INSEA

32

1. Sur une table de billard, il y a une séparation abstraite (coordonnée p) invisible et inconnue par les joueurs.
2. À chaque tirage, une balle est jetée (uniformément entre 0 et 1) sur la table.
3. Si elle tombe à gauche de p, Alice gagne un point
4. Si elle tombe à droite de p, Bob gagne un point
5. Le premier à 6 points gagne. Le score est Alice 5 - 3 Bob. Quelle est la probabilité que Bob gagne ?

2. Approche Bayésienne

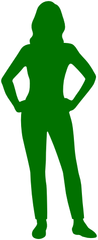
Exemple 2:

+1

0

1

p



Alice

Bob

I

[redacted]

[redacted]

[redacted]

0.5

2. En utilisant la loi a posteriori, proposez un estimateur de la probabilité que Bob gagne sachant le score $A = 5$, $B = 3$.

1. On suppose une loi a priori uniforme pour p. Déterminez la loi a posteriori $\mathbb{P}(p|A = 5, B = 3)$.

3. Simulation

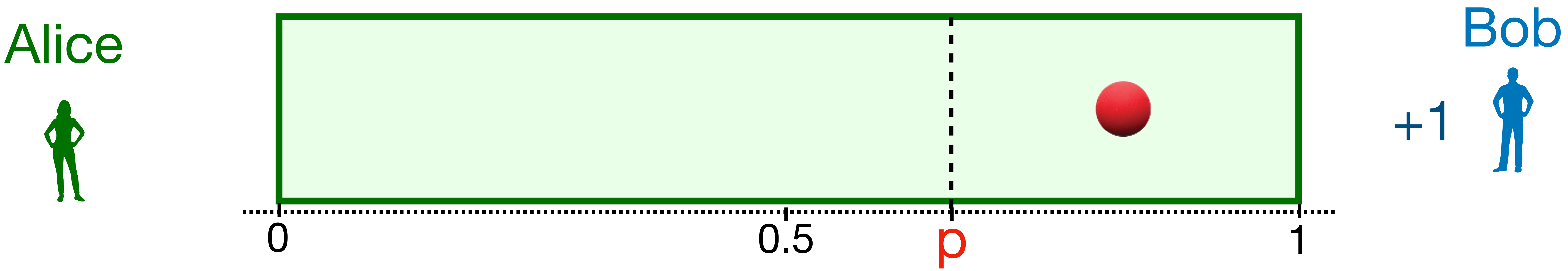
Simulez ce jeu en Python et estimez cette probabilité empiriquement. Quelle approche est la plus précise ?

La table de Bayes

Premier modèle Bayésien

Premier modèle Bayésien — La table de Bayes

Exemple 2:



1. Sur une table de billard, il y a une séparation abstraite (coordonnée p) invisible et inconnue par les joueurs.
2. À chaque tirage, une balle est jetée (uniformément entre 0 et 1) sur la table.
3. Si elle tombe à gauche de p, Alice gagne un point
4. Si elle tombe à droite de p, Bob gagne un point
5. Le premier à 6 points gagne. Le score est Alice 5 - 3 Bob. Quelle est la probabilité que Bob gagne ?

2. Approche Bayésienne

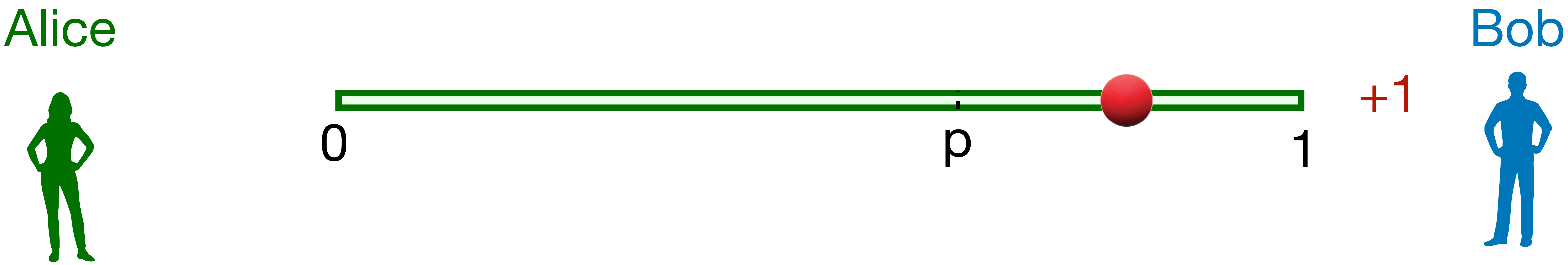
1. On suppose une loi a priori uniforme pour p. Déterminez la loi a posteriori $\mathbb{P}(p|A=5, B=3)$.
2. En utilisant la loi a posteriori, proposez un estimateur de la probabilité que Bob gagne sachant le score A = 5, B = 3.

3. Simulation

Simulez ce jeu en Python et estimez cette probabilité empiriquement. Quelle approche est la plus précise ?

INSEA

INSEA



La distribution a posteriori est donnée par:

$$\mathbb{P}(p|A=5,B=3) = \frac{\mathbb{P}(A=5,B=3|p)\mathbb{P}(p)}{\mathbb{P}(A=5,B=3)} \quad (1)$$

$$\propto \mathbb{P}(A=5,B=3|p)\mathbb{P}(p) \quad (2)$$

$$= \binom{8}{5} p^5(1-p)^3 \mathbb{1}_{[0,1]}(p) \quad (3)$$

$$\propto p^5(1-p)^3 \quad (4)$$

On reconnait la loi Beta(6, 4).
Sa constante de normalisation est: $\frac{\Gamma(6)\Gamma(4)}{\Gamma(10)} = \frac{5!3!}{9!}$

$$\mathbb{P}(p|A=5,B=3) = \frac{9!}{5!3!} p^5(1-p)^3$$