



UFR des sciences

Université de Picardie Jules-Verne  
Master Analyse Appliquée et Modélisation (AAM)

---

## Mini Projet

---

Présenté par :

Hicham Abara Akdi

Encadrant :

Mr. Jean-Paul Chehab

Année universitaire 2025/2026

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>2</b>
0.1 Notions . . . . .	4
<b>1 B-Splines</b>	<b>6</b>
1.1 Motivation . . . . .	6
1.2 B-splines . . . . .	7
1.2.1 Construction des B-splines . . . . .	7
1.2.2 Quelques propriétés des B-splines . . . . .	10
1.3 Courbes B-splines . . . . .	11
1.3.1 Définition et propriétés . . . . .	11
1.3.2 Exemple . . . . .	11
<b>2 Régularisation</b>	<b>15</b>
2.1 Méthode des moindres carrés . . . . .	15
2.2 Moindres carrés pondérés et localisés . . . . .	17
2.2.1 Moindres carrés pondérés . . . . .	17
2.2.2 Moindres carrés localisés . . . . .	17
2.3 Moindre carrés régularisés . . . . .	17
2.3.1 Exemple [4] . . . . .	20

# Introduction

Dans ce chapitre, nous nous appuyons en grande partie sur l'ouvrage : A Toolbox for Digital Twins : From Model-Based to Data-Driven de M. Asch et al., en particulier sur les pages 554–561 [1].

La caractéristique essentielle des données fonctionnelles est qu'elles proviennent de fonctions sous-jacentes (par exemple des données mesurées issues d'un système dynamique pour lequel il existe généralement une description en termes d'équations différentielles, et ces équations possèdent des solutions - possiblement inconnues - régulières et différentiables). Cependant, ces données peuvent être bruitées, multiscalaires et multiphysiques, et il se peut que nous n'ayons pas accès à la forme mathématique de leur génération. Dans ce cas, l'analyse de données fonctionnelles constitue un excellent outil de modélisation et d'analyse puisqu'elle tente de modéliser les données à l'aide de fonctions bien définies, généralement de forme polynomiale.

Supposons que la fonction  $x$  génère les données observées  $y$ , et que  $x$  est régulière. On considère alors  $x_i(t)$  pour  $i = 1, \dots, n$  comme des réalisations de cette fonction, et  $y_i$  comme les mesures correspondantes, affectées par du bruit.

$$y_i = x_i + \epsilon_i$$

$\epsilon_i$  est un terme de bruit. On a  $N$  mesures, ce qui donne  $(t_i, y_i)$  paires, avec

$$y_i = y(t_i) + \text{bruit}$$

Notre but est d'utiliser  $y_i$  pour estimer la fonction régulière  $x$  ainsi que ses dérivées avec le bruit.

Pour obtenir des données fonctionnelles à partir de données discrètes, il y a deux étapes :

- 
1. Utiliser des méthodes d'expansion en base pour représenter des fonctions en temps continu.
  2. Réduire le bruit dans les mesures en effectuant une régularisation.

---

## 0.1 Notions

La moyenne d'échantillon fonctionnelle est définie comme la moyenne point par point des fonctions observées dans l'échantillon.

$$\bar{x}(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i(t)$$

La variance d'échantillon fonctionnelle :

$$s^2(t) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n [x_i(t) - \bar{x}(t)]^2$$

covariance fonctionnelle :

$$v(s, t) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n [x_i(t) - \bar{x}(t)][x_i(s) - \bar{x}(s)]$$

# Bibliographie

- [1] M. Asch, C. G. Borzi, M. Chen, et al., *A Toolbox for Digital Twins : From Model-Based to Data-Driven*, SIAM, Philadelphia, 2022, pp. 554–561.

# Chapitre 1

## B-Splines

Dans ce chapitre, nous nous appuyons principalement sur deux ressources : le document de Pierre Pansu consacré aux courbes B-splines [1] et le support de cours sur l'approximation de fonctions proposé par Grenoble INP Pagora [2].

### 1.1 Motivation

Nous cherchons à approximer notre fonction  $y(t)$ . Cependant, une régression linéaire peut ne pas être adaptée à la forme de la courbe. Nous choisissons donc de l'approximer à l'aide d'un polynôme, plus flexible et capable de mieux représenter sa variabilité, on a alors :

$$x(t) \approx P_n$$

avec  $P_n$  un polynôme de degré  $n$ .

#### Phénomène de Runge [2]

Considérons la fonction :

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}, x \in [-1, 1]$$

Runge (1856–1927) a montré que si cette fonction est interpolée aux points équidistants  $x_i$  entre -1 et 1

$$x_i = 1 + (i - 1)\frac{2}{n}, i = 0, \dots, n$$

par un polynôme  $P_n$  de degré  $\leq n$  alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x) - P_n(x)| \right) = \infty$$

Lorsqu'on augmente le nombre de points, on constate que le polynôme se met à osciller fortement entre les points  $x_i$  avec une amplitude de plus en plus grande. Pour contourner le

