

建模背景

在工程与物理领域中，偏微分方程（PDE）广泛用于描述连续介质中的各种现象，例如热传导、流体流动和电磁场分布等。在本例中，我们关注一个简化的一维热传导方程的稳态解，该模型可用于描述在无时间变化条件下，热量在一根细杆中的分布情况。方程中的源项表示内部热生成的影响，而边界条件则定义了杆两端的温度约束。

为了验证数值求解方法的正确性或进行数据驱动建模的测试，通常需要构造具有已知解析解的问题。在此背景下，我们选择一个满足特定边界条件的解析函数作为模型的解，并据此推导对应的源项，从而构建一个完整的稳态热传导问题。该方法为后续数值模拟、参数估计或机器学习建模提供了可靠的参考基准。

建模公式

所考虑的偏微分方程为：

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = -f(x)$$

边界条件为：

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 0$$

选取的解析解为：

$$u(x) = x(1 - x)$$

由此可得对应的源项为常数函数：

$$f(x) = 2$$