INSEA

53

MCMC diagnostics in 1D

Visuals

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov donnée par un algorithme MCMC.

L'estimateur $\widehat{I} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \varphi(X_i)$ est de bonne qualité si:

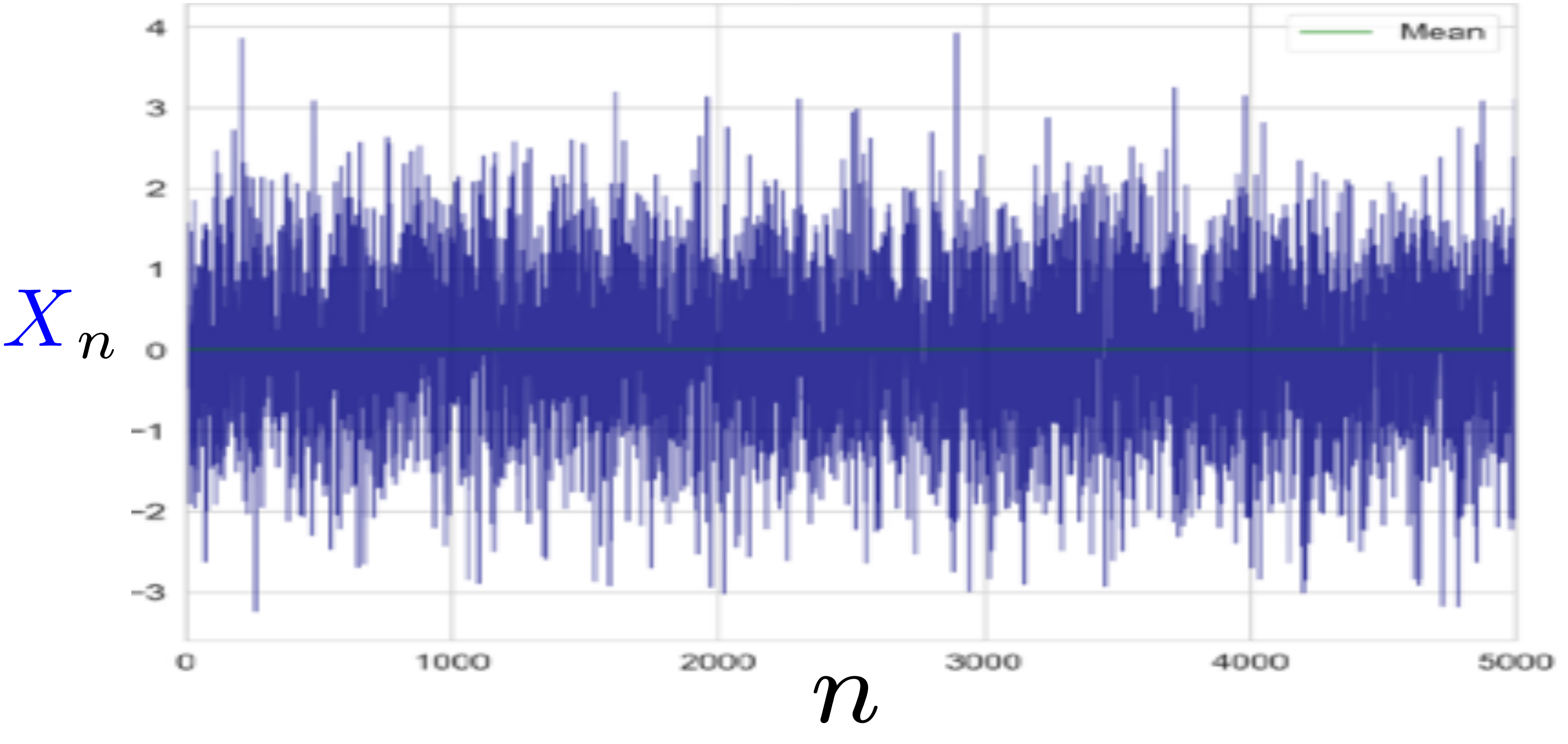
1. Converge rapidement: les X_i utilisés ont atteint le régime stationnaire.

Régime stationnaire = $X_n \sim f$:

la chaîne semble “mélangée”,

pas de tendance, absence de “pattern”,

ne reste pas bloquée.



Mean
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
X_n
0
1000
2000
3000
4000
5000
n

Faible variance = faibles corrélations $\mathbb{C}\mathrm{ov}(X_i, X_j)$.

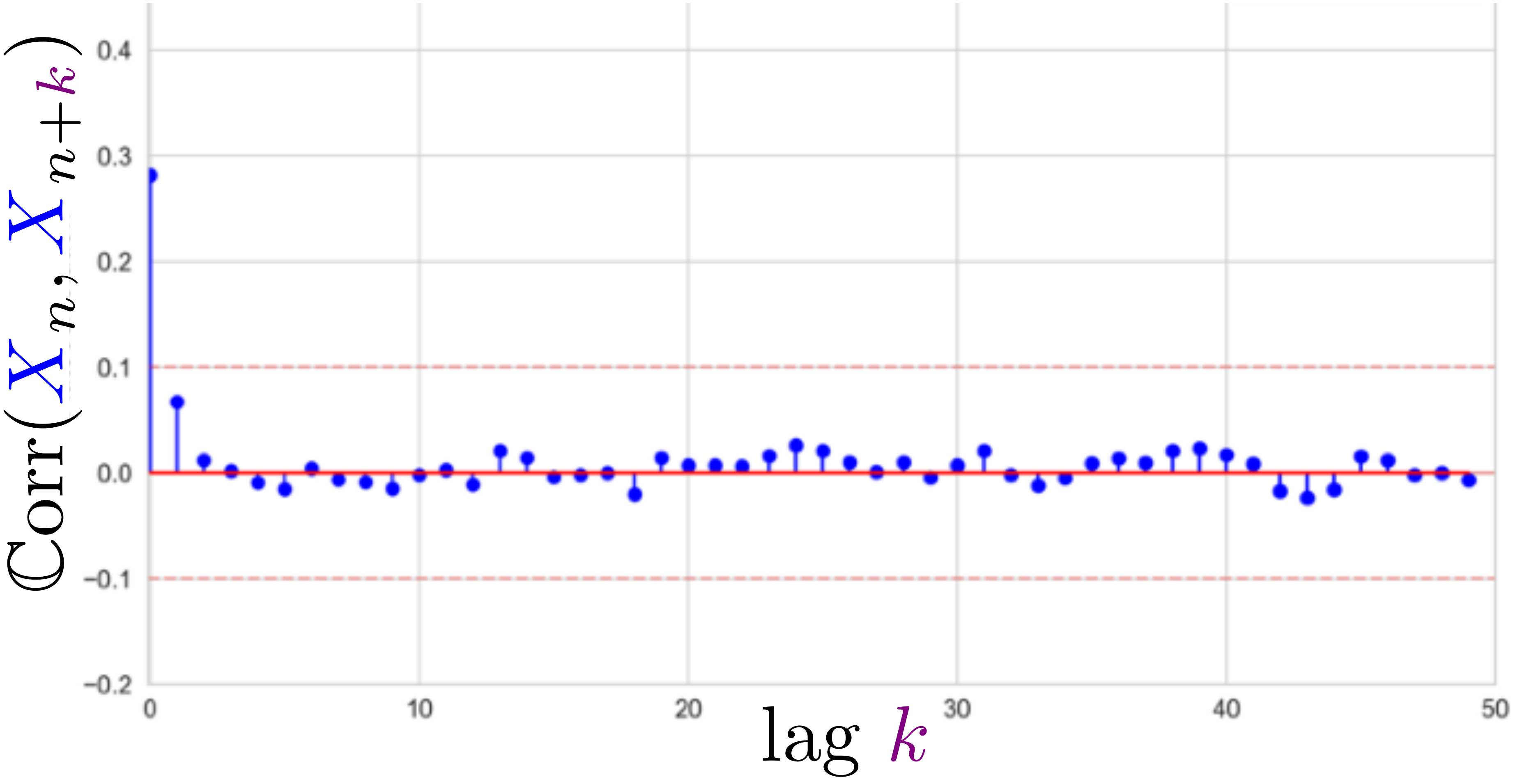
Auto-corrélation avec lag $k = \mathbb{C}\mathrm{ov}(X_n, X_{n+k})$.

Empiriquement avec N échantillons:

$$\text{AutoCorr}(k) = \text{Corr}([X_0, X_1, \ldots, X_{N-k}], [X_k, X_{1+k}, \ldots, X_N])$$

Décroissante en fonction de k.