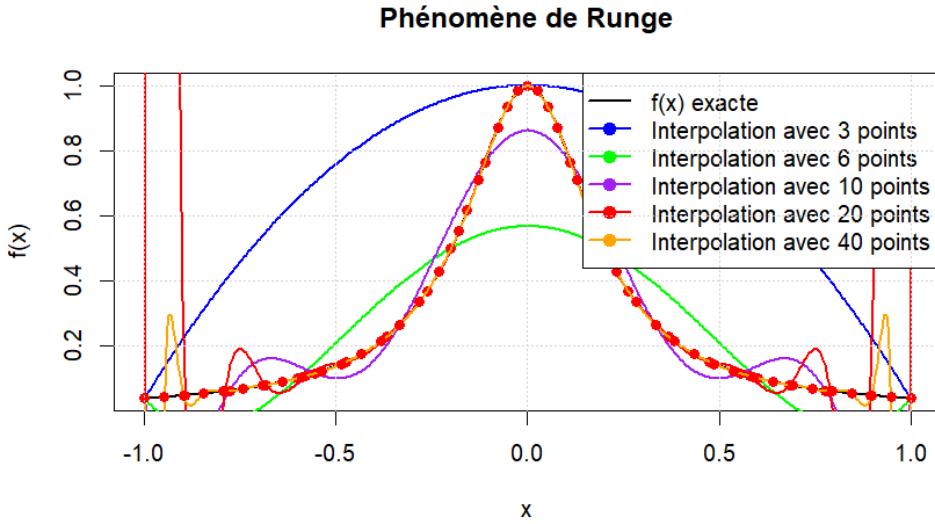


FIGURE 1.1 – Illustration du phénomène de Runge.

phénomène de Runge, on introduit la notion des B-splines.

## 1.2 B-splines

### 1.2.1 Construction des B-splines

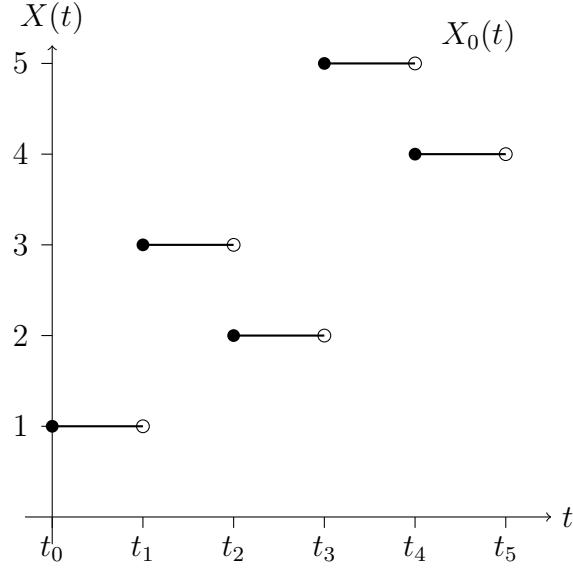
On se donne une suite de points  $t_0 \leq \dots \leq t_m$  de la droite réelle, appelés **noeuds**. Le vecteur  $(t_1, \dots, t_m)$  s'appelle le vecteur des noeuds. Certains noeuds peuvent être confondus. Si  $r$  noeuds sont égaux à un réel  $\tau$ , on dit que  $\tau$  est de multiplicité  $r$ .

On se donne d'autre part des points  $P_0, \dots, P_m$  dans  $\mathbb{R}^n$  appellés **points de contrôle** qui forment ensemble le **polygone de contrôle**. On l'imagine comme une courbe  $t \mapsto X_0(t)$  qui saute d'un point à l'autre aux temps  $t_i$ , i.e. :

$$X_0(t) = \sum_{i=1}^m \mathbf{1}_{[t_i, t_{i+1}[}(t) P_i$$

Si  $t_i = t_{i+1}$  le sommet  $P_i$  est ignoré.

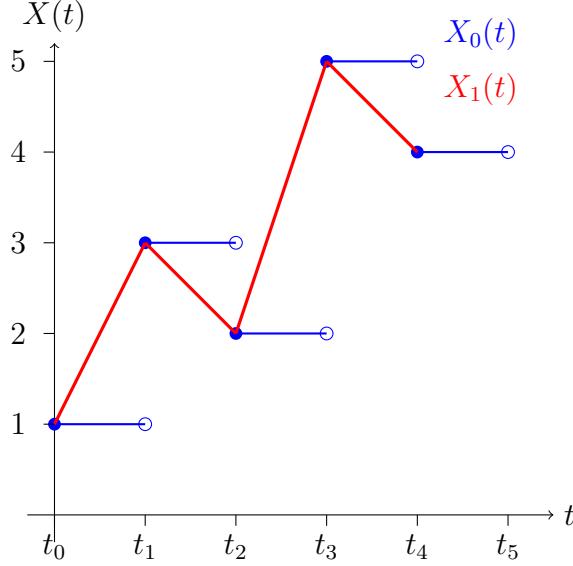
$X_0$  est donc une fonction en escalier comme montre la figure suivante.



On cherche à approcher cette courbe discontinue par une courbe plus régulière. La première étape consiste à faire passer une ligne polygonale par les points  $P_i$ , i.e. lorsque  $t$  varie entre deux noeuds  $t_i$  et  $t_{i+1}$ ,  $X_1(t)$  décrit le segment  $[P_{i-1}, P_i]$  à vitesse constante. On trouve la formule :

$$X_1(t) = \sum_{i=1}^m \left( \left(1 - \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}\right) P_{i-1} + \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} P_i \right) \mathbf{1}_{[t_i, t_{i+1}]}(t)$$

Si  $t_i = t_{i+1}$  la courbe saute de  $P_{i-1}$  à  $P_i$  en  $t_i$ . Si les noeuds sont tous distincts, la courbe obtenue est continue mais non dérivable en général. Ses composantes sont des fonctions linéaires par morceaux.



