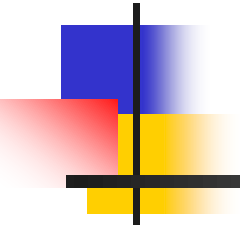


METODE NUMERIK



3SKS-TEKNIK INFORMATIKA-S1

Mohamad Sidiq

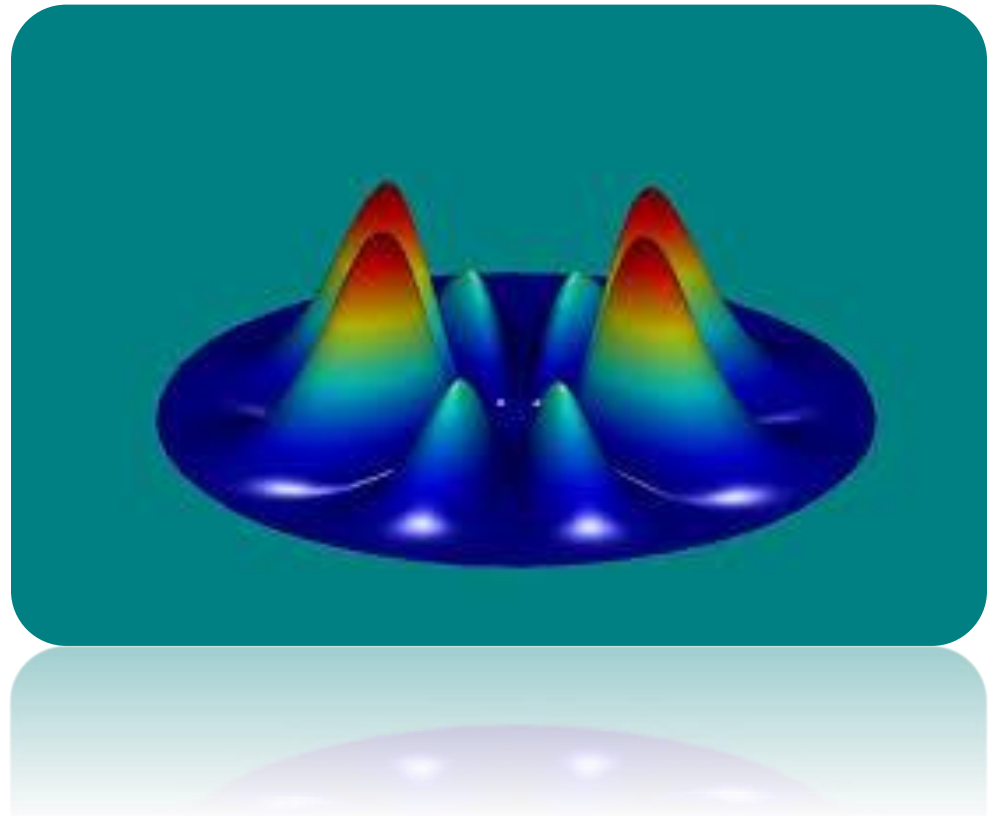
PERTEMUAN : 9-10

INTEGRASI NUMERIK

METODE NUMERIK

- TEKNIK INFORMATIKA – S1
- 3 SKS

Mohamad Sidiq



MATERI PERKULIAHAN

SEBELUM-UTS

- Pengantar Metode Numerik
- Sistem Bilangan dan Kesalahan
 - Penyajian Bilangan Bulat & Pecahan
 - Nilai Signifikan
 - Akurasi dan Presisi
 - Pendekatan dan Kesalahan
- Penyelesaian Persamaan Non Linier
 - Metode Tabel
 - Metode Biseksi
 - Metode Regula Falsi
- Penyelesaian Persamaan Non Linier (Lanjutan)
 - Metode Iterasi Sederhana
 - Metode Newton Raphson
 - Metode Secant
- Penyelesaian Persamaan Simultan
 - Metode Eliminasi Gauss
 - Metode Gauss Jordan
- Penyelesaian Persamaan Simultan (Lanjutan)
 - Metode Gauss Seidel
 - Studi Kasus

SETELAH-UTS

- Diferensi Numerik
 - Selisih Maju
 - Selisih Mundur
 - Selisih Tengah
 - Diferensi Tingkat Tinggi
- Integrasi Numerik
 - Metode Reimann
 - Metode Trapezoida
 - Metode Simpson
- Integrasi Numerik (Lanjutan)
 - Metode Gauss
 - Studi Kasus
- Interpolasi
 - Metode Linier
 - Metode Kuadrat
- Interpolasi (Lanjutan)
 - Metode Polinomial
 - Metode Lagrange
- Regresi
 - Linier
 - Eksponensial
 - Polinomial
- Tugas Akhir Semester



INTEGRASI NUMERIK

- Pengintegralan numerik merupakan alat atau cara untuk memperoleh jawaban hampiran (aproksimasi) dari pengintegralan yang tidak dapat diselesaikan secara analitik.
- Perhitungan integral adalah perhitungan dasar yang digunakan dalam kalkulus, dalam banyak keperluan.
- Digunakan untuk menghitung luas daerah dan volume benda putar



INTEGRASI NUMERIK

- Fungsi yang dapat dihitung integralnya :

$$\int ax^n dx = \frac{ax^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a} + C$$

$$\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(a+b) + C$$

$$\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(a+b) + C$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$$

$$\int \ln |x| dx = x \ln |x| - x + C$$

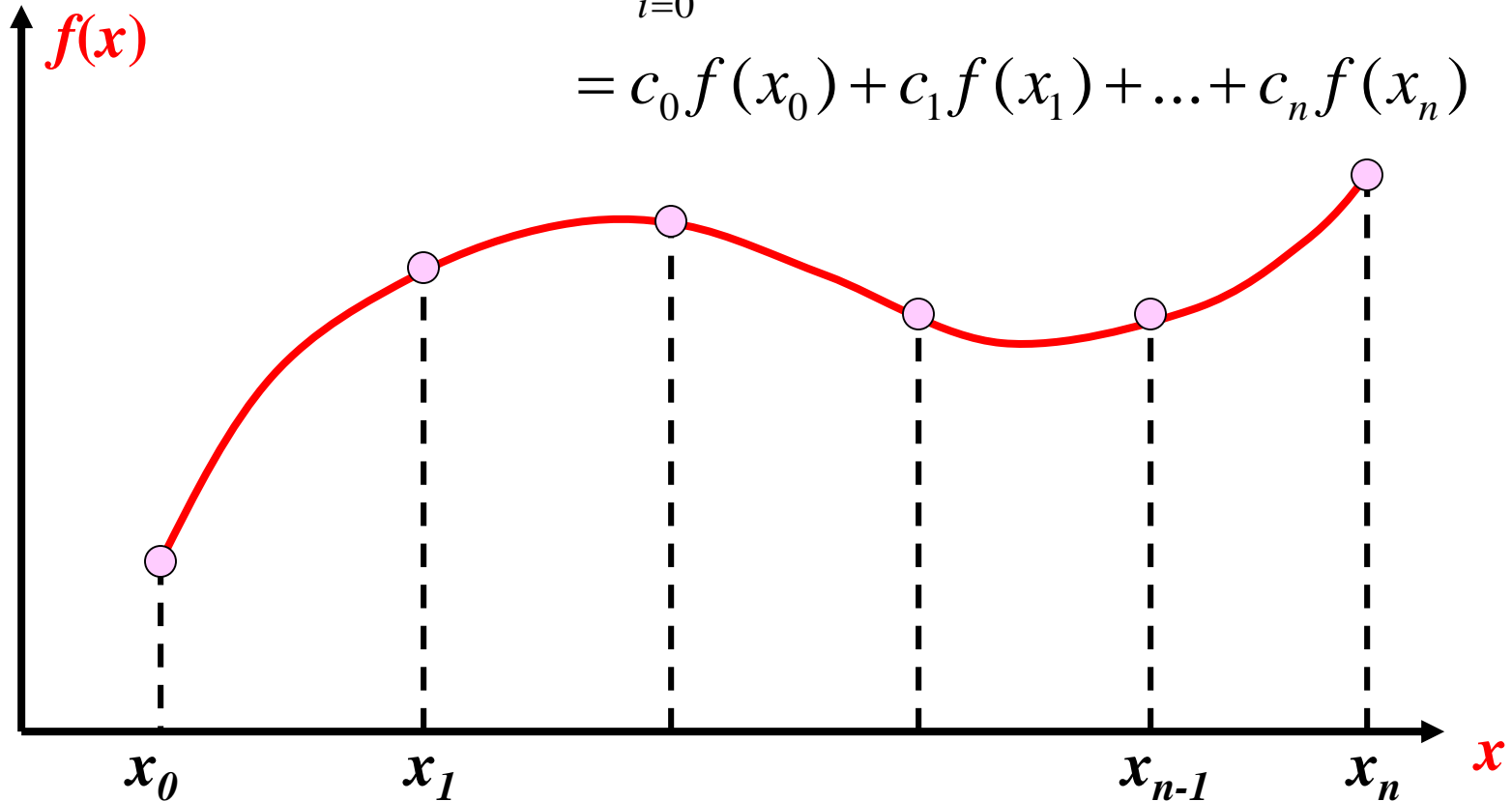
- Fungsi yang rumit misal :

