

## Cours 3: La Transformée de Fourier Discrète

Responsable : Jonathan Vacher (jonathan.vacher@u-paris.fr)  
Contributeurs/contributrices : E. Provenzi, C. Sutour, E. Luçon, Q. Denoyelle.

Le but de ce chapitre est d'analyser des signaux discrets (*i.e.* des suites) périodiques. Pour cela nous allons appliquer le formalisme du chapitre précédent. La Transformée de Fourier Discrète (ou *Discrete Fourier Transform*, DFT) a de nombreuses applications, en particulier dans le cadre de la théorie des signaux. Dans ce cours on fixe  $N \geq 1$  un entier.

# 1 L'espace des suites complexes $N$ -périodiques

## 1.1 Rappels sur les Nombres Complexes

On rappelle les formules et définitions suivantes :

- (i) Pour tout  $z \in \mathbb{C}$ , il existe  $(\rho, \alpha) \in \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi[$  tels que

$$z = \rho e^{i\alpha} = \rho(\cos \alpha + i \sin \alpha), \quad (\text{Forme Polaire})$$

- (ii) Pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

$$\cos \alpha = \frac{1}{2}(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}) \quad \text{et} \quad \sin \alpha = \frac{1}{2i}(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}). \quad (\text{Formules d'Euler})$$

- (iii) Pour tout  $z \in \mathbb{C}$

$$|z| = 1 \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}, \quad z = e^{i\alpha}.$$

- (iv) Pour tout  $(\alpha, k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ ,  $e^{i\alpha} = e^{i(\alpha + 2\pi k)}$ .

- (v) Pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $e^{2\pi i k} = 1$ .

- (vi) Pour tout  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$e^{i\alpha} e^{i\beta} = e^{i(\alpha + \beta)}, \quad (e^{i\alpha})^n = e^{in\alpha} \quad \text{et} \quad (e^{i\alpha})^* = e^{-i\alpha}.$$

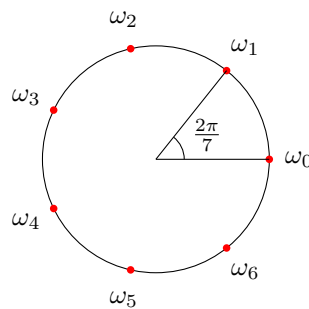
- (vii) Soit  $z = \rho e^{i\alpha}$ , l'équation  $w^N = z$  admet  $N$  racines complexes données pour  $m \in \{1, \dots, N-1\}$  par

$$z_m = \sqrt[N]{\rho} e^{i \frac{2\pi m + \alpha}{N}}. \quad (\text{Racines } N\text{-ième d'un Nombre Complexe})$$

En particulier, les *racines  $N$ -ièmes de l'unité* sont définies par

$$\omega_m = e^{i \frac{2\pi m}{N}}. \quad (\text{Racines } N\text{-ième de l'Unité})$$

On note que  $\omega_m = \omega_1^m$ .



Racines 7-ième  
de l'unité

**FIGURE 1.** Illustration représentant les racines 7-ième de l'unité.

On rappelle enfin la formule usuelle de sommation géométrique :

**Lemme 1** (Somme des Termes d'une Suite Géométrique). *Pour  $k \geq 1$ , on a*

$$\sum_{j=0}^k z^j = \begin{cases} \frac{1-z^{k+1}}{1-z} & \text{si } z \in \mathbb{C} \setminus \{1\} \\ k+1 & \text{si } z = 1. \end{cases}$$

**Démonstration.** Voir cours manuscrit. □

## 1.2 Définition, Structure d'Espace Vectoriel et Dimension

**Définition 1.** Soit  $z = (z_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  une suite de nombres complexes (indexée par  $\mathbb{Z}$ ). On dit que  $z$  est périodique de période  $N$  ssi pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $z_k = z_{k+N}$  (ou plus simplement  $N$ -périodique). On note  $\ell_N$  l'ensemble des suites périodiques de période  $N$ .

*Remarque 1.* L'ensemble  $\ell_N$  peut être muni des opérations de somme et de multiplication scalaire usuelles i.e. pour  $(y, z) \in \ell_N^2$  la suite somme  $y + z$ , et la suite produit par un nombre complexe  $\alpha \in \mathbb{C}$ ,  $\alpha z$ , sont définies par

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad (y + z)_k = y_k + z_k \quad \text{et} \quad (\alpha z)_k := \alpha z_k.$$

L'espace  $(\ell_N, +, \cdot)$  est alors un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel.

*Exemple 1.* Définissons la suite  $z = (\dots, 1, i, -i, \sqrt{2}i, 1, i, -i, \sqrt{2}i, 1, i, -i, \sqrt{2}i, \dots)$  où les points suspensions indiquent que la même séquence de nombre complexe se répète indéfiniment vers  $-\infty$  et  $+\infty$ . On se fixera le terme d'indice 0,  $z_0 = 1$ . La suite  $z$  est 4-périodique. Pour définir  $z$ , il suffit en fait de donner  $(z_0, z_1, z_2, z_3) = (1, i, -i, \sqrt{2}i)$  et de dire que c'est une suite 4-périodique. On peut déterminer la valeur de n'importe quel terme de la suite  $z_k$  en effectuant la division Euclidienne de l'indice  $k$  par  $N$ . On a  $k = Nq + r$  avec  $r \in \{0, \dots, N-1\}$  et ainsi  $z_k = z_r$ . Par exemple  $-18 = 4(-5) + 2$ , ainsi  $z_{-18} = z_2 = -i$ .

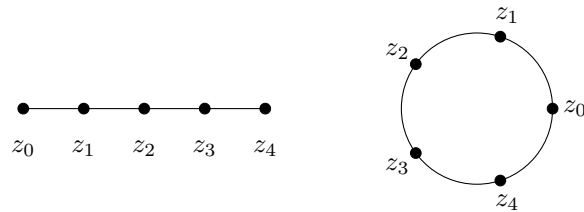
**Théorème 1** (Dimension et Base Canonique de  $\ell_N$ ). *L'espace vectoriel  $\ell_N$  des suites  $N$ -périodique est de dimension  $N$ . La famille  $\mathcal{B} = \{e_0, \dots, e_{N-1}\}$ , où pour tout  $k \in \{0, \dots, N-1\}$ , la suite  $e_k$  est définie par*

$$\forall l \in \mathbb{Z}, \quad e_{k,l} = \begin{cases} 1 & l \equiv k \pmod{N} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

*est une base de  $\ell_N$ . C'est la base dites canonique.*

**Démonstration.** Voir cours manuscrit. □

Le théorème 1 permet de réaliser que l'espace des vecteurs complexes de tailles  $N$  et l'espace des suites  $N$ -périodiques sont en fait presque entièrement similaire. La différence est en fait topologique c'est-à-dire que pour une suite périodique les indices entiers en deçà de 0 et au delà de  $N-1$  ont un sens et ils sont obtenus par périodicité. En fait, dans  $\mathbb{C}^N$  on va représenter les coordonnées sur un segment alors que pour  $\ell_N$  on referme le segment par ses extrémités pour former un cercle (voir figure 2).



Les coordonnées d'un vecteur de  $\mathbb{C}^5$  représentées sur un segment.

Les coordonnées d'une suite 5-périodique représentées sur un cercle.

**FIGURE 2.** Illustration de la différence entre l'espace vectoriel des suites périodiques  $\ell_N$  et l'espace vectoriel  $\mathbb{C}^N$  pour  $N = 5$ .

**Théorème 2** (Structure Hermitienne). *L'espace vectoriel  $\ell_N$  munit de l'application  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  où*

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : \ell_N \times \ell_N &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (y, z) &\longmapsto \sum_{k=0}^{N-1} y_k \bar{z}_k \end{aligned}$$

*est un espace Hermitien.*

**Démonstration.** Voir cours manuscrit. □

*Remarque 2.* La norme induite par ce produit scalaire est

$$\|z\| = \left( \sum_{k=0}^{N-1} |z_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Dans les espaces Hermitiens, les bases orthogonales/orthonormales sont très pratiques car on peut écrire les coefficients d'un vecteur dans ces bases en calculant simplement le produit scalaire de ce vecteur avec les vecteurs de ces bases.

*Remarque 3.* La base canonique  $\mathcal{B}$  définie dans le théorème 1 est orthonormale pour le produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  défini dans le théorème 2.

On va voir qu'il existe une autre base orthogonales/orthonormale importante! C'est d'ailleurs celle-ci qui est à la base de la définition de la transformée de Fourier discrète.

### 1.3 La Base Orthogonale de Fourier (Exponentielles Complexes dans $\ell_N$ )

#### 1.3.1 Définition et Orthogonalité

**Définition 2** (Suites Exponentielles Complexes). *On définit la famille  $\mathcal{E} = \{\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_{N-1}\}$  des suites exponentielles complexes où pour tout  $m \in \{0, \dots, N-1\}$ , la suite  $\mathcal{E}_m$  est définie par*

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad \mathcal{E}_{m,k} = \exp\left(\frac{2i\pi km}{N}\right) = e^{\frac{2i\pi km}{N}} = (\omega_m)^k = (\omega_1)^{mk}$$

où  $\omega_m$  est la  $m$ -ième racine de l'unité.

*Remarque 4.* De façon plus explicite, on a

pour  $m = 0$ ,

$$(\mathcal{E}_{0,0}, \mathcal{E}_{0,1}, \dots, \mathcal{E}_{0,N-1}) = (1, 1, \dots, 1);$$

pour  $m = 1$ ,

$$\begin{aligned} (\mathcal{E}_{1,0}, \mathcal{E}_{1,1}, \dots, \mathcal{E}_{1,N-1}) &= \left(1, e^{\frac{2i\pi}{N}}, e^{\frac{4i\pi}{N}}, \dots, e^{\frac{2i\pi(N-1)}{N}}\right) \\ &= (1, \omega_1, \omega_1^2, \omega_1^3, \dots, \omega_1^{N-1}); \end{aligned}$$

pour  $m = 2$ ,

$$\begin{aligned} (\mathcal{E}_{2,0}, \mathcal{E}_{2,1}, \dots, \mathcal{E}_{2,N-1}) &= \left(1, e^{\frac{4i\pi}{N}}, e^{\frac{8i\pi}{N}}, \dots, e^{\frac{4i\pi(N-1)}{N}}\right) \\ &= (1, \omega_1^2, \omega_1^4, \omega_1^6, \dots, \omega_1^{2(N-1)}); \end{aligned}$$

pour  $m \in \{3, \dots, N-2\}$ ,

$$\begin{aligned} (\mathcal{E}_{m,0}, \mathcal{E}_{m,1}, \dots, \mathcal{E}_{m,N-1}) &= \left(1, e^{\frac{2i\pi m}{N}}, e^{\frac{4i\pi m}{N}}, \dots, e^{\frac{2i\pi(N-1)m}{N}}\right) \\ &= (1, \omega_1^m, \omega_1^{2m}, \omega_1^{3m}, \dots, \omega_1^{(N-1)m}); \end{aligned}$$

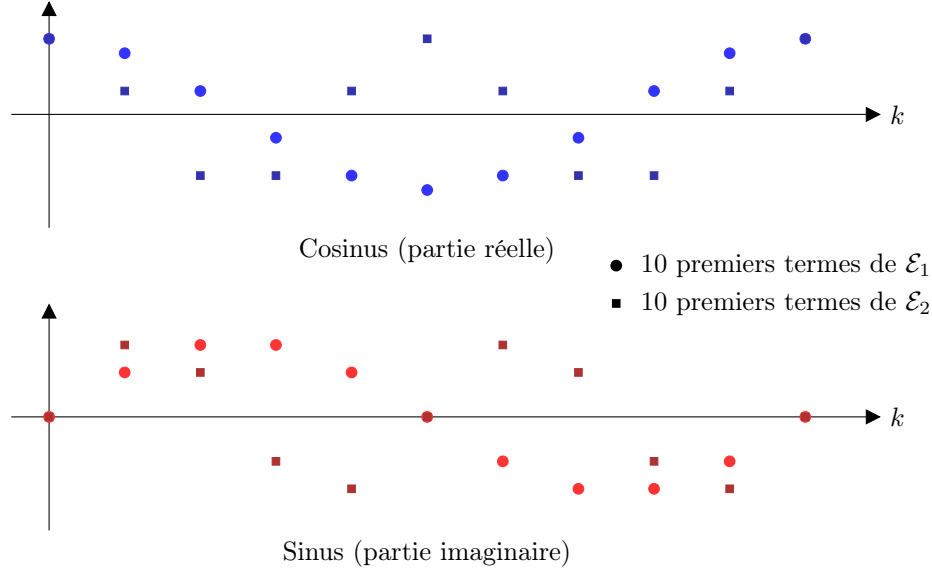
pour  $m = N-1$ ,

$$\begin{aligned} (\mathcal{E}_{N-1,0}, \mathcal{E}_{N-1,1}, \dots, \mathcal{E}_{N-1,N-1}) &= \left(1, e^{\frac{2i\pi(N-1)}{N}}, e^{\frac{4i\pi(N-1)}{N}}, \dots, e^{\frac{2i\pi(N-1)^2}{N}}\right) \\ &= (1, \omega_1^{N-1}, \omega_1^{2(N-1)}, \omega_1^{3(N-1)}, \dots, \omega_1^{(N-1)^2}). \end{aligned}$$

Remarque 5. La formule d'Euler permet d'écrire

$$\mathcal{E}_{m,k} = \exp\left(\frac{2i\pi km}{N}\right) = \cos\left(\frac{2\pi km}{N}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi km}{N}\right).$$

Ainsi les valeurs successives des parties réelles et imaginaires chaque suite  $\mathcal{E}_m$  oscillent selon des fréquences différentes (voir figure 3). Comme on le verra, la signification de ces fréquences a une importance centrale dans l'analyse de Fourier.