On suppose tout les noeuds distincts, la prochiane étape est de construire un courbe  $X_2$  de  $C^1$ , elle est quadratique par morceaux (le prix pour qu'elle soit de  $C^1$ ). Elle ne passe plus par les sommets  $P_i$ , mais conserve une proximité au polygone en un sens différent : si  $t$  est compris entre les noeuds  $t_i$  et  $t_{i+1}$ ,  $X_2(t)$  est dans l'enceloppe convexe des sommets  $P_{i-2}$ ,  $P_{i-1}$  et  $P_i$ .

**Question :** Comment treouver  $X_2$  et plus généralelement  $X_k$  por  $k \geq 2$  ?

Supposons les points  $P_i$  affinement indépendants. Alors  $X_{k-1}$  s'écrit de manière unique

$$X_{k-1}(t) = \sum_i B_{i,k-1}(t)P_i$$

- $B_{i,k-1} \geq 0$ .
- $\sum_i B_{i,k-1} = 1$ .

Pour gagner un degré de différentiabilité, on replace  $P_i$  par  $t \mapsto P_i(t)$ , qui peut être vu comme un point mobile le long du polygone de  $P_{i-1}$  et  $P_i$  pendant l'intervalle de temps  $[t_i, t_{i+k}]$ . On pose alors :

$$X_k(t) = \sum_i B_{i,k-1}(t) \left( \left(1 - \frac{t - t_i}{t_{i+k} - t_i}\right) P_{i-1} + \frac{t - t_i}{t_{i+k} - t_i} P_i \right)$$

Cela donne pour les fonctions  $B_{i,k}$  la relation de récurrence

$$B_{i,k}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+k} - t_i} B_{i,k-1}(t) + \left(1 - \frac{t - t_{i+1}}{t_{i+k+1} - t_{i+1}}\right) B_{i+1,k-1}(t)$$

On se donne une suite de noeuds  $t_0 \leq t_1 \dots \leq t_m$  sur la droite réelle.

**Notation :** Soit  $j = 1, \dots, m+1-i$ . Si  $t_i < t_{i+1}$ , on note

$$\omega_{i,j}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+j} - t_i}$$

Si  $t_i = t_{i+1}$ , on pose  $\omega_{i,j} = 0$

**Définition 1.2.1.** On définit par récurrence sur  $k$  les fonctions B-splines  $B_{i,k}$  pour  $i = 0, \dots, m-k+1$  par les relations suivantes.

$$B_{i,0}(x) = \begin{cases} 1, & t_i \leq x < t_{i+1} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

et pour  $k \geq 1$

$$B_{i,k}(x) = \omega_{i,k}(t)B_{i,k-1}(x) + (1 - \omega_{i+1,k}(t))B_{i+1,k-1}(x)$$

## 1.2.2 Quelques propriétés des B-splines

**Proposition 1.2.1.** *Propriétés générales de fonctions B-splines.*

1. La fonction  $B_{j,k}$  est sur chaque intervalle  $[t_i, t_{i+1}[$  un polynôme de degré  $\leq k$ .
2. La fonction  $B_{i,k}$  s'annule en dehors de l'intervalle  $[t_i, t_{i+k}[$
3. La fonction  $B_{i,k}$  s'annule en  $t_i$ , sauf cas :  $t_i = t_{i+1} = \dots = t_{i+k} < t_{i+k+1}$  auquel cas  $B_{i,k}(t_i) = 10$
4.  $0 < B_{i,k}(t) \leq 1$  pour  $t \in [t_i, t_{i+k}[$ .
5. Sur l'intervalle  $]t_i, t_{i+k}[$ , la fonction  $B_{i,k}$  ne prend la valeur 1 que si  $t_{i+1} = \dots = t_{i+k}$  et en ce point seulement.
6.  $\sum_{i=0}^{m-k-1} B_{i,k} \equiv 1$ , sur l'intervalle  $[t_k, t_{m-k}[$ .
7. La fonction  $B_{i,k}$  est  $C^\infty$  à droite de chaque point.
8. Au voisinage d'un noeud de multiplicité  $r$ , la fonction  $B_{i,k}$  est de  $C^{k-r}$ .

*Démonstration.* Voir [1].

□

---

## 1.3 Courbes B-splines

### 1.3.1 Définition et propriétés

**Définition 1.3.1.** On se donne un vecteur de noeuds  $t = (t_1 = \dots = t_m)$  et des points  $P_1, \dots, P_m$  appelés points de contrôle qui forment ensemble le polygone de contrôle. La courbe B-spline de degré  $k$  associée au vecteur de noeuds  $t$  et au polygone de contrôle  $P = (P_1, \dots, P_m)$  est

$$t \mapsto X_k(t) = \sum_i B_{i,k}(t) P_i$$

**Remarque.** On dit qu'une courbe B-spline est visé aux extrémités (clamped) si elle est de degré  $k$  et ses noeuds  $t_0$  et  $t_m$  sont de multiplicité  $k+1$ . L'utilité de cette notion vient du fait qu'on doit imposer que  $X_k(t_0) = P_0$  et  $X_k(t_m) = P_m$ .

