci

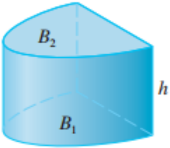
30 de março de 2022

6.2 Volumes

Na tentativa de encontrar o volume de um sólido, nos deparamos com o mesmo tipo de problema que para calcular áreas. Temos uma ideia intuitiva do significado de volume, mas devemos torná-la precisa usando o cálculo para chegar à definição exata de volume.

Começamos com um tipo simples de sólido chamado **cilindro** (ou, mais precisamente, um *cilindro reto*). Como ilustrado na Figura 1(a), um cilindro é delimitado por uma região plana B_1, denominada **base**, e uma região congruente B_2 em um plano paralelo. O cilindro consiste em todos os pontos nos segmentos de reta perpendiculares à base que unem B_1 a B_2. Se a área da base é A e a altura do cilindro (distância de B_1 para B_2) é h, então, o volume V do cilindro é definido como

$$V = Ah$$

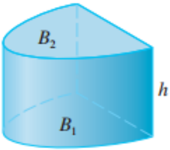


(a) Cilindro $V = Ah$

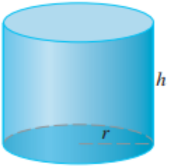
Começamos com um tipo simples de sólido chamado **cilindro** (ou, mais precisamente, um *cilindro reto*). Como ilustrado na Figura 1(a), um cilindro é delimitado por uma região plana B_1, denominada **base**, e uma região congruente B_2 em um plano paralelo. O cilindro consiste em todos os pontos nos segmentos de reta perpendiculares à base que unem B_1 a B_2. Se a área da base é A e a altura do cilindro (distância de B_1 para B_2) é h, então, o volume V do cilindro é definido como

$$V = Ah$$

Em particular, se a base é um círculo com raio r, então o cilindro é um cilindro circular com o volume $V = \pi r^2 h$



(a) Cilindro $V = Ah$

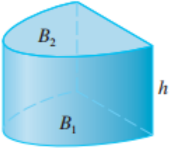


(b) Cilindro circular $V = \pi r^2 h$

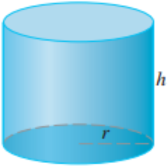
Começamos com um tipo simples de sólido chamado **cilindro** (ou, mais precisamente, um *cilindro reto*). Como ilustrado na Figura 1(a), um cilindro é delimitado por uma região plana B_1, denominada **base**, e uma região congruente B_2 em um plano paralelo. O cilindro consiste em todos os pontos nos segmentos de reta perpendiculares à base que unem B_1 a B_2. Se a área da base é A e a altura do cilindro (distância de B_1 para B_2) é h, então, o volume V do cilindro é definido como

$$V = Ah$$

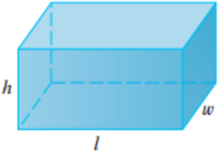
Em particular, se a base é um círculo com raio r, então o cilindro é um cilindro circular com o volume $V = \pi r^2 h$ [veja a Figura 1(b)], e se a base é um retângulo com comprimento l e largura w, então o cilindro é uma caixa retangular (também chamado *paralelepípedo retangular*) com o volume $V = lwh$ [veja a Figura 1(c)].



(a) Cilindro $V = Ah$



(b) Cilindro circular $V = \pi r^2 h$



(c) Caixa retangular $V = lwh$

Para um sólido S que não é um cilindro, nós primeiro “cortamos” S em pedaços e aproximamos cada parte por um cilindro. Estimamos o volume de S adicionando os volumes dos cilindros. Chegamos ao volume exato de S através de um processo de limite em que o número de partes torna-se grande.

Começamos interceptando S com um plano e obtendo uma região plana que é chamada **secção transversal** de S. Seja $A(x)$ a área da secção transversal de S no plano P_x perpendicular ao eixo x e passando pelo ponto x, onde $a \leqslant x \leqslant b$. (Veja a Figura 2. Pense em fatiar S com uma faca passando por x e calcule a área da fatia.) A área da secção transversal $A(x)$ irá variar quando x aumenta de a para b.

