INSEA

Metropolis-Hastings

Algorithme de Metropolis-Hastings

Soit f une densité de probabilité et $q(y|x)$ une densité de transition (proposal) de x à y. On suppose que X_n est déjà généré. X_{n+1} est défini par:

1. Générer $y \sim q(.|X_n)$
2. Générer $u \sim \mathcal{U}([0,1])$.
3. Si $u < \min(1, \frac{f(y)q(X_n|y)}{f(X_n)q(y|X_n)})$ alors $X_{n+1} = y$, sinon $X_{n+1} = X_n$.

La suite $(X_n)_n$ obtenue admet une distribution stationnaire donnée par la densité f.

Hastings généralise l'algorithme de Metropolis en prenant une distribution de transition (exploration) quelconque:

1. Utile si la distribution cible f a un domaine borné (par ex. $[0, 1]$, on peut choisir $Q = \text{Beta}$)

2. Utile si la distribution cible f est discrète (Q uniforme sur ensemble fini)

3. On peut utiliser une densité q non normalisée (Gaussienne tronquée)

Avantages:

Identiques à ceux de l’algorithme de Metropolis

Inconvénients:

Remarque: si q est symétrique, on retrouve l'algorithme de Metropolis

L’algorithme

Hastings généralise l'algorithme de Metropolis en prenant une distribution de transition (exploration) quelconque:

Algorithme de Metropolis-Hastings

Soit f une densité de probabilité et $q(y|x)$ une densité de transition (proposal) de x à y. On suppose que X_n est déjà généré. X_{n+1} est défini par:

1. Générer $y \sim q(.|X_n)$
2. Générer $u \sim \mathcal{U}([0,1])$.
3. Si $u < \min(1, \frac{f(y)q(X_n|y)}{f(X_n)q(y|X_n)})$ alors $X_{n+1} = y$, sinon $X_{n+1} = X_n$.

La suite $(X_n)_n$ obtenue admet une distribution stationnaire donnée par la densité f.

Avantages:

1. Utile si la distribution cible f a un domaine borné (par ex. [0, 1], on peut choisir Q = Beta)
2. Utile si la distribution cible f est discrète (Q uniforme sur ensemble fini)
3. On peut utiliser une densité q non normalisée (Gaussienne tronquée)

Inconvénients: Identiques à ceux de l'algorithme de Metropolis

Remarque: si q est symétrique, on retrouve l'algorithme de Metropolis

1. Pourquoi Monte-Carlo ? (Exemple de modèle hiérarchique)
2. Introduction à la méthode Monte-Carlo (historique, PRNG)
3. Algorithmes de simulation i.i.d (PRNG, transformation, rejet)
4. Méthodes MCMC (Gibbs, Metropolis)
5. Diagonstics de convergence MCMC
6. Méthodes MCMC avancées (Langevin, HMC, NUTS)

INSEA

On est souvent confronté à calculer une quantité du type: $I \overset{\text{def}}{=} \int \varphi(x) f(x) \mathrm{d}x$.