**Théorème 1.3.1.** La  $k$ -ième B-spline  $t \mapsto X_k(t)$  à les propriétés suivantes.

1. Les composants de  $X_k(t)$  sont sur chaque intervalle  $[t_i, t_{i+1}]$  des polynômes de degré  $k$ .
2. En un noeud de multiplicité  $r$ , la courbe est de classe  $C^{k-r}$ .
3. Si  $t \in [t_i, t_{i+1}]$ ,  $X_k(t)$  ne dépend que des points de contrôle  $P_{i-k}, \dots, P_i$  et se trouve dans l'enveloppe convexe de ces points.
4. Si  $t_i$  est un noeud simple et  $k \geq 1$ ,  $X_k(t_i)$  ne dépend que des points de contrôle  $P_{i-k}, \dots, P_{i-1}$  et se trouve dans l'enveloppe convexe de ces points.
5. Si  $t_i = \dots = t_{i+k} < t_{i+k+1}$  est un noeud de multiplicité  $k+1$ , alors  $X_k(t_i) = P_i$  et 
$$X'_k(t_i) = \frac{k}{t_{i+k+1} - t_i} (P_{i+1} - P_i).$$

*Démonstration.* Voir [1]. □

### 1.3.2 Exemple

On retourne à l'exemple

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}, x \in [-1, 1]$$

et avec des points intérieurs. On l'approche par une fonction de B-splines de degré ( $k = 0$ ), des B-splines linéaires  $k = 1$ , des B-splines quadratiques ( $k = 2$ ) et cubiques ( $k = 3$ ).

---

## B-splines de degré ( $k = 0$ )

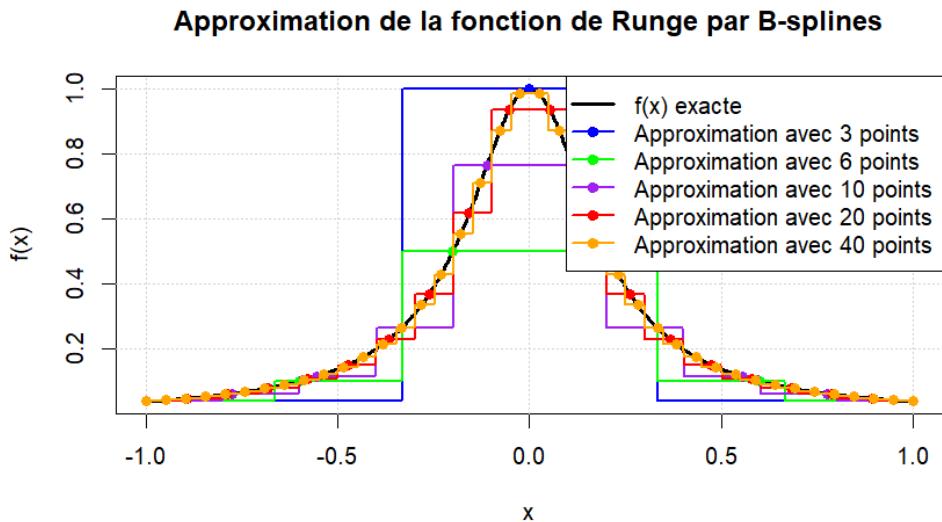


FIGURE 1.2 – B-splines de degré 0.

## B-splines linéaires

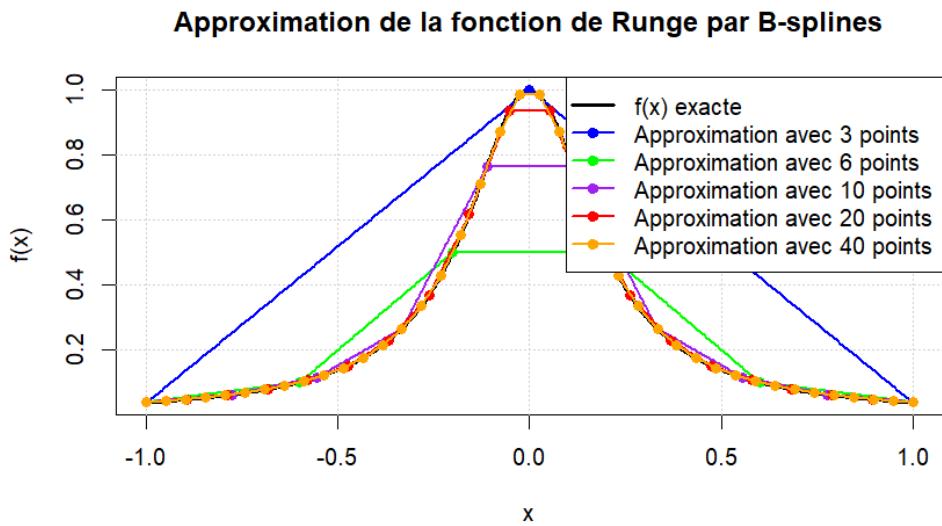


FIGURE 1.3 – B-splines de degré 1.

