INSEA

## Algorithmes MCMC

37

# Markov Chains Monte-Carlo

Soit $g$ une densité (non-normalisée). On veut simuler un échantillon $x$ selon la densité $\pi \stackrel{\text{def}}{=} \frac{g}{\int g}$.

Soit $(X_n)_n$ une chaîne de Markov admettant une distribution stationnaire à densité $\pi$.

Alors pour simuler $x \sim \pi$ Il suffit de prendre $x = X_n$ avec $n \to \infty$.

# Définition

Pour générer un échantillon, il faut attendre la convergence de la chaîne

Et pour estimer une moyenne a posteriori, il faut plusieurs échantillons i.i.d !

Mais les itérés de la suite ne sont jamais i.i.d …

**Théorème Ergodique**

Soit $(X_n)_n$ une chaîne de Markov ergodique ayant pour distribution stationnaire $\pi$. Alors:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(X_i) \xrightarrow{n \to +\infty} \mathbb{E}_{\pi}(f(X)) = \int f(x)\pi(x)\mathrm{d}x$$

# “Loi des grands nombres” pour des échantillons non i.i.d

**Algorithmes MCMC**

Soit $g$ une densité (non-normalisée). On veut simuler un échantillon $x$ selon la densité $\pi \overset{\text{def}}{=} \frac{g}{\int g}$.

Soit $(X_n)_n$ une chaîne de Markov admettant une distribution stationnaire à densité $\pi$.

Alors pour simuler $x \sim \pi$ Il suffit de prendre $x = X_n$ avec $n \to \infty$.

Pour générer un échantillon, il faut attendre la convergence de la chaîne

Et pour estimer une moyenne a posteriori, il faut plusieurs échantillons i.i.d !

Mais les itérés de la suite ne sont jamais i.i.d …

**Théorème Ergodique**

Soit $(X_n)_n$ une chaîne de Markov ergodique ayant pour distribution stationnaire $\pi$. Alors:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(X_i) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}_\pi(f(X)) = \int f(x)\pi(x)\mathrm{d}x$$

"Loi des grands nombres" pour des échantillons non i.i.d

1. Pourquoi Monte-Carlo ? (Exemple de modèle hiérarchique)

2. Introduction à la méthode Monte-Carlo (historique, PRNG)

3. Algorithmes de simulation i.i.d (PRNG, transformation, rejet)

4. Méthodes MCMC (Gibbs, Metropolis)

5. Diagonstics de convergence MCMC

6. Méthodes MCMC avancées (Langevin, HMC, NUTS)

**Algorithmes MCMC**

Soit $g$ une densité (non-normalisée). On veut simuler un échantillon $x$ selon la densité $\pi \stackrel{\text{def}}{=} \frac{g}{\int g}$.

Soit $(X_n)_n$ une chaîne de Markov admettant une distribution stationnaire à densité $\pi$.

Alors pour simuler $x \sim \pi$ Il suffit de prendre $x = X_n$ avec $n \to \infty$.