$$\int_0^2 \frac{2 + \cos(1 + x^{3/2})}{\sqrt{1 + 0.5 \sin x}} e^{0.5x} dx$$

DASAR PENGINTEGRALAN NUMERIK

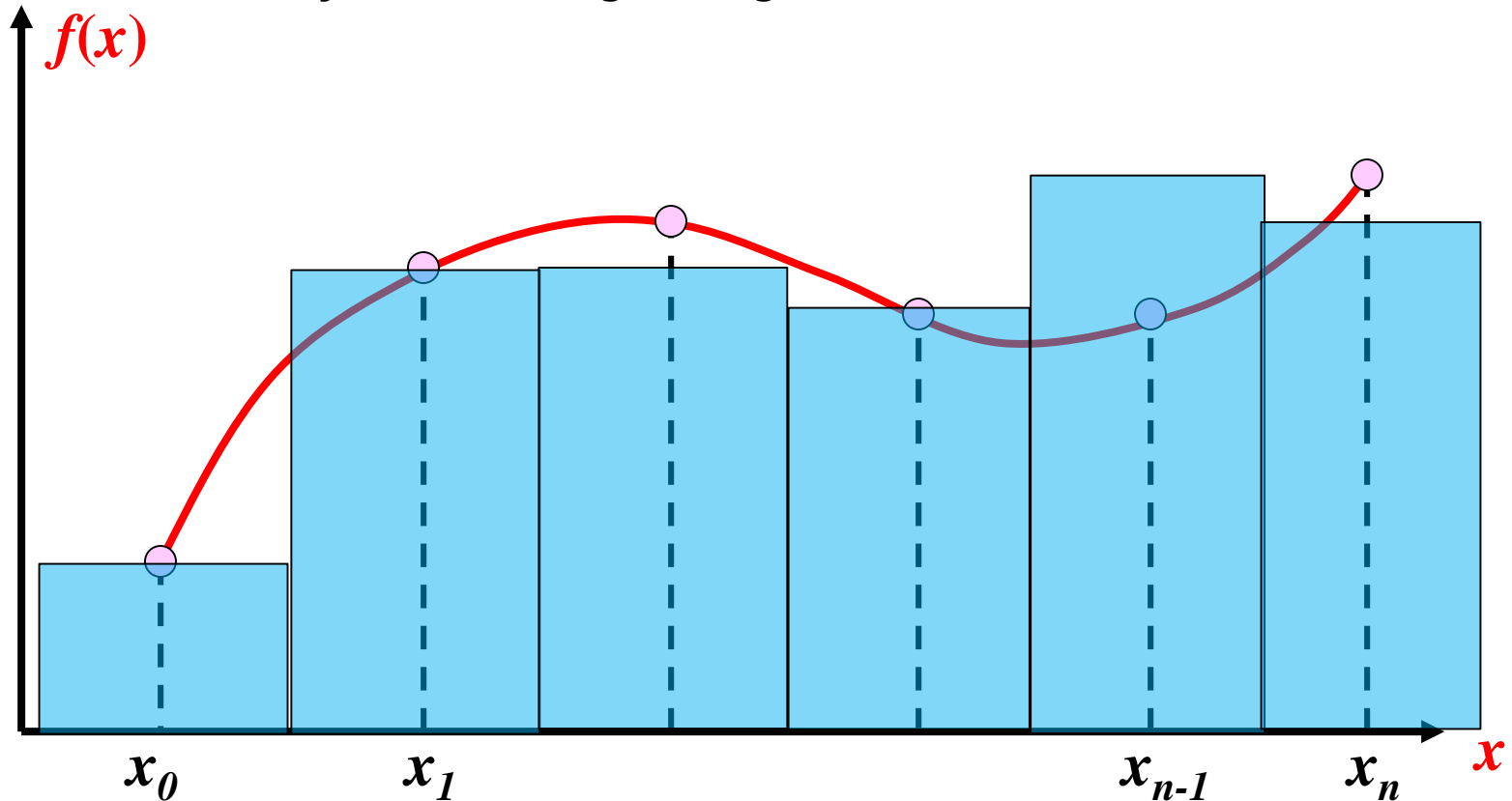
$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n c_i f(x_i)$$

$$= c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) + \dots + c_n f(x_n)$$



DASAR PENGINTEGRALAN NUMERIK

- Melakukan pengintegralan pada bagian-bagian kecil, dan menjumlahkan bagian-bagian kecil tersebut.





DASAR PENGINTEGRALAN NUMERIK

Formula Newton-Cotes

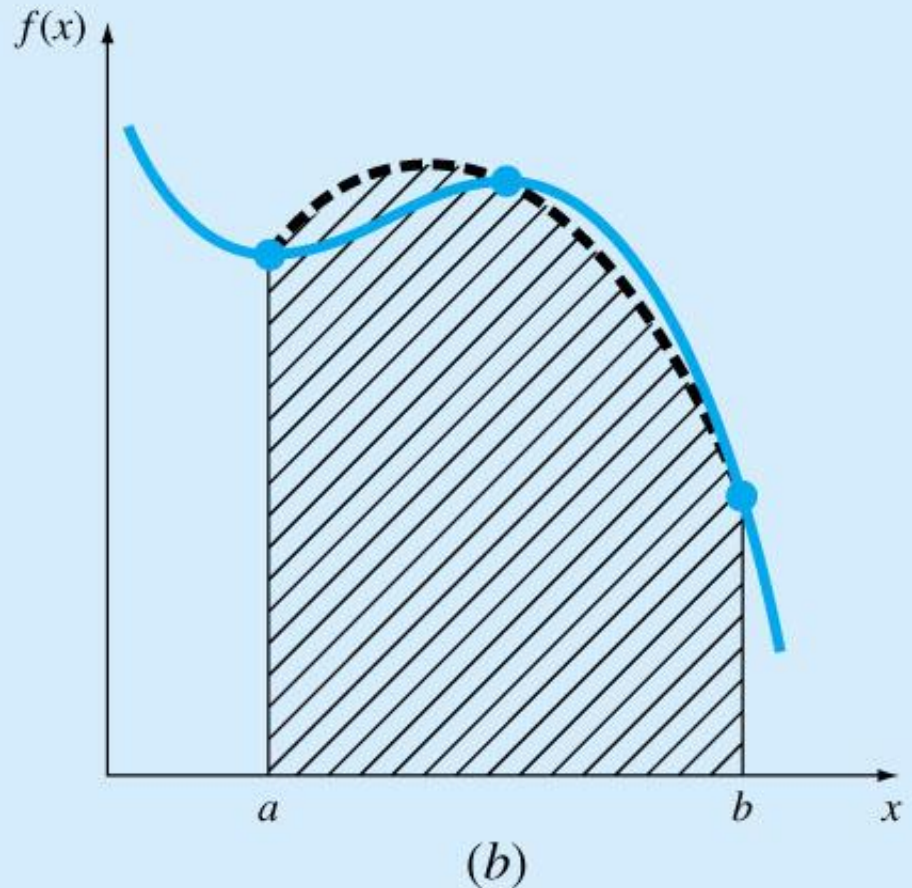
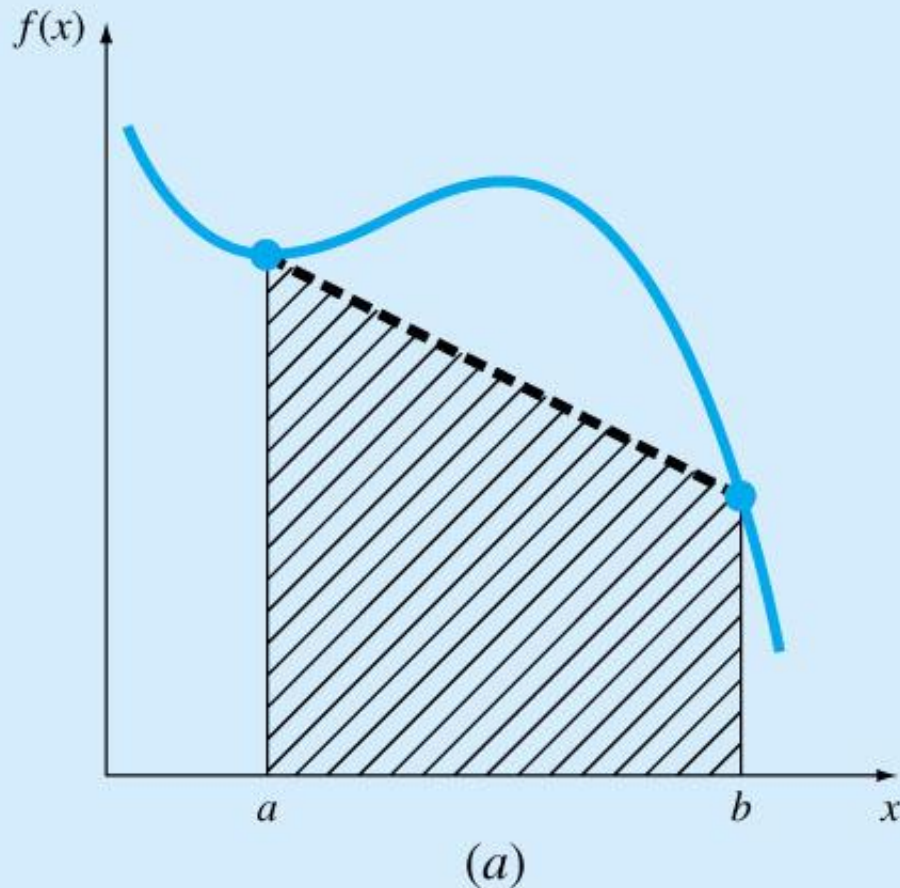
$$I = \int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b f_n(x)dx$$

Nilai hampiran $f(x)$ dengan polinomial

$$f_n(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

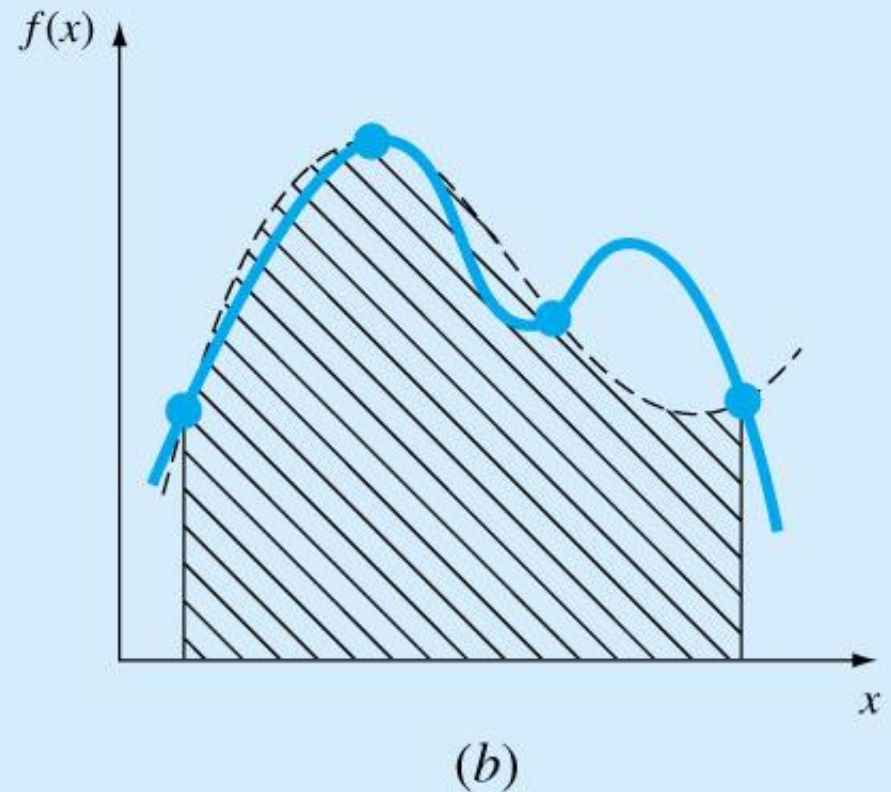
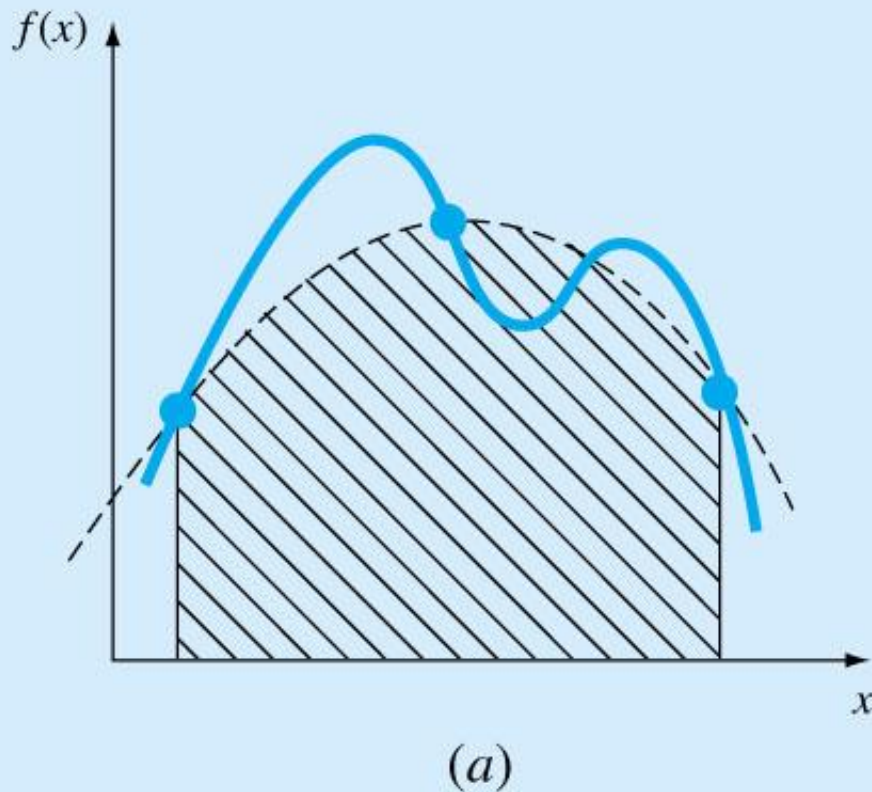
DASAR PENGINTEGRALAN NUMERIK

