INSEA

18

Régression logistique

$$\min_{\alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}^d} \sum_{i=1}^{n} \left(\mathbb{1}_{\{\alpha + \beta^\top \mathbf{x}_i \geq 0\}} - y_i \right)^2$$

Fonction non différentiable (discontinue même) difficile à optimiser

Au lieu de prendre le signe, transformer les scores $\alpha + \beta^\top \mathbf{x}_i$ vers $[0, 1]$ et modéliser des probabilités

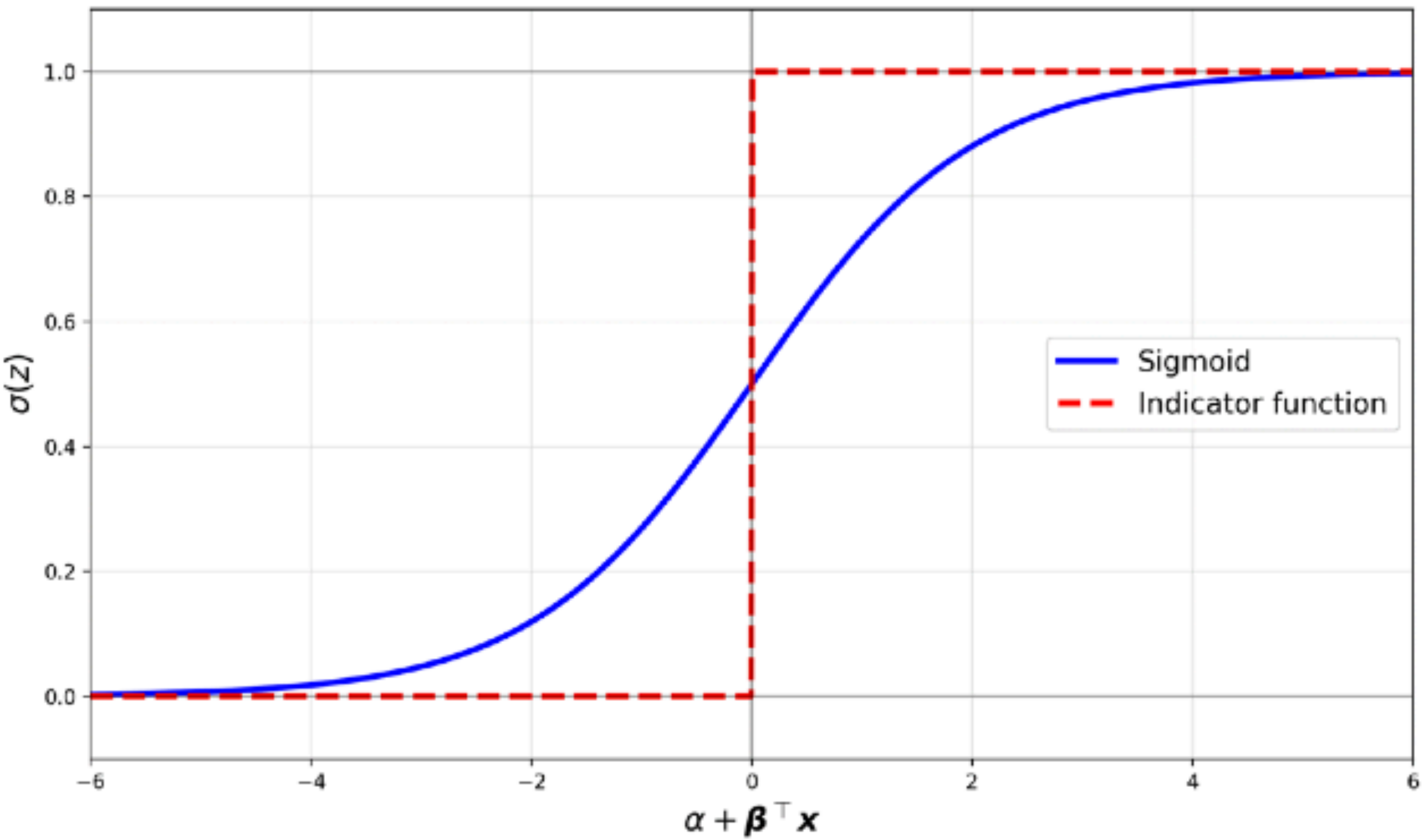
$$p_i \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}(y_i = 1 | \mathbf{x}_i) = \mathrm{sigmoid}(\alpha + \beta^\top \mathbf{x}_i)$$

On peut comparer les p_i avec les y_i avec la *cross-entropy*:

$$\min_{\alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}^d} - \sum_{i=1}^{n} y_i \log(p_i) + (1 - y_i) \log(1 - p_i)$$

Modèle de régression logistique

$$\text{sigmoid: } t \mapsto \frac{1}{1+e^{-t}} \quad \text{(logistique)}$$



On a donc une fonction de prédiction: $f^\star(\mathbf{x}_i) = 1 \Leftrightarrow \text{sigmoid}(\alpha^\star + \beta^{\star\top}\mathbf{x}_i) \geq \frac{1}{2}$

