Computação Gráfica

TRANSFORMAÇÕES

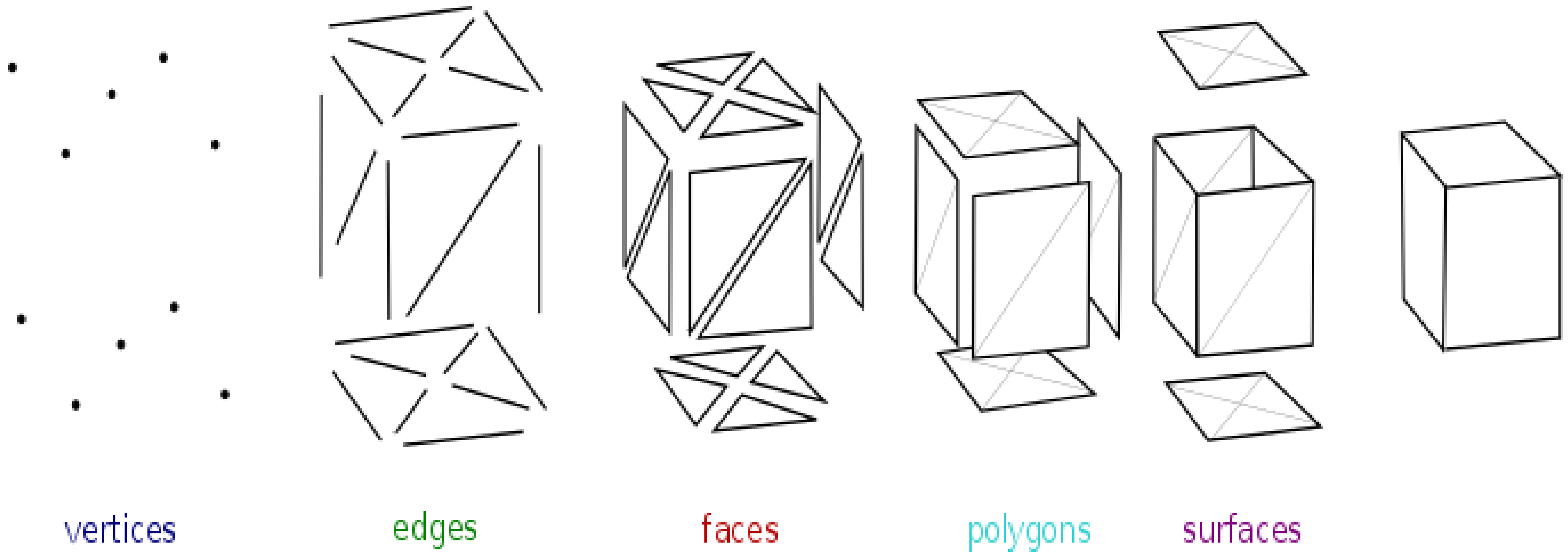
amlucena@cruzeirodosul.edu.br

Prof.: Alexandre M. Lucena

Adaptado de Prof. Ismar Frango e Prof. Marco Antonio

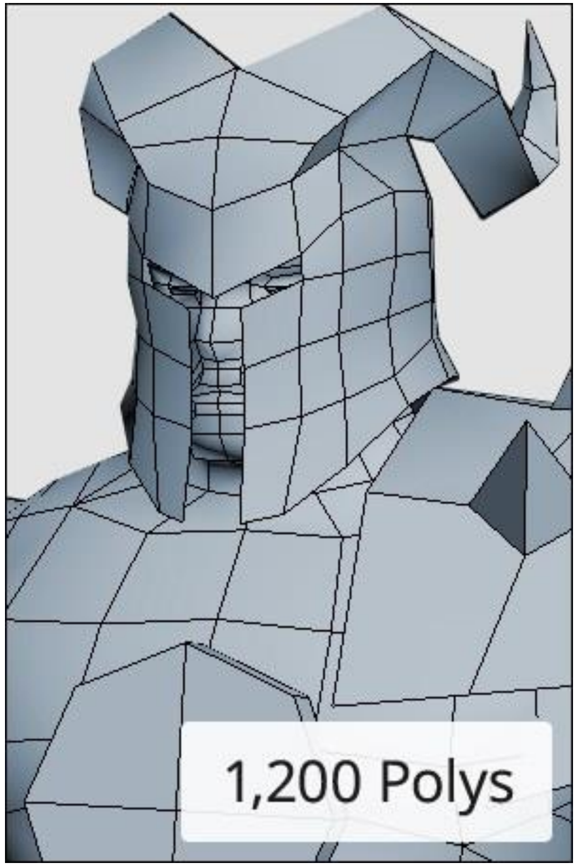
2022

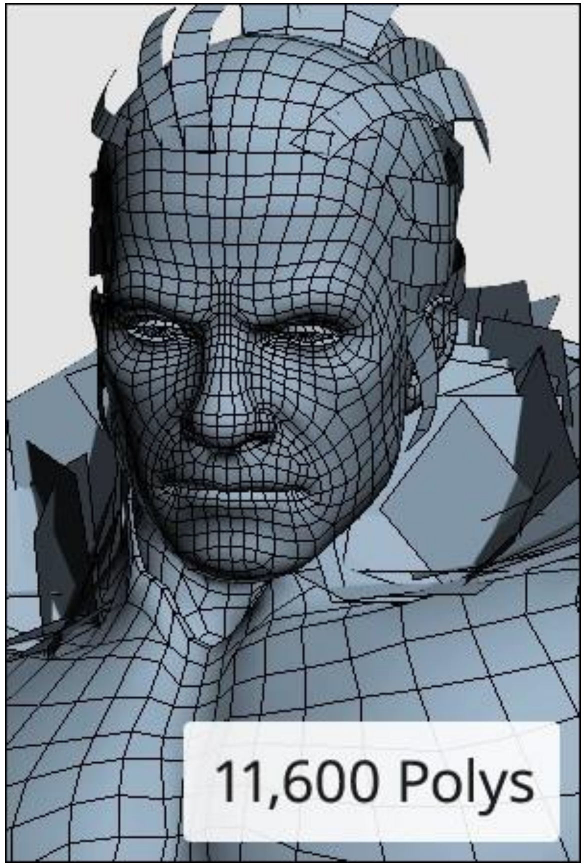
Na última aula...

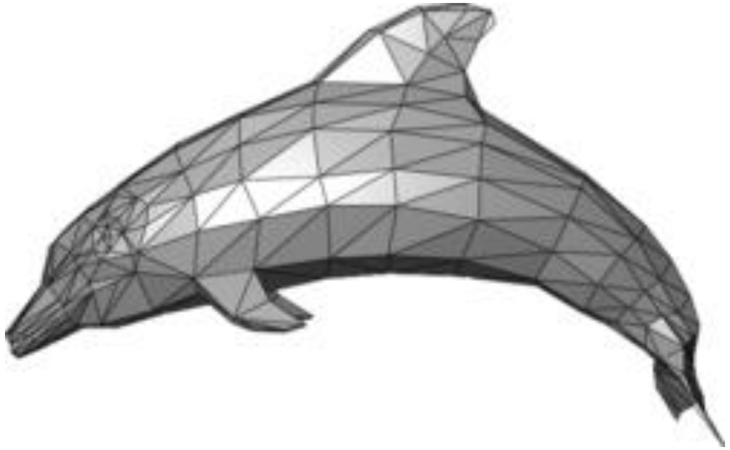


(vértices) (arestas) (faces) (polígonos) (superfícies)