$f_n(x)$ bisa fungsi linear, bisa fungsi kuadrat

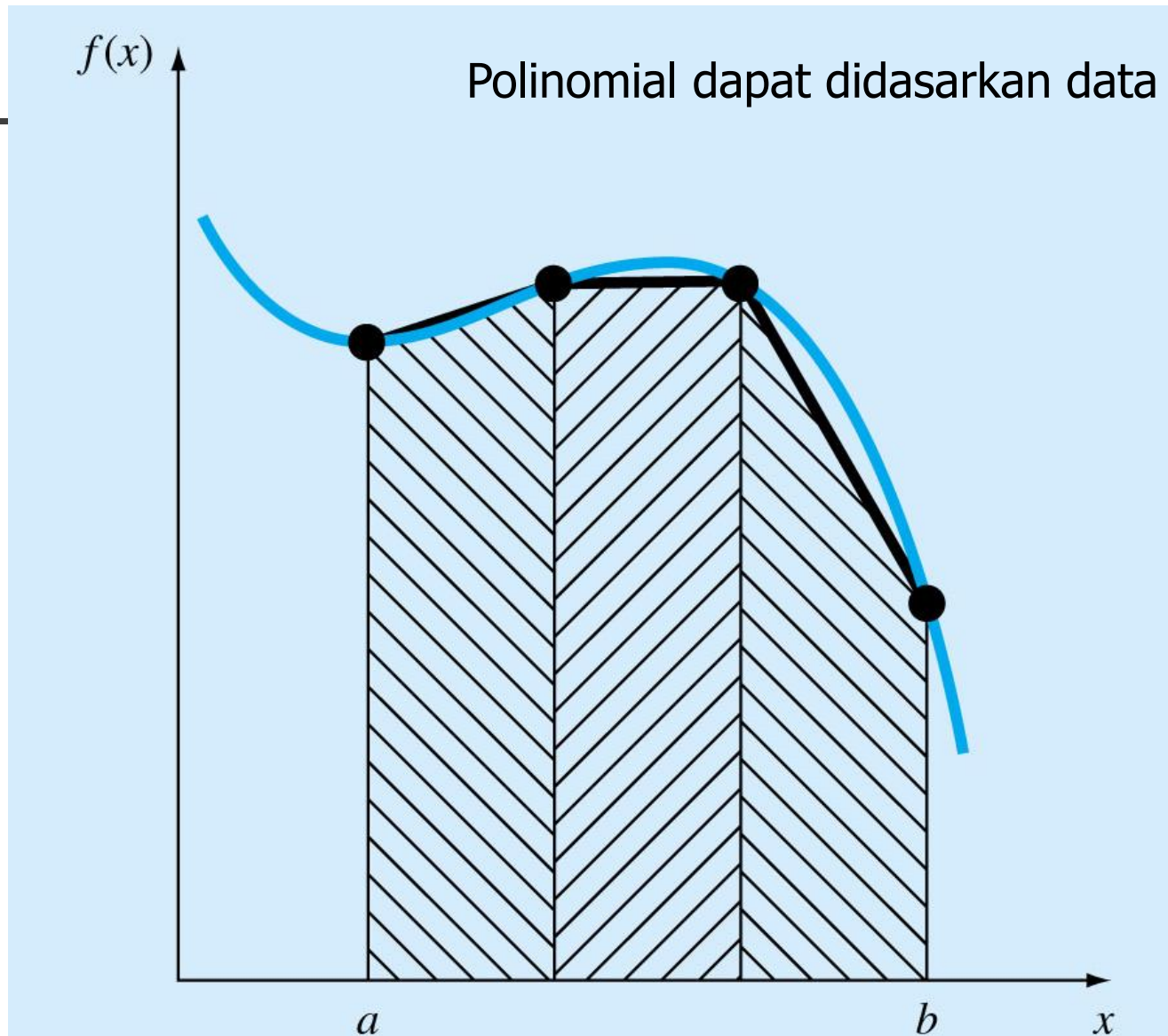


DASAR PENGINTEGRALAN NUMERIK

$f_n(x)$ bisa fungsi kubik atau polinomial



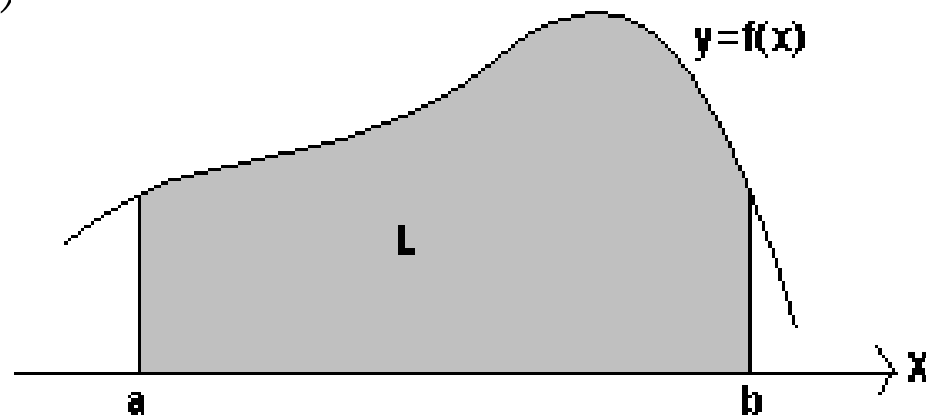
DASAR PENGINTEGRALAN NUMERIK



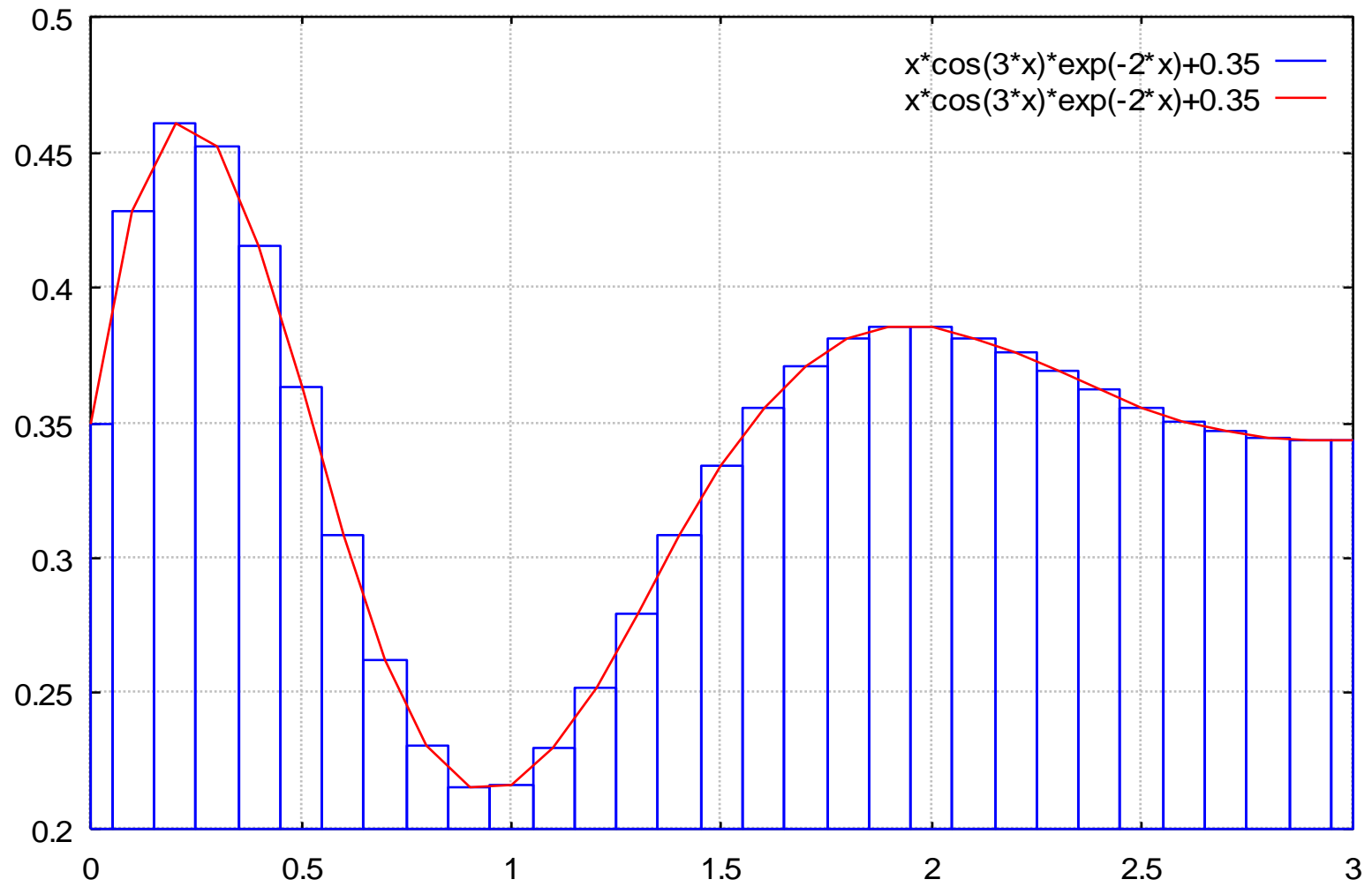
INTEGRASI NUMERIK

- Luas daerah yang diarsir L dapat dihitung dengan:

- $$L = \int_a^b f(x) dx$$



METODE INTEGRAL REIMANN





METODE INTEGRAL REIMANN

- Luasan yang dibatasi $y = f(x)$ dan sumbu x .
- Luasan dibagi menjadi N bagian pada range $x = [a, b]$.
- Kemudian dihitung L_i : luas setiap persegi panjang di mana $L_i = f(x_i) \cdot \Delta x_i$



METODE INTEGRAL REIMANN

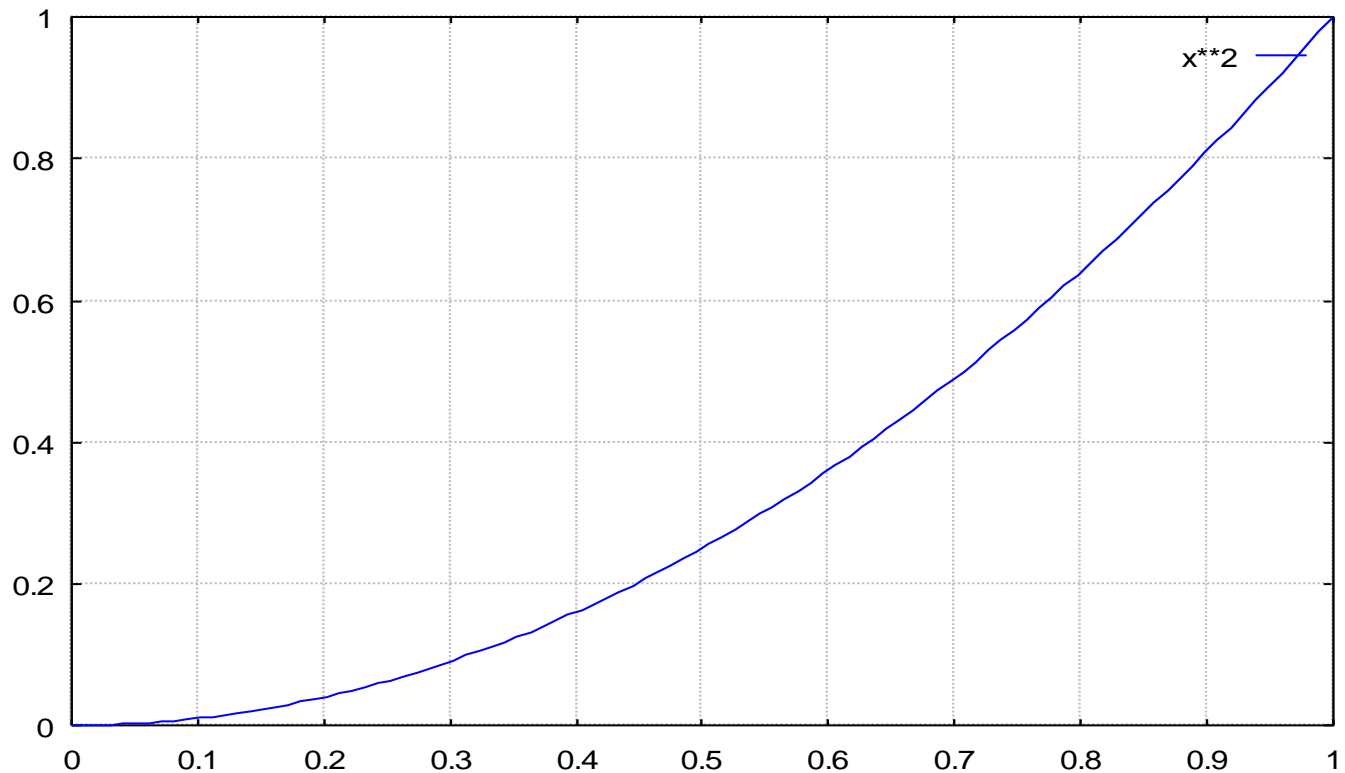
- Luas keseluruhan adalah jumlah L_i dan dituliskan:

$$\begin{aligned} L &= L_0 + L_1 + L_2 + \dots + L_n \\ &= f(x_0)\Delta x_0 + f(x_1)\Delta x_1 + f(x_2)\Delta x_2 + \dots + f(x_n)\Delta x_n \\ &= \sum_{i=0}^n f(x_i)\Delta x_i \end{aligned}$$

- Di mana: $\Delta x_0 = \Delta x_1 = \Delta x_2 = \dots = \Delta x_n = h$
- Didapat :
$$\int_a^b f(x)dx = h \sum_{i=0}^n f(x_i)$$

CONTOH

- Hitung luas yang dibatasi $y = x^2$ dan sumbu x untuk range $x = [0,1]$





CONTOH

- Dengan mengambil $h=0.1$ maka diperoleh tabel:

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
f(x)	0	0.01	0.04	0.09	0.16	0.25	0.36	0.49	0.64	0.81	1

$$L = h \cdot \sum_{i=0}^{10} f(x_i)$$

$$= 0.1(0 + 0.01 + 0.04 + 0.09 + 0.16 + 0.25 + 0.36 + 0.49 + 0.64 + 0.81 + 1.00)$$

$$= (0.1)(3.85) = 0.385$$

- Secara kalkulus : $L = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 \Big|_0^1 = 0.3333.....$

- Terdapat kesalahan $e = 0.385 - 0.333$
 $= 0.052$



ALGORITMA METODE INTEGRAL REIMANN

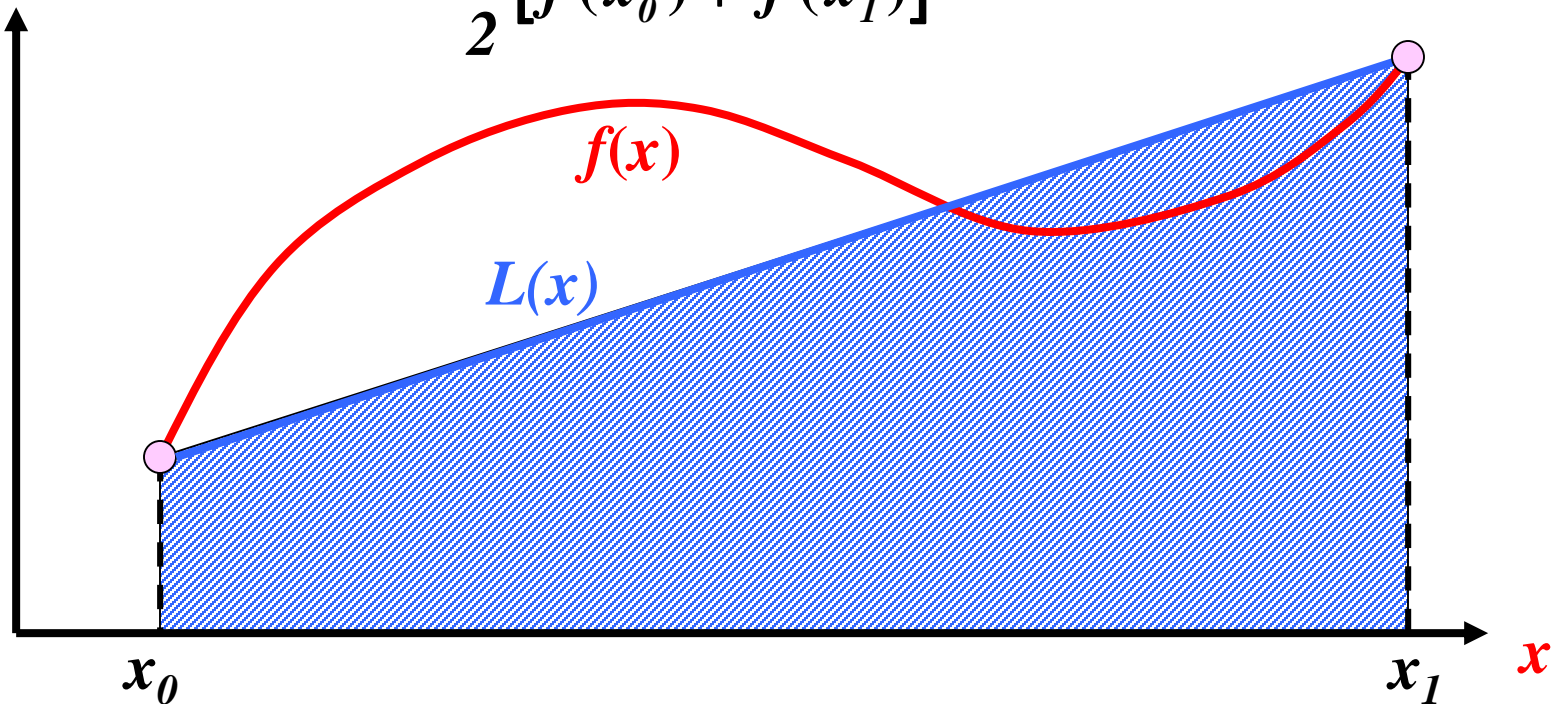
- Definisikan fungsi $f(x)$
- Tentukan batas bawah dan batas atas integrasi
- Tentukan jumlah pembagi area N
- Hitung $h=(b-a)/N$
- Hitung

$$L = h \cdot \sum_{i=0}^N f(x_i)$$

METODE INTEGRASI TRAPEZOIDA

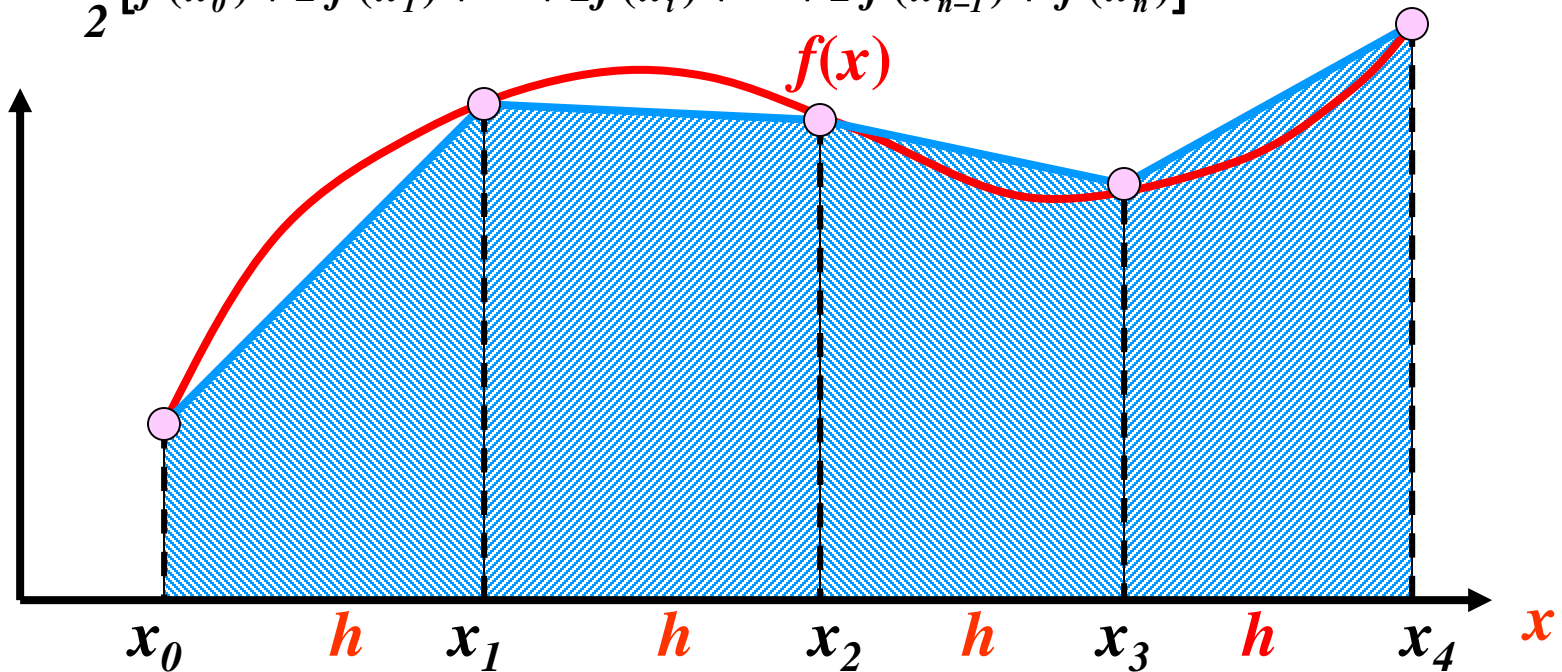
Aproksimasi garis lurus (linier)

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &\approx \sum_{i=0}^1 c_i f(x_i) = c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) \\ &= \frac{h}{2} [f(x_0) + f(x_1)]\end{aligned}$$



ATURAN KOMPOSISI TRAPESIUM

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx \\ &= \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)] + \frac{h}{2}[f(x_1) + f(x_2)] + \cdots + \frac{h}{2}[f(x_{n-1}) + f(x_n)] \\ &= \frac{h}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]\end{aligned}$$



$$h = \frac{b-a}{n}$$



METODE INTEGRASI TRAPEZOIDA

$$L_i = \frac{1}{2} (f(x_i) + f(x_{i+1})) \Delta x_i$$

atau

$$L_i = \frac{1}{2} (f_i + f_{i+1}) \Delta x_i \qquad L = \sum_{i=0}^{n-1} L_i$$

$$L = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2} h (f_i + f_{i+1}) = \frac{h}{2} (f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \dots + 2f_{n-1} + f_n)$$

$$L = \frac{h}{2} \left(f_0 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f_i + f_n \right)$$



ALGORITMA METODE INTEGRASI TRAPEZOIDA

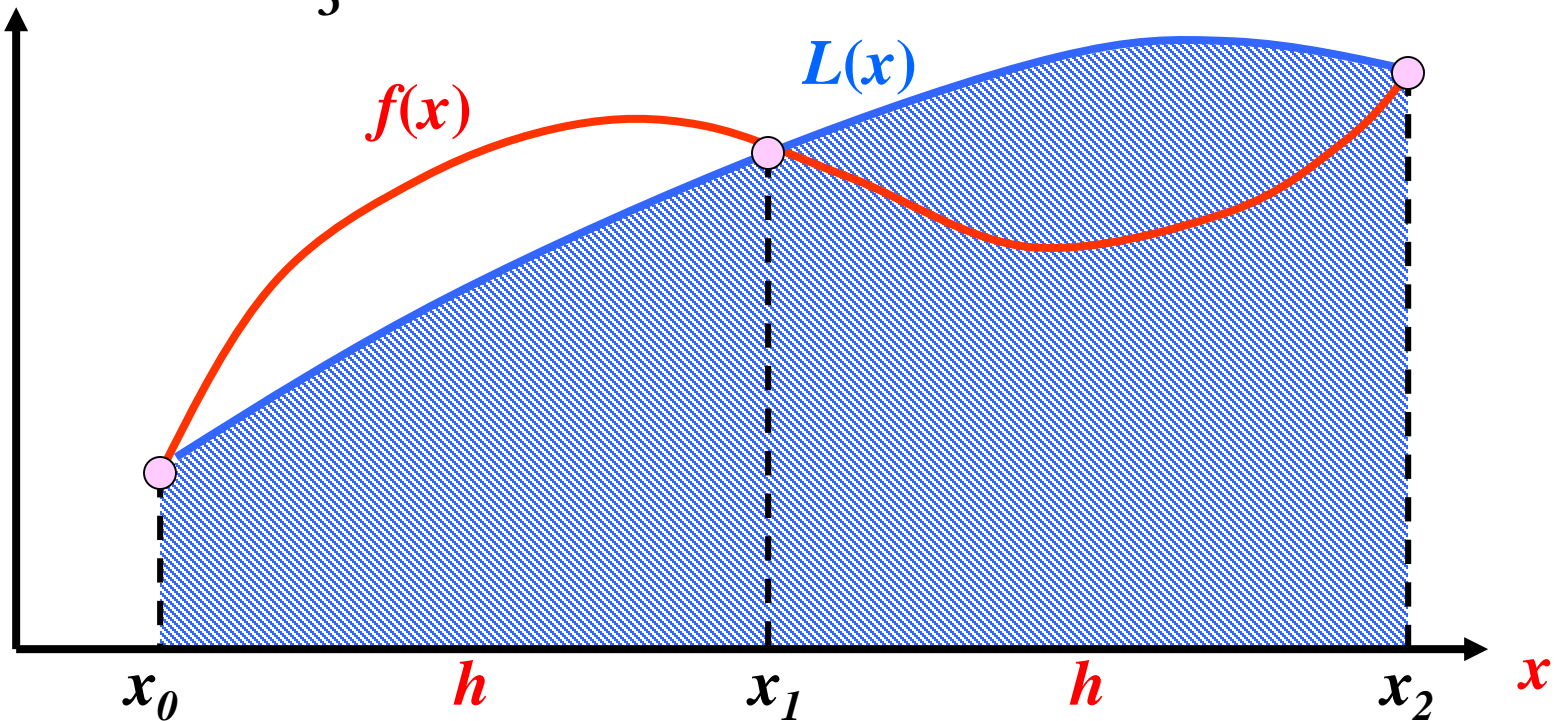
- Definisikan $y=f(x)$
- Tentukan batas bawah (a) dan batas atas integrasi (b)
- Tentukan jumlah pembagi n
- Hitung $h=(b-a)/n$
- Hitung

$$L = \frac{h}{2} \left(f_0 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f_i + f_n \right)$$

ATURAN SIMPSON 1/3

Aproksimasi dengan fungsi parabola

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &\approx \sum_{i=0}^2 c_i f(x_i) = c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) \\ &= \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]\end{aligned}$$





ATURAN SIMPSON 1/3

$$L(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} f(x_1) \\ + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} f(x_2)$$

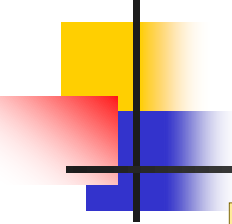
$$\text{let } x_0 = a, x_2 = b, x_1 = \frac{a+b}{2}$$

$$h = \frac{b-a}{2}, \xi = \frac{x-x_1}{h}, d\xi = \frac{dx}{h}$$

$$\begin{cases} x = x_0 \Rightarrow \xi = -1 \\ x = x_1 \Rightarrow \xi = 0 \\ x = x_2 \Rightarrow \xi = 1 \end{cases}$$

$$L(\xi) = \frac{\xi(\xi-1)}{2} f(x_0) + (1-\xi^2) f(x_1) + \frac{\xi(\xi+1)}{2} f(x_2)$$

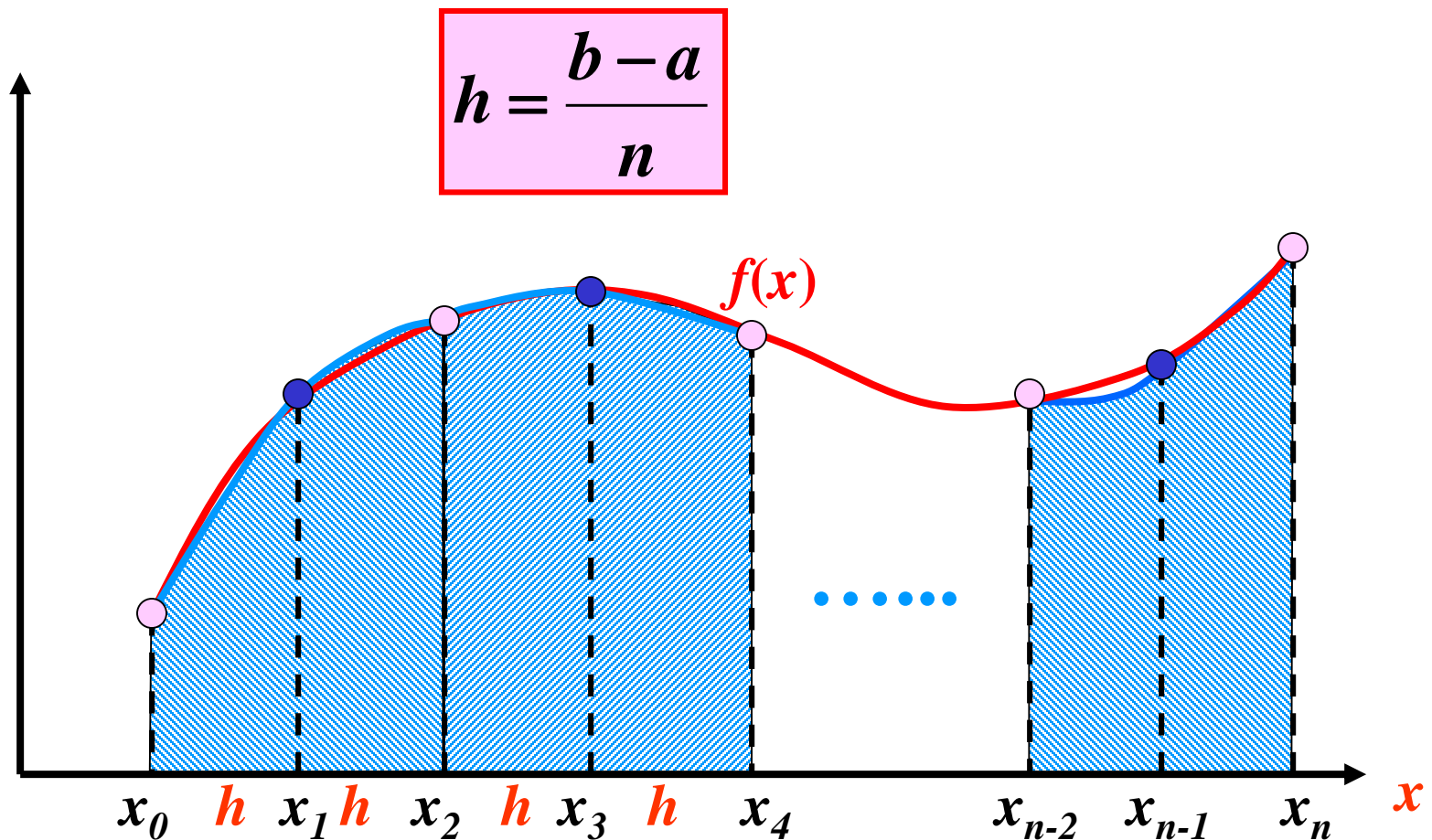
ATURAN SIMPSON 1/3


$$L(\xi) = \frac{\xi(\xi - 1)}{2} f(x_0) + (1 - \xi^2) f(x_1) + \frac{\xi(\xi + 1)}{2} f(x_2)$$

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx h \int_{-1}^1 L(\xi) d\xi = f(x_0) \frac{h}{2} \int_{-1}^1 \xi(\xi - 1) d\xi \\ &+ f(x_1) h \int_0^1 (1 - \xi^2) d\xi + f(x_2) \frac{h}{2} \int_{-1}^1 \xi(\xi + 1) d\xi \\ &= f(x_0) \frac{h}{2} \left(\frac{\xi^3}{3} - \frac{\xi^2}{2} \right) \Big|_{-1}^1 + f(x_1) h \left(\xi - \frac{\xi^3}{3} \right) \Big|_{-1}^1 \\ &+ f(x_2) \frac{h}{2} \left(\frac{\xi^3}{3} + \frac{\xi^2}{2} \right) \Big|_{-1}^1 \end{aligned}$$

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]$$

ATURAN KOMPOSISI SIMPSON





METODE INTEGRASI SIMPSON

- Dengan menggunakan aturan simpson, luas dari daerah yang dibatasi fungsi $y=f(x)$ dan sumbu X dapat dihitung sebagai berikut:

$$N = 0 - n$$

$$L = L1 + L3 + L5 + \dots + Ln$$

$$L = \frac{h}{3}(f_0 + 2f_1) + \frac{h}{3}(2f_1 + f_2) + \frac{h}{3}(f_2 + 2f_3) + \frac{h}{3}(2f_3 + f_4) + \dots + \frac{h}{3}(f_{n-2} + 2f_{n-1}) + \frac{h}{3}(2f_{n-1} + f_n)$$

- atau dapat dituliskan dengan:

$$L = \frac{h}{3} \left(f_0 + 4 \sum_{i \text{ ganjil}} f_i + 2 \sum_{i \text{ genap}} f_i + f_n \right)$$



CARA II

- Polinom interpolasi Newton-Gregory derajat 2 yang melalui ketiga titik tersebut

$$p_2x = f(x_0) + \frac{x}{h} \Delta f(x_0) + \frac{x(x-h)}{2!h^2} \Delta^2 f(x_0) = f_0 + \frac{x}{h} f_0 + \frac{x(x-h)}{2!h^2} \Delta^2 f_0$$



CARA II

- Integrasikan $p_2(x)$ pd selang $[0, 2h]$

$$L = \int_0^{2h} f(x) dx = \int_0^{2h} p_2 x dx$$

$$L = \int_0^{2h} \left(f_0 + \frac{x}{h} \Delta f_0 + \frac{x(x-h)}{2!h^2} \Delta^2 f_0 \right) dx$$

$$L = f_0 x + \frac{x^2}{2h} \Delta f_0 + \left(\frac{x^3}{6h^2} - \frac{x^2}{4h^2} \right) \Delta^2 f_0 \Big|_{x=0}^{x=2h}$$

$$L = 2hf_0 x + \frac{4h^2}{2h} \Delta f_0 + \left(\frac{8h^3}{6h^2} - \frac{4h^2}{4h} \right) \Delta^2 f_0$$

$$L = 2hf_0 x + 2h\Delta f_0 + \left(\frac{4h}{3} - h \right) \Delta^2 f_0$$

$$L = 2hf_0 x + 2h\Delta f_0 + \frac{h}{3} \Delta^2 f_0$$



Cara II

- Mengingat $\Delta f_0 = f_1 - f_0$

$$\Delta^2 f_0 = \Delta f_1 - \Delta f_0 = (f_2 - f_1) - (f_1 - f_0) = f_2 - 2f_1 + f_0$$

