INSEA

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(\text{Bob Gagne}|A=5,B=3) &= \int \mathbb{P}(\text{Bob Gagne}|A=5,B=3,p)\mathrm{d}\mathbb{P}(p|A=5,B=3)\\
&= \int (1-p)^3 f_{\beta(6,4)}(p)\mathrm{d}p\\
&= \int (1-p)^3 \frac{p^5(1-p)^3}{\beta(6,4)}\mathrm{d}p\\
&= \frac{1}{\beta(6,4)}\int p^5(1-p)^6\mathrm{d}p\\
&= \frac{\beta(6,7)}{\beta(6,4)} = \frac{\frac{\Gamma(6)\Gamma(7)}{\Gamma(13)}}{\frac{\Gamma(6)\Gamma(4)}{\Gamma(10)}} = \frac{\frac{5!6!}{12!}}{\frac{5!3!}{9!}} = \frac{9!6!}{12!3!} = \frac{5!}{12\times 11\times 10} = \frac{1}{11} \approx 0.09
\end{aligned}
$$

36

La table de Bayes

Bayésien: Probabilité conditionnelle en utilisant la loi des probabilités totales:

Distribution a posteriori

Au lieu d’estimer p et substituer dans $(1-p)^3$, le Bayésien calcule une “moyenne a posteriori”

Premier modèle Bayésien

Bayésien: Probabilité conditionnelle en utilisant la loi des probabilités totales:

Distribution a posteriori

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\text{Bob Gagne}|A=5,B=3) &= \int \mathbb{P}(\text{Bob Gagne}|A=5,B=3,p)\mathrm{d}\mathbb{P}(p|A=5,B=3) \\
&= \int (1-p)^3 f_{\beta(6,4)}(p)\mathrm{d}p \\
&= \int (1-p)^3 \frac{p^5(1-p)^3}{\beta(6,4)}\mathrm{d}p \\
&= \frac{1}{\beta(6,4)} \int p^5(1-p)^6 \mathrm{d}p \\
&= \frac{\beta(6,7)}{\beta(6,4)} = \frac{\frac{\Gamma(6)\Gamma(7)}{\Gamma(13)}}{\frac{\Gamma(6)\Gamma(4)}{\Gamma(10)}} = \frac{\frac{5!6!}{12!}}{\frac{5!3!}{9!}} = \frac{9!6!}{12!3!} = \frac{5!}{12\times 11\times 10} = \frac{1}{11} \approx 0.09
\end{aligned}$$

Au lieu d'estimer p et substituer dans $(1-p)^3$, le Bayésien calcule une "moyenne a posteriori"

INSEA

1. Introduction

2. Les Bayésiens vs Les fréquentistes

3. Rappels de probabilités (exemples)

4. Loi a posteriori et modèles conjugués

5. Estimateur de Bayes

Dans l'exemple de Alice - Bob on a: