Merged problem

$$min.\ \sum_{\phi}\sum_{s\in Q}\sum_{ij\in E} t_{ij}x_{ij}^{\phi s} + \alpha\sum_{ij\in E}\frac{\eta_{ij}\sum_{s\in Q}x_{ij}^{ps}}{u_{ij}} \tag{1}$$

subject to

$$\sum_{n|j=n,ij\in E} x_{ij}^{\phi s} - \sum_{n|i=n,ij\in E} x_{ij}^{\phi s} = b_n^{\phi s}\ \forall n\in N,\ s\in Q,\ \phi\in\{p,c\} \tag{2}$$

$$0 \le \sum_{s\in Q} x_{ij}^{cs} + \eta_{ij}\sum_{s\in Q} x_{ij}^{ps} \le u_{ij}\ \forall ij\in E \tag{3}$$

$$x_{ij}^{cs},\ x_{ij}^{ps} \ge 0\ \forall ij\in E,\ s\in Q \tag{4}$$

Dual of this problem

$$max.\ \sum_{\phi}\sum_{s\in Q}\sum_{n\in N} b_n^{\phi s}\theta_n^{\phi s} - \sum_{ij\in E}\lambda_{ij}u_{ij} \tag{6}$$

subject to

$$-\theta_i^{cs} + \theta_j^{cs} - \lambda_{ij} \le t_{ij}\ \forall ij\in E, s\in Q \tag{7}$$

$$-\theta_i^{ps} + \theta_j^{ps} - \lambda_{ij} \le t_{ij} + \alpha\frac{\eta_{ij}}{u_{ij}}\ \forall ij\in E, s\in Q \tag{8}$$

$$\lambda_{ij} \ge 0\ \forall ij\in E \tag{9}$$

Dual complementarity condition

$$\lambda_{ij}^*(u_{ij} - \sum_{s\in Q} x_{ij}^{cs*} - \eta_{ij}\sum_{s\in Q} x_{ij}^{ps*}) = 0\ \forall ij\in E, s\in Q \tag{10}$$

$$\lambda_{ij}^* \ge 0\ \forall ij\in E \tag{11}$$

$$u_{ij} - \sum_{s\in Q} x_{ij}^{cs*} - \eta_{ij}\sum_{s\in Q} x_{ij}^{ps*} \ge 0\ \forall ij\in E, s\in Q \tag{12}$$

Primal complementarity condition

$$\sum_{s \in Q} x_{ij}^{cs*}(t_{ij} + \theta_i^{cs*} - \theta_j^{cs*} + \lambda_{ij}{}^*) = 0 \quad \forall (i,j) \in E \tag{13}$$

$$\sum_{s \in Q} x_{ij}^{cs*} \geqq 0 \quad \forall (i,j) \in E \tag{14}$$

$$t_{ij} + \theta_i^{cs*} - \theta_j^{cs*} + \lambda_{ij}{}^* \geqq 0 \quad \forall (i,j) \in E, s \in Q \tag{15}$$

$$\sum_{s \in Q} x_{ij}^{ps*}(t_{ij} + \alpha \frac{\eta_{ij}}{u_{ij}} + \theta_i^{ps*} - \theta_j^{ps*} + \eta_{ij}\lambda_{ij}{}^*) = 0 \quad \forall (i,j) \in E \tag{16}$$

$$\sum_{s \in Q} x_{ij}^{ps*} \geqq 0 \quad \forall (i,j) \in E \tag{17}$$

$$t_{ij} + \alpha \frac{\eta_{ij}}{u_{ij}} + \theta_i^{ps*} - \theta_j^{ps*} + \eta_{ij}\lambda_{ij}{}^* \geqq 0 \quad \forall (i,j) \in E, s \in Q \tag{18}$$

Proposition 1

- λ_{ij}^* represents the link delay time that appears when the capacity constraint is activated.

Proof.

