Cálculo Diferencial e Integral II E
Aula 13 - Funções de Duas Variáveis

Edward Landi Tonucci

18 de maio de 2022

Índice

1 Funções de Duas Variáveis

Índice

1 Funções de Duas Variáveis

Funções de Duas Variáveis

Funções de Duas Variáveis

A temperatura T em um ponto da superfície da Terra em dado instante de tempo depende da longitude x e da latitude y do ponto. Podemos pensar em T como uma função de duas variáveis x e y, ou como uma função do par (x, y). Indicamos essa dependência funcional escrevendo $T = f(x, y)$.

O volume V de um cilindro circular depende de seu raio r e de sua altura h. De fato, sabemos que $V = \pi r^2 h$. Podemos dizer que V é uma função de r e de h, e escrevemos $V(r, h) = \pi r^2 h$.

Funções de Duas Variáveis

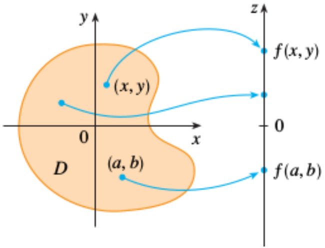
Definição Uma **função f de duas variáveis** é uma regra que associa a cada par ordenado de números reais (x, y) de um conjunto D um único valor real, denotado por $f(x, y)$. O conjunto D é o **domínio** de f e sua **imagem** é o conjunto de valores possíveis de f, ou seja, $\{f(x, y) | (x, y) \in D\}$.

Funções de Duas Variáveis

Frequentemente escrevemos $z = f(x, y)$ para tornar explícitos os valores tomados por f em um ponto genérico (x, y). As variáveis x e y são **variáveis independentes** e z é a **variável dependente**. [Compare com a notação $y = f(x)$ para as funções de uma única variável.]

Funções de Duas Variáveis

Uma função de duas variáveis é simplesmente aquela cujo domínio é um subconjunto de $\mathbb{R}^2$ e cuja imagem é um subconjunto de $\mathbb{R}$. Uma maneira de visualizar essa função é pelo diagrama de setas (veja a Figura 1), no qual o domínio D é representado como um subconjunto do plano xy e a imagem é um conjunto de números na reta real, mostrado como um eixo z. Por exemplo, se $f(x, y)$ representa a temperatura em um ponto (x, y) em uma placa de metal chata com o formato de D, podemos pensar que o eixo z é um termômetro exibindo as temperaturas registradas.



Funções de Duas Variáveis

Se a função f é dada por uma fórmula e seu domínio não é especificado, fica subtendido que o domínio de f é o conjunto de todos os pares (x, y) para os quais a expressão dada fornece um número real bem definido.

EXEMPLO 1 Para cada uma das seguintes funções, calcule $f(3, 2)$ e encontre o domínio.

(a) $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{x + y + 1}}{x - 1}$ (b) $f(x, y) = x \ln(y^2 - x)$

Funções de Duas Variáveis

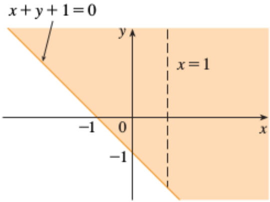
SOLUÇÃO

(a) $f(3,2) = \dfrac{\sqrt{3+2+1}}{3-1} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$

A expressão para f está bem definida se o denominador for diferente de 0 e o número cuja raiz quadrada será extraída for não negativo. Portanto, o domínio de f é

$$D = \{(x, y) | x + y + 1 \geqslant 0, x \neq 1\}$$

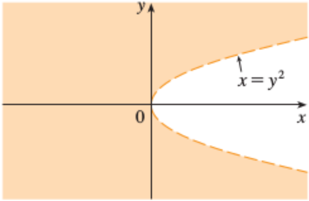
A desigualdade $x + y + 1 \geqslant 0$, ou $y \geqslant -x - 1$, descreve os pontos que estão na linha $y = -x - 1$ ou acima dela, enquanto $x \neq 1$ significa que os pontos na linha $x = 1$ devem ser excluídos do domínio. (Veja a Figura 2.)



Funções de Duas Variáveis

(b) $f(3, 2) = 3\ln(2^2 - 3) = 3\ln 1 = 0$

Já que $\ln(y^2 - x)$ é definido somente quando $y^2 - x > 0$, isto é, $x < y^2$, o domínio de f é $D = \{(x, y) \mid x < y^2\}$. Isso representa o conjunto de pontos à esquerda da parábola $x = y^2$. (Veja a Figura 3.)



Funções de Duas Variáveis

Nem todas as funções podem ser representadas por fórmulas explícitas. A função do próximo exemplo é descrita verbalmente e por estimativas numéricas de seus valores.

EXEMPLO 2 Em regiões com inverno severo, o *índice de sensação térmica* é frequentemente utilizado para descrever a severidade aparente do frio. Esse índice W mede a temperatura subjetiva que depende da temperatura real T e da velocidade do vento, v. Assim, W é uma função de T e de v, e podemos escrever $W = f(T, v)$. A Tabela 1 apresenta valores de W compilados pelo Serviço Nacional de Meteorologia dos Estados Unidos e pelo Serviço Meteorológico do Canadá.

Funções de Duas Variáveis

TABELA 1 Índice de sensação térmica como função da temperatura do ar e velocidade do vento

Velocidade do vento (km/h)

Temperatura real (°C)

$T \backslash v$	5	10	15	20	25	30	40	50	60	70	80
5	4	3	2	1	1	0	−1	−1	−2	−2	−3
0	−2	−3	−4	−5	−6	−6	−7	−8	−9	−9	−10
−5	−7	−9	−11	−12	−12	−13	−14	−15	−16	−16	−17
−10	−13	−15	−17	−18	−19	−20	−21	−22	−23	−23	−24
−15	−19	−21	−23	−24	−25	−26	−27	−29	−30	−30	−31
−20	−24	−27	−29	−30	−32	−33	−34	−35	−36	−37	−38
−25	−30	−33	−35	−37	−38	−39	−41	−42	−43	−44	−45
−30	−36	−39	−41	−43	−44	−46	−48	−49	−50	−51	−52
−35	−41	−45	−48	−49	−51	−52	−54	−56	−57	−58	−60
−40	−47	−51	−54	−56	−57	−59	−61	−63	−64	−65	−67

Por exemplo, a tabela mostra que, se a temperatura é -5 °C e a velocidade do vento, 50 km/h, então subjetivamente parecerá tão frio quanto uma temperatura de cerca de -15 °C sem vento. Portanto,

$$f(-5, 50) = -15$$

Funções de Duas Variáveis

EXEMPLO 4 Determine o domínio e a imagem de $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

Funções de Duas Variáveis

SOLUÇÃO O domínio de g é

$$D = \{(x, y) \mid 9 - x^2 - y^2 \geqslant 0\} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 9\}$$

que é o disco com centro (0, 0) e raio 3 (veja a Figura 4). A imagem de g é

$$\left\{z \mid z = \sqrt{9 - x^2 - y^2},\ (x, y) \in D\right\}$$

Como z é a raiz quadrada positiva, $z \geqslant 0$. Da mesma forma, por causa de $9 - x^2 - y^2 \leqslant 9$, temos

$$\sqrt{9 - x^2 - y^2} \leqslant 3$$

Assim, a imagem é

$$\{z \mid 0 \leqslant z \leqslant 3\} = [0, 3]$$

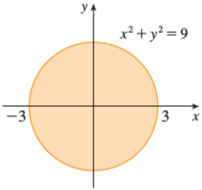


FIGURA 4
Domínio de $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

Funções de Duas Variáveis

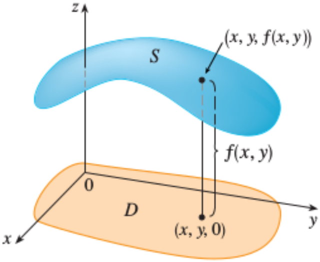
Gráficos

Outra forma de visualizar o comportamento de uma função de duas variáveis é considerar seu gráfico.

Definição Se f é uma função de duas variáveis com domínio D, então o **gráfico** de f é o conjunto de todos os pontos (x, y, z) em $\mathbb{R}^3$ tal que $z = f(x, y)$ e (x, y) pertença a D.

Funções de Duas Variáveis

Assim como o gráfico de uma função f de uma única variável é uma curva C com equação $y = f(x)$, o gráfico de uma função f com duas variáveis é uma superfície S com equação $z = f(x, y)$. Podemos visualizar o gráfico S de f como estando diretamente acima ou abaixo de seu domínio D no plano xy (veja a Figura 5).

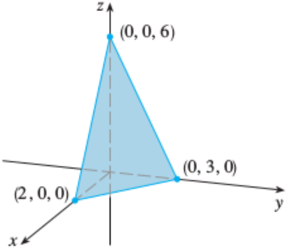


Funções de Duas Variáveis

EXEMPLO 5 Esboce o gráfico da função $f(x, y) = 6 - 3x - 2y$.

Funções de Duas Variáveis

SOLUÇÃO O gráfico de f tem a equação $z = 6 - 3x - 2y$, ou $3x + 2y + z = 6$, que representa um plano. Para desenharmos o plano, primeiro achamos as intersecções com os eixos. Colocando $y = z = 0$ na equação, obtemos $x = 2$ como a intersecção com o eixo x. Da mesma forma, a intersecção com y é 3 e a intersecção com z é 6. Isso nos permite esboçar a porção do gráfico pertencente ao primeiro octante na Figura 6.



Funções de Duas Variáveis

A função do Exemplo 5 é um caso especial da função

$$f(x, y) = ax + by + c$$

e é chamada **função linear**. O gráfico de uma dessas funções tem a equação

$$z = ax + by + c \qquad \text{ou} \qquad ax + by - z + c = 0$$

e, portanto, é um plano. Do mesmo modo que as funções lineares de uma única variável são importantes no cálculo de uma variável, veremos que as funções lineares de duas variáveis têm um papel central no cálculo com muitas variáveis.