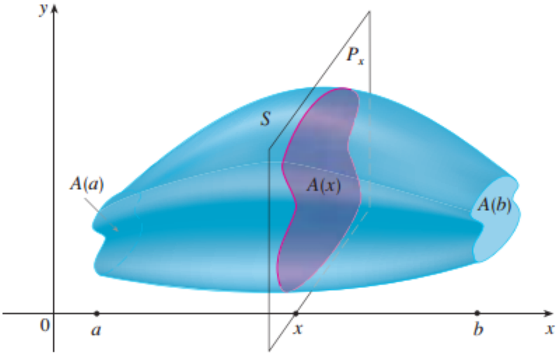
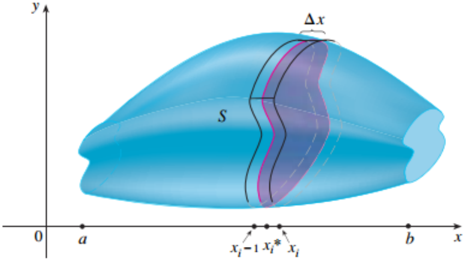
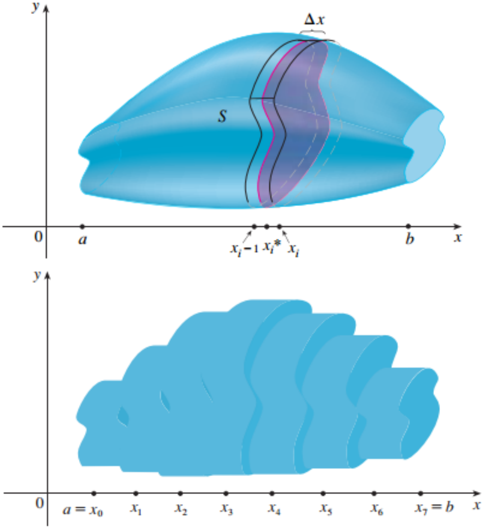


FIGURA 2

Vamos dividir S em n "fatias" de larguras iguais a Δx usando os planos $P_{x_1}, P_{x_2}, \ldots$ para fatiar o sólido. (Pense em fatiar um pedaço de pão.) Se escolhermos pontos amostrais x_i^* em $[x_{i-1}, x_i]$, poderemos aproximar a i-ésima fatia S_i (a parte de S que está entre os planos $P_{x_{i-1}}$ e P_{x_i}) a um cilindro com área da base $A(x_i^*)$ e "altura" Δx. (Veja a Figura 3.)



Vamos dividir S em n "fatias" de larguras iguais a Δx usando os planos $P_{x_1}, P_{x_2}, \ldots$ para fatiar o sólido. (Pense em fatiar um pedaço de pão.) Se escolhermos pontos amostrais x_i^* em $[x_{i-1}, x_i]$, poderemos aproximar a i-ésima fatia S_i (a parte de S que está entre os planos $P_{x_{i-1}}$ e P_{x_i}) a um cilindro com área da base $A(x_i^*)$ e "altura" Δx. (Veja a Figura 3.)



O volume desse cilindro é $A(x_i^*)\,\Delta x$, assim, uma aproximação para a nossa concepção intuitiva do volume da i-ésima fatia S_i é

$$V(S_i) \approx A(x_i^*)\,\Delta x$$

O volume desse cilindro é $A(x_i^*)\,\Delta x$, assim, uma aproximação para a nossa concepção intuitiva do volume da i-ésima fatia S_i é

$$V(S_i) \approx A(x_i^*)\,\Delta x$$

Adicionando os volumes dessas fatias, obtemos uma aproximação para o volume total (isto é, o que pensamos intuitivamente como volume):

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} A(x_i^*)\,\Delta x$$

O volume desse cilindro é $A(x_i^*)\,\Delta x$, assim, uma aproximação para a nossa concepção intuitiva do volume da i-ésima fatia S_i é

$$V(S_i) \approx A(x_i^*)\,\Delta x$$

Adicionando os volumes dessas fatias, obtemos uma aproximação para o volume total (isto é, o que pensamos intuitivamente como volume):

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} A(x_i^*)\,\Delta x$$

Esta aproximação parece melhorar quando $n \to \infty$. (Pense nas fatias tornando-se cada vez mais finas.) Portanto, *definimos* o volume como o limite dessas somas quando $n \to \infty$. Mas reconhecemos o limite da soma de Riemann como uma integral definida, e dessa forma temos a seguinte definição.

Definição de volume Seja S um sólido que está entre $x = a$ e $x = b$. Se a área da secção transversal de S no plano P_x, passando por x e perpendicular ao eixo x, é $A(x)$, onde A é uma função contínua, então o **volume** de S é

$$V = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} A(x_i^*)\, \Delta x = \int_a^b A(x)\, dx$$

Definição de volume Seja S um sólido que está entre $x = a$ e $x = b$. Se a área da secção transversal de S no plano P_x, passando por x e perpendicular ao eixo x, é $A(x)$, onde A é uma função contínua, então o **volume** de S é

$$V = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} A(x_i^*) \, \Delta x = \int_a^b A(x) \, dx$$

Quando usamos a fórmula de volume $V = \int_a^b A(x)\,dx$, é importante lembrar que $A(x)$ é a área de uma secção transversal móvel, obtida fatiando em x perpendicularmente ao eixo x.

Observe que, para um cilindro, a área da secção transversal é constante: $A(x) = A$ para todo x. Então, nossa definição de volume resulta em $V = \int_a^b A\,dx = A(b - a)$; isso coincide com a fórmula $V = Ah$.

EXEMPLO 1 Mostre que o volume de uma esfera de raio r é $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

EXEMPLO 1 Mostre que o volume de uma esfera de raio r é $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

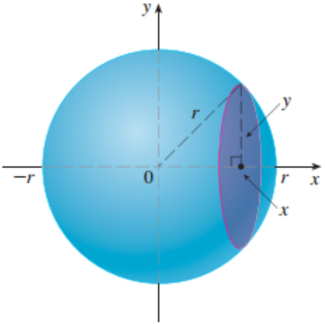


FIGURA 4

SOLUÇÃO Se colocarmos a esfera de modo que o seu centro se encontre na origem (veja a Figura 4), então o plano P_x intercepta a esfera em um círculo cujo raio (Teorema de Pitágoras) é $y = \sqrt{r^2 - x^2}$. Portanto, a área da secção transversal é

$$A(x) = \pi y^2 = \pi(r^2 - x^2)$$

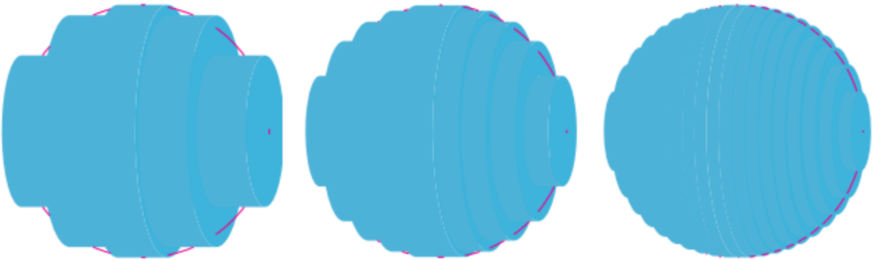
Usando a definição de volume com $a = -r$ e $b = r$, temos

$$\begin{aligned} V &= \int_{-r}^{r} A(x)\,dx = \int_{-r}^{r} \pi(r^2 - x^2)\,dx \\ &= 2\pi\left[r^2x - \frac{x^3}{3}\right]_0^r = 2\pi\left(r^3 - \frac{r^3}{3}\right) \\ &= \tfrac{4}{3}\pi r^3 \end{aligned}$$

A Figura 5 ilustra a definição de volume quando o sólido é uma esfera com raio $r = 1$. Pelo resultado do Exemplo 1, sabemos que o volume da esfera é $\frac{4}{3}\pi$, que é aproximadamente 4,18879. Aqui as fatias são cilindros circulares, ou *discos*, e as três partes da Figura 5 mostram as interpretações geométricas das somas de Riemann

$$\sum_{i=1}^{n} A(\bar{x}_i)\,\Delta x = \sum_{i=1}^{n} \pi(1^2 - \bar{x}_i^2)\,\Delta x$$

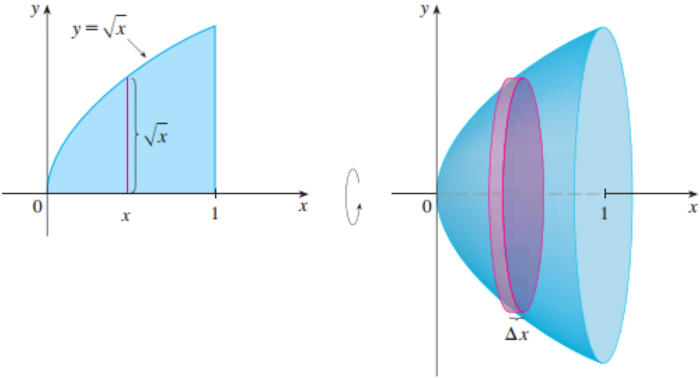
quando $n = 5$, 10 e 20 se escolhermos os pontos amostrais x_i^* como os pontos médios $\bar{x}_i$. Observe que à medida que aumentamos o número de cilindros aproximantes, a soma de Riemann correspondente se torna mais próxima do volume verdadeiro.



(a) Usando 5 discos, $V \approx 4{,}2726$ (b) Usando 10 discos, $V \approx 4{,}2097$ (c) Usando 20 discos, $V \approx 4{,}1940$

EXEMPLO 2 Encontre o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo x da região sob a curva $y = \sqrt{x}$ de 0 a 1. Ilustre a definição de volume esboçando um cilindro aproximante típico.

EXEMPLO 2 Encontre o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo x da região sob a curva $y = \sqrt{x}$ de 0 a 1. Ilustre a definição de volume esboçando um cilindro aproximante típico.



SOLUÇÃO A região é mostrada na Figura 6(a). Se fizermos a rotação em torno do eixo x, obteremos o sólido mostrado na Figura 6(b). Quando fatiamos pelo ponto x, obtemos um disco com raio $\sqrt{x}$. A área dessa secção transversal é

$$A(x) = \pi(\sqrt{x})^2 = \pi x$$

e o volume do cilindro aproximante (um disco com espessura Δx) é

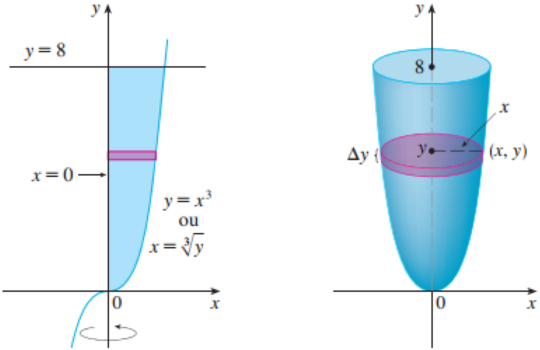
$$A(x)\,\Delta x = \pi x\,\Delta x$$

O sólido encontra-se entre $x = 0$ e $x = 1$, assim o seu volume é

$$V = \int_0^1 A(x)\,dx = \int_0^1 \pi x\,dx = \pi \frac{x^2}{2}\bigg]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

EXEMPLO 3 Encontre o volume do sólido obtido pela rotação da região delimitada por $y = x^3$, $y = 8$, e $x = 0$ em torno do eixo y.

EXEMPLO 3 Encontre o volume do sólido obtido pela rotação da região delimitada por $y = x^3$, $y = 8$, e $x = 0$ em torno do eixo y.



SOLUÇÃO A região é mostrada na Figura 7(a) e o sólido resultante é mostrado na Figura 7(b). Como a região é girada em torno do eixo y, faz sentido fatiar o sólido perpendicularmente ao eixo y e, portanto, integrar em relação a y. Se fatiarmos a uma altura y, obteremos um disco circular com raio x, onde $x = \sqrt[3]{y}$. Então, a área da secção transversal em y é

$$A(y) = \pi x^2 = \pi(\sqrt[3]{y})^2 = \pi y^{2/3}$$

e o volume do cilindro aproximante mostrado na Figura 7(b) será

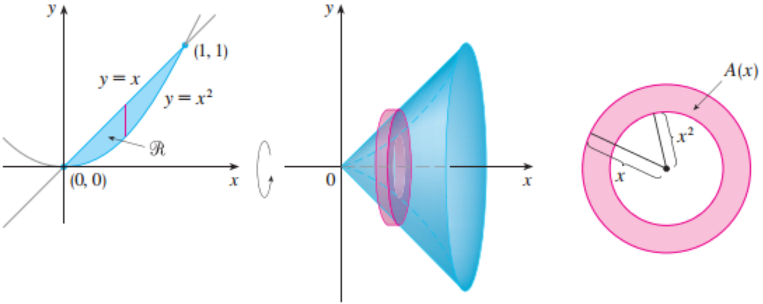
$$A(y)\,\Delta y = \pi y^{2/3}\,\Delta y$$

Como o sólido encontra-se entre $y = 0$ e $y = 8$, seu volume é

$$V = \int_0^8 A(y)\,dy = \int_0^8 \pi y^{2/3}\,dy = \pi\left[\tfrac{3}{5}y^{5/3}\right]_0^8 = \frac{96\pi}{5}$$

EXEMPLO 4 A região $\mathcal{R}$, delimitada pelas curvas $y = x$ e $y = x^2$, é girada ao redor do eixo x. Encontre o volume do sólido resultante.

EXEMPLO 4 A região $\mathcal{R}$, delimitada pelas curvas $y = x$ e $y = x^2$, é girada ao redor do eixo x. Encontre o volume do sólido resultante.



SOLUÇÃO As curvas $y = x$ e $y = x^2$ se interceptam nos pontos (0,0) e (1,1). A região entre esses pontos, o sólido de rotação e a secção transversal perpendicular ao eixo x são mostrados na Figura 8. A secção transversal no plano P_x tem o formato de uma *arruela* (um anel) com raio interno x^2 e raio externo x, de modo que calculamos a área da secção transversal subtraindo a área do círculo interno da área do círculo externo:

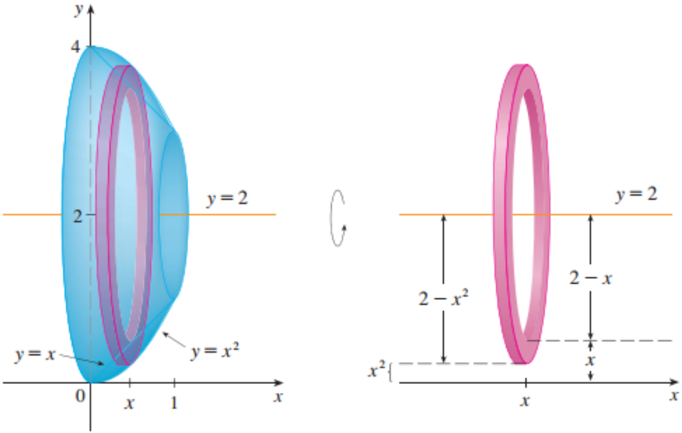
$$A(x) = \pi x^2 - \pi(x^2)^2 = \pi(x^2 - x^4)$$

Portanto, temos

$$V = \int_0^1 A(x)\,dx = \int_0^1 \pi(x^2 - x^4)\,dx = \pi\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{2\pi}{15}$$

EXEMPLO 5 Encontre o volume do sólido obtido pela rotação da região no Exemplo 4 em torno da reta $y = 2$.

EXEMPLO 5 Encontre o volume do sólido obtido pela rotação da região no Exemplo 4 em torno da reta $y = 2$.



A área de secção transversal é

$$A(x) = \pi(2 - x^2)^2 - \pi(2 - x)^2$$

de modo que o volume de S é

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 A(x)\,dx \\ &= \pi \int_0^1 [(2 - x^2)^2 - (2 - x)^2]\,dx \\ &= \pi \int_0^1 (x^4 - 5x^2 + 4x)\,dx \\ &= \pi \left[\frac{x^5}{5} - 5\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2} \right]_0^1 \\ &= \frac{8\pi}{15} \end{aligned}$$

Os sólidos nos Exemplos 1 a 5 são todos chamados **sólidos de revolução** porque são obtidos pela rotação de uma região em torno de um eixo. Em geral, calculamos o volume de um sólido de revolução usando a fórmula básica da definição

$$V = \int_a^b A(x)\,dx \qquad \text{ou} \qquad V = \int_c^d A(y)\,dy$$

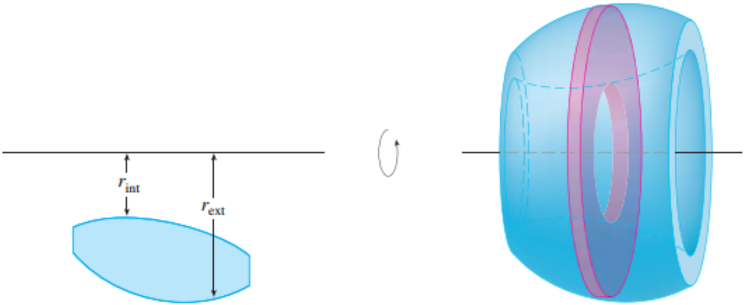
e encontramos a área da seção transversal $A(x)$ ou $A(y)$ por uma das seguintes maneiras:

- Se a secção transversal é um disco (como nos Exemplos 1 a 3), encontramos o raio do disco (em termos de x ou y) e usamos

$$A = \pi(\text{raio})^2$$

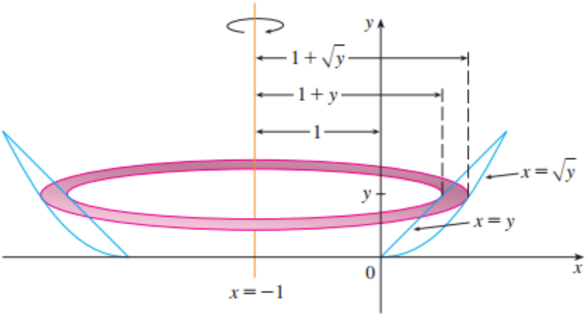
- Se a secção transversal é uma arruela (como nos Exemplos 4 e 5), encontramos o raio interno r_{int} e o raio externo r_{ext} a partir de um esboço (como nas Figuras 8, 9 e 10), e calculamos a área da arruela subtraindo a área do disco interno da área do disco externo:

$$A = \pi(\text{raio externo})^2 - \pi(\text{raio interno})^2$$



EXEMPLO 6 Encontre o volume do sólido obtido pela rotação da região no Exemplo 4 em torno da reta $x = -1$.

EXEMPLO 6 Encontre o volume do sólido obtido pela rotação da região no Exemplo 4 em torno da reta $x = -1$.



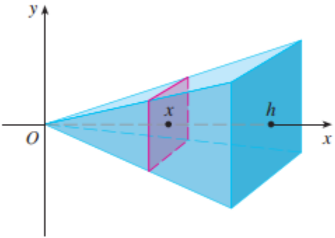
SOLUÇÃO A Figura 11 mostra uma secção transversal horizontal. É uma arruela com raio interno $1 + y$ e raio externo $1 + \sqrt{y}$; assim, a área de secção transversal é

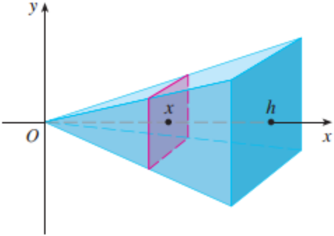
$$\begin{aligned} A(y) &= \pi(\text{raio externo})^2 - \pi(\text{raio interno})^2 \\ &= \pi\left(1 + \sqrt{y}\right)^2 - \pi(1 + y)^2 \end{aligned}$$

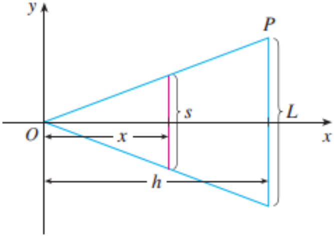
O volume é

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 A(y)\,dy = \pi \int_0^1 \left[\left(1 + \sqrt{y}\right)^2 - (1 + y)^2\right] dy \\ &= \pi \int_0^1 \left(2\sqrt{y} - y - y^2\right) dy = \pi\left[\frac{4y^{3/2}}{3} - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

EXEMPLO 8 Encontre o volume de uma pirâmide de base quadrada com lado L e cuja altura seja h.


y
x
h
O
x


y
x
O
h
x


y
P
s
L
O
x
x
h

SOLUÇÃO Colocamos a origem O no vértice da pirâmide e o eixo x ao longo do seu eixo central, como mostrado na Figura 14. Qualquer plano P_x que passa por x e é perpendicular ao eixo x intercepta a pirâmide em um quadrado com lado de comprimento s. Podemos expressar s em termos de x observando que, pelos triângulos semelhantes na Figura 15,

$$\frac{x}{h} = \frac{s/2}{L/2} = \frac{s}{L}$$

de modo que $s = Lx/h$. [Outro método é observar que a reta OP tem uma inclinação de $L/(2h)$ e dessa forma a sua equação é $y = Lx/(2h)$.] Portanto, a área da secção transversal é

$$A(x) = s^2 = \frac{L^2}{h^2}x^2$$

A pirâmide está entre $x = 0$ e $x = h$, então o seu volume é

$$V = \int_0^h A(x)\,dx = \int_0^h \frac{L^2}{h^2}x^2\,dx = \frac{L^2}{h^2}\frac{x^3}{3}\bigg]_0^h = \frac{L^2h}{3}$$

OBSERVAÇÃO Não precisamos colocar o vértice da pirâmide na origem no Exemplo 8. Nós o fizemos meramente para tornar as equações mais simples. Se, em vez disso, tivéssemos colocado o centro da base na origem e o vértice no semieixo positivo y, como na Figura 16, você pode verificar que teríamos obtido a integral

$$V = \int_0^h \frac{L^2}{h^2}(h - y)^2\, dy = \frac{L^2 h}{3}$$

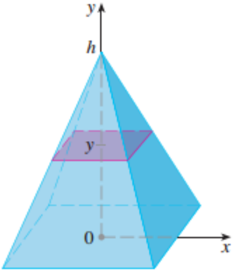
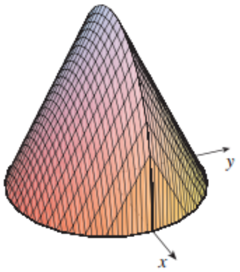
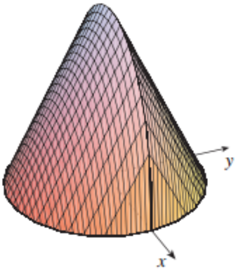
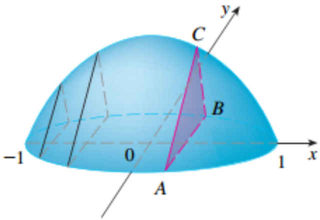


FIGURA 16

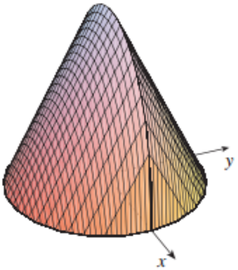
EXEMPLO 7 A Figura 12 mostra a forma de um sólido com base circular de raio 1. Secções transversais paralelas perpendiculares à base são triângulos equiláteros. Ache o volume do sólido.

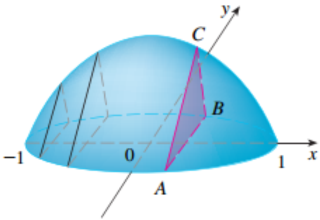




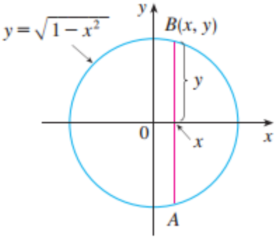


(a) O sólido

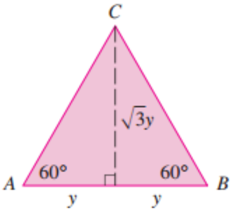




(a) O sólido



(b) Sua base



(c) Secção transversal

SOLUÇÃO Vamos considerar o círculo como $x^2 + y^2 = 1$. O sólido, a sua base e uma secção transversal típica a uma distância x da origem são mostrados na Figura 13.

Como B encontra-se no círculo, temos $y = \sqrt{1 - x^2}$ e, assim, a base do triângulo ABC será $|AB| = 2\sqrt{1 - x^2}$. Como o triângulo é equilátero, vemos a partir da Figura 13(c) que sua altura é $\sqrt{3}\,y = \sqrt{3}\sqrt{1 - x^2}$. A área da secção transversal é, portanto,

$$A(x) = \tfrac{1}{2} \cdot 2\sqrt{1 - x^2} \cdot \sqrt{3}\sqrt{1 - x^2} = \sqrt{3}\,(1 - x^2)$$

e o volume do sólido é

$$V = \int_{-1}^{1} A(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{3}\,(1 - x^2)\,dx$$

$$= 2\int_{0}^{1} \sqrt{3}\,(1 - x^2)\,dx = 2\sqrt{3}\left[x - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$