- Maka selanjutnya

$$L = 2hf_0x + 2h(f_1 - f_0) + \frac{h}{3}(f_2 - 2f_1 + f_0)$$

$$L = 2hf_0x + 2hf_1 - 2hf_0 + \frac{h}{3}f_2 - \frac{2h}{3}f_1 + \frac{h}{3}f_0$$

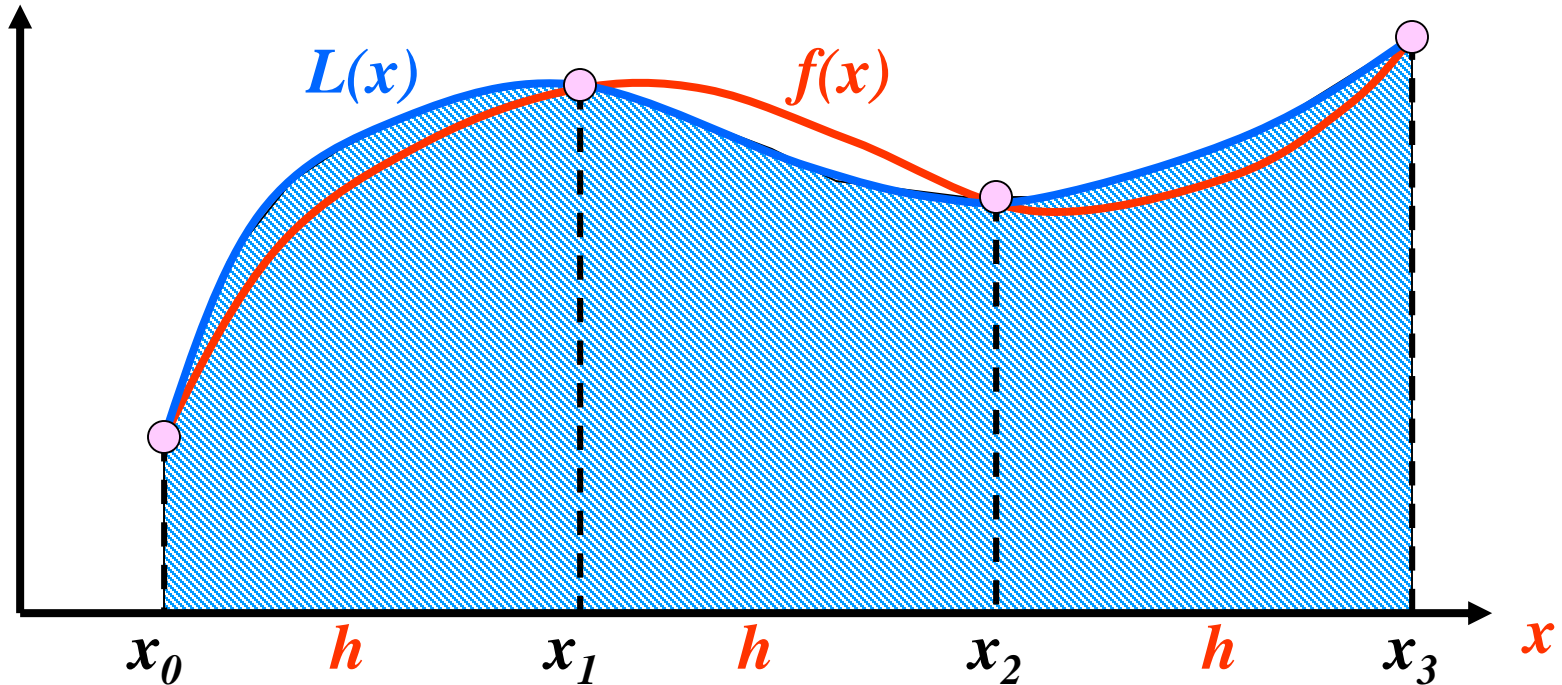
$$L = \frac{h}{3}f_0 + \frac{4h}{3}f_1 + \frac{h}{3}f_2$$

$$L = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2)$$

ATURAN SIMPSON 3/8

Aproksimasi dengan fungsi kubik

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &\approx \sum_{i=0}^3 c_i f(x_i) = c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + c_3 f(x_3) \\ &= \frac{3h}{8} [f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)]\end{aligned}$$





ATURAN SIMPSON 3/8

$$L(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} f(x_1) \\ + \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} f(x_2) + \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} f(x_3)$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b L(x)dx ; \quad h = \frac{b-a}{3} \\ = \frac{3h}{8} [f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)]$$

Error Pemenggalan

$$E_t = -\frac{3}{80} h^5 f^{(4)}(\xi) = -\frac{(b-a)^5}{6480} f^{(4)}(\xi) ; \quad h = \frac{b-a}{3}$$



METODE INTEGRASI GAUSS

- Metode Newton Cotes (Trapezoida, Simpson) → berdasarkan titik-titik data diskrit. Dengan batasan :
 - H sama
 - Luas dihitung dari a sampai b
- Mengakibatkan error yang dihasilkan cukup besar.



METODE INTEGRASI GAUSS

- Misal menghitung Luas dengan metode trapezoida dengan selang $[-1,1]$

$$I = \int_{-1}^1 f(x)dx \approx \frac{h}{2}(f(1) + f(-1)) \approx f(1) + f(-1)$$

$$h = 2$$

- Persamaan ini dapat ditulis (disebut pers Kuadratur Gauss)

$$I = \int_{-1}^1 f(x)dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$$

- Misal $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ dan $c_1 = c_2 = 1 \rightarrow$ menjadi m. trapezoida
- Karena x_1 , x_2 , c_1 dan c_2 sembarang maka kita harus memilih nilai tersebut sehingga error integrasinya min



METODE INTEGRASI GAUSS

- Bagaimana mencari x_1, x_2, c_1 dan c_2 Persamaan dibawah ini dianggap memenuhi secara tepat bila empat polinom berikut dijadikan fungsi integral pada interval integrasi $[-1, 1]$
- $f(x) = 1 ; f(x) = x ; f(x) = x^2 ; f(x) = x^3$

$$c_1 + c_2 = \int_{-1}^1 1 dx = 2$$

$$I = \int_{-1}^1 f(x) dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$$

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 = \int_{-1}^1 x dx = 0$$

Didapat

$$c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 = \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3}$$

$$c_1 = c_2 = 1$$

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad x_2 = \frac{-1}{\sqrt{3}}$$

$$c_1 x_1^3 + c_2 x_2^3 = \int_{-1}^1 x^3 dx = 0$$



METODE INTEGRASI GAUSS

- Persamaan dibawah ini dinamakan metode Gauss Legendre 2 titik

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$$



TRANSFORMASI

$$L_i = \int_a^b f(x)dx \longrightarrow L_i = \int_{-1}^1 g(u)du$$

- Range $[a,b] \rightarrow [-1,1]$
- $X \rightarrow u \quad f(x) \rightarrow g(u) \quad dx \rightarrow du$



TRANSFORMASI

$$\frac{x-a}{b-a} = \frac{u+1}{2}$$

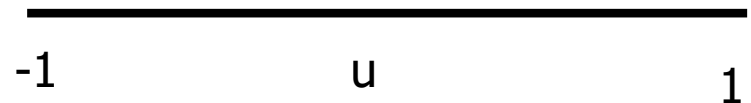
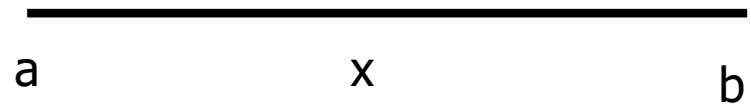
$$2x - 2a = (u+1)(b+a)$$

$$2x = (u+1)(b+a) + 2a$$

$$x = \frac{a+b+bu-au}{2}$$

$$x = \frac{(a+b) + (b-a)u}{2}$$

$$dx = \left(\frac{b-a}{2} \right) du$$





TRANSFORMASI

$$L_i = \int_{-1}^1 g(u) du$$

$$g(u) = \frac{1}{2} (b - a) f\left(\frac{1}{2} (b - a)u + \frac{1}{2} (b + a)\right)$$

$$\int_{-1}^1 g(u) du = \frac{1}{2} (b - a) \int_{-1}^1 f\left(\frac{(a + b) + (b - a)u}{2}\right) du$$



ANALISIS METODE

- Dibandingkan dengan metode Newton-Cotes (Trapezoida, Simpson 1/3, 3/8) metode Gauss-Legendre 2 titik lebih sederhana dan efisien dalam operasi aritmatika, karena hanya membutuhkan dua buah evaluasi fungsi.
- Lebih teliti dibandingkan dengan metode Newton-Cotes.
- Namun kaidah ini harus mentransformasi terlebih dahulu menjadi

$$\int_{-1}^1 g(u) du$$



ALGORITMA INTEGRASI KUADRATUR GAUSS DENGAN PENDEKATAN 2 TITIK

- Definisikan fungsi $f(x)$
- Tentukan batas bawah (a) dan batas atas integrasi (b)
- Hitung nilai konversi variabel :

$$x = \frac{1}{2}(b-a)u + \frac{1}{2}(b+a)$$

- Tentukan fungsi $g(u)$ dengan:

$$g(u) = \frac{1}{2}(b-a)f\left(\frac{1}{2}(b-a)u + \frac{1}{2}(b+a)\right)$$

- Hitung
$$L = g\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$



CONTOH SOAL

Hitung integral : $L = \int_0^1 x^2 dx$

Pertama yang harus dilakukan adalah menghitung u , dengan:

$$u = \frac{2x - (b + a)}{(b - a)} = \frac{2x - 1}{1} = 2x - 1$$
$$\text{atau } x = \frac{1}{2}(u + 1)$$

Dengan demikian diperoleh fungsi $g(u)$:

$$g(u) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}(u + 1) \right]^2 = \frac{1}{8}(u + 1)^2$$

Dengan menggunakan integrasi kuadratur gauss pendekatan 2 titik diperoleh :

$$\begin{aligned} L &= g\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{8}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}} + 1\right)^2 + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + 1\right)^2 \\ &= 0.311004 + 0.022329 \\ &= 0.33333 \end{aligned}$$



METODE GAUSS LEGENDRE 3 TITIK

$$I = \int_{-1}^1 f(x)dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + c_3 f(x_3)$$

- Parameter x_1, x_2, x_3, c_1, c_2 dan c_3 dapat dicari dengan membuat penalaran bahwa kuadratur Gauss bernilai tepat untuk 6 buah fungsi berikut :

$$f(x) = 1; f(x) = x; f(x) = x^2$$

$$f(x) = x^3; f(x) = x^4; f(x) = x^5$$

- Dengan cara yang sama didapat

$$c_1 = \frac{5}{9}; c_2 = \frac{8}{9}; c_3 = \frac{5}{9}$$

$$x_1 = -\sqrt{3/5}; x_2 = 0; x_3 = \sqrt{3/5}$$



METODE GAUSS LEGENDRE 3 TITIK

$$\int_{-1}^1 g(u) du = \frac{5}{9} g\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9} g(0) + \frac{5}{9} g\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$$



ALGORITMA METODE INTEGRASI GAUSS DENGAN PENDEKATAN 3 TITIK

- (1) Definisikan fungsi $f(x)$
- (2) Tentukan batas bawah (a) dan batas atas integrasi (b)
- (3) Hitung nilai konversi variabel :

$$x = \frac{1}{2}(b-a)u + \frac{1}{2}(b+a)$$

- (4) Tentukan fungsi $g(u)$ dengan:

$$g(u) = \frac{1}{2}(b-a)f\left(\frac{1}{2}(b-a)u + \frac{1}{2}(b+a)\right)$$

- (5) Hitung:

$$L = \frac{8}{9}g(0) + \frac{5}{9}g\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{5}{9}g\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$$



METODE GAUSS N-TITIK

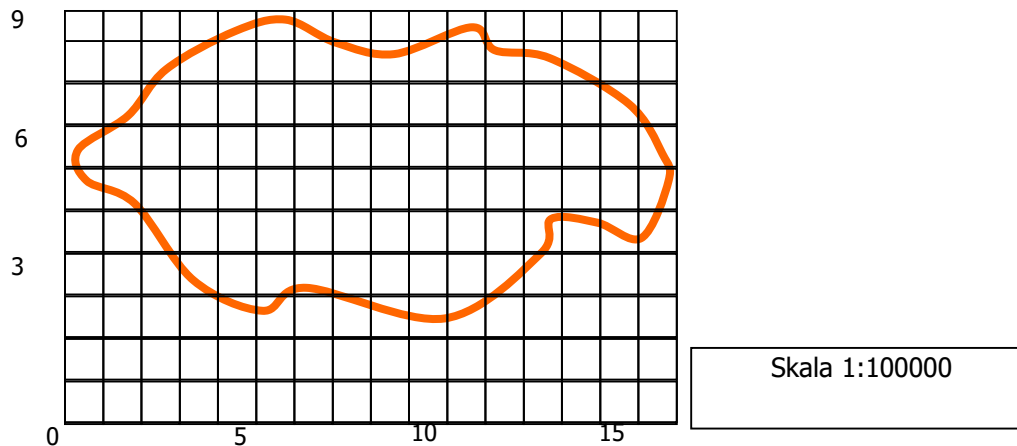
Titik (n)	(k)	Bobot ($w_{n,k}$)	Absis ($x_{n,k}$)	Galat pemotongan
2	1	1.000000000	-0.577350269	$= f^{(4)}(\xi)$
	2	1.000000000	0.577350269	
3	1	0.555555556	-0.774596669	$= f^{(6)}(\xi)$
	2	0.888888889	0.000000000	
	3	0.555555556	0.774596669	
4	1	0.347854845	-0.861136312	$= f^{(8)}(\xi)$
	2	0.652145155	-0.339981044	
	3	0.652145155	0.339981044	
	4	0.347854845	0.861136312	
5	1	0.236926885	-0.906179846	$= f^{(10)}(\xi)$
	2	0.478628670	-0.538469310	
	3	0.568888889	0.000000000	
	4	0.478628670	0.538469310	
	5	0.236926885	0.906179846	



BEBERAPA PENERAPAN INTEGRASI NUMERIK

- **Menghitung Luas Daerah Berdasarkan Gambar**
- **Menghitung Luas dan Volume Benda Putar**

MENGHITUNG LUAS DAERAH BERDASARKAN GAMBAR



- Untuk menghitung luas integral di peta di atas, yang perlu dilakukan adalah menandai atau membuat garis grid pada setiap step satuan h yang dinyatakan dalam satu kotak. Bila satu kotak mewakili 1 mm, dengan skala yang tertera maka berarti panjangnya adalah 100.000 mm atau 100 m.
- Pada gambar di atas, mulai sisi kiri dengan grid ke 0 dan sisi kanan grid ke n (dalam hal ini $n=22$). Tinggi pada setiap grid adalah sebagai berikut:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$y(n)$	0	1	2.5	4.5	6	7	6.5	6	6	6.5	6.5	6	5.5	3.5	3	3	0



MENGHITUNG LUAS DAERAH BERDASARKAN GAMBAR

- Dari tabel di atas, luas area dapat dihitung dengan menggunakan 3 macam metode:
- Dengan menggunakan metode integrasi Reimann

$$L = h \sum_{i=0}^{16} y_i = 73.5$$

- Dengan menggunakan metode integrasi trapezoida

$$L = \frac{h}{2} \left(y_0 + y_{16} + 2 \sum_{i=1}^{15} y_i \right) = 73.5$$

- Dengan menggunakan metode integrasi Simpson

$$L = \frac{h}{3} \left(y_0 + y_{16} + 4 \sum_{i=\text{ganjil}} y_i + 2 \sum_{i=\text{genap}} y_i \right) = 74$$



MENGHITUNG LUAS DAN VOLUME BENDA PUTAR

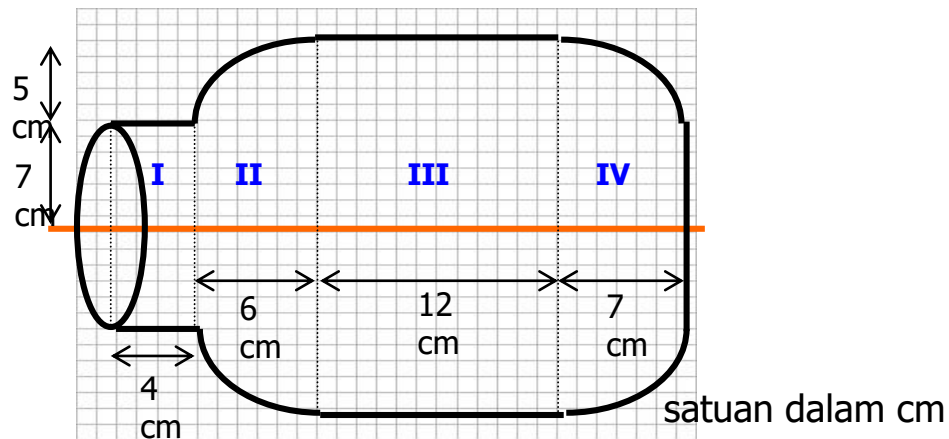
- Luas benda putar:

$$L_p = 2\pi \int_a^b f(x) dx$$

- Volume benda putar:

$$V_p = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

CONTOH



- Ruang benda putar dapat dibedakan menjadi 4 bagian
 - bagian I dan III merupakan bentuk silinder yang tidak perlu dihitung dengan membagi-bagi kembali ruangnya,
 - bagian II dan IV perlu diperhitungkan kembali.

Bagian I:

$$L_I = 2\pi(4)(7) = 56\pi$$

$$V_I = \pi(4)(7)^2 = 196\pi$$

Bagian II:

$$L_{II} = 2\pi(12)(12) = 288\pi$$

$$V_{II} = 2\pi(12)(12)^2 = 3456\pi$$



CONTOH

- Sedangkan untuk menghitung bagian II dan IV diperlukan pembagian area , misalkan dengan mengambil $h=1$ diperoleh:

\bar{n}	0	1	2	3	4	5
$y(n)$	7	10	11	11.5	12	12

- Pada bagian II dan IV: $L_{II} = L_{IV}$ dan $V_{II} = V_{IV}$
- Dengan menggunakan integrasi trapezoida dapat diperoleh:

$$L_{II} (L_{IV}) = 2\pi \frac{h}{2} \left[y_0 + y_5 + 2 \sum_{i=1}^4 y_i \right] = 108\pi$$

$$V_{II} (= V_{IV}) = \pi \frac{h}{2} \left[y_0^2 + y_5^2 + 2 \sum_{i=1}^4 y_i^2 \right] = 1187.5\pi$$



CONTOH

- Luas permukaan dari botol adalah:

$$\begin{aligned}L &= L_I + L_{II} + L_{III} + L_{IV} \\&= 56\pi + 108\pi + 288\pi + 108\pi \\&= 560\pi\end{aligned}$$

- Luas = 1758.4 cm²

- Volume botol adalah:
$$\begin{aligned}V &= V_I + V_{II} + V_{III} + V_{IV} \\&= 196\pi + 1187.5\pi + 3456\pi + 1187.5\pi \\&= 6024\pi\end{aligned}$$

- Volume = 18924.78 cm³