- λ_{ij}^* is always determined as following equation due to the complementarity slackness condition.

$$\lambda_{ij}^* \begin{cases} = 0 & \text{if} \quad 0 \leqq \sum_{s \in Q} x_{ij}^{cs*} + \eta_{ij} \sum_{s \in Q} x_{ij}^{ps*} < u_{ij} \\ \geq 0 & \text{if} \quad \sum_{s \in Q} x_{ij}^{cs*} + \eta_{ij} \sum_{s \in Q} x_{ij}^{ps*} = u_{ij} \end{cases}$$

Proposition 2

- The solution of MMCF of **car** is consistent with the UE condition equation.

Proof.

- There are four possible cases.

	car	sum	$\lambda_{ij}{}^*$
C1	0	$0 \leq \sum_{s \in Q} x_{ij}^{ps*} < u_{ij}$	0
C2	$0 < \sum_{s \in Q} x_{ij}^{cs*} < u_{ij}$	$0 \leq \sum_{s \in Q} x_{ij}^{cs*} + \eta_{ij} \sum_{s \in Q} x_{ij}^{ps*} < u_{ij}$	0
C3	0	u_{ij}	+
C4	$0 < \sum_{s \in Q} x_{ij}^{cs*} \leq u_{ij}$	u_{ij}	+

- When $0 < \sum_{s \in Q} x_{ij}^{cs*} + \eta_{ij} \sum_{s \in Q} x_{ij}^{ps*} < u_{ij}$, that is, when the capacity constraint is **not activated**, ${\lambda_{ij}}^* = 0$ and ${\theta_n}^{cs*}$ satisfies the following two conditions.(C1 and C2)

$$\begin{cases} \theta_j^{cs*} \leq t_{ij} + \theta_i^{cs*} & \text{if} \quad \sum_{s \in Q} x_{ij}^{cs*} = 0 \\ \theta_j^{cs*} = t_{ij} + \theta_i^{cs*} & \text{if} \quad 0 < \sum_{s \in Q} x_{ij}^{cs*} < u_{ij} \end{cases} \tag{20}$$

- When $\sum_{s \in Q} x_{ij}^{cs*} + \eta_{ij} \sum_{s \in Q} x_{ij}^{ps*} = u_{ij}$, that is, when the capacity constraint is **activated**, ${\lambda_{ij}}^*(\geq 0)$ and ${\theta_n}^{cs*}$ satisfies the following two conditions.(C3 and C4)

$$\begin{cases} \theta_j^{cs*} \leq t_{ij} + {\lambda_{ij}}^* + \theta_i^{cs*} & \text{if} \quad \sum_{s \in Q} x_{ij}^{cs*} = 0 \\ \theta_j^{cs*} = t_{ij} + {\lambda_{ij}}^* + \theta_i^{cs*} & \text{if} \quad 0 < \sum_{s \in Q} x_{ij}^{cs*} \leq u_{ij} \end{cases} \tag{21}$$

- eq.(20) and eq.(21) can be interpreted as follows.
    - When $\sum_{s \in Q} x_{ij}^{cs*} = 0$, that is, when (i, j) links are not used, the sum of zero-flow cost(or equilibrium cost: $t_{ij} + \lambda_{ij}^*$) and the potential of the link origin node is greater than the potential of the link terminal node.
    - When $\sum_{s \in Q} x_{ij}^{cs*} > 0$, that is, when (i, j) link flows exist, the shortest path cost from the origin s to j is the sum of zero-flow cost(or equilibrium cost) and the shortest path cost to i.
- From the above, it is shown that the solution of MMCF of **car** satisfies definition of the UE condition.

