INSEA

10

La loi jointe $(\{\lambda_i\}_{i=1}^n, \{z_i\}_{i=1}^n, p, \alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1) \mid \{N_i\}_{i=1}^n$ est

$$\propto \prod_{i=1}^{n} \Big\{ \mathbb{P}\big(N_i \mid \lambda_i\big)\, \mathbb{P}\big(\lambda_i \mid z_i,\, \alpha_0,\, \beta_0,\, \alpha_1,\, \beta_1\big)\, \mathbb{P}\big(z_i \mid p\big) \Big\} \mathbb{P}(p)\, \mathbb{P}(\alpha_0)\, \mathbb{P}(\beta_0)\, \mathbb{P}(\alpha_1)\, \mathbb{P}(\beta_1).$$

$$\propto \prod_{i=1}^{n} \left\{ \frac{\lambda_i^{N_i} e^{-\lambda_i}}{N_i!} \left(\frac{\beta_0^{\alpha_0}}{\Gamma(\alpha_0)} \lambda_i^{\alpha_0 - 1} e^{-\beta_0 \lambda_i} \right)^{1-z_i} \left(\frac{\beta_1^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1)} \lambda_i^{\alpha_1 - 1} e^{-\beta_1 \lambda_i} \right)^{z_i} p^{z_i} (1-p)^{1-z_i} \right\} p^{a-1} (1-p)^{b-1} \left[\alpha_0^{\tau-1} e^{-\delta\,\alpha_0} \beta_0^{\tau-1} e^{-\delta\,\beta_0} \alpha_1^{\tau'-1} e^{-\delta'\,\alpha_1} \beta_1^{\tau'-1} e^{-\delta'\,\beta_1} \right].$$

Comment obtenir les lois a posteriori d'intérêt: $\lambda_j|\{N_i\}_{i=1}^n$? $z_j|\{N_i\}_{i=1}^n$?

Il faut marginaliser: intégrer la loi jointe par rapport à toutes les autres variables: impossible analytiquement !

Solution: Obtenir des échantillons “simulés” issus de la loi a posteriori et construire des estimateurs empiriques

Et pour cela on utilise les méthodes de simulation “Monte-Carlo”

Pourquoi Monte-Carlo ?

Modèle bayésien hiérarchique

La loi jointe $(\{\lambda_i\}_{i=1}^n, \{z_i\}_{i=1}^n, p, \alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1) \,|\{N_i\}_{i=1}^n$ est

$$\propto \prod_{i=1}^{n} \left\{ \mathbb{P}\Big(N_i \mid \lambda_i\Big)\, \mathbb{P}\Big(\lambda_i \mid z_i,\, \alpha_0,\, \beta_0,\, \alpha_1,\, \beta_1\Big)\, \mathbb{P}\Big(z_i \mid p\Big) \right\} \mathbb{P}(p)\, \mathbb{P}(\alpha_0)\, \mathbb{P}(\beta_0)\, \mathbb{P}(\alpha_1)\, \mathbb{P}(\beta_1).$$

$$\propto \prod_{i=1}^{n} \left\{ \frac{\lambda_i{}^{N_i} e^{-\lambda_i}}{N_i!} \left(\frac{\beta_0^{\alpha_0}}{\Gamma(\alpha_0)} \lambda_i{}^{\alpha_0 - 1} e^{-\beta_0 \lambda_i} \right)^{1 - z_i} \left(\frac{\beta_1^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1)} \lambda_i{}^{\alpha_1 - 1} e^{-\beta_1 \lambda_i} \right)^{z_i} p^{z_i} (1-p)^{1 - z_i} \right\} p^{a-1} (1-p)^{b-1} \left[\alpha_0^{\tau - 1} e^{-\delta\, \alpha_0} \beta_0^{\tau - 1} e^{-\delta\, \beta_0} \alpha_1^{\tau' - 1} e^{-\delta'\, \alpha_1} \beta_1^{\tau' - 1} e^{-\delta'\, \beta_1} \right].$$

Comment obtenir les lois a posteriori d'intérêt: $\lambda_j|\{N_i\}_{i=1}^n$? $z_j|\{N_i\}_{i=1}^n$?

Il faut marginaliser: intégrer la loi jointe par rapport à toutes les autres variables: impossible analytiquement !

Solution: Obtenir des échantillons "simulés" issus de la loi a posteriori et construire des estimateurs empiriques

Et pour cela on utilise les méthodes de simulation "Monte-Carlo"

INSEA

1. Pourquoi Monte-Carlo ? (Exemple de modèle hiérarchique)

2. Introduction à la méthode Monte-Carlo (historique, PRNG)

3. Algorithmes de simulation i.i.d (PRNG, transformation, rejet)

4. Méthodes MCMC (Gibbs, Metropolis)

5. Diagonstics de convergence MCMC

6. Méthodes MCMC avancées (Langevin, HMC, NUTS)

INSEA

Pourquoi les

2. Méthodes de Monte-Carlo

?