Cálculo Diferencial e Integral II E
Aula 9 - Integrais Trigonométricas

Prof. Dr. Edward Landi Tonucci

25 de abril de 2022

7.2 Integrais Trigonométricas

Nesta seção usaremos as identidades trigonométricas para integrar certas combinações de funções trigonométricas. Começaremos com as potências de seno e cosseno.

EXEMPLO 1 Calcule $\int \cos^3 x \, dx$.

SOLUÇÃO A simples substituição de $u = \cos x$ não ajuda, porque assim $du = -\operatorname{sen} x \, dx$. Para integramos potências de cosseno, necessitaríamos de um fator extra sen x. De forma semelhante, uma potência de seno pediria um fator extra cos x. Portanto, aqui podemos separar um fator cosseno e converter o fator $\cos^2 x$ restante em uma expressão envolvendo o seno, usando a identidade $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$:

Em geral, tentamos escrever um integrando envolvendo as potências de seno e cosseno em uma forma onde tenhamos somente um fator seno (e o restante da expressão em termos de cosseno) ou apenas um fator cosseno (e o restante da expressão em termos de seno). A identidade $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ nos permite a interconversão de potências pares de seno e cosseno.

$$\cos^3 x = \cos^2 x \cdot \cos x = (1 - \operatorname{sen}^2 x)\cos x$$

Podemos então calcular a integral, substituindo $u = \operatorname{sen} x$, de modo que $du = \cos x\, dx$ e

$$\begin{aligned}
\int \cos^3 x\, dx &= \int \cos^2 x \cdot \cos x\, dx = \int (1 - \operatorname{sen}^2 x)\cos x\, dx \\
&= \int (1 - u^2)\, du = u - \tfrac{1}{3}u^3 + C \\
&= \operatorname{sen} x - \tfrac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x + C
\end{aligned}$$

EXEMPLO 2 Encontre $\int \operatorname{sen}^5 x \cos^2 x \, dx$.

SOLUÇÃO Poderíamos converter $\cos^2 x$ para $1 - \operatorname{sen}^2 x$, mas obteríamos uma expressão em termos de $\operatorname{sen} x$ sem nenhum fator extra $\cos x$. Em vez disso, separamos um único fator de seno e reescrevemos o fator $\operatorname{sen}^4 x$ restante em termos de $\cos x$:

$$\operatorname{sen}^5 x \cos^2 x = (\operatorname{sen}^2 x)^2 \cos^2 x \operatorname{sen} x = (1 - \cos^2 x)^2 \cos^2 x \operatorname{sen} x$$

Substituindo $u = \cos x$, temos $du = -\operatorname{sen} x \, dx$ e, assim,

$$
\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^5 x \cos^2 x \, dx &= \int (\operatorname{sen}^2 x)^2 \cos^2 x \operatorname{sen} x \, dx \\
&= \int (1 - \cos^2 x)^2 \cos^2 x \operatorname{sen} x \, dx \\
&= \int (1 - u^2)^2 u^2 (-du) = -\int (u^2 - 2u^4 + u^6) \, du \\
&= -\left(\frac{u^3}{3} - 2\frac{u^5}{5} + \frac{u^7}{7} \right) + C \\
&= -\tfrac{1}{3}\cos^3 x + \tfrac{2}{5}\cos^5 x - \tfrac{1}{7}\cos^7 x + C
\end{aligned}
$$

Nos exemplos anteriores, uma potência ímpar de seno ou cosseno nos permitiu separar um único fator e converter a potência par remanescente. Se um integrando contém potências pares tanto para seno como para cosseno, essa estratégia falha. Nesse caso, podemos aproveitar as identidades dos ângulos-metade (veja as Equações 17b e 17a no Apêndice D):

$$\operatorname{sen}^2 x = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2x) \qquad \text{e} \qquad \cos^2 x = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

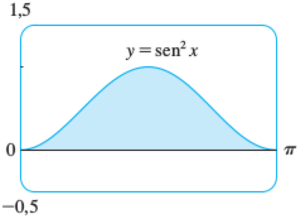
EXEMPLO 3 Calcule $\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 x\, dx$.

