





I N S E A







Le fréquentisme hérité de l'estimateur T qui minimise:

$$\max_{\theta} \mathcal{R}(T, \theta) = \max_{\theta} \mathbb{E}_X [\mathcal{L}(\textcolor{blue}{T}(X), \theta)]$$





Quelle devrait être le critère du Bayésien ?

$$\int \mathcal{R}(T, \theta) \pi(\theta) \mathrm{d}\theta = \int (\mathbb{E}_X [\mathcal{L}(\textcolor{blue}{T}(X), \theta)]) \pi(\theta) \mathrm{d}\theta$$

Le Bayésien ne maximise pas, il “mynime” a priori:

$$= \mathbb{E}_{\theta \sim \pi} \left( \mathbb{E}_X \left[ \mathcal{L}(\textcolor{blue}{I}(X), \textcolor{red}{\theta}) \right] \right)$$

$$\mathcal{R}_\pi(T) \stackrel{\text{def}}{=}$$



Risque de Bayes pour la loi a priori  $\pi$

Le Bayésien cherche l'estimateur  $T$  qui minimise:  $\mathcal{R}_\pi(T)$

Unintended Consequence: “Estimate Bayes”





**Qu'obtient-on si on intègre la parenté par rapport à la loi a-posteriori ?**

$$\int \mathcal{L}(T(X), \theta) \mathrm{d}\mathbb{P}(\theta | X)$$

On intègre par rapport à  $\theta$  uniquement, ce risque dépend des données!

$$\rho_{\pi}(T, X) \stackrel{\text{def}}{=}$$



Risque a posteriori

Et si on minimise par rapport à  $T$ , on obtient une fonction  $X$ : un état euclidien!

## Théorème

L'estimateur:  $\arg \min_T \rho_\pi(T, X)$ , s'il existe, est un estimateur de Bayes: il minimise  $\mathcal{R}_\pi(T)$  pour la même perte  $\mathcal{L}$ .

*Préface à l'application de la théorie de Bayes par l'ordinateur à l'intégration de la théorie de Fourier (noté PMG)*



Risque bayésien et risque a posteriori

# Risque bayésien et risque a posteriori

Le fréquentiste cherche l'estimateur  $T$  qui minimise:  $\max_{\theta} \mathcal{R}(T, \theta) = \max_{\theta} \mathbb{E}_X [\mathcal{L}(T(X), \theta)]$

Que devrait-être le critère du Bayésien ?

Le Bayésien ne maximise pas, il “moyenne” avec la loi a priori:

$$\mathcal{R}_{\pi}(T) \stackrel{\text{def}}{=} \int \mathcal{R}(T, \theta) \pi(\theta) d\theta = \int (\mathbb{E}_X [\mathcal{L}(T(X), \theta)]) \pi(\theta) d\theta = \mathbb{E}_{\theta \sim \pi} (\mathbb{E}_X [\mathcal{L}(T(X), \theta)])$$

Risque de Bayes pour la loi a priori  $\pi$

Le Bayésien cherche l'estimateur  $T$  qui minimise:  $\mathcal{R}_{\pi}(T)$  Un tel estimateur est dit: “Estimateur de Bayes”

Qu'obtient-on si on intègre la perte par rapport a la loi a-posteriori ?

$$\rho_{\pi}(T, X) \stackrel{\text{def}}{=} \int \mathcal{L}(T(X), \theta) d\mathbb{P}(\theta|X)$$

On intègre par rapport à  $\theta$  uniquement, ce risque dépend des données !

Risque a posteriori

Et si on le minimise par rapport à  $T$ , on obtient une fonction en  $X$ : un estimateur !

## Théorème

L'estimateur:  $\arg \min_T \rho_{\pi}(T, X)$ , s'il existe, est un estimateur de Bayes: il minimise  $\mathcal{R}_{\pi}(T)$  pour la même perte  $\mathcal{L}$ .

Preuve facile: appliquer le théorème de Bayes puis changer l'ordre de l'intégrale double avec le théorème de Fubini (notes UPMC)

## 1. Introduction

2. Les Bayésiens vs Les fréquentistes

3. Rappels de probabilités (exemples)

4. Loi a posteriori et modèles conjugués

5. Estimateur de Bayes



