Cálculo Diferencial e Integral II E
Aula 12 - Substituição Trigonométrica

Prof. Dr. Edward Landi Tonucci

2 de maio de 2022

7.3 Substituição Trigonométrica

Para encontrar a área de um círculo ou uma elipse, uma integral da forma $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$ aparece, onde $a > 0$. Se ela fosse $\int x\sqrt{a^2 - x^2}\, dx$, a substituição $u = a^2 - x^2$ poderia ser eficaz, mas, como está, $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx\, dx$ é mais difícil. Se mudarmos a variável de x para θ pela substituição $x = a \operatorname{sen} \theta$, então a identidade $1 - \operatorname{sen}^2\theta = \cos^2\theta$ permitirá que nos livremos da raiz, porque

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2\theta} = \sqrt{a^2(1 - \operatorname{sen}^2\theta)} = \sqrt{a^2 \cos^2\theta} = a\,|\cos \theta|$$

Observe a diferença entre a substituição $u = a^2 - x^2$ (na qual a nova variável é uma função da antiga) e a substituição $x = a \operatorname{sen} \theta$ (a variável antiga é uma função da nova).

Observe a diferença entre a substituição $u = a^2 - x^2$ (na qual a nova variável é uma função da antiga) e a substituição $x = a \operatorname{sen} \theta$ (a variável antiga é uma função da nova).

Em geral, podemos fazer uma substituição da forma $x = g(t)$, usando a Regra da Substituição ao contrário. Para simplificarmos nossos cálculos, presumimos que g tenha uma função inversa, isto é, g é injetora.

Observe a diferença entre a substituição $u = a^2 - x^2$ (na qual a nova variável é uma função da antiga) e a substituição $x = a \text{ sen } \theta$ (a variável antiga é uma função da nova).

Em geral, podemos fazer uma substituição da forma $x = g(t)$, usando a Regra da Substituição ao contrário. Para simplificarmos nossos cálculos, presumimos que g tenha uma função inversa, isto é, g é injetora. Nesse caso, se substituirmos u por x e x por t na Regra de Substituição (Equação 5.5.4), obteremos

$$\int f(x)\,dx = \int f(g(t))g'(t)\,dt$$

Esse tipo de substituição é chamado de *substituição inversa*.

Podemos fazer a substituição inversa $x = a \operatorname{sen} \theta$ desde que esta defina uma função injetora. Isso pode ser conseguido pela restrição de θ no intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$.

Na tabela a seguir listamos as substituições trigonométricas que são eficazes para as expressões radicais dadas em razão de certas identidades trigonométricas. Em cada caso, a restrição de θ é imposta para assegurar que a função que define a substituição seja injetora. (Estes são os mesmos intervalos usados na Seção 1.6 na definição de funções inversas.)

Tabela de Substituições Trigonométricas

Expressão	Substituição	Identidade
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a \operatorname{sen} \theta, \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$	$1 - \operatorname{sen}^2\theta = \cos^2\theta$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a \operatorname{tg} \theta, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$	$1 + \operatorname{tg}^2\theta = \sec^2\theta$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a \sec \theta, \quad 0 \leqslant \theta < \frac{\pi}{2}$ ou $\pi \leqslant \theta < \frac{3\pi}{2}$	$\sec^2\theta - 1 = \operatorname{tg}^2\theta$

Observe que poderíamos ter escolhido os intervalos $0 \leq \theta < \pi/2$ e $\pi/2 < \theta \leq \pi$ na substituição de $x = a\ sec\theta$, mas durante a mudança, nos depararíamos com $|tg\theta|$ que neste caso seria igual a $tg\theta$ no primeiro intervalo e $-tg\theta$ no segundo.

Como o importante é que a função seja injetiva nos intervalos designados, escolhemos $0 \leq \theta < \pi/2$ e $\pi \leq \theta < 3\pi/2$ apenas por praticidade, já que nestes intervalos $|tg\theta|$ sempre será igual a $tg\theta$.