SOLUÇÃO Se escrevermos $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$, a integral não é mais simples de calcular. Usando a fórmula do ângulo-metade para $\operatorname{sen}^2 x$, contudo, temos

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 x\, dx &= \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi} (1 - \cos 2x)\, dx \\ &= \left[\tfrac{1}{2}\left(x - \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\right)\right]_0^{\pi} \\ &= \tfrac{1}{2}\left(\pi - \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2\pi\right) - \tfrac{1}{2}\left(0 - \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 0\right) = \tfrac{1}{2}\pi\end{aligned}$$

Observe que mentalmente fizemos a substituição $u = 2x$ quando integramos $\cos 2x$.

O Exemplo 3 mostra que a área da região exposta na Figura 2 é $\pi/2$.



EXEMPLO 4 Encontre $\int \text{sen}^4 x\, dx$.

SOLUÇÃO Nós poderíamos calcular essa integral usando a fórmula de redução para $\int \text{sen}^n x\, dx$ (Equação 7.1.7) junto com o Exemplo 3 (como no Exercício 47 na Seção 7.1), entretanto, outro método é escrever $\text{sen}^4 x = (\text{sen}^2 x)^2$ e usar uma fórmula do ângulo-metade:

$$\int \operatorname{sen}^4 x\, dx = \int (\operatorname{sen}^2 x)^2\, dx$$

$$= \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 dx$$

$$= \tfrac{1}{4} \int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x)\, dx$$

Como $\cos^2 2x$ ocorre, precisamos usar outra fórmula do ângulo-metade

$$\cos^2 2x = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 4x)$$

Isso fornece

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^4 x\, dx &= \tfrac{1}{4}\int \left[1 - 2\cos 2x + \tfrac{1}{2}(1 + \cos 4x)\right] dx \\ &= \tfrac{1}{4}\int \left(\tfrac{3}{2} - 2\cos 2x + \tfrac{1}{2}\cos 4x\right) dx \\ &= \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{3}{2}x - \operatorname{sen} 2x + \tfrac{1}{8}\operatorname{sen} 4x\right) + C\end{aligned}$$

Para resumirmos, listamos as regras que devem ser seguidas ao calcular integrais da forma $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x \, dx$, em que $m \geqslant 0$ e $n \geqslant 0$ são inteiros.

ESTRATÉGIA PARA CALCULAR $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x \, dx$

(a) Se a potência do cosseno é ímpar ($n = 2k + 1$), guarde um fator cosseno e use $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$ para expressar os fatores restantes em termos de seno:

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}^m x \cos^{2k+1} x \, dx &= \int \operatorname{sen}^m x \, (\cos^2 x)^k \cos x \, dx \\ &= \int \operatorname{sen}^m x \, (1 - \operatorname{sen}^2 x)^k \cos x \, dx \end{aligned}$$

A seguir, substitua $u = \operatorname{sen} x$.

(b) Se a potência do seno é ímpar ($m = 2k + 1$), guarde um fator seno e use $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$ para expressar os fatores restantes em termos de cosseno:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^{2k+1} x \cos^n x \, dx &= \int (\operatorname{sen}^2 x)^k \cos^n x \ \operatorname{sen} x \, dx \\ &= \int (1 - \cos^2 x)^k \cos^n x \ \operatorname{sen} x \, dx\end{aligned}$$

A seguir, substitua $u = \cos x$. [Observe que se ambas as potências de seno e cosseno forem ímpares, podemos usar (a) ou (b).]

(c) Se as potências de seno e cosseno forem pares, utilizamos as identidades dos ângulos-metade

$$\operatorname{sen}^2 x = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2x) \qquad \cos^2 x = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

Algumas vezes é útil usar a identidade

$$\operatorname{sen} x \cos x = \tfrac{1}{2} \operatorname{sen} 2x$$

Podemos empregar uma estratégia semelhante para calcular integrais da forma $\int \operatorname{tg}^m x \sec^n x \, dx$. Como $(d/dx) \operatorname{tg} x = \sec^2 x$, podemos separar um fator $\sec^2 x$ e converter a potência (par) da secante restante em uma expressão envolvendo a tangente, utilizando a identidade $\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$. Ou, como $(d/dx) \sec x = \sec x \operatorname{tg} x$, podemos separar um fator $\sec x \operatorname{tg} x$ e converter a potência (par) da tangente restante para a secante.