2. L'estimateur a une petite variance: $\mathbb{V}(\widehat{I}) = \frac{1}{n^2}\left[\sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(\varphi(X_i)) + 2\sum_{i<j} \mathbb{C}\mathrm{ov}(\varphi(X_i), \varphi(X_j))\right]$

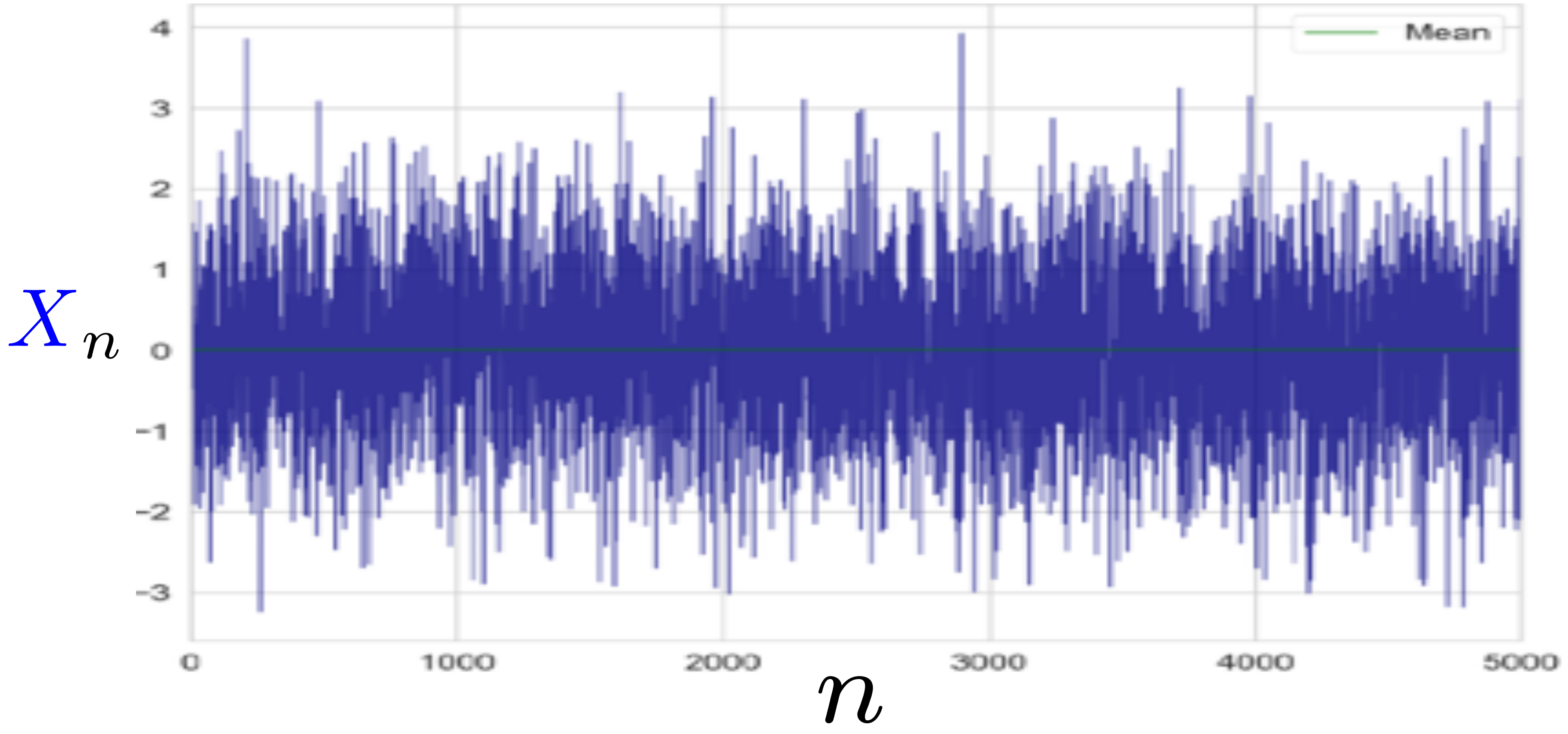


$\mathrm{Corr}(X_n, X_{n+k})$
0.4
0.3
0.2
0.1
0.0
−0.1
−0.2
0
10
20
30
40
50
lag k

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov donnée par un algorithme MCMC.

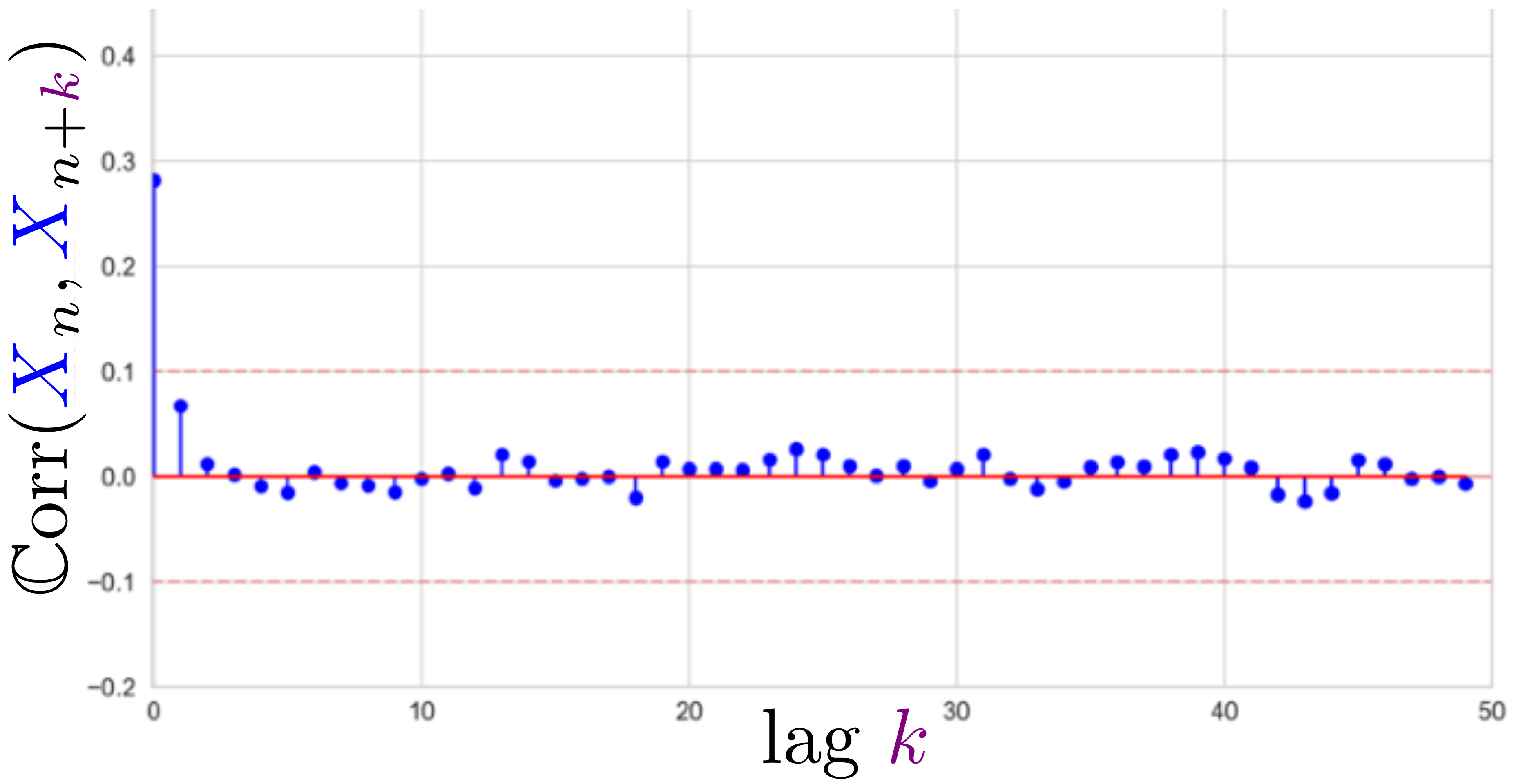
L'estimateur $\widehat{I} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \varphi(X_i)$ est de bonne qualité si:

1. Converge rapidement: les X_i utilisés ont atteint le régime stationnaire.



Régime stationnaire $= X_n \sim f$:
la chaîne semble "mélangée",
pas de tendance, absence de "pattern",
ne reste pas bloquée.

2. L'estimateur a une petite variance: $\mathbb{V}(\widehat{I}) = \frac{1}{n^2}\left[\sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(\varphi(X_i)) + 2\sum_{i<j} \mathbb{C}\mathrm{ov}(\varphi(X_i), \varphi(X_j))\right]$



Faible variance $=$ faibles corrélations $\mathbb{C}\mathrm{ov}(X_i, X_j)$.

Auto-corrélation avec lag $k = \mathbb{C}\mathrm{ov}(X_n, X_{n+k})$.

