INSEA

Beta-Binomial	$\theta \sim \mathrm{Beta}(\alpha, \beta) \propto \theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1}$	$X \mid \theta \sim \mathrm{Bin}(n, \theta)$, $\mathbb{P}(X \mid \theta) = \binom{n}{X}\theta^{X}(1-\theta)^{n-X}$	$\theta \mid X \sim \mathrm{Beta}(\alpha + X, \beta + n - X)$

Gaussian-Gaussian	$\theta \sim \mathcal{N}(\mu_0, \sigma_0^2) \propto \exp\left(-\frac{(\theta-\mu_0)^2}{2\sigma_0^2}\right)$	$X \mid \theta \sim \mathcal{N}(\theta, \sigma^2)$, $\mathbb{P}(X \mid \theta) \propto \exp\left(-\frac{(X-\theta)^2}{2\sigma^2}\right)$	$\theta \mid X \sim \mathcal{N}(\mu_n, \sigma_n^2)$, $\mu_n = \frac{\sigma_0^2 X + \sigma^2 \mu_0}{\sigma_0^2+\sigma^2}$, $\sigma_n^2 = \frac{\sigma_0^2\sigma^2}{\sigma_0^2+\sigma^2}$

Gamma-Poisson	$\theta \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta) \propto \theta^{\alpha-1} e^{-\beta\theta}$	$X \mid \theta \sim \text{Poisson}(\theta)$, $\mathbb{P}(X \mid \theta) = \frac{\theta^X e^{-\theta}}{X!}$	$\theta \mid X \sim \text{Gamma}(\alpha + X, \beta + 1)$

Modèle	**Loi a priori**	**Vraisemblance**	**Loi a posteriori**
Beta-Bernoulli	$\theta \sim \mathrm{Beta}(\alpha, \beta) \propto \theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1}$	$X \mid \theta \sim \mathrm{Bernoulli}(\theta)$, $\mathbb{P}(X \mid \theta) = \theta^X(1-\theta)^{1-X}$	$\theta \mid X \sim \mathrm{Beta}(\alpha + X, \beta + 1 - X)$

39

1. Pour quel type de modèle obtient-on une loi a posteriori facilement ?

On dit qu'une loi *a priori* $\pi(\theta)$ est **conjuguée** pour un modèle $\mathbb{P}(X_1, \ldots, X_n \mid \theta)$ si la loi *a posteriori* $\mathbb{P}(\theta \mid X_1, \ldots, X_n)$ appartient à la même famille de distributions que $\pi(\theta)$.

Quelques exemples:

?

?

?

?

2) Prendre une loi a priori conjuguée:

a priori conjuguées

1. Pour quel type de modèle obtient-on une loi a posteriori facilement ?

2) Prendre une loi a priori conjuguée:

On dit qu'une loi *a priori* $\pi(\theta)$ est **conjuguée** pour un modèle $\mathbb{P}(X_1, \ldots, X_n \mid \theta)$ si la loi *a posteriori* $\mathbb{P}(\theta \mid X_1, \ldots, X_n)$ appartient à la même famille de distributions que $\pi(\theta)$.

Quelques exemples:

Modèle	**Loi a priori**	**Vraisemblance**	**Loi a posteriori**
Beta-Bernoulli	$\theta \sim \text{Beta}(\alpha, \beta) \propto \theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1}$	$X \mid \theta \sim \text{Bernoulli}(\theta)$, $\mathbb{P}(X \mid \theta) = \theta^X(1-\theta)^{1-X}$	$\theta \mid X \sim \text{Beta}(\alpha + X, \beta + 1 - X)$
Beta-Binomial	$\theta \sim \text{Beta}(\alpha, \beta) \propto \theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1}$	$X \mid \theta \sim \text{Bin}(n, \theta)$, $\mathbb{P}(X \mid \theta) = \binom{n}{X}\theta^X(1-\theta)^{n-X}$	$\theta \mid X \sim \text{Beta}(\alpha + X, \beta + n - X)$
Gaussian-Gaussian	$\theta \sim \mathcal{N}(\mu_0, \sigma_0^2) \propto \exp\left(-\frac{(\theta-\mu_0)^2}{2\sigma_0^2}\right)$	$X \mid \theta \sim \mathcal{N}(\theta, \sigma^2)$, $\mathbb{P}(X \mid \theta) \propto \exp\left(-\frac{(X-\theta)^2}{2\sigma^2}\right)$	$\theta \mid X \sim \mathcal{N}(\mu_n, \sigma_n^2)$, $\mu_n = \frac{\sigma_0^2 X + \sigma^2\mu_0}{\sigma_0^2+\sigma^2}$, $\sigma_n^2 = \frac{\sigma_0^2\sigma^2}{\sigma_0^2+\sigma^2}$
Gamma-Poisson	$\theta \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta) \propto \theta^{\alpha-1}e^{-\beta\theta}$	$X \mid \theta \sim \text{Poisson}(\theta)$, $\mathbb{P}(X \mid \theta) = \frac{\theta^X e^{-\theta}}{X!}$	$\theta \mid X \sim \text{Gamma}(\alpha + X, \beta + 1)$

INSEA

Risque fréquentiste minimax