Alumno: Héctor Hibran Tapia Fernández
Matrícula: A01661114

La Variable Continua (TC3006C)

Tarea 2

Sea $f(x)$ una función definida por

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 & 0 \le x \le 2 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

1. Calcule el valor de la constante c para que $f(x)$ sea la función de densidad de la variable aleatoria X.
2. Calcule $P[0 < X \le 1]$.

A)

$$\int_0^2 cx^2\,dx = 1 \rightarrow c\int_0^2 x^2\,dx = 1$$

$$\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2 \quad \frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{8}{3}$$

$$c\left(\frac{8}{3}\right) = 1$$

$$c8 = 3 \rightarrow \boxed{c = 3/8}$$

B) $P[0 < X \le 1]$

$$\int_0^1 \frac{3}{8}x^2\,dx \rightarrow \frac{3}{8}\int_0^1 x^2\,dx$$

$$\frac{3}{8} \quad \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 \quad \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{24} = \boxed{\frac{1}{8}}$$

Problema del flujo vehicular

En una cierta calle transitada se quiere medir el flujo vehicular. Una manera de hacerlo es medir el tiempo entre un automóvil y otro. Sea X es el tiempo transcurrido en segundos entre el tiempo en que un auto termina de pasar por un punto fijo y el instante en que el siguiente auto comienza a pasar por ese punto. La distribución del tiempo de avance tiene la forma

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{k}{x^4}, & si \quad x > 1 \\ 0 & si \quad x \leq 1 \end{cases}$$

a) Determine el valor de k para la cual *f*(x) es una función de densidad de probabilidad (fdp).

b) ¿Cuál será el valor esperado entre autos? ¿su varianza?

A) $X > 1$

$$\int_1^\infty \frac{K}{X^4}\,dx = 1 \longrightarrow K\int_1^\infty \frac{1}{X^4}\,dx = 1$$

$$K\int_1^\infty X^{-4}\,dx = K\left.\frac{X^{-3}}{-3}\right|_1^\infty = \frac{1^{-3}}{-3}$$

$$= \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}K = 1$$

$$= K\left(\frac{1}{3}\right) = 1 \rightarrow K(1) = 3 = \boxed{K=3}$$

B) $E[X] = \int_1^\infty X \cdot f(x)\,dx$

$$= \int_1^\infty X \cdot \frac{K}{X^4}\,dx = \int_1^\infty X \cdot \frac{3}{X^4}\,dx$$

$$= 3\int_1^\infty X \cdot \frac{1}{X^4} = 3\int_1^\infty X \cdot X^{-4}\,dX$$

$$= 3\int_1^\infty X^{-3}\,dx = 3\left.\frac{X^{-2}}{-2}\right|_1^\infty 0 - \left(\frac{1^{-2}}{-2}\right)$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}(3) = \boxed{\frac{3}{2} = E[X]}$$

σ^2 $\quad VAR[x] = \underbrace{E[x^2]} - (E[x])^2$

$$E[x^2] = \int_1^{\infty} x^2 \cdot \frac{k}{x^4}\, dx = \int_1^{\infty} x^2 \cdot \frac{3}{x^4}\, dx$$

$$3 \int_1^{\infty} x^2 \cdot \frac{1}{x^4} = 3 \int_1^{\infty} x^2 \cdot x^{-4}\, dx$$

$$3 \int_1^{\infty} x^{-2}\, dx = 3 \left. \frac{x^{-1}}{-1} \right|_1^{\infty} 0 - \frac{1^{-1}}{-1}$$

$$-(-1) = 1(3) = \boxed{3 = E[x^2]}$$

$$3 - \left[\frac{3}{2}\right]^2 = 3 - \left[\frac{9}{4}\right] = \boxed{\frac{3}{4}}$$

c) ¿Cuál será la probabilidad de que se tarde un auto más de 2 segundos? ¿A lo más 2?¿x segundos o menos?

c) $P[x > 2]$ $\quad$ VAR

$$\int_2^{\infty} \frac{3}{x^4}\, dx = 3 \int_2^{\infty} \frac{1}{x^4}\, dx = 3 \int_2^{\infty} x^{-4}\, dx$$

$$\cancel{3} \left. \frac{x^{-3}}{\cancel{-3}} \right|_2^{\infty} 0 - \left(\frac{2^{-3}}{-3}\right) = 0 - \left(-\frac{1}{24}\right)$$

$$3\left(+\frac{1}{24}\right) = \frac{3}{24} = \boxed{\frac{1}{8}}$$

$$\boxed{1 - \frac{1}{x^3}}$$