## B-splines quadratiques

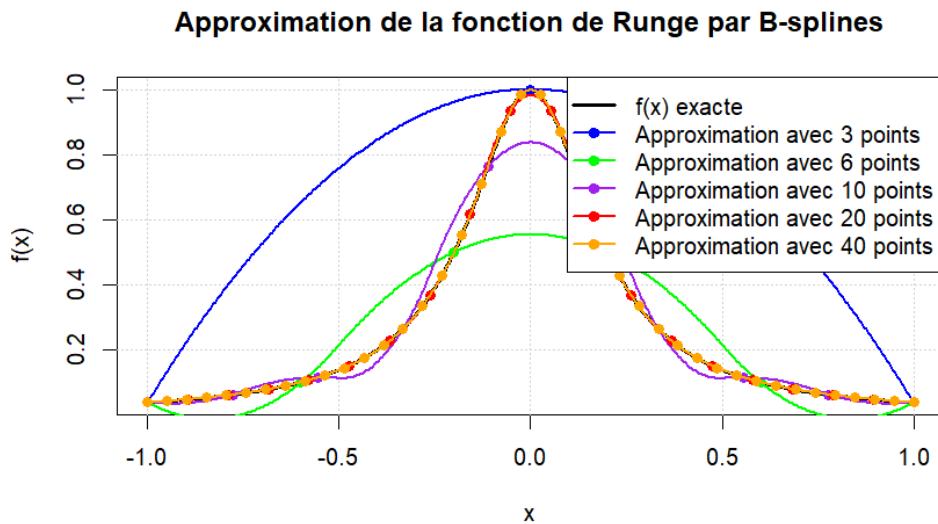


FIGURE 1.4 – B-splines de degré 2.

## B-splines cubiques

Le minimum de points dans ce cas doivent être 4.

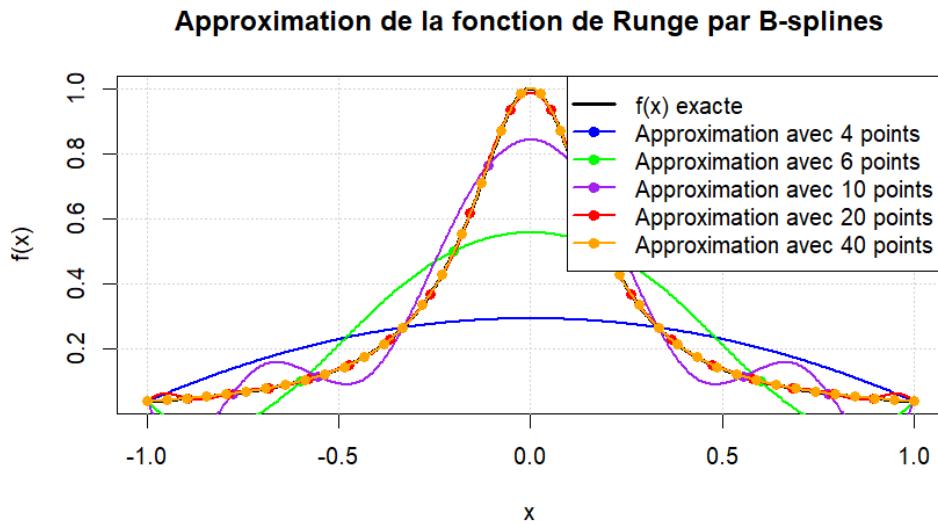


FIGURE 1.5 – B-splines de degré 3.

# Bibliographie

- [1] Pierre Pansu, *Courbes B-splines*, Document du Laboratoire de Mathématiques d'Orsay,  
[https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~pierre.pansu/web\\_maitrise/bsplines.pdf](https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~pierre.pansu/web_maitrise/bsplines.pdf).
- [2] Analyse numérique : Approximation de fonctions, Grenoble INP Pagora, Support de cours au format Beamer, 2013, [https://team.inria.fr/airsea/files/2013/01/Cours\\_approx\\_fonc.pdf](https://team.inria.fr/airsea/files/2013/01/Cours_approx_fonc.pdf).
- [3] A. Popier, *Mouvement Brownien, Intégrale Stochastique*, Séminaire des doctorants, Bordeaux, mercredi 12 mars 2003.  
<https://perso.univ-lemans.fr/~apopier/documents/resumesemindoct.pdf>

# Chapitre 2

## Régularisation

Dans ce chapitre, nous nous appuyons en grande partie sur l'ouvrage : A Toolbox for Digital Twins : From Model-Based to Data-Driven de M. Asch et al., en particulier sur les pages 555–557 [1].

Maintenant qu'on a construit les B-splines, on a la fonction suivante

$$x(t) \approx \sum_{k=1}^K c_k \phi_k(t)$$

Avec  $(\phi_k)_{k \geq 1}$  des fonctions B-splines, reste à déterminer les paramètres  $c_k$ .

