Aula 6 - Área Entre Curvas

Prof. Dr. Edward Landi Tonucci

28 de março de 2022

6.1 Áreas entre as Curvas

No Capítulo 5 definimos e calculamos áreas de regiões sob gráficos de funções. Aqui, usaremos as integrais para encontrar áreas de regiões entre gráficos de duas funções.

Considere a região S que se encontra entre duas curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ e entre as retas verticais $x = a$ e $x = b$, onde f e g são funções contínuas e $f(x) \geqslant g(x)$ para todo x em $[a, b]$. (Veja a Figura 1.)

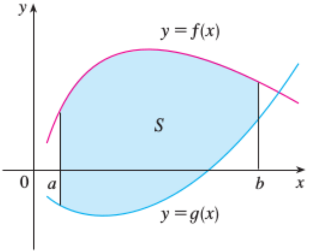
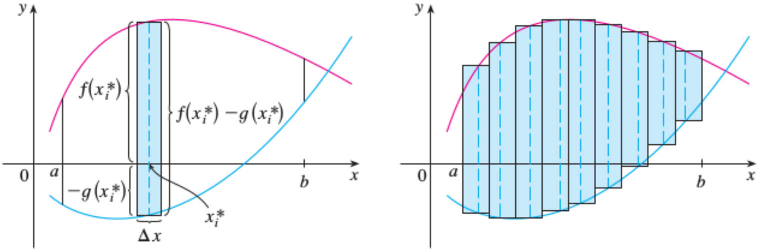


FIGURA 1
$S = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b, g(x) \leqslant y \leqslant f(x)\}$

Assim como fizemos para as áreas sob as curvas na Seção 5.1, dividimos S em n faixas de larguras iguais e então aproximamos a i-ésima faixa por um retângulo com base Δx e altura $f(x_i^*) - g(x_i^*)$. (Veja a Figura 2. Se quiséssemos, poderíamos tomar todos os pontos de amostrais como as extremidades direitas, de modo que $x_i^* = x_i$.) A soma de Riemann

$$\sum_{i=1}^{n} [f(x_i^*) - g(x_i^*)]\,\Delta x$$

é, portanto, uma aproximação do que intuitivamente pensamos como a área de S.



(a) Retângulo típico

(b) Retângulos aproximantes

Esta aproximação parece tornar-se cada vez melhor quando $n \to \infty$. Portanto, definimos a **área** A da região S como o valor-limite da soma das áreas desses retângulos aproximantes.

1

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} [f(x_i^*) - g(x_i^*)] \Delta x$$

Reconhecemos o limite em $\boxed{1}$ assim como a integral definida de $f - g$. Portanto, temos a seguinte fórmula para a área.

$\boxed{2}$ A área A da região limitada pelas curvas $y = f(x)$, $y{=}g(x)$ e pelas retas $x = a$, $x = b$, onde f e g são contínuas e $f(x) \geqslant g(x)$ para todo x em $[a, b]$, é

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$$

Observe que, no caso especial onde $g(x) = 0$, S é a região sob o gráfico de f e a nossa definição geral de área $\boxed{1}$ se reduz à nossa definição anterior (Definição 2 na Seção 5.1).

No caso em que f e g forem ambas positivas, você pode ver na Figura 3 por que $\boxed{2}$ é verdadeira:

$$\begin{aligned} A &= [\text{área sob } y = f(x)] - [\text{área sob } y = g(x)] \\ &= \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx \end{aligned}$$

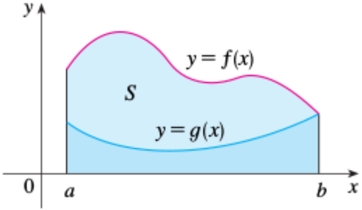
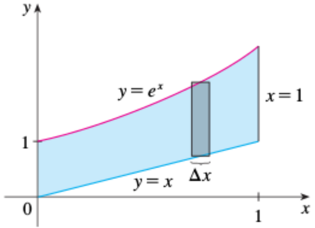


FIGURA 3

$$A = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

EXEMPLO 1 Encontre a área da região limitada acima por $y = e^x$, limitada abaixo por $y = x$, e limitada nos lados por $x = 0$ e $x = 1$.

SOLUÇÃO A região é mostrada na Figura 4. A curva limitante superior é $y = e^x$ e a curva limitante inferior é $y = x$. Então, usamos a fórmula da área $\boxed{2}$ com $f(x) = e^x$, $g(x) = x$, $a = 0$ e $b=1$:



$$A = \int_0^1 (e^x - x)\, dx = e^x - \tfrac{1}{2}x^2\Big]_0^1$$

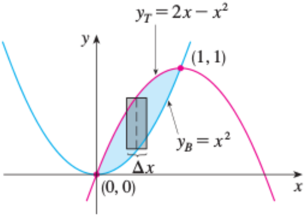
$$= e - \tfrac{1}{2} - 1 = e - 1{,}5$$

EXEMPLO 2 Encontre a área da região delimitada pelas parábolas $y = x^2$ e $y = 2x - x^2$.

SOLUÇÃO Primeiro encontramos os pontos de intersecção das parábolas, resolvendo suas equações simultaneamente. Isso resulta em $x^2 = 2x - x^2$ ou $2x^2 - 2x = 0$. Portanto, $2x(x - 1) = 0$, então $x = 0$ ou 1. Os pontos de intersecção são (0, 0) e (1, 1).

Vemos na Figura 6 que os limites superior e inferior são

$$y_T = 2x - x^2 \qquad \text{e} \qquad y_B = x^2$$



Então, a área total é

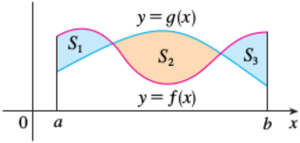
$$A = \int_0^1 (2x - 2x^2)\,dx = 2\int_0^1 (x - x^2)\,dx$$

$$= 2\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

Para encontrarmos a área entre as curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ onde $f(x) \geqslant g(x)$ para alguns valores de x, mas $g(x) \geqslant f(x)$ para outros valores de x, então dividimos determinada região S em várias regiões $S_1, S_2, \ldots$ com áreas $A_1, A_2, \ldots$ como mostrado na Figura 9. Em seguida, definimos a área da região S como a soma das áreas das regiões menores $S_1, S_2, \ldots$, ou seja, $A = A_1 + A_2 + \cdots$. Uma vez que

$$|f(x) - g(x)| = \begin{cases} f(x) - g(x) & \text{onde } f(x) \geqslant g(x) \\ g(x) - f(x) & \text{onde } g(x) \geqslant f(x) \end{cases}$$

temos a seguinte expressão para A.

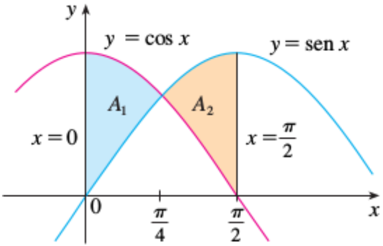


$\boxed{3}$ A área entre as curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ e entre $x = a$ e $x = b$ é

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$$

Quando calculamos a integral em $\boxed{3}$, no entanto, ainda temos que dividi-la em integrais correspondentes a A_1, A_2, ...

EXEMPLO 5 Encontre a área da região delimitada pelas curvas $y = \text{sen } x$, $y = \cos x$, $x = 0$ e $x = \pi/2$.


y
y = cos x
y = sen x
A1
A2
x = 0
x = π/2
0
π/4
π/2
x

SOLUÇÃO Os pontos de intersecção ocorrem quando sen x = cos x, isto é, quando $x = \pi/4$ (considerando que $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$). A região é esboçada na Figura 10. Observe que cos $x \geqslant$ sen x quando $0 \leqslant x \leqslant \pi/4$, mas sen $x \geqslant$ cos x quando $\pi/4 \leqslant x \leqslant \pi/2$. Portanto, a área requerida é

$$
\begin{aligned}
A &= \int_0^{\pi/2} |\cos x - \operatorname{sen} x|\, dx = A_1 + A_2 \\
&= \int_0^{\pi/4} (\cos x - \operatorname{sen} x)\, dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\operatorname{sen} x - \cos x)\, dx \\
&= \left[\operatorname{sen} x + \cos x\right]_0^{\pi/4} + \left[-\cos x - \operatorname{sen} x\right]_{\pi/4}^{\pi/2} \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - 0 - 1\right) + \left(-0 - 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\
&= 2\sqrt{2} - 2
\end{aligned}
$$

Neste exemplo particular, poderíamos ter economizado algum trabalho por perceber que a região é simétrica em torno de $x = \pi/4$ e, assim,

$$A = 2A_1 = 2 \int_0^{\pi/4} (\cos x - \operatorname{sen} x)\, dx$$

Algumas regiões são mais bem tratadas considerando x como uma função de y. Se uma região é delimitada por curvas com equações $x = f(y)$, $x = g(y)$, $y = c$ e $y = d$, em que f e g são contínuas e $f(y) \geqslant g(y)$ para $c \leqslant y \leqslant d$ (veja a Figura 11), então sua área é

$$A = \int_c^d [f(y) - g(y)]\, dy$$

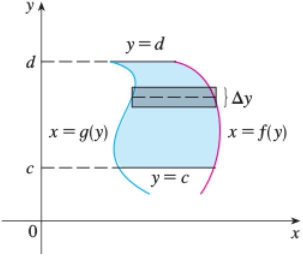


FIGURA 11

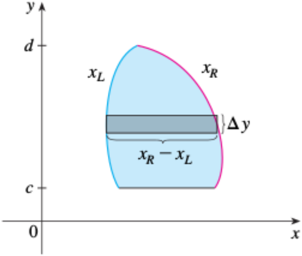


FIGURA 12

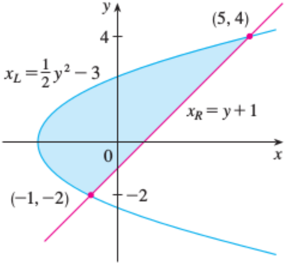
Se escrevermos x_R para o limite à direita e x_L para o limite à esquerda, então, como ilustra a Figura 12, teremos

$$A = \int_c^d (x_R - x_L)\, dy$$

EXEMPLO 6 Encontre a área delimitada pela reta $y = x - 1$ e pela parábola $y^2 = 2x + 6$.

SOLUÇÃO Ao resolvermos as duas equações, vemos que os pontos de intersecção são $(-1, -2)$ e $(5, 4)$. Isolamos x na equação da parábola e observamos pela Figura 13 que as curvas de fronteira à esquerda e à direita são

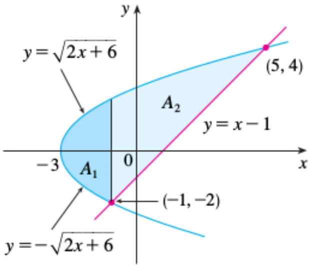
$$x_L = \tfrac{1}{2}y^2 - 3 \qquad \text{e} \qquad x_R = y + 1$$



Devemos integrar entre os valores apropriados de $y = -2$ e $y = 4$. Logo,

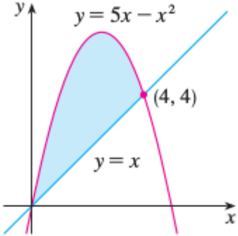
$$
\begin{aligned}
A &= \int_{-2}^{4} (x_R - x_L)\, dy \\
&= \int_{-2}^{4} \left[(y + 1) - \left(\tfrac{1}{2}y^2 - 3\right)\right] dy \\
&= \int_{-2}^{4} \left(-\tfrac{1}{2}y^2 + y + 4\right) dy \\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{y^3}{3}\right) + \frac{y^2}{2} + 4y \Bigg]_{-2}^{4} \\
&= -\tfrac{1}{6}(64) + 8 + 16 - \left(\tfrac{4}{3} + 2 - 8\right) = 18
\end{aligned}
$$

OBSERVAÇÃO Poderíamos ter encontrado a área no Exemplo 6, integrando em relação a x em vez de y, mas o cálculo é muito mais complicado. Isso significaria dividir a região em duas e calcular as áreas marcadas A_1 e A_2 na Figura 14. O método que usamos no Exemplo 6 é *muito* mais fácil.

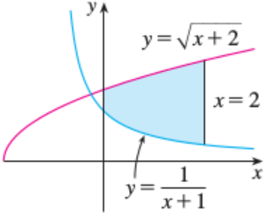


1–4 Encontre a área da região sombreada.

1.



2.



5–12 Esboce a região delimitada pelas curvas indicadas. Decida quando integrar em relação a x ou y. Então, calcule a área da região.

5. $y = e^x, \quad y = x^2 - 1, \quad x = -1, \quad x = 1$

12. $4x + y^2 = 12, \quad x = y$