Remarks

- Whether the solution of **PT** satisfies UE condition is not clear.
- There 7 possible cases.

	car	PT	sum	
C1	0	0	0	
C2	0	$0 < \eta_{ij} \sum_{s \in Q} x_{ij}^{ps*} < u_{ij}$	$0 < \eta_{ij} \sum_{s \in Q} x_{ij}^{ps*} < u_{ij}$	
C3	0	u_{ij}	u_{ij}	
C4	$0 < \sum_{s \in Q} x_{ij}^{cs*} < u_{ij}$	0	$0 < \sum_{s \in Q} x_{ij}^{cs*} < u_{ij}$	
C5	$0 < \sum_{s \in Q} x_{ij}^{cs*} < u_{ij}$	$0 < \eta_{ij} \sum_{s \in Q} x_{ij}^{ps*} < u_{ij}$	$0 < \sum_{s \in Q} x_{ij}^{cs*} + \eta_{ij} \sum_{s \in Q} x_{ij}^{ps*} < u_{ij}$	
C6	$0 < \sum_{s \in Q} x_{ij}^{cs*} < u_{ij}$	$0 < \eta_{ij} \sum_{s \in Q} x_{ij}^{ps*} < u_{ij}$	u_{ij}	
C7	u_{ij}	0	u_{ij}	

- When $\sum_{s \in Q} x_{ij}^{cs*} = 0$,
(i)If $\sum_{s \in S} x_{ij}^{ps*} = 0$(case C1)

$$\theta_j^{ps*} \leq t_{ij} + \alpha\frac{\eta_{ij}}{u_{ij}} + \theta_i^{ps*}$$
$$\theta_j^{cs*} \leq t_{ij} + \theta_i^{cs*}$$

(ii)If $0 < \eta_{ij}\sum_{s\in Q} x_{ij}^{ps*} < u_{ij}$(case C2)

$$\theta_j^{ps*} = t_{ij} + \alpha\frac{\eta_{ij}}{u_{ij}} + \theta_i^{ps*}$$
$$\theta_j^{cs*} \leq t_{ij} + \theta_i^{cs*}$$

(iii)If $\eta_{ij}\sum_{s\in Q} x_{ij}^{ps*} = u_{ij}$(case C3)

$$\theta_j^{ps*} = t_{ij} + \alpha\frac{\eta_{ij}}{u_{ij}} + \eta_{ij}\lambda_{ij}^* + \theta_i^{ps*}$$
$$\theta_j^{cs*} \leq t_{ij} + \lambda_{ij}^* + \theta_i^{cs*}$$

- When $0 < \sum_{s\in Q} x_{ij}^{cs*} < u_{ij}$,
  (i)If $\sum_{s\in S} x_{ij}^{ps*} = 0$(case C4)

$$\theta_j^{ps*} \leq t_{ij} + \alpha\frac{\eta_{ij}}{u_{ij}} + \theta_i^{ps*}$$
$$\theta_j^{cs*} = t_{ij} + \theta_i^{cs*}$$

  (ii)If $0 < \eta_{ij}\sum_{s\in Q} x_{ij}^{ps*} < u_{ij}$ and $0 < \sum_{s\in Q} x_{ij}^{cs*} + \eta_{ij}\sum_{s\in Q} x_{ij}^{ps*} < u_{ij}$(case C5)

$$\theta_j^{ps*} = t_{ij} + \alpha\frac{\eta_{ij}}{u_{ij}} + \theta_i^{ps*}$$
$$\theta_j^{cs*} = t_{ij} + \theta_i^{cs*}$$

  (iii)If $0 < \eta_{ij}\sum_{s\in Q} x_{ij}^{ps*} < u_{ij}$ and $\sum_{s\in Q} x_{ij}^{cs*} + \eta_{ij}\sum_{s\in Q} x_{ij}^{ps*} = u_{ij}$(case C6)

$$\theta_j^{ps*} = t_{ij} + \alpha\frac{\eta_{ij}}{u_{ij}} + \eta_{ij}\lambda_{ij}^* + \theta_i^{ps*}$$
$$\theta_j^{cs*} = t_{ij} + \lambda_{ij}^* + \theta_i^{cs*}$$

- When $\sum_{s\in Q} x_{ij}^{cs*} = u_{ij}$(case C7),

$$\theta_j^{ps*} \leq t_{ij} + \alpha\frac{\eta_{ij}}{u_{ij}} + \eta_{ij}\lambda_{ij}^* + \theta_i^{ps*}$$
$$\theta_j^{cs*} = t_{ij} + \lambda_{ij}^* + \theta_i^{cs*}$$