EXEMPLO 1 Calcule $\displaystyle\int \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^2}\,dx$.

SOLUÇÃO Seja $x = 3 \operatorname{sen} \theta$, onde $-\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$. Então $dx = 3 \cos \theta \, d\theta$ e

$$\sqrt{9 - x^2} = \sqrt{9 - 9 \operatorname{sen}^2\theta} = \sqrt{9 \cos^2\theta} = 3\,|\cos \theta\,| = 3 \cos \theta$$

(Observe que $\cos \theta \geqslant 0$ porque $-\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$.) Assim, a Regra da Substituição Inversa fornece

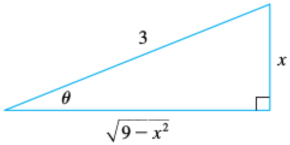
$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^2}\,dx &= \int \frac{3 \cos \theta}{9 \operatorname{sen}^2\theta}\, 3 \cos \theta \, d\theta \\
&= \int \frac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}\, d\theta = \int \operatorname{cotg}^2\theta \, d\theta \\
&= \int (\operatorname{cossec}^2\theta - 1)\, d\theta \\
&= -\operatorname{cotg} \theta - \theta + C
\end{aligned}$$

Como esta é uma integral indefinida, devemos retornar a variável original x. Isso pode ser feito usando identidades trigonométricas para expressar $\text{cotg}\,\theta$ em termos de $\text{sen}\,\theta = x/3$ ou desenhando um diagrama, como mostrado na Figura 1, onde θ é interpretado como um ângulo de um triângulo retângulo. Como sen $\text{sen}\,\theta = x/3$, escolhemos o lado oposto e a hipotenusa como tendo comprimentos x e 3. Pelo Teorema de Pitágoras, o comprimento do lado adjacente é $\sqrt{9 - x^2}$, assim podemos ler simplesmente o valor de $\text{cotg}\,\theta$ da figura:

$$\text{cotg}\,\theta = \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x}$$

FIGURA 1

$\text{sen}\,\theta = \dfrac{x}{3}$



(Embora $\theta > 0$ no diagrama, essa expressão para cotg θ é válida quando $\theta < 0$.) Como sen $\theta = x/3$, obtemos $\theta = \text{sen}^{-1}(x/3)$, logo

$$\int \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{9 - x^2}}{x} - \text{sen}^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + C$$

EXEMPLO 2 Encontre a área delimitada pela elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

SOLUÇÃO Isolando y na equação da elipse, temos

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} = \frac{a^2 - x^2}{a^2} \qquad \text{ou} \qquad y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

Como a elipse é simétrica em relação a ambos os eixos, a área total A é quatro vezes a área do primeiro quadrante (veja a Figura 2). A parte da elipse no primeiro quadrante é dada pela função

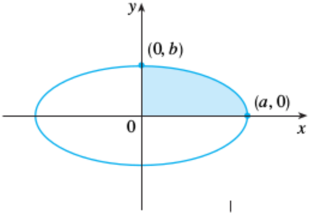
$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \qquad 0 \leqslant x \leqslant a$$

e, assim,

$$\tfrac{1}{4}A = \int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

FIGURA 2

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Para calcularmos essa integral, substituímos $x = a \operatorname{sen} \theta$. Então, $dx = a \cos \theta \, d\theta$. Para mudarmos os limites de integração, notamos que quando $x = 0$, $\operatorname{sen} \theta = 0$; logo, $\theta = 0$; quando $x = a$, $\operatorname{sen} \theta = 1$, assim, $\theta = \pi/2$. Além disso,

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2\theta} = \sqrt{a^2 \cos^2\theta} = a \left| \cos \theta \right| = a \cos \theta$$

já que $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$. Portanto,

$$
\begin{aligned}
A &= 4\,\frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = 4\,\frac{b}{a}\int_0^{\pi/2} a\cos\theta \cdot a\cos\theta\,d\theta \\
&= 4ab\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\,d\theta = 4ab\int_0^{\pi/2}\tfrac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)\,d\theta \\
&= 2ab\Big[\theta + \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2\theta\Big]_0^{\pi/2} = 2ab\left(\frac{\pi}{2} + 0 - 0\right) = \pi ab
\end{aligned}
$$

Mostramos que a área de uma elipse com semieixos a e b é πab. Em particular, considerando $a = b = r$, demonstramos a famosa fórmula que diz que a área de um círculo de raio r é πr^2.

