INSEA

28

Motivation

First Bayesian model

Exemple 1: “Quel est la probabilité que mon nouveau-né soit de sexe masculin ?”

On note θ cette probabilité. On définit une variable aléatoire binaire X désignant le sexe masculin avec $\mathbb{P}(X = 1) = \theta$.

Ainsi, X suit une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(\theta)$ et on a pour $k \in \{0,1\} \quad \mathbb{P}(X = k) = \theta^k (1-\theta)^{1-k}$.

Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables i.i.d $\sim \mathcal{B}(\theta)$ pour les quelles on observe n valeurs $x_1, \dots, x_n$.

1. Détaillez l’approche Fréquentiste en calculant la vraisemblance et son maximum.

2. Le Bayésien considère que θ est une variable aléatoire suivant une loi a priori π. Quelle est la formule pour trouver la distribution de $\theta | X_1, \ldots X_n$?

3. $\theta|X_1, \ldots X_n$ suit la loi a posteriori. Trouver sa distribution en prenant une loi a priori uniforme.

On rappelle que la densité d'une loi Beta(a, b) est donnée par :

$$f(x) = \frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}}, \quad \text{pour } x \in [0, 1].$$

Sa moyenne est donnée par $\frac{a}{a+b}$. Pour $a, b > 1$, son maximum est atteint en $\frac{a-1}{a+b-2}$.

4. Comparez avec l’approche Fréquentiste.

Exemple 1: “Quel est la probabilité que mon nouveau-né soit de sexe masculin ?”

On note θ cette probabilité. On définit une variable aléatoire binaire X désignant le sexe masculin avec $\mathbb{P}(X=1)=\theta$.

Ainsi, X suit une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(\theta)$ et on a pour $k \in \{0,1\}$ $\quad \mathbb{P}(X=k)=\theta^k(1-\theta)^{1-k}$.

Soit $X_1,\dots,X_n$ des variables i.i.d $\sim \mathcal{B}(\theta)$ pour les quelles on observe n valeurs $x_1,\dots,x_n$.

1. Détaillez l’approche Fréquentiste en calculant la vraisemblance et son maximum.

2. Le Bayésien considère que θ est une variable aléatoire suivant une loi a priori π. Quelle est la formule pour trouver la distribution de $\theta|X_1,\dots X_n$?

3. $\theta|X_1,\dots X_n$ suit la loi a posteriori. Trouver sa distribution en prenant une loi a priori uniforme.

   On rappelle que la densité d’une loi Beta(a,b) est donnée par :

$$f(x)=\frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}}, \quad \text{pour } x\in[0,1].$$

   Sa moyenne est donnée par $\frac{a}{a+b}$. Pour $a,b>1$, son maximum est atteint en $\frac{a-1}{a+b-2}$.

4. Comparez avec l’approche Fréquentiste.

INSEA

1. Introduction

2. Les Bayésiens vs Les fréquentistes

3. Rappels de probabilités (exemples)

4. Loi a posteriori et modèles conjugués

5. Estimateur de Bayes

Exemple 2: