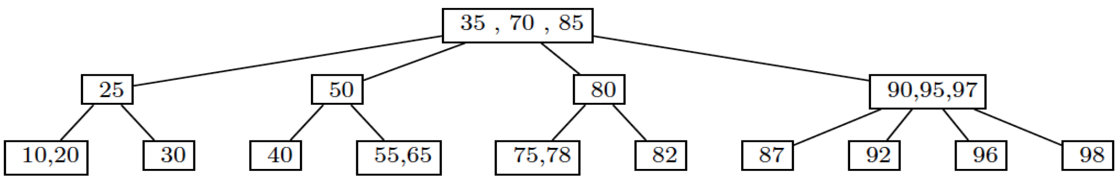
Algorithmique avancée – Examen Réparti 1
UPMC — Master d'Informatique —
Novembre 2013 – durée 2h

Les seuls documents autorisés sont les polys de cours, ainsi que la copie double personnelle.

1 Arbres 2-3-4 [14 points]

La figure suivante montre un arbre 2-3-4, T_0, de hauteur 2, ayant un nœud à profondeur 0 (la racine), quatre nœuds à profondeur 1 et dix nœuds à profondeur 2 (ces derniers nœuds sont les *feuilles* de T_0).



Dans l'exercice qui suit, vous devez écrire les algorithmes *en utilisant les primitives sur les arbres 2-3-4 données en cours.*

Q1. Écrire une définition de la fonction `hauteur`, qui renvoie la hauteur d'un arbre 2-3-4.

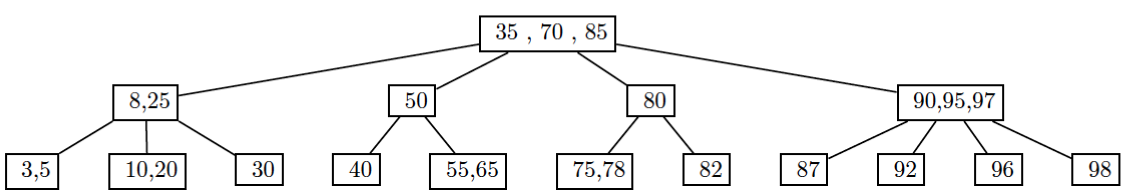
Q2. Écrire une définition de la fonction `nb-noeuds-prof`, qui étant donnés un arbre 2-3-4 T et un entier i renvoie le nombre de nœuds à profondeur i dans T.

Q3. Calculer l'expression du nombre maximum et du nombre minimum de nœuds à profondeur i dans un arbre 2-3-4. En déduire un majorant de la hauteur d'un arbre 2-3-4 ayant n feuilles.

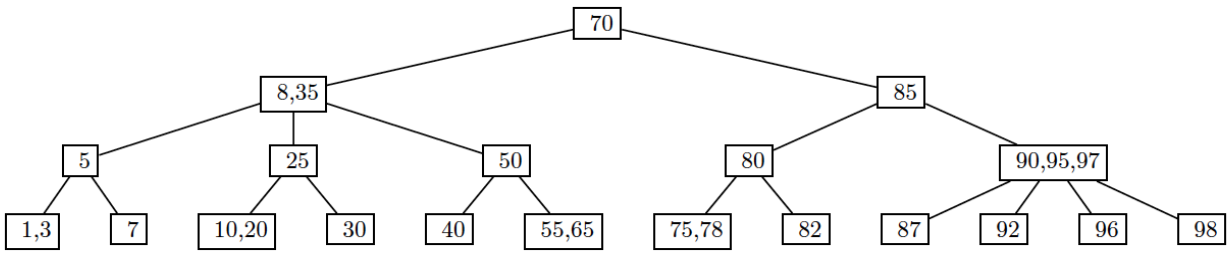
Q4. Rappeler les opérations d'éclatement que l'on peut rencontrer dans l'algorithme d'insertion aux feuilles avec éclatements des 4-nœuds à la descente.
On définit la fonction de potentiel ϕ, qui à un arbre 2-3-4 T, avec n_4 4-nœuds et n_3 3-nœuds, associe le potentiel $\phi(T) = 2n_4 + n_3$. Calculer le coût amorti d'une insertion aux feuilles avec éclatements des 4-nœuds à la descente.

Q5. On considère deux arbres 2-3-4, T_1 et T_2, tels que toutes les étiquettes de T_1 sont strictement inférieures à toutes les étiquettes de T_2, et x une étiquette strictement comprise entre les étiquettes de T_1 et celles de T_2. Il s'agit de concaténer T_1, x et T_2 pour en faire un arbre 2-3-4, selon l'algorithme suivant :

1. Si les hauteurs de T_1 et T_2 sont égales, il suffit de construire l'arbre ayant pour racine le nœud d'étiquette x, pour sous-arbre gauche T_1 et pour sous-arbre-droit T_2.
2. Si h_1, la hauteur de T_1, est strictement inférieure à h_2, hauteur de T_2, soit U le sous-arbre dont la racine est à profondeur $h_2 - h_1$ sur la branche gauche de T_2. On concatène T_1, x et U en incluant x dans le nœud père de U, de telle sorte que toutes les feuilles de l'arbre résultant sont au même niveau.
   – Si le nœud père de U n'était pas un 4-nœud, on a terminé, comme le montre l'arbre ci-dessous, qui est la concaténation de l'arbre T_1 réduit à une feuille contenant les valeurs $(3, 5)$, de l'étiquette $x = 8$ et de l'arbre $T_2 = T_0$.



– Si le nœud père de U était un 4-nœud il faut rétablir la situation par des éclatements. Par exemple la concaténation de l'arbre $T_1 =< 5,(1,3),7 >$, de l'étiquette $x = 8$ et de l'arbre $T_2 = T_0$ donne l'arbre ci-dessous.



3. Si $h_1 > h_2$ on agit de manière analogue sur la branche droite de T_1.

– Quel est le résultat de la concaténation de l'arbre $T_1 = T_0$, de l'étiquette $x = 100$ et de l'arbre T_2 réduit à une feuille contenant les valeurs $(105, 110, 120, 125)$.
– Décrire l'algorithme de concaténation.
– Déterminer le nombre maximum d'éclatements.

Q6. Il s'agit à présent de concaténer deux arbres 2-3-4, T_1 et T_2, tels que toutes les étiquettes de T_1 sont strictement inférieures à toutes les étiquettes de T_2, *sans l'intermédiaire* d'une étiquette x.
Expliquer quels sont les différents cas de figure possibles et comment étendre l'algorithme précédent.

2 Hachage [6 points]

Q1. Expliquer, en moins de 20 lignes, le principe du *hachage parfait*, vu en cours.

Q2. Soit $\mathcal{H}$ une classe de fonctions de hachage dans laquelle chaque fonction $h \in \mathcal{H}$ envoie l'univers de clefs U sur les entiers $0, 1, \ldots, m-1$. $\mathcal{H}$ est dite *k-universelle* ssi, pour toute séquence de k clefs distinctes $(x_1, \ldots, x_k)$, pour toute fonction h choisie au hasard dans $\mathcal{H}$ et pour toute suite de valeurs $m_1, \ldots, m_k$ dans $[0, 1, \ldots, m-1]$,

$$\Pr(h(x_1) = m_1, \ldots, h(x_k) = m_k) = \frac{1}{m^k}.$$

On considère l'univers U des n-uplets de valeurs de $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, \ldots, p-1\}$, où p est premier.
Soit $x = \langle x_0, \ldots, x_{n-1} \rangle \in U$, pour tout n-uplet $a = \langle a_0, \ldots, a_{n-1} \rangle \in U$ et $b \in \mathbb{Z}_p$, on définit la fonction de hachage $h_{a,b}$ par :

$$h_{a,b}(x) = \left(\sum_{j=0}^{n-1} a_j x_j + b \right) \mod p.$$

Soit $\mathcal{H} = \{h_{a,b} \ ; a \in U,\ b \in \mathbb{Z}_p\}$.

1. Montrer que $|\mathcal{H}| = p^{n+1}$.
2. Montrer que $\mathcal{H}$ est 2-universelle.
3. La famille $\mathcal{H}$ est-elle 3-universelle ?