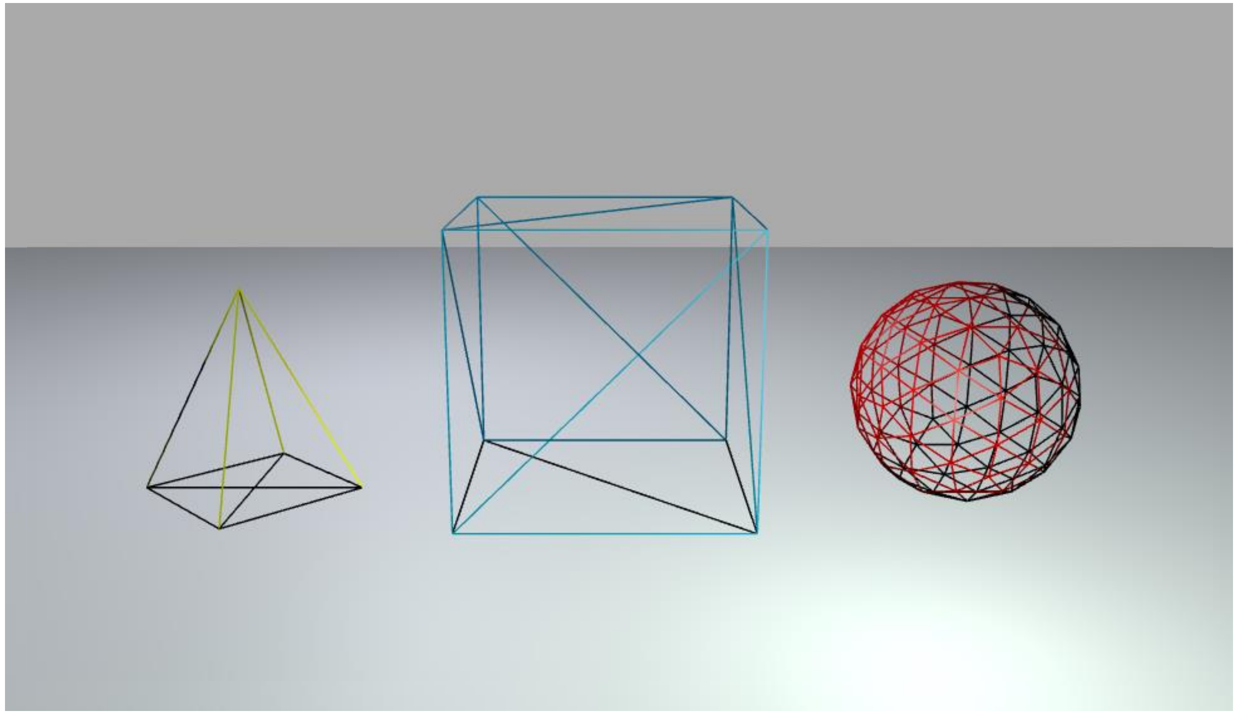
Na última aula...







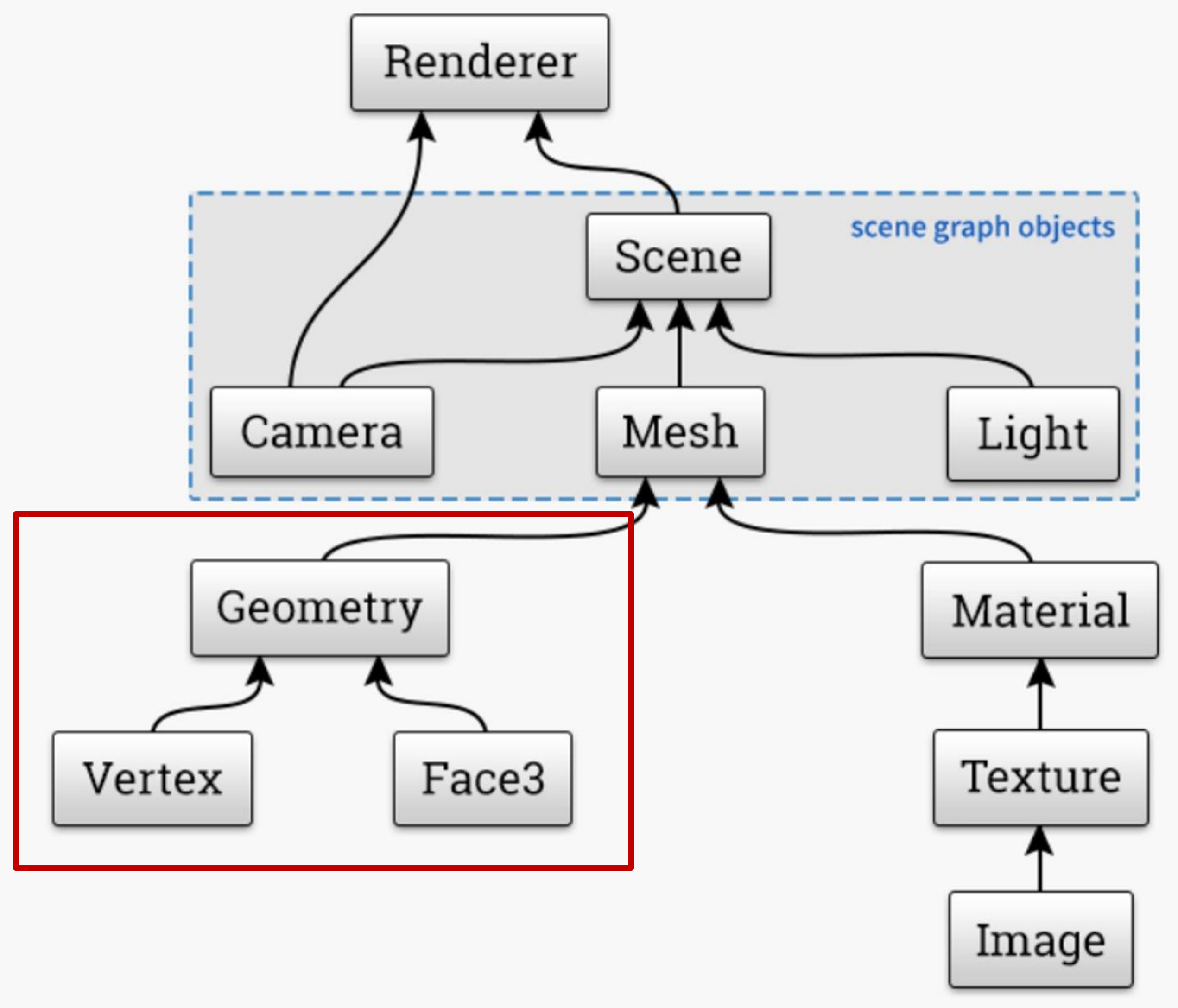
Na última aula...