### 2.1 Méthode des moindres carrés

On utilise la méthode des moindres carrés(Least Squared Methode), on rappel que  $(y_i)_{i \geq 1}$  sont les points qu'on veut approcher.

$$RSS(x) = \sum_{j=1}^n [y_j - x(t_j)]^2$$

En posant  $y^T = \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$  et  $\phi_c^T = \begin{pmatrix} x(t_1) & \dots & x(t_n) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$  on trouve

$$RSS(x) = (\phi_c - y)^T (\phi_c - y) \tag{RSS}$$

---

Soit la matrice  $\phi \in \mathcal{M}_{n,K}(\mathbb{R})$

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1(t_1) & \dots & \phi_K(t_1) \\ \phi_1(t_2) & \dots & \phi_K(t_2) \\ \dots & \dots & \dots \\ \phi_1(t_n) & \dots & \phi_K(t_n) \end{pmatrix}$$

et  $c^T = (c_1 \dots c_K) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ , on a alors

$$\phi = \phi_c c$$

**Remarque.** La valeur optimale du vecteur  $c$  (qu'on note  $\hat{c}$ ) pour minimiser (RSS) est

$$\hat{c} = (\phi^{-1}\phi)^{-1}\phi^T y$$

*Démonstration.*

$$\begin{aligned} J(c) &= (\phi c - y)^T (\phi c - y) \\ &= c^T \phi^T \phi c - 2y^T \phi c + y^T y \end{aligned}$$

On applique le gradient sur  $J$  par rapport à  $c$ , on a

$$\nabla J(c) = 2\phi^T \phi c - 2y^T \phi$$

Pour  $c = \hat{c}$ ,  $\nabla J(\hat{c}) = 0$ , on trouve alors

$$2\phi^T \phi \hat{c} - 2y^T \phi = 0$$

$$\implies \hat{c} = (\phi^T \phi)^{-1} \phi^T y$$

□

Par conséquent, notre fonction régularisé est

$$\hat{y} = \phi \hat{c}$$

$$= \phi(\phi^T \phi)^{-1} \phi^T y$$

$$= H y$$

---

## 2.2 Moindres carrés pondérés et localisés

La méthode précédente est utile quand les bruits  $\epsilon_i$  sont indépendants, identiquement distribué de moyenne nulle et de variance constante, ce qui n'est toujours pas le cas.

### 2.2.1 Moindres carrés pondérés

On suppose maintenant que chaque observation  $y_i$  a une importance différente, on lui attribut un poids  $w_i > 0$ . On définit la matrice diagonale des poids

$$W = \text{diag}(w_1, \dots, w_n)$$

On a alors

$$RSS_W(x) = (\phi_c - y)^T W (\phi_c - y) \quad (\text{RSSW})$$

On reprenant les mêmes calculs de (RSS) sur (RSSW) on trouve

$$\hat{c} = (\phi^T W \phi)^{-1} \phi^T W y$$

On pose  $w_i = \frac{1}{\sigma_i^2}$ , inverse de la variance.

### 2.2.2 Moindres carrés localisés

Pour une régularisation locale autour d'un point  $t_i$ , on attribut des poids plus élevés aux points proches de  $t_i$ , càd plus  $t_j$  proche de  $t_i$ , plus le poids  $w(t_j)$  est élevé, cela permet une meilleur estimation locale. Les poids sont de la forme

$$w_j(t) = g\left(\frac{t_i - t_j}{h}\right)$$

Avec  $h > 0$  et  $g$  une fonction noyau (fonction positive et  $x \mapsto g(x)$  décroît quand  $x$  s'éloigne du 0).

## 2.3 Moindre carrés régularisés

Revenons à (RSSW), on l'écrit sous forme d'une somme, on a

$$RSS_W(x) = \sum_{j=1}^n w_j [y_j - x(t_j)]^2$$

---


$$= \sum_{j=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2} [y_j - x(t_j)]^2$$

On remarque que si l'un des variances est très petit, une grande perturbation arrive. Il y'a aussi le fait qu'il y a trop de paramètres  $c_k$  par rapport au nombre d'observations.

On introduit alors un terme qui penalise le fait d'ajouter beaucoup de données, l'équation (RSSW) devient alors

$$RRSS_W(x) = (\phi_c - y)^T W (\phi_c - y) + \lambda \int |L(x)(t)|^2 dt \quad (\text{RRSSW1})$$

- $L$  est la fonction de perte, c'est un opérateur linéaire(de la forme  $\frac{d^m}{ds^m}$ ).
- $\lambda$  paramètre de régularisation.
- $\lambda \rightarrow \infty$  : Pas assez d'informations, il faut ajouter des données.
- $\lambda \rightarrow 0$  : Trop d'informations, les coefficients sont potentiellement instables.

On doit donc balancer entre le degré de régularisation et l'insertion d'informations.

### Déterminer $L$

On veut pénaliser la dérivation  $m$ -ième, on peut alors écrire la fonction de perte sous la forme

$$\begin{aligned} L_m(x) &= \int \left| \frac{d^m}{ds^m} x(s) \right|^2 ds \\ &= \int \left| \frac{d^m}{ds^m} c^T \phi(s) \right|^2 ds \\ &= c^T R_m c \end{aligned}$$

Avec  $\phi(s)^T = (\phi_1(s) \dots \phi_K(s))$ . L'équation (RRSSW1) devient alors

$$RRSS_m = (\phi_c - y)^T W (\phi_c - y) + \lambda c^T R_m c \quad (\text{RRSSm})$$

Avec

$$R_m = \int \frac{d^m}{ds^m} \phi(s) \frac{d^m}{ds^m} \phi^T(s) ds$$

La valeur optimale  $\hat{c}$  pour minimiser (RRSSm) est

$$\hat{c} = (\phi^T W \phi + \lambda R_m)^{-1} \phi^T W y$$

$$= S_{\phi, \lambda} y$$

## Déterminer $\lambda$

**Remarque.** On veut trouver une solution pour le problème matriciel suivant

$$\phi^T W \phi + \lambda R$$

Déterminer  $\lambda$  est un problème qui peut être décomposé en deux parties.