**FIGURE 3.** Exemples de suites de la famille des exponentielles complexes pour  $N = 10$ . Les suites  $\mathcal{E}_1$  et  $\mathcal{E}_2$  sont représentées.

**Théorème 3** (Base Orthogonales de  $\ell_N$ ). *La famille  $\mathcal{E}$  de la définition 2 est une famille de suites  $N$ -périodiques. De plus, elle forme une base orthogonale de  $\ell_N$ .*

Avant de démontrer le théorème 3, on va montrer le lemme suivant.

**Lemme 2.** *Pour tout  $k \in \mathbb{Z}$  on a*

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{2i\pi n \frac{k}{N}} = N\delta_k = \begin{cases} N & \text{si } k \equiv 0 \pmod{N} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

**Démonstration.** Voir cours manuscrit. □

On peut, maintenant, démontrer le théorème 3.

**Démonstration.** Voir cours manuscrit. □

Remarque 6. La famille  $\mathcal{E}$  n'est pas orthonormée, en effet pour tout  $m \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ ,

$$\|\mathcal{E}_m\| = \sqrt{N}.$$

### 1.3.2 Quelques Exemples

La méthode générale pour calculer les bases de Fourier de l'ensemble des suites  $N$ -périodiques pour différentes valeurs de  $N$  est basée sur le calcul des puissances successives des racines  $N$ -ième de l'unité (voir figure 4). C'est ni plus ni moins que l'application de la définition de la base de Fourier (2).

**Les suites complexes 2-périodiques** On calcul les 2 termes des deux suites de la base

$$\mathcal{E}_0 = (1, 1) \text{ et } \mathcal{E}_1 = \left(1, e^{2i\pi \frac{1-1}{2}}\right) = (1, e^{\pi i}) = (1, -1).$$

Ainsi la base de Fourier de  $\ell_2$  est

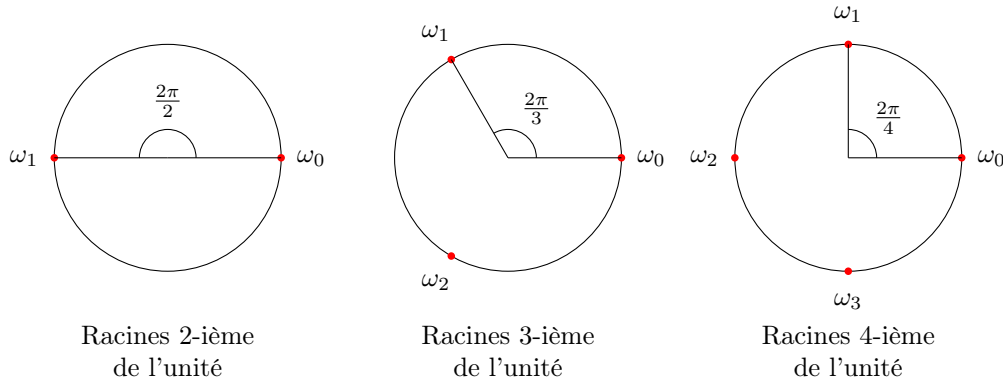
$$\mathcal{E} = ((1, 1), (1, -1)). \quad (1)$$

**Les suites complexes 3-périodiques** La base de Fourier de  $\ell_3$  est

$$\mathcal{E} = \left( (1, 1, 1), \left(1, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(1, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right). \quad (2)$$

**Les suite complexes 4-périodiques** La base de Fourier de  $\ell_4$  est

$$\mathcal{E} = ((1, 1, 1, 1), (1, i, -1, -i), (1, -1, 1, -1), (1, -i, -1, i)). \quad (3)$$



**FIGURE 4.** Illustration fondamentale permettant de calculer les bases de Fourier des espaces  $\ell_N$  pour  $N = 2, 3$  et  $4$ . Pour  $N = 3$ , il faut calculer les puissances successives de chacune des racines 3-ième de l'unité.

### 1.3.3 Conséquences

Les résultats des espaces Hermitiens s'appliquent. On peut donc exprimer simplement les coefficients d'une suite périodique dans la base Fourier à l'aide du produit scalaire. On a également les identités de Parseval et Plancherel. On rappelle

(i) la décomposition sur la base orthogonale  $\mathcal{E}$

$$z = \sum_{m=0}^{N-1} \frac{\langle z, \mathcal{E}_m \rangle}{N} \mathcal{E}_m,$$

(ii) l'Identité de Parseval

$$\langle z, w \rangle = \sum_{m=0}^{N-1} \frac{\langle z, \mathcal{E}_m \rangle \langle \mathcal{E}_m, w \rangle}{N},$$

(iii) et l'Identité de Plancherel

$$\|z\|^2 = \sum_{m=0}^{N-1} \frac{|\langle z, \mathcal{E}_m \rangle|^2}{N}.$$

## 1.4 La base orthonormale de Fourier de $\ell_N$

### 1.4.1 Définition

Dans la section précédente on a vu que la norme  $\ell_N$  de toutes les suites  $\mathcal{E}_m$  est  $\sqrt{N}$ , on peut donc construire une base orthonormale à partir de la base  $\mathcal{E}$  simplement en divisant ses vecteurs par  $\sqrt{N}$ .

**Définition 3** (Suites Exponentielles Complexes). On définit la famille  $\varepsilon = \{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{N-1}\}$  des suites exponentielles complexes normées où pour tout  $m \in \{0, \dots, N-1\}$ , la suite  $\varepsilon_m$  est définie par

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad \varepsilon_{m,k} = \frac{1}{\sqrt{N}} \mathcal{E}_{m,k} = \frac{1}{\sqrt{N}} \exp\left(\frac{2i\pi km}{N}\right)$$

où  $(\mathcal{E}_{m,k})_{m,k}$  sont les termes des suites de la base de Fourier (définition 2).

#### 1.4.2 Conséquences

La décomposition sur la base orthonormale  $\varepsilon$  et les identités de Parseval et Plancherel deviennent

$$z = \sum_{m=0}^{N-1} \frac{\langle z, \varepsilon_m \rangle}{N} \varepsilon_m, \quad \langle z, w \rangle = \sum_{m=0}^{N-1} \frac{\langle z, \varepsilon_m \rangle \langle \varepsilon_m, w \rangle}{N} \quad \text{et} \quad \|z\|^2 = \sum_{m=0}^{N-1} \frac{|\langle z, \varepsilon_m \rangle|^2}{N}.$$

#### 1.4.3 Autre choix de renormalisation

Certaines références (et implémentations) choisissent une renormalisation différente, dans le but d'écrire certaines formules de façon plus simple. Par exemple, il est possible de considérer une renormalisation en  $\frac{1}{\sqrt{N}}$  au lieu de  $\frac{1}{N}$  i.e. pour tout  $m \in \{0, \dots, N-1\}$ ,

$$\mathcal{E}'_m = \frac{\mathcal{E}_m}{\sqrt{N}}$$

Bien sûr, dans ce cas, la famille  $(\mathcal{E}'_0, \dots, \mathcal{E}'_{N-1})$  n'est plus orthonormée (mais elle reste orthogonale). Ce choix de renormalisation rend certaines formules plus simples mais complique d'autres. Il faut bien comprendre qu'il n'existe pas de renormalisation idéale, toutes ont des avantages et des inconvénients.

### 1.5 La base orthonormale de Fourier des suites $N$ -périodiques réelles

Bien que moins pratique, il est possible d'écrire la base de Fourier et la DFT sans utiliser l'exponentielle complexe. Ceci permet de d'écrire un signal réel  $z$  directement dans cette base de Fourier réelle sans introduire des composantes imaginaires (qui en réalité se simplifient). On donne ici la base de Fourier réelle orthonormale. Il faut distinguer si  $N$  est pair ou impair. On commence par le cas  $N$  pair, on a  $N = 2M$  avec  $M \in \mathbb{N}$ . Alors, pour tout  $n = \{0, \dots, N-1\}$ , on écrit

$$\begin{cases} c_{0,n} = \frac{1}{\sqrt{N}} \\ c_{m,n} = \sqrt{\frac{2}{N}} \cos\left(\frac{2\pi mn}{N}\right) & m = 1, 2, \dots, M-1 \\ c_{M,n} = \frac{1}{\sqrt{N}} \cos\left(\frac{2\pi \frac{N}{2} n}{N}\right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{N}} \\ s_{m,n} = \sqrt{\frac{2}{N}} \sin\left(\frac{2\pi mn}{N}\right) & m = 1, 2, \dots, M-1. \end{cases}$$

Si  $N$  est impair, alors on a  $N = 2M + 1$  avec  $M \in \mathbb{N}$  et on définit encore  $c_0$ ,  $c_m$  et  $s_m$  comme ci-dessus, mais on exclut le cas  $m = N/2$  car  $N/2$  n'est pas un nombre entier. On note  $\mathcal{C} = \{c_0, c_1, \dots, c_{M-1}, c_M\}$  (ou  $\{c_0, c_1, \dots, c_{M-1}\}$  si  $N$  est impair) et  $\mathcal{S} = \{s_1, \dots, s_{M-1}\}$ . On a le théorème suivant.

