





I N S E A





Beta-Binomial

$\theta \sim \text{Beta}(\alpha, \beta) \propto \theta^{\alpha-1} (1-\theta)^{\beta-1}$

$X \mid \theta \sim \text{Bin}(n, \theta), \mathbb{P}(X \mid \theta) = \binom{n}{X} \theta^X (1-\theta)^{n-X}$

$\theta \mid X \sim \text{Beta}(\alpha + X, \beta + n - X)$

---

Gaussian-Gaussian

$$\theta \sim \mathcal{N}(\mu_0, \sigma_0^2) \propto \exp\left(-\frac{(\theta - \mu_0)^2}{2\sigma_0^2}\right)$$

$$X \mid \theta \sim \mathcal{N}(\theta, \sigma^2), \mathbb{P}(X \mid \theta) \propto \exp\left(-\frac{(X - \theta)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$\theta \mid X \sim \mathcal{N}(\mu_n, \sigma_n^2),$$

$$\mu_n = \frac{\sigma_0^2 X + \sigma^2 \mu_0}{\sigma_0^2 + \sigma^2}, \sigma_n^2 = \frac{\sigma_0^2 \sigma^2}{\sigma_0^2 + \sigma^2}$$

---

Gamma-Poisson

$$\theta \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta) \propto \theta^{\alpha-1} e^{-\beta \theta} \quad X \mid \theta \sim \text{Poisson}(\theta), \mathbb{P}(X \mid \theta) = \frac{\theta^X e^{-\theta}}{X!} \quad \theta \mid X \sim \text{Gamma}(\alpha + X, \beta + 1)$$

---

Modèle	Loi a priori	Vraisemblance	Loi a posteriori
Beta-Bernoulli	$\theta \sim \text{Beta}(\alpha, \beta) \propto \theta^{\alpha-1} (1 - \theta)^{\beta-1}$	$X \mid \theta \sim \text{Bernoulli}(\theta), \mathbb{P}(X \mid \theta) = \theta^X (1 - \theta)^{1-X}$	$\theta \mid X \sim \text{Beta}(\alpha + X, \beta + 1 - X)$



3

9

1. Pour quel type de patient-on ne lui a posteriori facilement?

On dit qu'une loi *a priori*  $\pi(\theta)$  est **conjuguée** pour un modèle  $\mathbb{P}(X_1, \dots, X_n \mid \theta)$   
si la loi *a posteriori*  $\mathbb{P}(\theta \mid X_1, \dots, X_n)$  appartient à la même famille de distributions que  $\pi(\theta)$ .

Queue examples:



















# 2) Prendre une loi a priori conjuguée:

**a priori conjuguées**

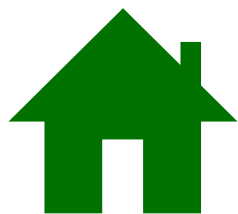
1. Pour quel type de modèle obtient-on une loi a posteriori facilement ?

2) Prendre une loi a priori conjuguée:

On dit qu'une loi *a priori*  $\pi(\theta)$  est **conjuguée** pour un modèle  $\mathbb{P}(X_1, \dots, X_n \mid \theta)$  si la loi *a posteriori*  $\mathbb{P}(\theta \mid X_1, \dots, X_n)$  appartient à la même famille de distributions que  $\pi(\theta)$ .

Quelques exemples:

Modèle	Loi a priori	Vraisemblance	Loi a posteriori
Beta-Bernoulli	$\theta \sim \text{Beta}(\alpha, \beta) \propto \theta^{\alpha-1} (1 - \theta)^{\beta-1}$	$X \mid \theta \sim \text{Bernoulli}(\theta), \mathbb{P}(X \mid \theta) = \theta^X (1 - \theta)^{1-X}$	$\theta \mid X \sim \text{Beta}(\alpha + X, \beta + 1 - X)$
Beta-Binomial	$\theta \sim \text{Beta}(\alpha, \beta) \propto \theta^{\alpha-1} (1 - \theta)^{\beta-1}$	$X \mid \theta \sim \text{Bin}(n, \theta), \mathbb{P}(X \mid \theta) = \binom{n}{X} \theta^X (1 - \theta)^{n-X}$	$\theta \mid X \sim \text{Beta}(\alpha + X, \beta + n - X)$
Gaussian-Gaussian	$\theta \sim \mathcal{N}(\mu_0, \sigma_0^2) \propto \exp\left(-\frac{(\theta - \mu_0)^2}{2\sigma_0^2}\right)$	$X \mid \theta \sim \mathcal{N}(\theta, \sigma^2), \mathbb{P}(X \mid \theta) \propto \exp\left(-\frac{(X - \theta)^2}{2\sigma^2}\right)$	$\theta \mid X \sim \mathcal{N}(\mu_n, \sigma_n^2),$ $\mu_n = \frac{\sigma_0^2 X + \sigma^2 \mu_0}{\sigma_0^2 + \sigma^2}, \sigma_n^2 = \frac{\sigma_0^2 \sigma^2}{\sigma_0^2 + \sigma^2}$
Gamma-Poisson	$\theta \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta) \propto \theta^{\alpha-1} e^{-\beta\theta}$	$X \mid \theta \sim \text{Poisson}(\theta), \mathbb{P}(X \mid \theta) = \frac{\theta^X e^{-\theta}}{X!}$	$\theta \mid X \sim \text{Gamma}(\alpha + X, \beta + 1)$



## 1. Introduction

2. Les Bayésiens vs Les fréquentistes

3. Rappels de probabilités (exemples)

4. Loi a posteriori et modèles conjugués

5. Estimateur de Bayes