OBSERVAÇÃO Como a integral no Exemplo 2 era uma integral definida, mudamos os limites da integração e não tivemos que converter de volta à variável x original.

EXEMPLO 3 Encontre $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}}\,dx.$

SOLUÇÃO Se $x = 2\,\mathrm{tg}\,\theta$, $-\pi/2 < \theta < \pi/2$. Então $dx = 2\sec^2\theta\,d\theta$ e

$$\sqrt{x^2+4} = \sqrt{4(\mathrm{tg}^2\theta+1)} = \sqrt{4\sec^2\theta} = 2\,|\sec\theta\,| = 2\sec\theta$$

Assim, temos

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+4}} = \int \frac{2\sec^2\theta\,d\theta}{4\,\mathrm{tg}^2\theta \cdot 2\sec\theta} = \frac{1}{4}\int \frac{\sec\theta}{\mathrm{tg}^2\theta}\,d\theta$$

Para calcularmos essa integral trigonométrica, colocamos tudo em termos de sen θ e cos θ:

$$\frac{\sec\theta}{\operatorname{tg}^2\theta} = \frac{1}{\cos\theta} \cdot \frac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}^2\theta} = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}$$

Portanto, fazendo a substituição $u = \operatorname{sen}\theta$, temos

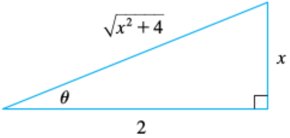
$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+4}} &= \frac{1}{4}\int \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}\, d\theta = \frac{1}{4}\int \frac{du}{u^2} \\
&= \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{u}\right) + C = -\frac{1}{4\operatorname{sen}\theta} + C \\
&= -\frac{\operatorname{cossec}\theta}{4} + C
\end{aligned}$$

Usamos a Figura 3 para determinar que cossec cossec $\theta = \sqrt{x^2+4}/x$ e, assim,

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+4}} = -\frac{\sqrt{x^2+4}}{4x} + C$$

FIGURA 3

tg $\theta = \dfrac{x}{2}$



EXEMPLO 4 Encontre $\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}\, dx$.

SOLUÇÃO Seria possível usar a substituição trigonométrica $x = 2 \operatorname{tg} \theta$ aqui (como no Exemplo 3). Mas a substituição direta $u = x^2 + 4$ é mais simples, porque $du = 2x\, dx$ e

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}\, dx = \frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{u}} = \sqrt{u} + C = \sqrt{x^2 + 4} + C$$

OBSERVAÇÃO O Exemplo 4 ilustra o fato de que, mesmo quando as substituições trigonométricas são possíveis, elas nem sempre dão a solução mais fácil. Você deve primeiro procurar um método mais simples.

EXEMPLO 6 Encontre $\int_0^{3\sqrt{3}/2} \frac{x^3}{(4x^2+9)^{3/2}}\,dx$.

SOLUÇÃO Primeiro observamos que $(4x^2+9)^{3/2} = (\sqrt{4x^2+9})^3$, portanto a substituição trigonométrica é apropriada. Embora $\sqrt{4x^2+9}$ não seja exatamente uma expressão da tabela de substituições trigonométricas, ela se torna parte delas quando fazemos a substituição preliminar $u = 2x$. Quando combinamos esta com a substituição da tangente, temos $x = \frac{3}{2}\,\text{tg}\,\theta$, que resulta em $dx = \frac{3}{2}\sec^2\theta\,d\theta$ e

$$\sqrt{4x^2+9} = \sqrt{9\,\text{tg}^2\theta + 9} = 3\sec\theta$$

Quando $x = 0$, $\text{tg}\,\theta = 0$, assim $\theta = 0$; quando $x = 3\sqrt{3}/2$, $\text{tg}\,\theta = \sqrt{3}$, logo $\theta = \pi/3$. Portanto,

$$\int_0^{3\sqrt{3}/2} \frac{x^3}{(4x^2+9)^{3/2}}\,dx = \int_0^{\pi/3} \frac{\frac{27}{8}\,\text{tg}^3\theta}{27\sec^3\theta}\,\frac{3}{2}\sec^2\theta\,d\theta$$

$$= \frac{3}{16}\int_0^{\pi/3} \frac{\text{tg}^3\theta}{\sec\theta}\,d\theta = \frac{3}{16}\int_0^{\pi/3} \frac{\text{sen}^3\theta}{\cos^2\theta}\,d\theta$$

$$= \frac{3}{16}\int_0^{\pi/3} \frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}\,\text{sen}\,\theta\,d\theta$$

Como o Exemplo 6 mostra, a substituição trigonométrica é, algumas vezes, uma boa ideia quando $(x^2 + a^2)^{n/2}$ ocorre em uma integral, onde n é um inteiro arbitrário. O mesmo é verdade quando $(a^2 - x^2)^{n/2}$ ou $(x^2 - a^2)^{n/2}$ ocorrem.

Agora substituímos $u = \cos\theta$, de modo que $du = -\text{sen}\,\theta\, d\theta$. Quando $\theta = 0$, $u = 1$; quando $\theta = \pi/3$, $u = \frac{1}{2}$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\int_0^{3\sqrt{3}/2} \frac{x^3}{(4x^2+9)^{3/2}}\,dx &= -\tfrac{3}{16}\int_1^{1/2} \frac{1-u^2}{u^2}\,du \\
&= \tfrac{3}{16}\int_1^{1/2} (1-u^{-2})\,du = \tfrac{3}{16}\left[u + \frac{1}{u}\right]_1^{1/2} \\
&= \tfrac{3}{16}\left[\left(\tfrac{1}{2}+2\right) - (1+1)\right] = \tfrac{3}{32}
\end{aligned}$$

EXEMPLO 7 Calcule $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{3 - 2x - x^2}}\,dx.$

SOLUÇÃO Podemos transformar o integrando em uma função para a qual a substituição trigonométrica é apropriada completando primeiramente o quadrado sob o sinal da raiz:

$$3 - 2x - x^2 = 3 - (x^2 + 2x) = 3 + 1 - (x^2 + 2x + 1)$$
$$= 4 - (x + 1)^2.$$

Isso sugere que façamos a substituição $u = x + 1$. Então $du = dx$ e $x = u - 1$, de modo que

$$\int \frac{x}{\sqrt{3 - 2x - x^2}}\, dx = \int \frac{u - 1}{\sqrt{4 - u^2}}\, du$$

Agora substituímos $u = 2 \operatorname{sen} \theta$, obtendo $du = 2 \cos \theta \, d\theta$ e $\sqrt{4 - u^2} = 2 \cos \theta$, de forma que

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{\sqrt{3 - 2x - x^2}}\, dx &= \int \frac{2 \operatorname{sen} \theta - 1}{2 \cos \theta}\, 2 \cos \theta \, d\theta \\
&= \int (2 \operatorname{sen} \theta - 1)\, d\theta \\
&= -2 \cos \theta - \theta + C \\
&= -\sqrt{4 - u^2} - \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{u}{2}\right) + C \\
&= -\sqrt{3 - 2x - x^2} - \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x + 1}{2}\right) + C
\end{aligned}$$

Calcule a integral usando a substituição trigonométrica indicada. Esboce e coloque legendas no triângulo retângulo associado.

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-9}}\,dx; \quad x = 3\sec\theta$$

Calcule

$$\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{1}{t^3\sqrt{t^2-1}}\,dt \qquad\qquad \int_0^3 \frac{x}{\sqrt{36-x^2}}\,dx$$