**Définition 4.** On appelle famille orthonormale réelle de Fourier de  $\ell_N$  les familles de suites  $\mathcal{C} \cup \mathcal{S}$ .

**Théorème 4.** La famille orthonormale réelle de Fourier  $\mathcal{C} \cup \mathcal{S}$  est une base orthonormale de  $\ell_N$ . Pour tout  $z \in \ell_N$ ,

$$\begin{aligned} z &= \sum_{m=0}^M \langle z, c_m \rangle c_m + \sum_{m=1}^{M-1} \langle z, s_m \rangle s_m \quad \text{si } N \text{ est pair,} \\ z &= \sum_{m=0}^{M-1} \langle z, c_m \rangle c_m + \sum_{m=1}^{M-1} \langle z, s_m \rangle s_m \quad \text{si } N \text{ est impair.} \end{aligned}$$

Il est donc possible de définir toute une transformée de Fourier réelle si l'on voulait. On se limitera ici à la définition sur les complexes dont découlerait de toutes façons la théorie réelle. La relation avec les

coefficients de Fourier (complexes) est donnée par les formules suivantes

$$\begin{cases} \langle z, c_0 \rangle = \frac{\hat{z}_0}{\sqrt{N}} \\ \langle z, c_M \rangle = \frac{\hat{z}_M}{\sqrt{N}} \\ \langle z, c_m \rangle = \frac{1}{\sqrt{2N}}(\hat{z}_m + \hat{z}(N-m)), & m \in \{1, \dots, M-1\} \\ \langle z, s_m \rangle = \frac{-i}{\sqrt{2N}}(\hat{z}_m - \hat{z}(N-m)), & m \in \{1, \dots, M-1\} \\ \hat{z}_0 = \sqrt{N} \langle z, c_0 \rangle \\ \hat{z}_M = \sqrt{N} \langle z, c_M \rangle \\ \hat{z}_m = \sqrt{N/2}(\langle z, c_m \rangle - i \langle z, s_m \rangle), & m \in \{1, \dots, M-1\} \\ \hat{z}_m = \sqrt{N/2}(\langle z, c_{N-m} \rangle + i \langle z, s_{N-m} \rangle), & m \in \{M+1, \dots, N-1\}. \end{cases}$$

## 2 La Transformée de Fourier Discrète (DFT) et son Inverse

### 2.1 Transformée de Fourier Discrète : des Échantillons aux Fréquences

La définition de la transformée de Fourier discrète change selon les auteurs et les applications. Les deux définitions les plus répandues utilisent la base orthonormale  $\varepsilon$  et un mélange des bases orthogonales  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{E}'$ . Ces deux choix sont utiles pour des raisons différentes :

- (i) la base orthonormale  $\varepsilon$  permet d'obtenir des opérateurs unitaires,
- (ii) un mélange des bases orthogonales  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{E}'$  permet de simplifier beaucoup de formules que l'on verra plus tard, qui sont très utilisées dans les applications.

Dans ce cours, on travaillera avec les bases orthogonales  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{E}'$ , les résultats présentés ici doivent être adaptés pour un autre choix de normalisation. La transformée de Fourier est entièrement basée sur la représentation d'une suite périodique dans la base de Fourier. La décomposition dans la base de Fourier s'écrit

$$z = \sum_{m=0}^{N-1} \frac{\langle z, \mathcal{E}_m \rangle}{N} \mathcal{E}_m = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \langle z, \mathcal{E}_m \rangle \mathcal{E}_m.$$

Le produit scalaire de  $\ell_N$  défini dans le théorème 2, permet d'écrire le coefficient de  $z$  dans la base de Fourier de la manière suivante

$$\begin{aligned} \langle z, \mathcal{E}_m \rangle &= \sum_{n=0}^{N-1} z_n \bar{\mathcal{E}}_{m,n} = \sum_{n=0}^{N-1} z_n \exp\left(2i\pi \frac{mn}{N}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} z_n \exp\left(-2i\pi \frac{mn}{N}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} z_n e^{-2i\pi \frac{mn}{N}}. \end{aligned}$$

La transformée de Fourier de  $z$  est en fait la suite périodique définie par les coefficients de  $z$  dans la base de Fourier.