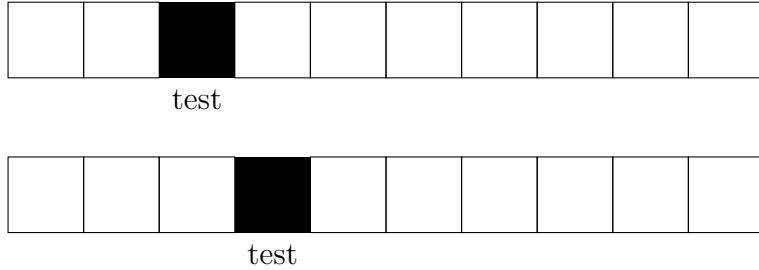
1. Déterminer un intervalle pour  $\lambda : \lambda_{min} \leq \lambda \leq \lambda_{max}$ .
2. Dans cet intervalle, trouver la valeur  $\lambda^*$  optimale.

Le choix de l'intervalle dépend du contexte, mais, en général, l'ampleur de  $\lambda R$  doit être inférieure à  $10^{10}$  fois celle de  $\phi^T W \phi$  et dix fois plus grande que l'ampleur de  $\phi^T W \phi$ .

Dans les cas déterministes, on utilise la méthode *L-curve* [2]. Pour le cas statistique, on utilise la méthode de validation croisée.

**Idée[3] :**

On partitionne les données en données d'entraînement et de test, dans le cas extrême, pour  $n$  données, on prend  $n - 1$  pour entraînement et une seule pour le test, on calcule l'erreur  $E_k$ ,  $k \in 1, 2 \dots n$  et on calcule la moyenne  $CV(\lambda) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E_k$ .



On refait cette méthode pour plusieurs valeurs de  $\lambda$ , on trouve alors la valeur optimale  $\lambda^*$ .

**Problème de cette méthode :**

- Très coûteuse au niveau du calcul.
- Elle a tendance à sous-régulariser les données, car elle privilégie des ajustements oscillants que l'on préférerait ignorer.

On utilise alors la méthode de validation croisée généralisée (Generalised Cross Validation)[1].

$$GCV(\lambda) = \frac{\frac{1}{n} RRSS_{m,\lambda}}{|1 - n^{-1} \text{trace}(S_{\phi,\lambda})|^2}$$

### 2.3.1 Exemple [4]

En 1828, le botaniste Robert Brown observa le mouvement "aléatoire" d'un pollen face aux choc avec les molécules d'eau, le terme mouvement Brownien est donné aux trajectoires irrégulières de ce pollen. Mais le premier traitement mathématique rigoureux est dû à N. Weiner(1923,1924) qui a prouvé l'existence du mouvement Brownien.

On a besoin de quelques notions pour pouvoir définir un mouvement Brownien, soit alors un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ .

$\Omega$  un ensemble,  $\mathcal{F}$  une tribu contenue dans l'ensemble des parties de  $\Omega$  et  $P$  une probabilité sur la tribu  $\mathcal{F}$ .

**Définition 2.3.1.** Une **filtration**  $\{\mathcal{F}_t; 0 \leq t < +\infty\}$  est une damille corissante de sous-tribus de  $\mathcal{F}$  : pour  $0 \leq s \leq t < +\infty$ ,  $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$ .

**Définition 2.3.2.** Un **processus stochastique**  $X$  est la donnée de  $\{X_t; 0 \leq t < +\infty\}$ , où, à  $t$  fixé,  $X_t$  est une variable aléatoire définie sur  $(\Omega, \mathcal{F})$  à valeurs dans  $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ . Avec  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  la tribu borélienne de  $\mathbb{R}^d$ .

**Définition 2.3.3.** Un processus  $X$  est dit **mesurable** si l'application suivante

$$\begin{aligned} ([0, +\infty[ \times \Omega, \mathcal{B}([0, +\infty[) \otimes \mathcal{F}) &\longrightarrow (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)) \\ (t, \omega) &\longmapsto X_t(\omega) \end{aligned}$$

est mesurable.

Un processus est dit **continu** si pour presque tout  $\omega \in \Omega$ ,  $t \mapsto X_t(\omega)$  est continue.

**Définition 2.3.4.** Un processus est dit **adapté** à la filtration  $\{\mathcal{F}_t; 0 \leq t < +\infty\}$  si pour tout  $t$ ,  $X_t$  est  $\mathcal{F}_t$ -mesurable.

On donne maintenant la définition du mouvement Brownien(MB).

**Définition 2.3.5.** Un **mouvement brownien de dimension  $k$**   $\{B_t, \mathcal{F}_t; 0 \leq t < +\infty\}$  est la donnée d'un processus mesurable  $B$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^k$ , etd'une filtration, tel que  $B$  est adapté à  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  est continu, et vérifie :

1.  $B_0 = 0$  presque sûrement.

- 
2. Pour  $0 \leq s < t$ , l'acroissement  $B_t - B_s$  est indépendant de  $\mathcal{F}_s$ .
  3. Pour  $0 \leq s < t$ , l'acroissement  $B_t - B_s$  suit une loi normale centrée, de matrice de covariance  $\sqrt{t-s}Id_k$ , et  $Id_k$  désigne la matrice identité de dimension  $k$ .