Décroissante en fonction de k.

Empiriquement avec N échantillons:
$\mathrm{AutoCorr}(k) = \mathbb{C}\mathrm{orr}([X_0, X_1, \ldots, X_{N-k}], [X_k, X_{1+k}, \ldots, X_N])$

1. Pourquoi Monte-Carlo ? (Exemple de modèle hiérarchique)

2. Introduction à la méthode Monte-Carlo (historique, PRNG)

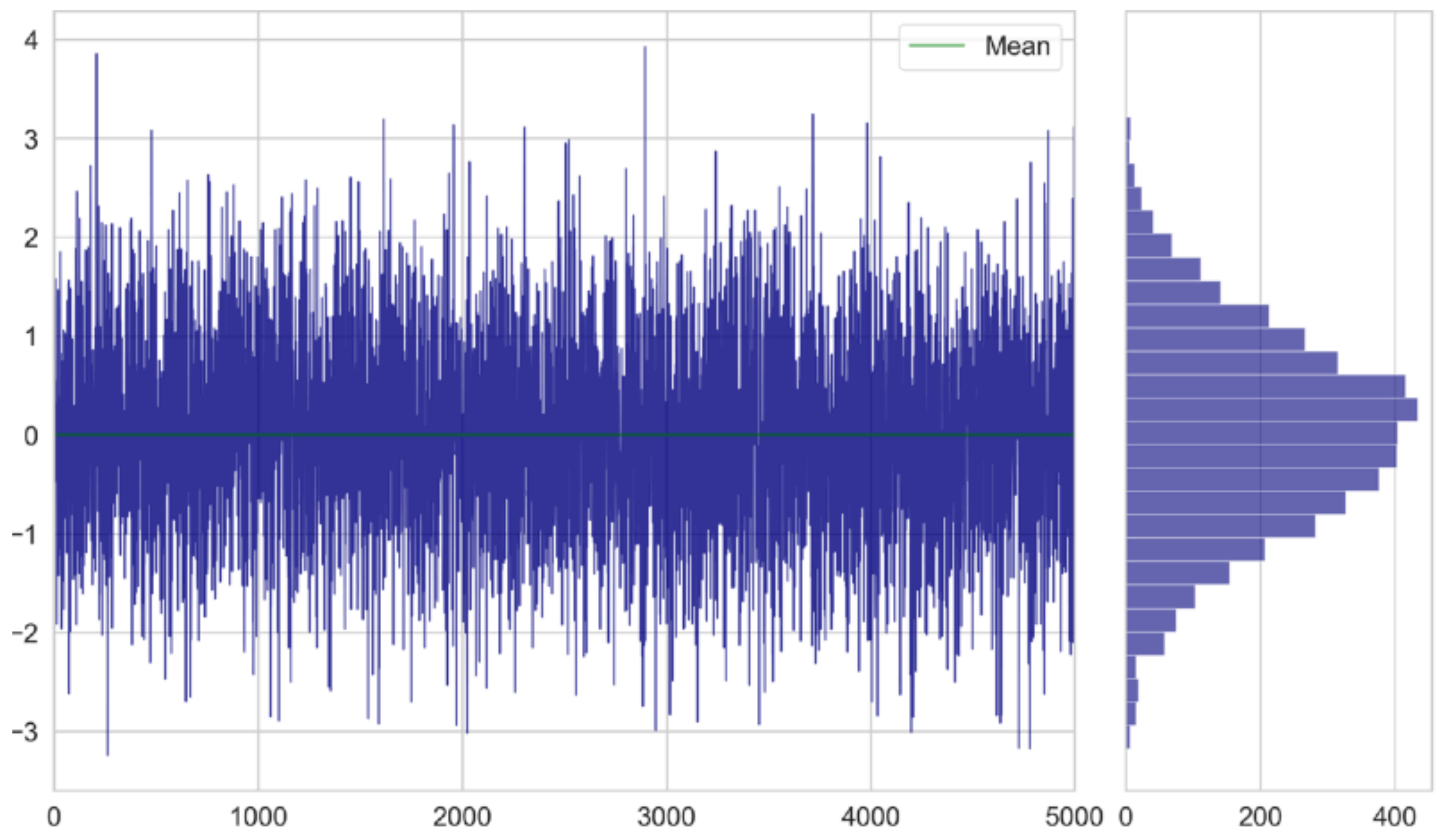
3. Algorithmes de simulation i.i.d (PRNG, transformation, rejet)