**Définition 5** (Transformée de Fourier Discrète). *La transformée de Fourier discrète de  $z \in \ell_N$  est la suite  $\hat{z} \in \ell_N$  des coefficients de  $z$  dans la base de Fourier. Plus précisément, pour tout  $m \in \{0, \dots, N-1\}$ ,*

$$\hat{z}_m = \langle z, \mathcal{E}_m \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} z_n e^{-2i\pi \frac{mn}{N}}. \quad (4)$$

On définit l'application  $\mathcal{F}_N$  qui transforme  $z \in \ell_N$  en la suite  $\hat{z} \in \ell_N$  par

$$\mathcal{F}_N : \begin{array}{ccc} \ell_N & \longrightarrow & \ell_N \\ z & \longmapsto & \hat{z} \end{array} \quad (5)$$

L'application  $\mathcal{F}_N$  est appelée **opérateur de la transformée de Fourier discrète** (DFT – Discrete Fourier Transform).

**Proposition 1.** *L'opérateur  $\mathcal{F}_N$  est linéaire.*

**Démonstration.** Voir cours manuscrit. □

On fera une distinction entre la variable  $n$  de  $z$  et la variable  $m$  de  $\hat{z}$ . En effet, ces variables s'interprètent physiquement : (i)  $n$  est la valeur discrète d'un instant temporel (ou d'une position spatiale), où on mesure un signal  $z$  ; (ii)  $m$  est proportionnel à la fréquence d'oscillation d'une onde (dite harmonique), multiple d'une fréquence fondamentale. La DFT permet de passer d'une description en termes d'échantillons temporels (ou spatiaux) d'un signal, à une description en terme de fréquences du signal.

La décomposition sur la base orthonormale  $\mathcal{E}$  et les identités de Parseval et Plancherel peuvent se réécrire à l'aide de la DFT

$$z = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \hat{z}_m \mathcal{E}_m, \quad \langle z, w \rangle = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \hat{z}_m \bar{\hat{w}}_m = \frac{1}{N} \langle \hat{z}, \hat{w} \rangle \quad \text{et} \quad \|z\|^2 = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} |\hat{z}_m|^2 = \frac{1}{N} \|\hat{z}\|^2.$$

## 2.2 Transformée de Fourier Inverse (IDFT) : des Fréquences aux Échantillons

La formule (4) donne les coefficients de la transformée de Fourier discrète d'une suite  $z \in \ell_N$  à partir de la valeur de ses termes. De plus, on a vu que ce qui motive la définition de la transformée de Fourier est le fait qu'il s'agisse en fait des coefficients de la suite  $z$  dans la base de Fourier, pour  $n \in \mathbb{Z}$ ,

$$z_n = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \hat{z}_m e^{2i\pi \frac{mn}{N}}.$$

On peut donc passer de la suite  $z$  à sa transformée de Fourier  $\hat{z}$  et réciproquement ! On définit donc de la manière suivant la transformée de Fourier inverse.

**Définition 6** (Transformée de Fourier Discrète Inverse). *La transformée de Fourier discrète inverse de  $\hat{z} \in \ell_N$  est la suite  $z \in \ell_N$  des coefficients de  $z$  dans la base de Fourier. Plus précisément, pour tout  $m \in \{0, \dots, N-1\}$ ,*

$$z_n = \frac{1}{N} \langle \hat{z}, \bar{\mathcal{E}}_n \rangle = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \hat{z}_m e^{2i\pi \frac{mn}{N}} = \mathcal{IF}_N(\hat{z}). \quad (6)$$

On définit l'application  $\mathcal{IF}_N$  qui transforme  $\hat{z} \in \ell_N$  en la suite  $z \in \ell_N$  par

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{IF}_N : \ell_N & \longrightarrow & \ell_N \\ & \hat{z} \longmapsto & z \end{array} \quad (7)$$

L'application  $\mathcal{IF}_N$  est appelée **opérateur de la transformée de Fourier discrète inverse** (IDFT – Inverse Discrete Fourier Transform).

**Théorème 5.** *L'opérateur de la transformée de Fourier discrète inverse est l'application inverse de l'opérateur de la transformée de Fourier discrète et vice-versa*

$$\mathcal{IF}_N = \mathcal{F}_N^{-1}.$$

Autrement dit, pour tout  $z \in \ell_N$ ,

$$\mathcal{IF}_N(\mathcal{F}_N(z)) = \mathcal{F}_N(\mathcal{IF}_N(z)) = z.$$

*Remarque 7.* En pratique, on n'utilise pas la notation  $\mathcal{IF}_N$  pour la transformée inverse, on utilise simplement  $\mathcal{F}_N^{-1}$ .

**Démonstration.** Voir cours manuscrit. □

**Définition 7.** *On appelle le couple  $(z, \mathcal{F}_N(z)) \in \ell_N \times \ell_N$  un **couple de Fourier**.*

*Remarque 8.* Notons ici que  $\hat{z}$  et  $\check{z}$  sont par construction périodiques. Si  $a \in \mathbb{Z}$ , on obtient

$$\hat{z}_{m+aN} = \sum_{n=0}^{N-1} z_n e^{-2i\pi \frac{(m+aN)n}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} z_n e^{-2i\pi \frac{mn}{N}} e^{-2i\pi \frac{aNn}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} z_n e^{-2i\pi \frac{mn}{N}} e^{-2\pi ani} = \hat{z}_m,$$

car  $e^{-2\pi ani} = 1$ . Avec le même calcul on montre que  $\check{z}(n + aN) = \check{z}_n$  pour tout  $a \in \mathbb{Z}$ .



## 2.3 Représentation Matricielle de la Transformée de Fourier Discrète

On rappelle que la matrice d'un endomorphisme est simplement la donnée des coefficients de l'image des vecteurs d'une base exprimés dans cette même base. Les matrices des transformées de Fourier, et Fourier inverse, discrètes, dans la base canonique sont données par les propositions suivantes.

**Proposition 2** (Matrice représentative de la DFT). *La matrice représentative de  $\mathcal{F}_N$  dans la base canonique de  $\ell_N$  est*

$$W_N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \bar{\omega}_1 & \bar{\omega}_2 & \bar{\omega}_3 & \dots & \bar{\omega}_{N-1} \\ 1 & \bar{\omega}_1^2 & \bar{\omega}_2^2 & \bar{\omega}_3^2 & \dots & \bar{\omega}_{N-1}^2 \\ 1 & \bar{\omega}_1^3 & \bar{\omega}_2^3 & \bar{\omega}_3^3 & \dots & \bar{\omega}_{N-1}^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \bar{\omega}_1^{N-1} & \bar{\omega}_2^{N-1} & \bar{\omega}_3^{N-1} & \dots & \bar{\omega}_{N-1}^{N-1} \end{pmatrix}.$$

La matrice  $W_N$  est appelée matrice de **Vandermonde-Fourier**<sup>1</sup>. Elle est symétrique ( $W_N = W_N^t$ ) et inversible.

**Démonstration.** Voir cours manuscrit. □

**Proposition 3** (Matrice représentative de la IDFT). *La matrice représentative de  $\mathcal{F}_N^{-1}$  dans la base canonique de  $\ell_N$  est  $\frac{1}{N}W_N^*$  (où  $*$  est la notation pour la matrice transposée et conjuguée).*

**Démonstration.** Voir cours manuscrit. □

Un corollaire immédiat est le suivant.

**Corollaire 1.** *La matrice inverse de  $W_N$  est*

$$W_N^{-1} = \frac{1}{N} W_N^*. \quad (8)$$

En particulier, la matrice  $\frac{1}{\sqrt{N}}W_N$  est unitaire.

*Exemple 2.* On se place dans  $\ell_3$ . On a  $\bar{\omega}_1 = e^{-2\pi i/3} = j^2 = \bar{j} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ , donc

$$W_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \bar{j} & j^2 \\ 1 & j^2 & \bar{j}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \bar{j} & j \\ 1 & j & \bar{j} \end{pmatrix},$$

d'où :

$$W_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

La matrice inverse est :

$$W_3^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

## 2.4 Fast Fourier Transform (FFT)

Le calcul de la transformée de Fourier discrète d'un signal  $z \in \ell_N$  est un produit matriciel. Par conséquent, le calcul comporte  $N$  multiplications pour chacun des  $N$  termes de la suite  $\hat{z} \in \ell_N$ . Ainsi, l'algorithme de calcul de la transformée de Fourier discrète a une complexité de  $\mathcal{O}(N^2)$ . Pour des signaux de grande dimension, cela signifie que le calcul peut s'avérer très long. La transformée de Fourier a donc été utilisée presque exclusivement dans un cadre théorique, plutôt que dans les applications, jusqu'aux années 1960.

1. Alexandre-Théophile Vandermonde (1735 Paris - 1796 Paris).

Cependant, en 1965, **Cooley et Tukey** ont utilisé des symétries de la transformée de Fourier discrète pour fournir un algorithme rapide de calcul qu'ils ont appelé Fast Fourier Transform (FFT). La FFT a une complexité de  $\mathcal{O}(N \log N)$  et elle permet de calculer la transformée de Fourier discrète d'un signal de grande dimension en une fraction de seconde avec les ordinateurs modernes. En particulier, la FFT est très efficace quand la dimension des signaux est une puissance de 2 (cela explique pourquoi le format typique des images numériques est de 512 ou 1024).