Fernanda Pérez A01742102

Sea f(x) una función definida por

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

1. Calcule el valor de la constante c para que f(x) sea la función de densidad de la variable aleatoria X.
2. Calcule $P[0 < X \leq 1]$.

A)

$$\int_0^2 x^2 = \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{8}{3} - 0 = \frac{8}{3}$$

$$\int_0^2 cx^2 = 1$$

$$c\int_0^2 x^2 = 1$$

$$c\left(\frac{8}{3}\right) = 1$$

$$c = \frac{1}{\left(\frac{8}{3}\right)}$$

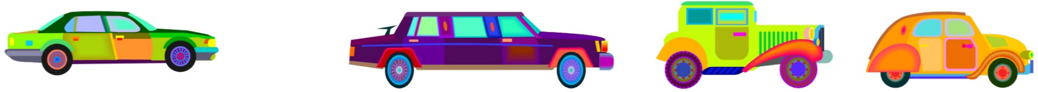
$$c = \frac{3}{8}$$

B)

$P[0 < X \leq 1]$

$$\int_0^1 \frac{3}{8}x^2 = \frac{3}{8}\int_0^1 x^2 = \frac{3}{8}\left[\frac{x^3}{3}\right]\Big|_0^1$$

$$= \frac{1^3}{3} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{8}$$



Problema del flujo vehicular

En una cierta calle transitada se quiere medir el flujo vehicular. Una manera de hacerlo es medir el tiempo entre un automóvil y otro. Sea X es el tiempo transcurrido en segundos entre el tiempo en que un auto termina de pasar por un punto fijo y el instante en que el siguiente auto comienza a pasar por ese punto. La distribución del tiempo de avance tiene la forma

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{k}{x^4}, & si \quad x>1\\ 0 & si \quad x\leq 1\end{cases}$$

a) Determine el valor de k para la cual *f*(x) es una función de densidad de probabilidad (fdp).

b) ¿Cuál será el valor esperado entre autos? ¿su varianza?

c) ¿Cuál será la probabilidad de que se tarde un auto más de 2 segundos? ¿A lo más 2?¿x segundos o menos?

a)

$$K\int_1^{\infty}\frac{1}{x^4} = K\int_1^{\infty} x^{-4} = (K)\,\frac{x^{-3}}{-3}\Bigg|_1^{\infty} = (K)\,\frac{1}{3} = (K)\,\frac{1}{3}$$

$$K\left(\frac{1}{3}\right)=1$$

$$K=\frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)}$$

$$K=3$$

b)

Esperado E[X]

$$E[X] = \int_1^\infty x \cdot f(x)\,dx = \int_1^\infty x \cdot \frac{K}{x^4}\,dx = \int_1^\infty x \cdot \frac{3}{x^4}\,dx = 3\int_1^\infty x \cdot \frac{1}{x^4} = 3\int_1^\infty \frac{x}{x^4} = 3\int_1^\infty \frac{1}{x^3} = 3\int_1^\infty x^{-3}$$

$$= (3)\frac{x^{-2}}{-2}\Bigg|_1^\infty = (3)\frac{0^{-2}}{-2} - (3)\frac{1^{-2}}{-2} = 0 - \left[-\frac{3}{2}\right] = \frac{3}{2}$$

$$E[X] = \frac{3}{2}$$

Varianza

$$Var(x) = E[X^2] - (E[X])^2$$

$$E[x^2] = \int_1^\infty x^2 \cdot \frac{3}{x^4}\,dx = 3\int_1^\infty x^2 \cdot \frac{1}{x^4}\,dx = 3\int_1^\infty \frac{x^2}{x^4}\,dx = 3\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = 3\int_1^\infty x^{-2}\,dx =$$

$$3\,\frac{x^{-1}}{-1}\Bigg|_1^\infty = -3x^{-1}\Bigg|_1^\infty = 0 - [-3] = 3$$

$$E[x^2] = 3$$

Varianza

$Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2$

$Var(x) = 3 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 3 - \left(\frac{9}{4}\right) = \frac{3}{4}$

c)

probabilidad $(X > 2)$

$$P(X>2) = \int_2^\infty \frac{3}{x^4}\, dx = 3\int_2^\infty \frac{1}{x^4}\, dx = 3\int_2^\infty x^{-4}\, dx = 3\left.\frac{x^{-3}}{-3}\right|_2^\infty = 0 - \left[-\frac{1}{8}\right] = \frac{1}{8}$$

$P(X>2) = \frac{1}{8}$

$P(X<2) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$