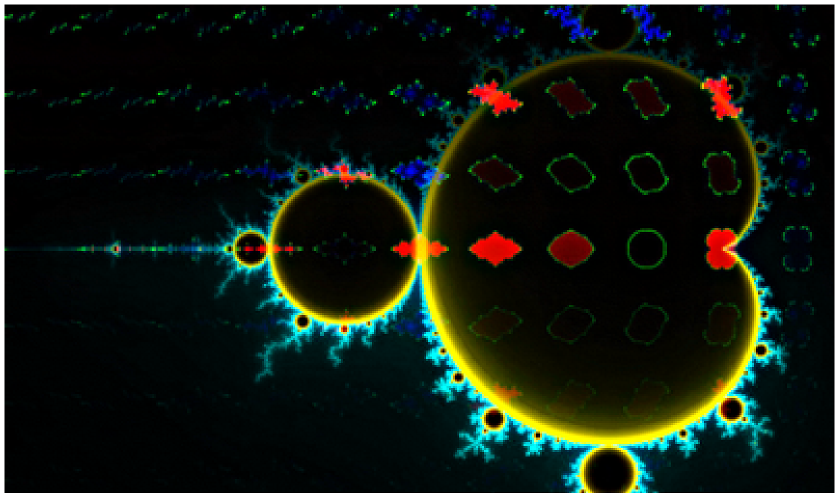
Situación Problema - Etapa II
La Fractalidad en la Naturaleza



Iván Martínez Estrada | A01661164
Alan Uriel Merlan Esquivel | A01656612
Héctor Hibran Tapia Fernández | A01661114
Carlos Celestino Roque Martínez | A01655923
Elías Eduardo Rodríguez Hernández | A01654900

Análisis de Métodos Matemáticos para la Física, Grupo 631, Equipo Finding X
Tecnológico de Monterrey, Campus Ciudad de México, México D. F.

RESUMEN — Este reporte tiene como propósito utilizar Python para generar fractales por medio de algoritmos recursivos aplicando las propiedades de los números complejos y dar a conocer la importancia de estos mismos en la vida diaria. Se demostrará la necesidad de un entendimiento del análisis de conjuntos y sucesiones complejas para la aplicación de los fractales, cuyas ventajas han aportado al estudio de diferentes ciencias como la física y la medicina.

Expondremos diferentes tipos de fractales, como lo son el Triángulo de Sierpinski, el Conjunto de Mandelbrot y el Conjunto de Julia, que a simple vista son muy llamativos, pero, analizando cada sistema se puede determinar que tienen cierto uso matemático.

PALABRAS CLAVE — Algoritmos, Fractales, Python, Números Complejos.

ABSTRACT — The purpose of this report is to use Python to generate fractals by means of recursive algorithms applying the properties of complex numbers and to make known their importance in daily life. The need for an understanding of the analysis of sets and complex sequences for the application of fractals will be demonstrated, whose advantages have contributed to the study of different sciences such as physics and medicine.

We will expose different types of fractals, such as the Sierpinski Triangle, the Mandelbrot Set and the Julia Set, which at first glance are very striking, but by analyzing each system it can be determined that they have a certain mathematical use.

KEY WORDS — Algorithms, Complex Numbers, Fractals, Python.

I. INTRODUCCIÓN

Los fractales son objetos geométricos que poseen varias características geométricas que los hacen visualmente muy atractivos: la auto-similaridad, la independencia ante la escala, la posibilidad de que estos objetos tengan dimensiones no enteras, esto es, los fractales no son necesariamente objetos unidimensionales, bidimensionales o tridimensionales. Por otro lado, se ha observado que la geometría en la naturaleza es más acorde a la fractalidad que a la geometría cartesiana.

Los primeros ejemplos de fractales empezaron debido a la geometrización de figuras. Dichas figuras podían construirse partiendo de una figura inicial, a la que se le aplicaban una serie de construcciones geométricas sencillas. La serie de figuras obtenidas se aproximaba a una figura límite infinita, a la cuál hoy se le llama conjunto fractal.

Antes de comenzar a hablar de los fractales de Julia y Mandelbrot se hace necesario dar una pequeña referencia sobre los números complejos. Básicamente podemos definir un número complejo como una expresión de la forma:

$$a + bi$$

donde a y b son números reales, e *i* es la raíz cuadrada de -1.

Los números complejos se representan en un plano, de manera que cada número complejo tiene asociado un punto del plano y viceversa.

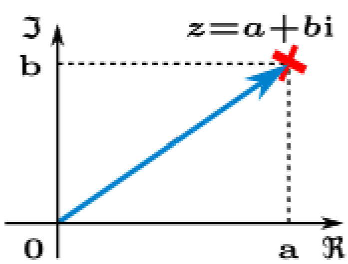


Figura 1. Representación de números complejos en un plano.

Esta identificación entre puntos y números es lo que nos interesa saber para poder comprender la representación de los fractales que tratamos en este artículo. [1]

MARCO TEÓRICO

Dentro del estudio fractal, se destacan dos conjuntos; los de Mandelbrot y los de Julia, comencemos a hablar sobre el conjunto de Julia.

El **Conjunto de Julia** es una familia de conjuntos fractales que se obtienen al estudiar el comportamiento de los números complejos al ser iterados por una función holomorfa o compleja. Este conjunto lleva el nombre del matemático francés Gaston Julia quien investigó sus propiedades en 1915 y culminó con su famoso artículo en 1918: *Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles*.

Para cada z_0 del plano complejo se genera una sucesión utilizando la siguiente regla de iteración:

$$z_{n+1} = z_n^{\ 2} + c$$

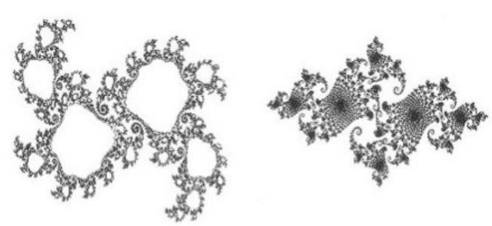
Siendo los z_k números complejos y C una cierta constante también compleja. Lo que hacemos es fijar dicha *C* y después tomar todos los números complejos y pasarlos por el método. Es decir, tomamos un número complejo z_0, lo elevamos al cuadrado y sumamos *C* al resultado. El número complejo obtenido se vuelve a elevar al cuadrado y al resultado se le vuelve a sumar *C*, y así sucesivamente. La sucesión de resultados se denomina **órbita** de z_0, y el valor al que tiende se denomina **atractor**.

Por ejemplo, para *C* = *1*, la órbita de $z_0 = 2$ es:

$$z_0 = 2$$
$$z_1 = 2^2 - 1 = 3$$
$$z_2 = 3^2 - 1 = 8$$
$$z_3 = 8^2 - 1 = 63$$
$$\ldots$$

Esto es, 2,3,8,63,... Si analizamos esta sucesión de número complejos, vemos que le aleja hacia infinito. Bien, pues deberíamos repetir este proceso para todos los puntos del plano, trabajo completamente imposible sin la ayuda de software informático. Esta es una de las razones por las que se tardó en avanzar en estos estudios. [2]

La variedad que podemos encontrar entre los conjuntos de Julia es enorme. Van desde la circunferencia de centro (0,0) y radio 1, para C = 0, hasta conjuntos realmente extraños. Aquí presentamos algunos ejemplos:



1. (2017, 10 agosto). CONJUNTOS DE JULIA Y MANDELBROT. APRENDEMOS MATEMÁTICAS. https://www3.gobiernodecanarias.org/medusa/ecoblog/mrodperv/fractales/conjuntos-de-julia-y-mandelbrot/
2. Morales Medina, M. M. (2019, 20 noviembre). ¿Qué es el conjunto de Mandelbrot?: historia y construcción. Gaussianos. Recuperado 1 de diciembre de 2020, de https://www.gaussianos.com/%C2%BFque-es-el-conjunto-de-mandelbrot-historia-y-construccion/

Como podemos ver, algunos de estos conjuntos son de una única pieza (conexos), mientras que otros están separados en varios trozos (disconexos), que podrían ser hasta infinitos. Y aquí entra **Mandelbrot.**

En los 70's, Benoît Mandelbrot, matemático polaco, comenzó a escribir acerca de la autosimilaridad dando pié a la creación de la definición **f**ractal.

