INSEA

41

Le fréquentiste cherche l’estimateur T qui minimise:

$$\max_{\theta} \mathcal{R}(T, \theta) = \max_{\theta} \mathbb{E}_X \left[ \mathcal{L}(T(X), \theta) \right]$$

# Que devrait-être le critère du Bayésien ?

$$\int \mathcal{R}(T, \theta)\pi(\theta)\mathrm{d}\theta = \int \left(\mathbb{E}_X\left[\mathcal{L}(T(X), \theta)\right]\right)\pi(\theta)\mathrm{d}\theta$$

Le Bayésien ne maximise pas, il “moyenne” avec la loi a priori:

$$= \mathbb{E}_{\theta \sim \pi} \left( \mathbb{E}_X \left[ \mathcal{L}(T(X), \theta) \right] \right)$$

$$\mathcal{R}_\pi(T) \stackrel{\text{def}}{=}$$

Risque de Bayes pour la loi a priori $\pi$

Le Bayésien cherche l’estimateur T qui minimise: $\mathcal{R}_\pi(T)$

Un tel estimateur est dit: “Estimateur de Bayes”

Qu’obtient-on si on intègre la perte par rapport a la loi a-posteriori ?

$$\int \mathcal{L}(T(X), \theta)\,\mathrm{d}\mathbb{P}(\theta|X)$$

On intègre par rapport à $\theta$ uniquement, ce risque dépend des données !

$$\rho_\pi(T, X) \stackrel{\mathrm{def}}{=}$$

Risque a posteriori

Et si on le minimise par rapport à $T$, on obtient une fonction en $X$: un estimateur !

**Théorème**

L'estimateur: $\arg\min_T \rho_\pi(T, X)$, s'il existe, est un estimateur de Bayes: il minimise $\mathcal{R}_\pi(T)$ pour la même perte $\mathcal{L}$.

*Preuve facile: appliquer le théorème de Bayes puis changer l'ordre de l'intégrale double avec le théorème de Fubini (notes UPMC)*

# Risque bayésien et risque a posteriori

# Risque bayésien et risque a posteriori

Le fréquentiste cherche l'estimateur T qui minimise: $\max_{\theta} \mathcal{R}(T,\theta) = \max_{\theta} \mathbb{E}_X\left[\mathcal{L}(T(X),\theta)\right]$

**Que devrait-être le critère du Bayésien ?**

Le Bayésien ne maximise pas, il "moyenne" avec la loi a priori:

$$\mathcal{R}_\pi(T) \stackrel{\text{def}}{=} \int \mathcal{R}(T,\theta)\pi(\theta)\mathrm{d}\theta = \int \left(\mathbb{E}_X\left[\mathcal{L}(T(X),\theta)\right]\right)\pi(\theta)\mathrm{d}\theta \quad = \mathbb{E}_{\theta\sim\pi}\left(\mathbb{E}_X\left[\mathcal{L}(T(X),\theta)\right]\right)$$

Risque de Bayes pour la loi a priori $\pi$

Le Bayésien cherche l'estimateur T qui minimise: $\mathcal{R}_\pi(T)$ Un tel estimateur est dit: "Estimateur de Bayes"

**Qu'obtient-on si on intègre la perte par rapport a la loi a-posteriori ?**

$$\rho_\pi(T,X) \stackrel{\text{def}}{=} \int \mathcal{L}(T(X),\theta)\mathrm{d}\mathbb{P}(\theta|X)$$

On intègre par rapport à $\theta$ uniquement, ce risque dépend des données !

Risque a posteriori

Et si on le minimise par rapport à T, on obtient une fonction en X: un estimateur !

**Théorème**

L'estimateur: $\arg\min_T \rho_\pi(T,X)$, s'il existe, est un estimateur de Bayes: il minimise $\mathcal{R}_\pi(T)$ pour la même perte $\mathcal{L}$.

*Preuve facile: appliquer le théorème de Bayes puis changer l'ordre de l'intégrale double avec le théorème de Fubini (notes UPMC)*

INSEA

# Estimateur de Bayes