EXEMPLO 5 Calcule $\int \operatorname{tg}^6 x \sec^4 x \, dx$.

SOLUÇÃO Se separarmos um fator $\sec^2 x$, poderemos expressar o fator $\sec^2 x$ em termos de tangente, usando a identidade $\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$. Podemos então calcular a integral, substituindo $u = \operatorname{tg} x$, de modo que $du = \sec^2 x \, dx$:

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{tg}^6 x \sec^4 x \, dx &= \int \operatorname{tg}^6 x \sec^2 x \sec^2 x \, dx \\
&= \int \operatorname{tg}^6 x \, (1 + \operatorname{tg}^2 x) \sec^2 x \, dx \\
&= \int u^6 (1 + u^2) \, du = \int (u^6 + u^8) \, du \\
&= \frac{u^7}{7} + \frac{u^9}{9} + C \\
&= \tfrac{1}{7} \operatorname{tg}^7 x + \tfrac{1}{9} \operatorname{tg}^9 x + C
\end{aligned}$$

EXEMPLO 6 Encontre $\int \operatorname{tg}^5\theta \sec^7\theta \, d\theta$.

SOLUÇÃO Se separarmos um fator $\sec^2\theta$ como no exemplo anterior, ficaremos com um fator $\sec^5\theta$, que não é facilmente convertido para tangente. Contudo, se separarmos um fator $\sec\theta \operatorname{tg}\theta$, poderemos converter a potência restante de tangente em uma expressão envolvendo apenas a secante, usando a identidade $\operatorname{tg}^2\theta = \sec^2\theta - 1$. Poderemos então calcular a integral substituindo $u = \sec\theta$, de modo que $du = \sec\theta \operatorname{tg}\theta \, d\theta$:

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{tg}^5\theta \sec^7\theta \, d\theta &= \int \operatorname{tg}^4\theta \sec^6\theta \sec\theta \operatorname{tg}\theta \, d\theta \\
&= \int (\sec^2\theta - 1)^2 \sec^6\theta \sec\theta \operatorname{tg}\theta \, d\theta \\
&= \int (u^2 - 1)^2 u^6 \, du \\
&= \int (u^{10} - 2u^8 + u^6) \, du \\
&= \frac{u^{11}}{11} - 2\frac{u^9}{9} + \frac{u^7}{7} + C \\
&= \tfrac{1}{11}\sec^{11}\theta - \tfrac{2}{9}\sec^9\theta + \tfrac{1}{7}\sec^7\theta + C
\end{aligned}$$

Os exemplos anteriores mostram as estratégias para calcular integrais da forma $\int \operatorname{tg}^m x \sec^n x \, dx$ para dois casos, resumidos aqui.

ESTRATÉGIA PARA CALCULAR $\int \operatorname{tg}^m x \sec^n x \, dx$

(a) Se a potência da secante é par ($n = 2k$, $k \geqslant 2$), guarde um fator de $\sec^2 x$ e use $\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$ para expressar os fatores restantes em termos de $\operatorname{tg} x$:

$$\int \operatorname{tg}^m x \sec^{2k} x \, dx = \int \operatorname{tg}^m x \, (\sec^2 x)^{k-1} \sec^2 x \, dx$$

$$= \int \operatorname{tg}^m x \, (1 + \operatorname{tg}^2 x)^{k-1} \sec^2 x \, dx$$

A seguir, substitua $u = \operatorname{tg} x$.

(b) Se a potência da tangente for ímpar ($m = 2k + 1$), guarde um fator de $\sec x \operatorname{tg} x$ e use $\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1$ para expressar os fatores restantes em termos de $\sec x$:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{tg}^{2k+1} x \sec^n x \, dx &= \int (\operatorname{tg}^2 x)^k \sec^{n-1} x \, \sec x \, \operatorname{tg} x \, dx \\ &= \int (\sec^2 x - 1)^k \sec^{n-1} x \, \sec x \, \operatorname{tg} x \, dx\end{aligned}$$

A seguir, substitua $u = \sec x$.