Hemos comentado antes que para un valor de C concreto deberíamos introducir en el método:

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

todos los números complejos z_0 para confirmar si el conjunto de Julia asociado es conexo o disconexo. Pero sobre 1919, Julia y Fatou probaron de manera independiente que para saber si el conjunto de Julia asociado a un cierto número complejo C era conexo o no simplemente hacía falta estudiar la órbita del 0. Más concretamente, si la órbita del 0 escapaba a infinito, entonces el conjunto de Julia asociado a C era disconexo, y si la órbita del 0 no tendía a infinito, entonces este conjunto de Julia era conexo. Este hallazgo fue muy importante, ya que permitía conocer qué tipo de conjunto de Julia teníamos entre manos sin necesidad de estudiar las órbitas de todos los números complejos, hecho que simplifica enormemente los cálculos.

Bien, pues Mandelbrot utilizó los dos hechos siguientes:

- La órbita del 0 es la que determina si el conjunto de Julia asociado a un número complejo es conexo o no.
- Sabemos cuándo una órbita tiende al infinito.

Para encontrar los valores de C para los que el conjunto de Julia era conexo, encontró que la disposición de estos números complejos en el plano tenía una estructura realmente interesante. De aquí salió el conocido **conjunto de Mandelbrot** o **conjunto M**:

*"El **conjunto de Mandelbrot** es el conjunto de números complejos C para los que el conjunto de Julia está asociado es conexo."*

Teniendo en cuenta los dos hechos comentados anteriormente, se puede definir este conjunto de la siguiente forma, quizás más descriptiva:

El **conjunto de Mandelbrot** es el conjunto de números complejos para los cuales el método iterativo:

$$z_0 = 0$$
$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

no tiende a infinito, es decir, **no es divergente**.

La conocidísima representación de este conjunto M en el plano complejo es la siguiente:

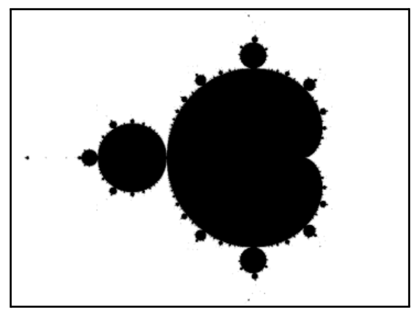


Figura 2. Representación del conjunto de Mandelbrot.

Como puede verse, el conjunto de Mandelbrot es algo así como una cardioide junto con infinitos discos tangentes. Entre ellos hay uno mayor que el resto, el que aparece en la izquierda. [2]

Pero en realidad ésta no es la forma más habitual en la que se muestra el conjunto de Mandelbrot. Suele ser más bien de esta forma:

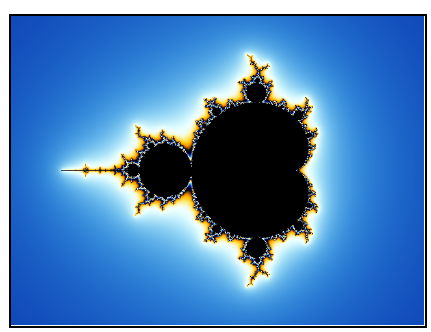


Figura 3. Representación del conjunto de Mandelbrot.

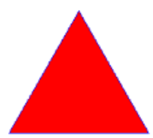
Otra propiedad interesante es la autosimilitud que presenta el conjunto de Mandelbrot. Si ampliamos la imagen cerca del borde del conjunto encontraremos en muchas zonas al propio conjunto de Mandelbrot otra vez, además de figuras muy curiosas, interesantes y llenas de belleza.

Este hecho nos llevaría a pensar que el conjunto de Mandelbrot es un fractal, y en cierto sentido lo es.

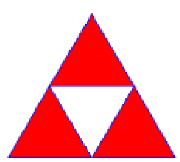
Y por último, no podemos dejar de lado el Triángulo de Sierpinski.

