INSEA

Application (Ex 3. TD 1)

Soit $Z|\mu, \sigma^2 \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. μ et σ^2 ont des densités a priori indépendantes f_μ et f_{σ^2}.

40

Gibbs sampling

Algorithme de Gibbs (2D)

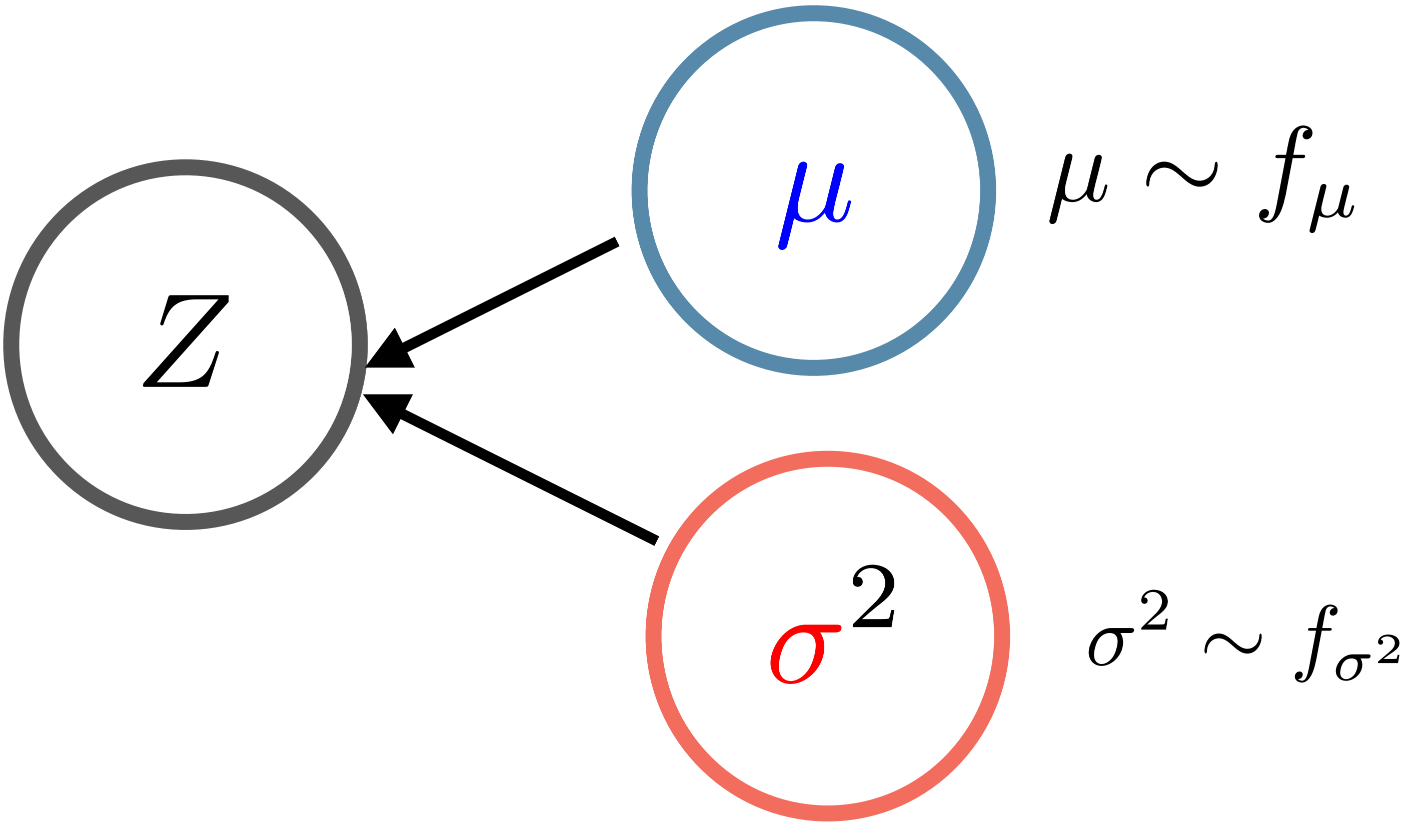
On souhaite simuler $\mathbf{X} = (X_1, X_2) \in \mathbb{R}^2$ d'une distribution jointe $\mathbb{P}_{(X_1, X_2)}$. Soit $x_2 \in \mathbb{R}$

