INSEA

19

Motivation

Probability theory reminders

Loi des probabilités totales

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)$$

Corollaire : Soit $\mathbf{X}$ une variable aléatoire discrète prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}$. Alors :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(B|\mathbf{X} = i)\mathbb{P}(\mathbf{X} = i)$$

Soit $(\Omega, \mathcal{P}, \mathcal{A})$ un espace probabilisé. Soit $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une partition de Ω, c'est-à-dire que $A_i \cap A_j = \varnothing$ pour $i \neq j$ et $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i = \Omega$. Soit $B \in \mathcal{A}$, alors :

Quelle est l’intuition de cette loi ? Autrement dit, d’où vient-elle ?

$$\sum_{i=1}^{+\infty}\mathbb{P}(\mathbf{B}|A_i)\mathbb{P}(A_i)=\sum_{i=1}^{+\infty}\mathbb{P}(\mathbf{B}\cap A_i)=\mathbb{P}(\cup_{i=1}^{n}B\cap A_i)=\mathbb{P}(\mathbf{B}\cap\cup_{i=1}^{n}A_i)=\mathbb{P}(\mathbf{B}\cap\Omega)=\mathbb{P}(\mathbf{B})$$

Bayes

Car éléments disjoints

Car partition (faire un schéma)

Loi des probabilités totales

Soit $(\Omega, \mathcal{P}, \mathcal{A})$ un espace probabilisé. Soit $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une partition de Ω, c'est-à-dire que $A_i \cap A_j = \varnothing$ pour $i \neq j$ et $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i = \Omega$. Soit $B \in \mathcal{A}$, alors :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)$$

Quelle est l'intuition de cette loi ? Autrement dit, d'où vient-elle ?

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathbf{B}|A_i)\mathbb{P}(A_i) \underset{\text{Bayes}}{=} \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathbf{B} \cap A_i) \underset{\text{Car éléments disjoints}}{=} \mathbb{P}(\cup_{i=1}^{n} B \cap A_i) = \mathbb{P}(\mathbf{B} \cap \cup_{i=1}^{n} A_i) = \mathbb{P}(\mathbf{B} \cap \Omega) = \mathbb{P}(\mathbf{B})$$

Bayes — Car éléments disjoints — Car partition (faire un schéma)

Corollaire : Soit $\mathbf{X}$ une variable aléatoire discrète prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}$. Alors :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(B|\mathbf{X} = i)\mathbb{P}(\mathbf{X} = i)$$

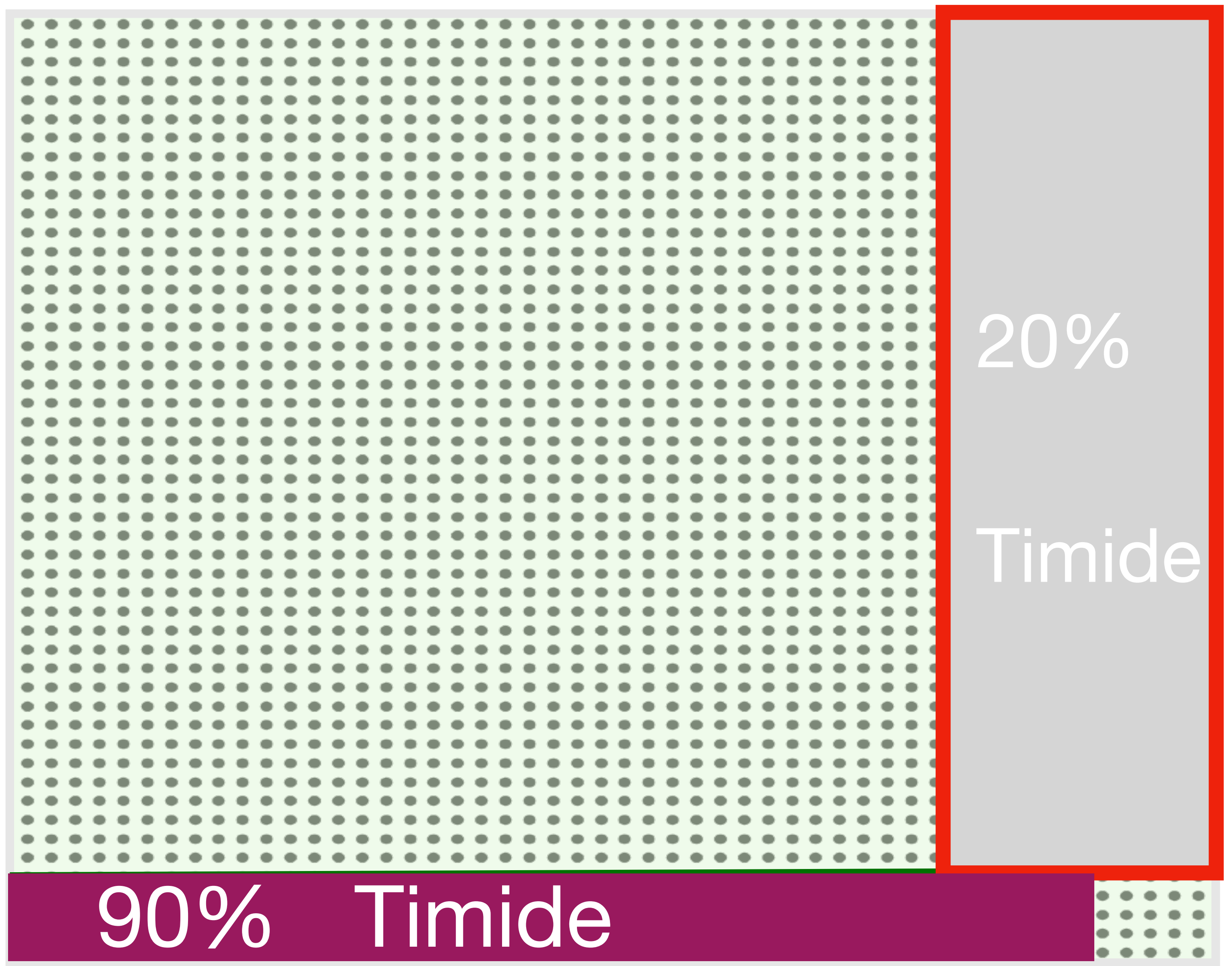
INSEA

$$\mathbb{P}(\mathbf{T}) = \mathbb{P}(\mathbf{T}|\mathbf{A})\mathbb{P}(\mathbf{A}) + \mathbb{P}(\mathbf{T}|\mathbf{B})\mathbb{P}(\mathbf{B})$$

$$\mathbb{P}(\mathbf{B}|\mathbf{T}) = \frac{\mathbb{P}(\mathbf{T}|\mathbf{B})\mathbb{P}(\mathbf{B})}{\mathbb{P}(\mathbf{T})} = \frac{\mathbb{P}(\mathbf{T}|\mathbf{B})\mathbb{P}(\mathbf{B})}{\mathbb{P}(\mathbf{T}|\mathbf{A})\mathbb{P}(\mathbf{A})+\mathbb{P}(\mathbf{T}|\mathbf{B})\mathbb{P}(\mathbf{B})}$$

$$= \frac{0.9\times 0.1}{0.2\times 0.9+0.9\times 0.1} = \frac{1}{3}$$

Agriculteurs



Bibliothécaires