El matemático polaco Waclav Sierpinski (1882-1969), construyó este triángulo en 1919 del modo siguiente:

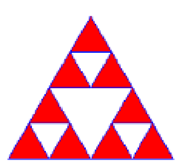
Paso Inicial (0): Construimos un triángulo equilátero:



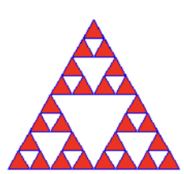
Paso 1: Uno los puntos medios de los lados y resulta la siguiente figura: Tres triángulos equiláteros sombreados y un hueco que es otro triángulo equilátero.



Paso 2: Repetimos el proceso en cada uno de los triángulos sombreados y obtengo la siguiente figura:



Paso 3: Repetimos lo mismo en cada uno de los triángulos equiláteros sombreados obteniendo la figura siguiente:



Observamos que en cada paso el triángulo de Sierpinski se obtiene con tres figuras del paso anterior, siendo cada una de ellas semejante a la del paso anterior y con razón de semejanza de 1/2 .

Vemos que en cada paso el triángulo de Sierpinski está formado por tres copias autosemejantes del paso anterior.
Un objeto de estas características auto-semejante en distintas escalas se llama fractal, así pues, el triángulo de Sierpinski es un ejemplo de un fractal.

II. DESARROLLO

PLANTEAMIENTO DE LA SOLUCIÓN

Para programar fractales de manera sistemática la primera intuición es hacerlo de forma recursiva. Esto significa desarrollar una función capaz de llamarse a sí misma para resolver un problema descomponiéndose en problemas más pequeños. Los fractales por definición no cambiarán su comportamiento para dimensiones más y más pequeñas, por lo que nos es posible acudir a la recursión con un número de pasos arbitrario que queramos que se ejecute el programa en Python como condición de salida.

IMPLEMENTACIÓN DE LA SOLUCIÓN

El primer caso es el **Triángulo de Sierpinski** en el que se usó un sistema muy parecido al *Juego de la Vida de Conway en 1D* para programarse ya que linealmente se checaba la condición de las celdas adyacentes en el paso de tiempo anterior para determinar la condición de la celda actual. Esto nos da una serie de triángulos crecientes que dependen de que la condición inicial sea una sola celda en el paso de tiempo $t = 0$ independiente de su posición

Cabe resaltar que es un proceso lineal para tiempos crecientes como se ve en la figura 4 y 5. Sin embargo, es dependiente de sus condiciones anteriores.

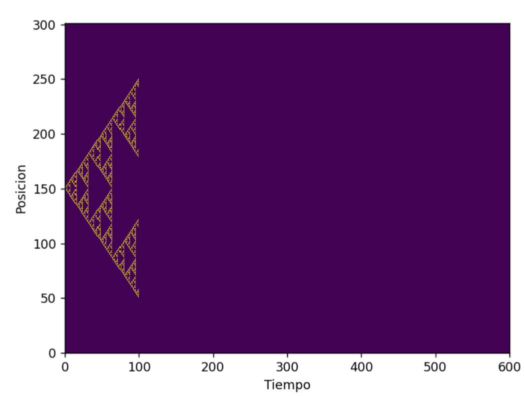


Figura 4. Fases del Triángulo de Sierpinski para t = 100.

1. (2017, 10 agosto). CONJUNTOS DE JULIA Y MANDELBROT. APRENDEMOS MATEMÁTICAS. https://www3.gobiernodecanarias.org/medusa/ecoblog/mrodperv/fractales/conjuntos-de-julia-y-mandelbrot/
2. Morales Medina, M. M. (2019, 20 noviembre). ¿Qué es el conjunto de Mandelbrot?: historia y construcción. Gaussianos. Recuperado 1 de diciembre de 2020, de https://www.gaussianos.com/%C2%BFque-es-el-conjunto-de-mandelbrot-historia-y-construccion/

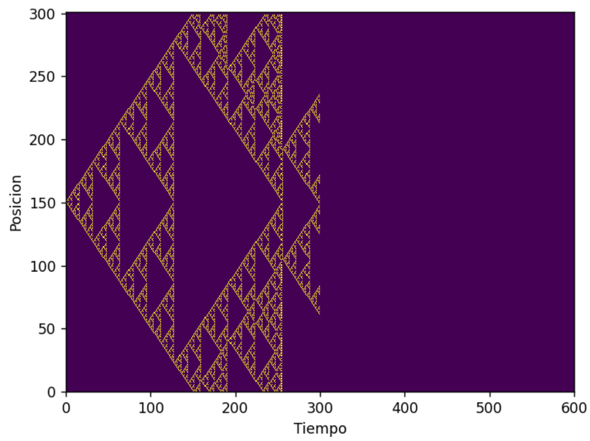


Figura 5. Fases del Triángulo de Sierpinski t = 300.

Ahora mostraremos un extracto del código de python donde se aplican dos *loops* anidados para llenar las casillas dependiendo de sus condiciones anteriores.

```
for i in range(0,tiempos-1,1):
    for j in range(0,y-1,1):
        if casillas[i,j-1] == 1 and casillas[i,j+1] == 1:
            casillas[i+1,j] = 0
        elif casillas[i,j-1] == 0 and casillas[i,j+1] == 0:
            casillas[i+1,j] = 0
        else:
            casillas[i+1,j] = 1
```

Figura 6. Algoritmo del Triángulo de Sierpinski.

Para el **Conjunto de Mandelbrot** se recurrió a un método recursivo que se repite para $f(z) = z^2 + c$ dentro de un espacio finito. Esto es, en un punto de convergencia 0 se calcula recursivamente en el espacio delimitado de -2 a 1 y -1 a 1 con condiciones iniciales 1 + i.

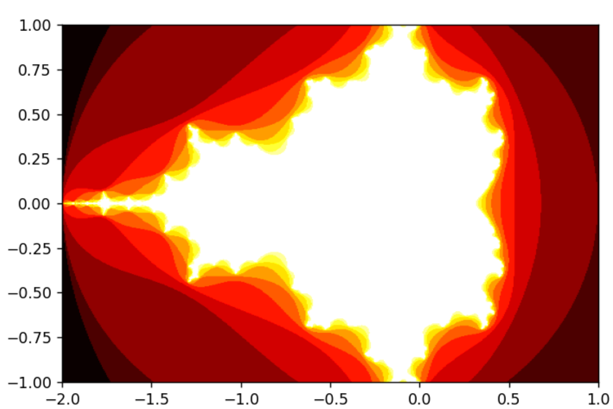


Figura 6. Proceso de creación del Conjunto de Mandelbrot.

En el proceso de creación se pueden ver figuras interesantes a la hora de graficarlas con un *colormap* ya que se ve la variación con el número de iteraciones que definen mejor el conjunto; sin embargo, se ve la forma general. Esto tiene sentido en teoría ya que con mayor precisión, la geometría fractal se irá repitiendo para pasos más pequeños.

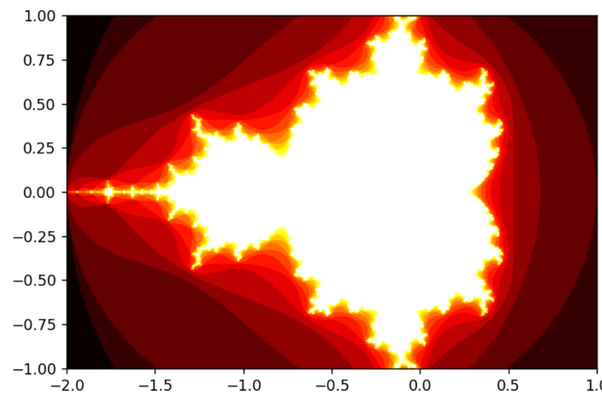


Figura 7. Proceso de creación del Conjunto de Mandelbrot.

Este conjunto está siendo generado para un número de pasos 10 y 15, para subsecuentes iteraciones ya se ve como la figura 6.

```
def mandelbrot(c, z=0, n=0):
    if n > 100:
        return n
    if abs(z) > 2:
        return n
    else:
        return mandelbrot(c, z**2 + c, n+1)
```

Figura 8. Algoritmo del Conjunto de Mandelbrot.

Y finalmente para el **Conjunto de Julia** se necesitó un modelo recursivo que aceptara números imaginarios.