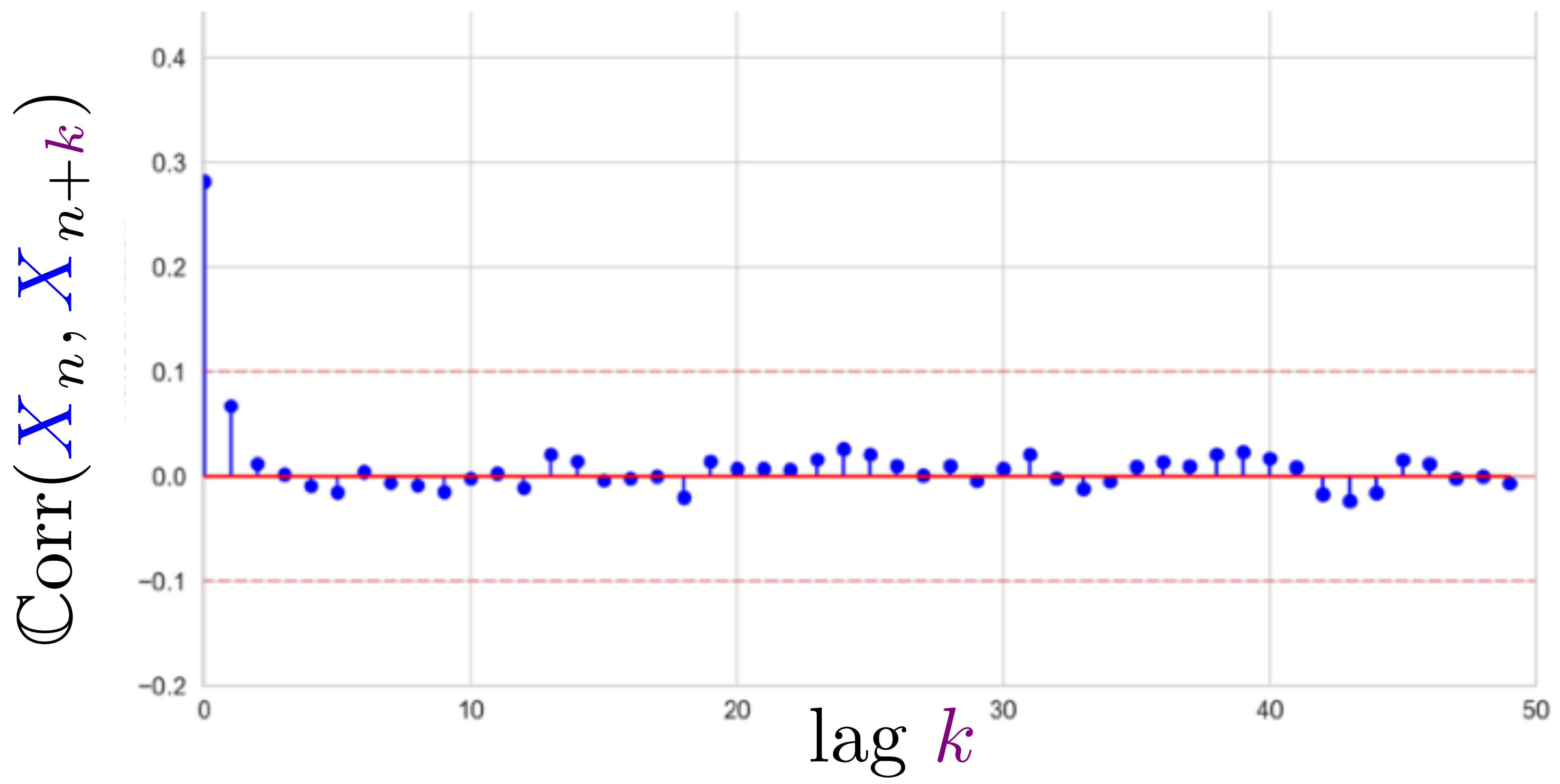
4. Méthodes MCMC (Gibbs, Metropolis)

5. Diagonstics de convergence MCMC

6. Méthodes MCMC avancées (Langevin, HMC, NUTS)

INSEA


Mean
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
0
1000
2000
3000
4000
5000
0
200
400


$\mathbb{C}\mathrm{orr}(X_n, X_{n+k})$
0.4
0.3
0.2
0.1
0.0
-0.1
-0.2
0
10
20
30
40
50
lag k