Funções de Duas Variáveis

EXEMPLO 6 Esboce o gráfico de $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

Funções de Duas Variáveis

SOLUÇÃO O gráfico tem a equação $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$. Elevando ao quadrado ambos os lados da equação, obtemos $z^2 = 9 - x^2 - y^2$, ou $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, que reconhecemos como a equação da esfera de centro na origem e raio 3. Mas, como $z \geqslant 0$, o gráfico de g é somente a metade superior da esfera (veja a Figura 7).

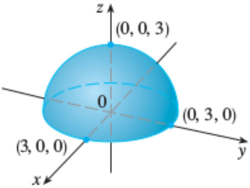


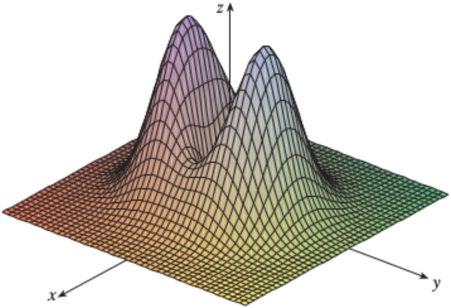
FIGURA 7
Gráfico de $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

Funções de Duas Variáveis

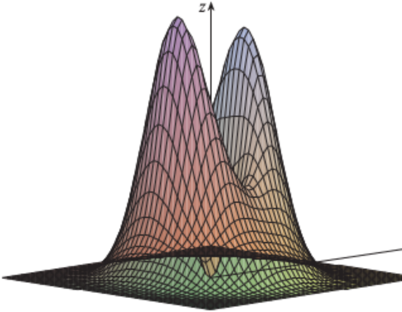
OBSERVAÇÃO Uma esfera inteira não pode ser representada por uma única função de x e y. Como vimos no Exemplo 6, o hemisfério superior da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ é representado pela função $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$. O hemisfério inferior é representado pela função $h(x, y) = -\sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

Funções de Duas Variáveis

Existem programas de computador desenvolvidos para traçar os gráficos de funções de duas variáveis. Na maioria desses programas, são desenhados os cortes nos planos verticais $x = k$ e $y = k$ para os valores de k igualmente espaçados, e as linhas do gráfico que estariam escondidas são removidas.

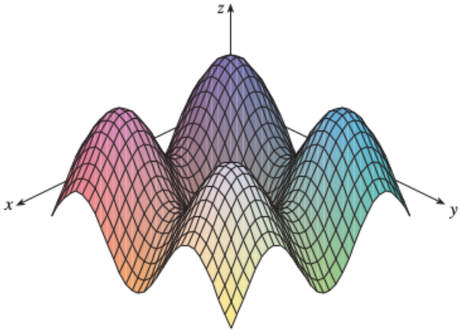


(a) $f(x, y) = (x^2 + 3y^2)e^{-x^2-y^2}$

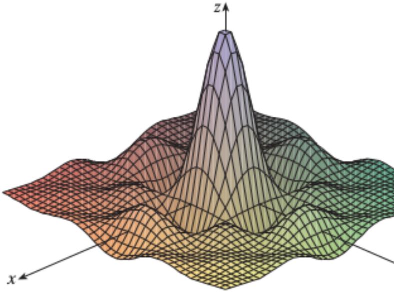


(b) $f(x, y) = (x^2 + 3y^2)e^{-x^2-y^2}$

Funções de Duas Variáveis



(c) $f(x, y) = \text{sen}\, x + \text{sen}\, y$



(d) $f(x, y) = \dfrac{\text{sen}\, x \,\text{sen}\, y}{xy}$

Funções de Duas Variáveis

EXEMPLO 8 Determine o domínio e a imagem e esboce o gráfico de $h(x, y) = 4x^2 + y^2$.

SOLUÇÃO Observe que $h(x, y)$ é definida para todos os possíveis pares ordenados de números reais (x, y) e seu domínio é $\mathbb{R}^2$, o plano xy todo. A imagem de h é o conjunto $[0, \infty)$ de todos os reais não negativos. [Observe que $x^2 \geqslant 0$ e $y^2 \geqslant 0$, portanto $h(x, y) \geqslant 0$ para todo x e y.]

Funções de Duas Variáveis

SOLUÇÃO Impondo $x = 0$, obtemos $z = y^2$, de forma que o plano yz intercepta a superfície em uma parábola. Impondo $x = k$ (uma constante), obtemos $z = y^2 + 4k^2$. Isso significa que, se cortarmos o gráfico por qualquer plano paralelo ao plano yz, obteremos uma nova parábola com concavidade para cima. Da mesma forma, tomando $y = k$, o corte é $z = 4x^2 + k^2$, que corresponde novamente a uma parábola com concavidade para cima. Tomando $z = k$, obteremos os cortes horizontais $4x^2 + y^2 = k$, que reconhecemos como uma família de elipses. Sabendo a forma dos cortes, podemos esboçar o gráfico da Figura 5. Pelo fato de os cortes serem parábolas e elipses, a superfície quádrica $z = 4x^2 + y^2$ é denominada **paraboloide elíptico**.