



I N S E A





Application

On rappelle que l'information de Fisher en dimension 1 est donnée par:

$$I(\theta) = \mathbb{E} \left[\left(\frac{\partial}{\partial \theta} \log f(X; \theta) \right)^2 \right] = -\mathbb{E} \left[\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \log f(X; \theta) \right]$$

Théorème (Bernstein-von Mises)

4

3

Quedevientlaia posterioriquelaquantitédesdonnées tendversl'infini?

Soit X_1, \dots, X_n i.i.d. $\sim P_{\theta_0}$ avec $\theta_0 \in \Theta \subset \mathbb{R}^d$ tel que P_{θ} un modèle régulier (densité $\in \mathcal{C}^\infty$, $\theta_0 \in \text{int}(\Omega)$).

Si la loi a priori est régulière et non nulle en θ_0 et la matrice d'information de Fisher $I(\theta_0)$ est inversible, alors:

La loi a posteriori $\theta|X_1, \dots, X_n$ est asymptotiquement normale centrée en $\hat{\theta}_M$:

On note l'estimateur du maximum de vraisemblance par $\hat{\theta}_V$.

Prerequis avancés: Voir 10.2 dans l'ouvrage Asymptotic Statistics de van der Vaart (1998).

1. Analyze & understand expressions purely on intuition.

2 Simple Python code to Beta-Bernoulli variational asymptotic quantile approximation by M.

$$\sqrt{n}\left(\theta - \hat{\theta}_{MV}\right) | X_1, \dots, X_n \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, I(\theta_0)^{-1})$$

Estimating the Bayes asymptotic

Estimateur de Bayes asymptotique

Que devient la loi a posteriori lorsque la quantité des données tend vers l'infini ?

Théorème (Bernstein-von Mises)

Soit X_1, \dots, X_n i.i.d. $\sim P_{\theta_0}$ avec $\theta_0 \in \Theta \subset \mathbb{R}^d$ tel que P_{θ} un modèle régulier (densité $\in \mathcal{C}^\infty$, $\theta_0 \in \text{int}(\Omega)$).

On note l'estimateur du maximum de vraisemblance par $\hat{\theta}_{MV}$.

Si la loi a priori est régulière et non nulle en θ_0 et la matrice d'information de Fisher $I(\theta_0)$ est inversible, alors:

La loi a posteriori $\theta | X_1, \dots, X_n$ est asymptotiquement normale centrée en $\hat{\theta}_{MV}$:

$$\sqrt{n} \left(\theta - \hat{\theta}_{MV} \right) | X_1, \dots, X_n \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, I(\theta_0)^{-1})$$

*Preuve très avancée: Voir 10.2 dans l'ouvrage **Asymptotic Statistics** de van der Vaart (1998).*

Application

On rappelle que l'information de Fisher en dimension 1 est donnée par: $I(\theta) = \mathbb{E} \left[\left(\frac{\partial}{\partial \theta} \log f(X; \theta) \right)^2 \right] = -\mathbb{E} \left[\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \log f(X; \theta) \right]$

1. Analysez l'une de ces expressions pour comprendre son intuition.
2. Simulez en Python un modèle Beta-Bernoulli et vérifiez le comportement asymptotique donné par le théorème BvM.

1. Introduction

2. Les Bayésiens vs Les fréquentistes

3. Rappels de probabilités (exemples)

4. Loi a posteriori et modèles conjugués

5. Estimateur de Bayes



