INSEA

**Application**

On rappelle que l'information de Fisher en dimension 1 est donnée par: $I(\theta) = \mathbb{E}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(X;\theta)\right)^2\right] = -\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log f(X;\theta)\right]$

**Théorème (Bernstein-von Mises)**

43

Que devient la loi a posteriori lorsque la quantité des données tend vers l’infini ?

Soit $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. $\sim P_{\theta_0}$ avec $\theta_0 \in \Theta \subset \mathbb{R}^d$ tel que $P_\theta$ un modèle régulier (densité $\in \mathcal{C}^\infty$, $\theta_0 \in \mathrm{int}(\Omega)$).

Si la loi a priori est régulière et non nulle en $\theta_0$ et la matrice d'information de Fisher $I(\theta_0)$ est inversible, alors:

La loi a posteriori $\theta|X_1,\ldots,X_n$ est asymptotiquement normale centrée en $\widehat{\theta}_{MV}$:

On note l'estimateur du maximum de vraisemblance par $\widehat{\theta}_{MV}$.

*Preuve très avancée: Voir 10.2 dans l'ouvrage* ***Asymptotic Statistics*** *de van der Vaart (1998).*

1. Analysez l’une de ces expressions pour comprendre son intuition.

2. Simulez en Python un modèle Beta-Bernoulli et vérifier le comportement asymptotique donné par le théorème BvM.

$$\sqrt{n}\left(\theta - \widehat{\theta}_{MV}\right)|X_1, \ldots, X_n \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, I(\theta_0)^{-1})$$

# Estimateur de Bayes asymptotique

# Estimateur de Bayes asymptotique

Que devient la loi a posteriori lorsque la quantité des données tend vers l'infini ?

**Théorème (Bernstein-von Mises)**

Soit $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. $\sim P_{\theta_0}$ avec $\theta_0 \in \Theta \subset \mathbb{R}^d$ tel que $P_\theta$ un modèle régulier (densité $\in \mathcal{C}^\infty$, $\theta_0 \in \mathrm{int}(\Omega)$).

On note l'estimateur du maximum de vraisemblance par $\widehat{\theta}_{MV}$.

Si la loi a priori est régulière et non nulle en $\theta_0$ et la matrice d'information de Fisher $I(\theta_0)$ est inversible, alors:

La loi a posteriori $\theta | X_1, \ldots, X_n$ est asymptotiquement normale centrée en $\widehat{\theta}_{MV}$:

$$\sqrt{n}\left(\theta - \widehat{\theta}_{MV}\right) | X_1, \ldots, X_n \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, I(\theta_0)^{-1})$$

*Preuve très avancée: Voir 10.2 dans l'ouvrage* ***Asymptotic Statistics*** *de van der Vaart (1998).*

**Application**

On rappelle que l'information de Fisher en dimension 1 est donnée par: $I(\theta) = \mathbb{E}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta} \log f(X;\theta)\right)^2\right] = -\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \log f(X;\theta)\right]$

1. Analysez l'une de ces expressions pour comprendre son intuition.
2. Simulez en Python un modèle Beta-Bernoulli et vérifier le comportement asymptotique donné par le théorème BvM.

INSEA

# Résumé