1. On sait générer $x_1 \sim X_1$ avec X_2 fixée selon la loi conditionnelle $X_1|X_2 = x_2$

2. On sait générer X_2 avec X_1 fixée selon la loi conditionnelle $X_2|X_1 = x_1$

Alors en partant d'un quelconque $x_2 \in \mathbb{R}$, la suite $\mathbf{X}_n$ définie par ces itérés est une chaîne de Markov avec $\mathbb{P}_{(X_1, X_2)}$ comme distribution stationnaire.

$$Z \mid \mu, \sigma^2 \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$



1. Dessiner le graphe probabiliste du modèle.

2. Déterminez la loi a posteriori jointe $(\mu, \sigma^2)|Z$.

3. Déterminez les lois conditionnelles $\mu|\sigma^2, Z$ et $\sigma^2|\mu, Z$.

4. Quelles lois a priori f_μ et f_{σ^2} devrait-on prendre pour avoir des lois conditionnelles usuelles ?

En deux dimensions

Algorithme de Gibbs (2D)

On souhaite simuler $\mathbf{X} = (X_1, X_2) \in \mathbb{R}^2$ d'une distribution jointe $\mathbb{P}_{(X_1,X_2)}$. Soit $x_2 \in \mathbb{R}$

1. On sait générer $x_1 \sim X_1$ avec X_2 fixée selon la loi conditionnelle $X_1 | X_2 = x_2$
2. On sait générer X_2 avec X_1 fixée selon la loi conditionnelle $X_2 | X_1 = x_1$

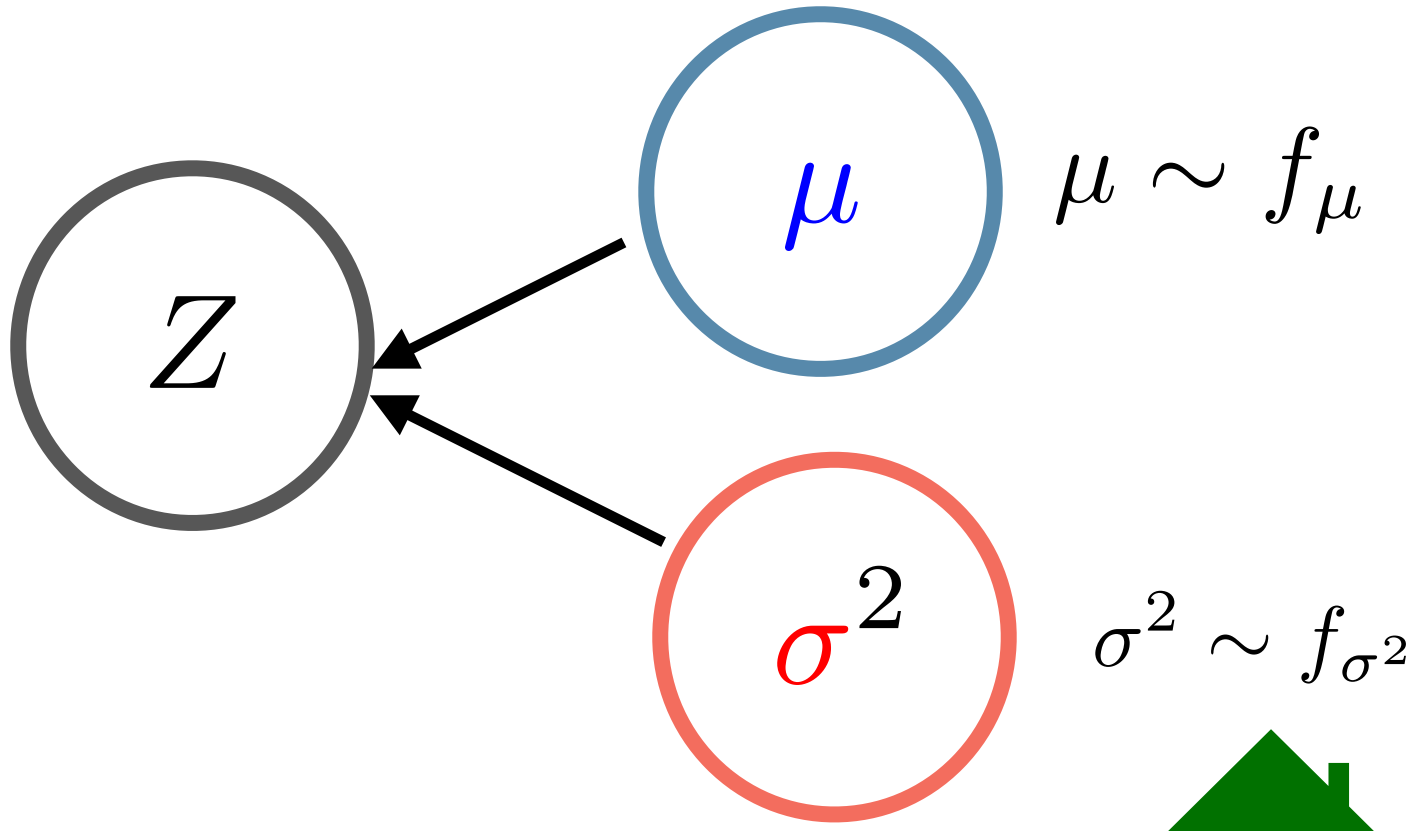
Alors en partant d'un quelconque $x_2 \in \mathbb{R}$, la suite $\mathbf{X}_n$ définie par ces itérés est une chaîne de Markov avec $\mathbb{P}_{(X_1,X_2)}$ comme distribution stationnaire.

Application (Ex 3. TD 1)

Soit $Z|\mu, \sigma^2 \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. μ et σ^2 ont des densités a priori indépendantes f_μ et f_{σ^2}.

1. Dessiner le graphe probabiliste du modèle.
2. Déterminez la loi a posteriori jointe $(\mu, \sigma^2)|Z$.
3. Déterminez les lois conditionnelles $\mu|\sigma^2, Z$ et $\sigma^2|\mu, Z$.
4. Quelles lois a priori f_μ et f_{σ^2} devrait-on prendre pour avoir des lois conditionnelles usuelles ?

$$Z|\mu, \sigma^2 \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$



1. Pourquoi Monte-Carlo ? (Exemple de modèle hiérarchique)

2. Introduction à la méthode Monte-Carlo (historique, PRNG)

3. Algorithmes de simulation i.i.d (PRNG, transformation, rejet)

4. Méthodes MCMC (Gibbs, Metropolis)

5. Diagonstics de convergence MCMC

6. Méthodes MCMC avancées (Langevin, HMC, NUTS)

INSEA

Algorithme de Gibbs (général)

On souhaite simuler $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_d) \in \mathbb{R}^d$ d'une distribution jointe $\mathbb{P}_{(X_1,\ldots,X_d)}$. Soit $x_2, \ldots, x_d \in \mathbb{R}$.

1. Générer $x_1 \sim X_1$ avec $X_2, \ldots, X_d$ fixés selon la loi conditionnelle $X_1 | X_2 = x_2, \ldots X_d = x_d$
2. Générer (et mettre à jour) $x_2 \sim X_2$ avec $X_1, X_3, \ldots, X_d$ fixés selon la loi conditionnelle $X_2 | X_1 = x_1, X_3 = x_3, \ldots, X_d = x_d$
3. Générer (et mettre à jour) $x_3 \sim X_3$ avec $X_1, X_2, \ldots, X_d$ fixés selon la loi conditionnelle $X_3 | X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_d = x_d$
4. ...

La suite $\mathbf{X}_n$ définie par ces itérés est une chaîne de Markov avec $\mathbb{P}_{(X_1,\ldots,X_n)}$ comme distribution stationnaire.

INSEA