Machine learning classique: zero-to-hero

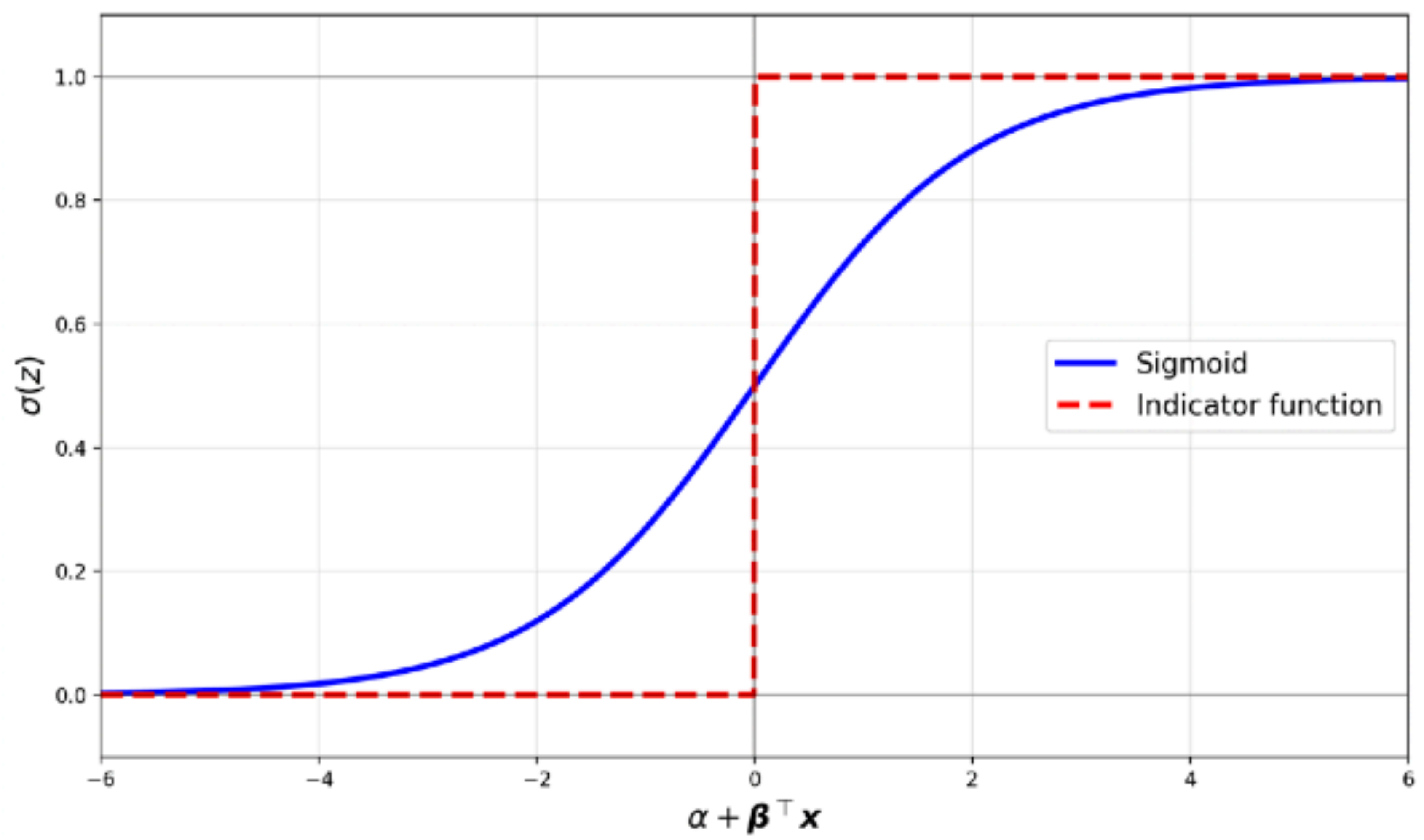
$$\min_{\alpha\in\mathbb{R},\beta\in\mathbb{R}^d} \sum_{i=1}^{n} (\mathbb{1}_{\{\alpha+\beta^\top \mathbf{x}_i \geq 0\}} - y_i)^2$$

Fonction non différentiable (discontinue même) difficile à optimiser

Au lieu de prendre le signe, transformer les scores $\alpha + \beta^\top \mathbf{x}_i$ vers $[0, 1]$ et modéliser des probabilités

sigmoid: $t \mapsto \frac{1}{1+e^{-t}}$ (logistique)

$$p_i \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}(y_i = 1|\mathbf{x}_i) = \text{sigmoid}(\alpha + \beta^\top \mathbf{x}_i)$$



On peut comparer les p_i avec les y_i avec la *cross-entropy*:

$$\min_{\alpha\in\mathbb{R},\beta\in\mathbb{R}^d} -\sum_{i=1}^{n} y_i \log(p_i) + (1 - y_i)\log(1 - p_i)$$

On a donc une fonction de prédiction: $f^\star(\mathbf{x}_i) = 1 \Leftrightarrow \text{sigmoid}(\alpha^\star + \beta^{\star\top} \mathbf{x}_i) \geq \frac{1}{2}$

Modèle de régression logistique

$$p_i \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}(y_i = 1|\mathbf{x}_i) = \text{sigmoid}(\alpha + \beta^\top \mathbf{x}_i)$$

$$\min_{\alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}^d} - \sum_{i=1}^{n} y_i \log(p_i) + (1 - y_i) \log(1 - p_i)$$