### Approximation du mouvement Brownien en utilisant la méthode L-curve[2]

Soit un mouvement Brownien, prenons alors  $n$  données réels et soit  $y \in \mathcal{M}_{n,1}$  vecteur de ces données. On veut approcher ces données par une fonction contrite par  $p$  B-splines cubiques.

$$x(t) = \phi.c$$

- $\phi \in \mathcal{M}_{n,p}$  matrice des B-splines.
- $c \in \mathcal{M}_{p,1}$  vecteur de coefficients.

Prenons  $W = I$  et supposons qu'on souhaite pénaliser la dérivée seconde, on alors

$$c^T R c = \int (x''(t))^2 dt$$

Trouver la valeur optimale de  $\lambda$  consiste à trouver la solution du problème suivant

$$\phi^T \phi + \lambda R$$

La première étape consiste à tracer, pour la variable  $\lambda$ , les deux fonctions suivante

$$f(\lambda) = \|\phi.c_\lambda - y\| \text{ et } g(\lambda) = \sqrt{c_\lambda^T R c_\lambda}$$

La valeur  $\lambda$  optimale se trouve au point où la courbure est maximale.

**L-curve (B-splines cubiques)**

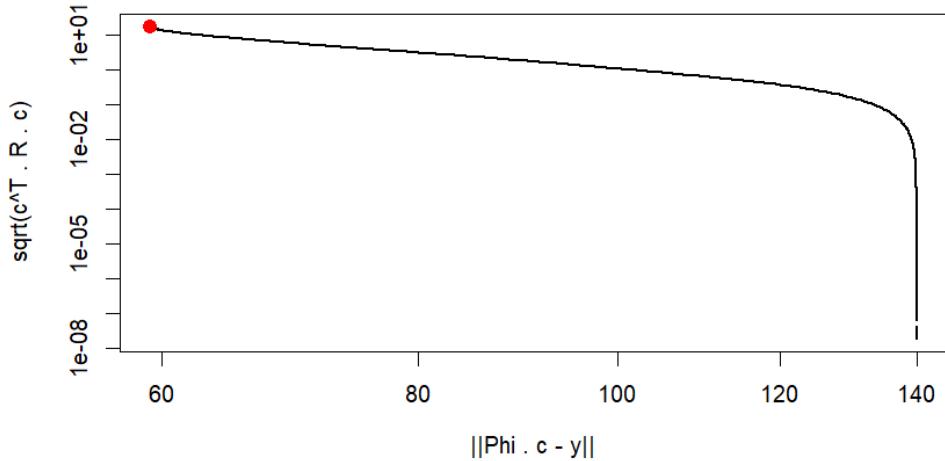


FIGURE 2.1 – Point rouge indique la valeur optimale de  $\lambda$

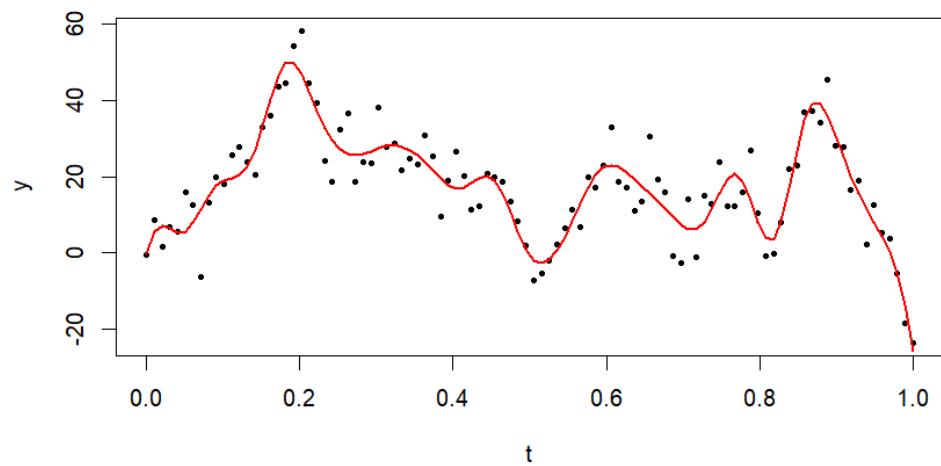


FIGURE 2.2 – Nuage de points des données et la courbe pénalisée

# Bibliographie

- [1] M. Asch, C. G. Borzi, M. Chen, et al., *A Toolbox for Digital Twins : From Model-Based to Data-Driven*, SIAM, Philadelphia, 2022, pp. 555–557.
- [2] P. C. Hansen, *The L-curve and its use in the numerical treatment of inverse problems*, Technical University of Denmark, Lyngby. URL : <https://www.sintef.no/globalassets/project/evitameeting/2005/lcurve.pdf>
- [3] D. Kobak, *Machine Learning I : Regularization and cross-validation*. Eberhard Karls Universität Tübingen. Lecture handout, slide 23. Disponible en ligne : [https://dkobak.github.io/teaching/ml1/kobak\\_ml1\\_lecture04\\_regularization\\_handout.pdf](https://dkobak.github.io/teaching/ml1/kobak_ml1_lecture04_regularization_handout.pdf)
- [4] A. Popier, *Mouvement Brownien, Intégrale Stochastique*, Séminaire des doctorants, Bordeaux, mercredi 12 mars 2003.  
<https://perso.univ-lemans.fr/~apopier/documents/resumesemindoct.pdf>