INSEA

74

MCMC: algorithmes avancés

Langevin Dynamics

Avec $h \to 0$:

$$\mathrm{d}X_t = D\nabla \log\left(f(X_t)\right)\mathrm{d}t + \sqrt{2D}\,\xi_t\,\mathrm{d}t$$

$$\boldsymbol{X}_{t+h} - \boldsymbol{X}_t =$$

$$D h \boldsymbol{\nabla} \log \left(f \left(\mathbf{X}_t \right) \right) \mathrm{d}t \; +$$

$$\sqrt{2Dh}\xi_t$$

La chaîne de Markov $(X_n)_n$ a pour distribution stationnaire une densité $\propto f$.

$$X_{n+1} = X_n + \varepsilon \nabla \log\left(f\left(X_n\right)\right) + \sqrt{2\varepsilon}\,\xi_n \qquad \xi_n \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Comment résoudre cette SDE numériquement ?

$$= \sqrt{h}\xi_t$$

$$\text{“Somme de } \overset{\approx}{h} \text{ variables } \mathcal{N}(0,1) \text{ i.i.d en t”}$$

ξ_t: processus aléatoire $\sim \mathcal{N}(0,1)$

$$\int_t^{t+h} \mathrm{d}X_s = D \int_t^{t+h} \nabla \log \left(f\left(X_s\right)\right) \mathrm{d}s + \sqrt{2D} \int_t^{t+h} \xi_s \mathrm{d}s$$

C’est la méthode d’Euler

Avec $D = 1$ et $\varepsilon = h \approx 0$, on définit la suite:

$$\mathrm{d}X_t = D\nabla\log\left(f(X_t)\right)\mathrm{d}t + \sqrt{2D}\xi_t\mathrm{d}t$$

Comment résoudre cette SDE numériquement ?

$$\int_t^{t+h}\mathrm{d}X_s = D\int_t^{t+h}\nabla\log\left(f(X_s)\right)\mathrm{d}s + \sqrt{2D}\int_t^{t+h}\xi_s\mathrm{d}s$$

ξ_t: processus aléatoire $\sim \mathcal{N}(0,1)$

Avec $h \to 0$:

$\approx$ "Somme de h variables $\mathcal{N}(0,1)$ i.i.d en t" $= \sqrt{h}\xi_t$

$$X_{t+h} - X_t = Dh\nabla\log\left(f(X_t)\right)\mathrm{d}t + \sqrt{2Dh}\xi_t$$

Avec $D = 1$ et $\varepsilon = h \approx 0$, on définit la suite:

C'est la méthode d'Euler

$$X_{n+1} = X_n + \varepsilon\nabla\log\left(f(X_n)\right) + \sqrt{2\varepsilon}\xi_n \qquad \xi_n \sim \mathcal{N}(0,1)$$

La chaîne de Markov $(X_n)_n$ a pour distribution stationnaire une densité $\propto f$.

INSEA

1. Pourquoi Monte-Carlo ? (Exemple de modèle hiérarchique)

2. Introduction à la méthode Monte-Carlo (historique, PRNG)

3. Algorithmes de simulation i.i.d (PRNG, transformation, rejet)

4. Méthodes MCMC (Gibbs, Metropolis)

5. Diagonstics de convergence MCMC

6. Méthodes MCMC avancées (Langevin, HMC, NUTS)

INSEA