El conjunto de Julia es un caso especial, ya que no todos los números son aplicables para que se cree un fractal de manera tan sencilla. Esto es, para nuestro caso en particular escogimos $c = 0.285 + 0.01i$ ya que daba el mejor ejemplo de un conjunto de Julia con un número no tan grande de iteraciones. El proceso de creación es interesante ya que poco a poco va de una sombra a un fractal que va tomando diferentes formas entre más se itera la función.

A continuación se muestra la gráfica del fractal del Conjunto de Julia.

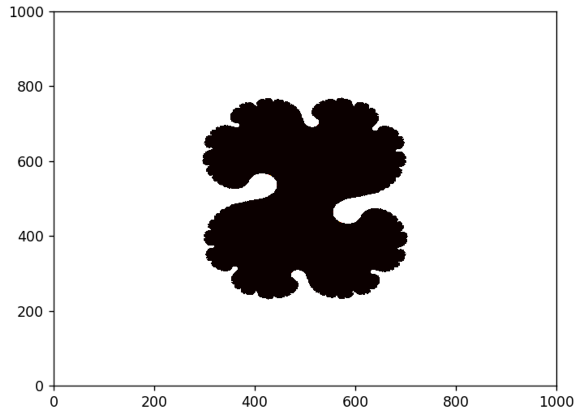


Figura 9. Proceso de creación del conjunto de Julia.

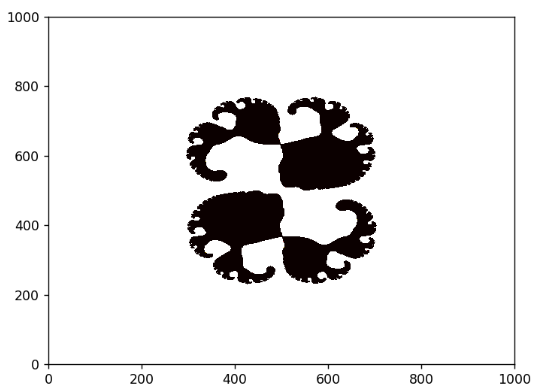


Figura 10. Proceso de creación del conjunto de Julia con 5 pasos extra en el tiempo con respecto a la Figura 9.

En la siguiente figura se aprecia un extracto del código de python en el que se ve la función recursiva y el valor inicial para este conjunto de Julia en particular.

```python
def julia(c, z, n):
    if n == 0:
        return z
    else:
        return julia(c, z**2 + c, n-1)
#constants
x = np.linspace(-2, 2, 1000)
y = np.linspace(-2, 2, 1000)
#complex starting value
c=0.285+0.01j
```

Figura 11. Algoritmo del Conjunto de Julia.

Todos estos códigos pueden ser encontrados en las referencias de este artículo.

DISCUSIÓN DE LA SOLUCIÓN

Los diferentes fractales fueron creados de manera exitosa utilizando funciones recursivas. En el proceso nos dimos cuenta que éstos eran sensibles a las condiciones iniciales y no siempre llevaban la forma de fractal. Por ejemplo, en el triángulo de Sierpinski si había más de una casilla en el paso 1 de tiempo, se empezaban a hacer figuras diferentes que a pesar de seguir la forma de fractal, terminaban por cancelar algunas partes de la figura lo que hacía que perdiera esa misma naturaleza. Lo mismo pasaba para el conjunto de Julia, ya que entre más se iterara con el tiempo se volvía mucho más preciso a costa de que la figura fuera muy poco visible para el tamaño del espacio finito.

A pesar de esto, pudimos llegar a los diferentes fractales con las reglas dadas, lo cuál apoya más allá su naturaleza para diferentes condiciones. Éstos serán presentados en la siguiente sección.

III. RESULTADOS

Para el **Triángulo de Sierpinski** nos quedó la figura 12 como su forma final. Empezando desde la izquierda podemos ver una evolución desde t = 0 creando triángulos cada vez más grandes vacíos y pequeños rellenos hasta que eventualmente nos quedan casillas vacías cerca de los extremos, ayudando a crear así condiciones iniciales similares a la primera casilla, creando un nuevo ciclo de triángulos.

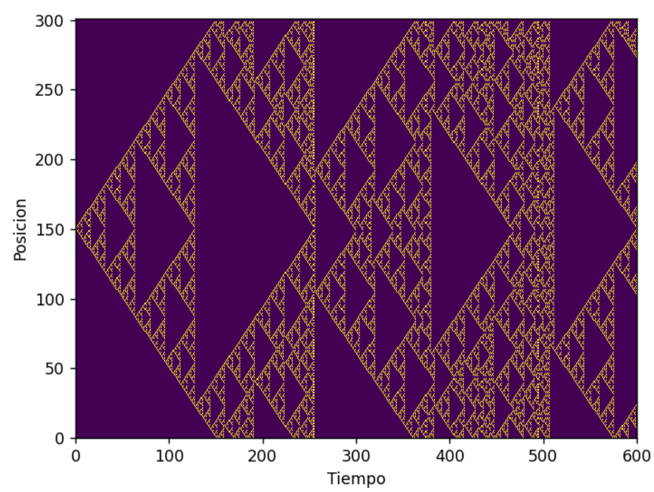


Figura 12. Figura Final del Triángulo de Sierpinski. (t = 600)

1. (2017, 10 agosto). CONJUNTOS DE JULIA Y MANDELBROT. APRENDEMOS MATEMÁTICAS. https://www3.gobiernodecanarias.org/medusa/ecoblog/mrodperv/fractales/conjuntos-de-julia-y-mandelbrot/
2. Morales Medina, M. M. (2019, 20 noviembre). ¿Qué es el conjunto de Mandelbrot?: historia y construcción. Gaussianos. Recuperado 1 de diciembre de 2020, de https://www.gaussianos.com/%C2%BFque-es-el-conjunto-de-mandelbrot-historia-y-construccion/

Para el **Conjunto de Mandelbrot** nos quedó la forma final que se ve en la figura 13. para 100 repeticiones recursivas. La precisión del método no se ve a la escala en la que está, pero la mejor inspección nos permite ver la fractalidad del conjunto. Podemos notar su inicio en 0.0 por la forma que toman las líneas alrededor de $y = 0$ y $x = 0$ ya que parecen expandirse en conjuntos más pequeños. Mismamente podemos ver diferentes ramificaciones que se extienden alrededor de las curvas que a su vez tienen más pequeñas recursiones del set más grande.

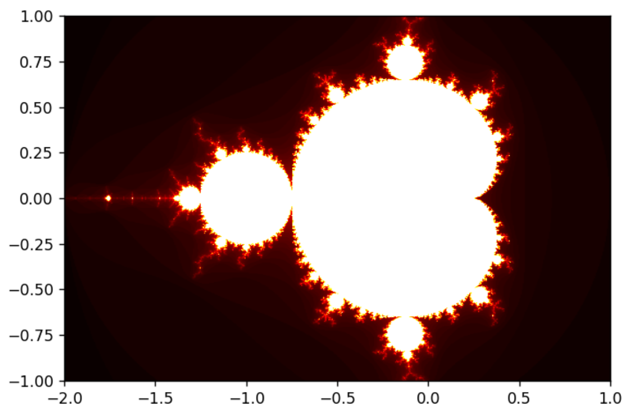


Figura 13. Figura Final del Conjunto de Mandelbrot.

Finalmente para el **Conjunto de Julia** obtuvimos la figura 14. como su forma final. Podemos notar que ésta está mucho más definida en espacios pequeños en comparación a los otros dos fractales, sin embargo, el conjunto de julia resultó ser mucho más versátil a las condiciones iniciales, dando lugar a diferentes y bellos fractales. Este conjunto igualmente está definido para 100 iteraciones ya que creemos que denota mejor la naturaleza de sus puntos de convergencia sin sacrificar lo visual.

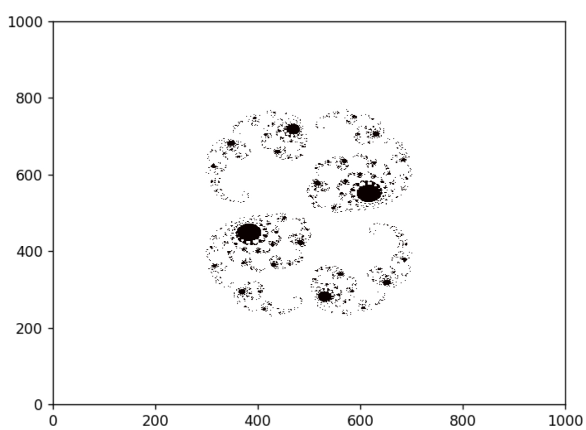


Figura 14. Figura Final del Conjunto de Julia.

IV. CONCLUSIONES

SOBRE EL CUMPLIMIENTO DE LOS ALCANCES

Cada conjunto es diferente y, sin embargo, todos tienen la naturaleza fractal. Por ejemplo, para todos es posible argumentar que sus perímetros tienden a infinito con cada recursión, pero para Sierpinski y Mandelbrot sus áreas tienden a algo finito. Es posible analizar así cada fractal, ya que cada uno tendrá propiedades diferentes.

Para finalizar, se cumplió el propósito de este artìculo, que fue demostrar y exponer a través de modelos matemáticos, junto con modelos computacionales los diferentes fractales aquí expuestos, cabe mencionar que la inspiración de este tipo de modelos matemáticos ha sido siempre la naturaleza y tratar de explicar lògicamente lo que nos rodea.

SOBRE EL TRABAJO INDIVIDUAL INDICANDO LA CONTRIBUCIÓN DE CADA INTEGRANTE DEL EQUIPO

Iván Martínez Estrada -
Alan Uriel Merlan Esquivel - Matemático.
Héctor Hibran Tapia Fernández - Investigador y escritor.
Carlos Celestino Roque Martínez -
Elías Eduardo Rodríguez Hernández - Programador.

SOBRE LAS LIMITACIONES Y POSIBLES MEJORAS EN LA IMPLEMENTACIÓN DE LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA

Quizás la limitación más grande que nos encontramos es el valor máximo de recursividad en python, que es 900. Esto es debido a que eventualmente empieza a consumir mucha memoria hacer los cálculos, por lo que es posible mejorar la precisión de cada fractal al descartar dicha limitante y dejar que la computadora corra por mucho más tiempo.

Otra limitación que nos encontramos es que es difícil mostrar la naturaleza fractal de cada conjunto con solo una imágen estática, ya que no se logra capturar los diferentes detalles que pueden tomar cuando el tamaño de paso es mucho menor. Finalmente la recomendación sería dedicarle más tiempo y recursos computacionales a hacer simulaciones del proceso de estos fractales para una demostración más precisa de su naturaleza, así como variar las condiciones iniciales para ver en qué punto empiezan a comportarse de manera extraña.

REFERENCIAS

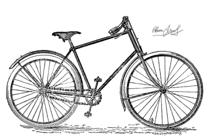
Referencias de publicaciones periódicas y sitios web:

[1]. (2017, 10 agosto). CONJUNTOS DE JULIA Y MANDELBROT.APRENDEMOS MATEMÁTICAS. https://www3.gobiernodecanarias.org/medusa/ecoblog/mrodperv/fractales/conjuntos-de-julia-y-mandelbrot/

[2]. Morales Medina, M. M. (2019, 20 noviembre). ¿Qué es el conjunto de Mandelbrot?: historia y construcción. Gaussianos. Recuperado 1 de diciembre de 2020, de https://www.gaussianos.com/%C2%BFque-es-el-conjunto-de-mandelbrot-historia-y-construccion/

[Código]. Código de Python. Enlace a Google Drive:

https://drive.google.com/drive/folders/1Az878_lF7R67FBIuexfVGxceRnEo6Z-b



1. (2017, 10 agosto). CONJUNTOS DE JULIA Y MANDELBROT. APRENDEMOS MATEMÁTICAS. https://www3.gobiernodecanarias.org/medusa/ecoblog/mrodperv/fractales/conjuntos-de-julia-y-mandelbrot/
2. Morales Medina, M. M. (2019, 20 noviembre). ¿Qué es el conjunto de Mandelbrot?: historia y construcción. Gaussianos. Recuperado 1 de diciembre de 2020, de https://www.gaussianos.com/%C2%BFque-es-el-conjunto-de-mandelbrot-historia-y-construccion/