Visualização apenas das
arestas dos objetos

"Estrutura de arame"

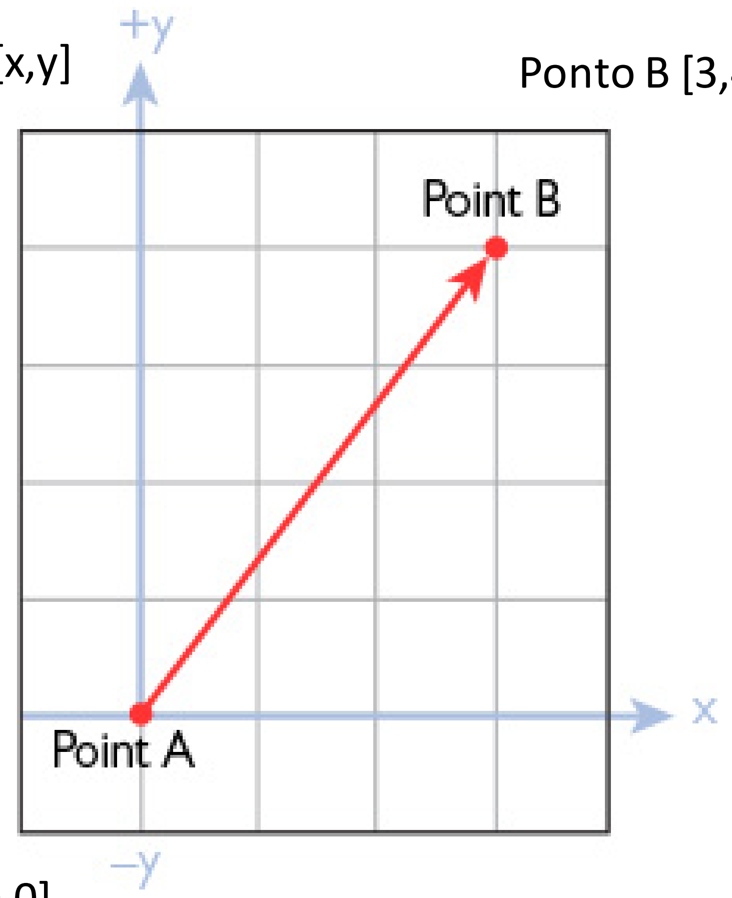
Na última aula...



Transformações em 2D

Coordenadas 2D - [x,y]

Ponto B [3,4]



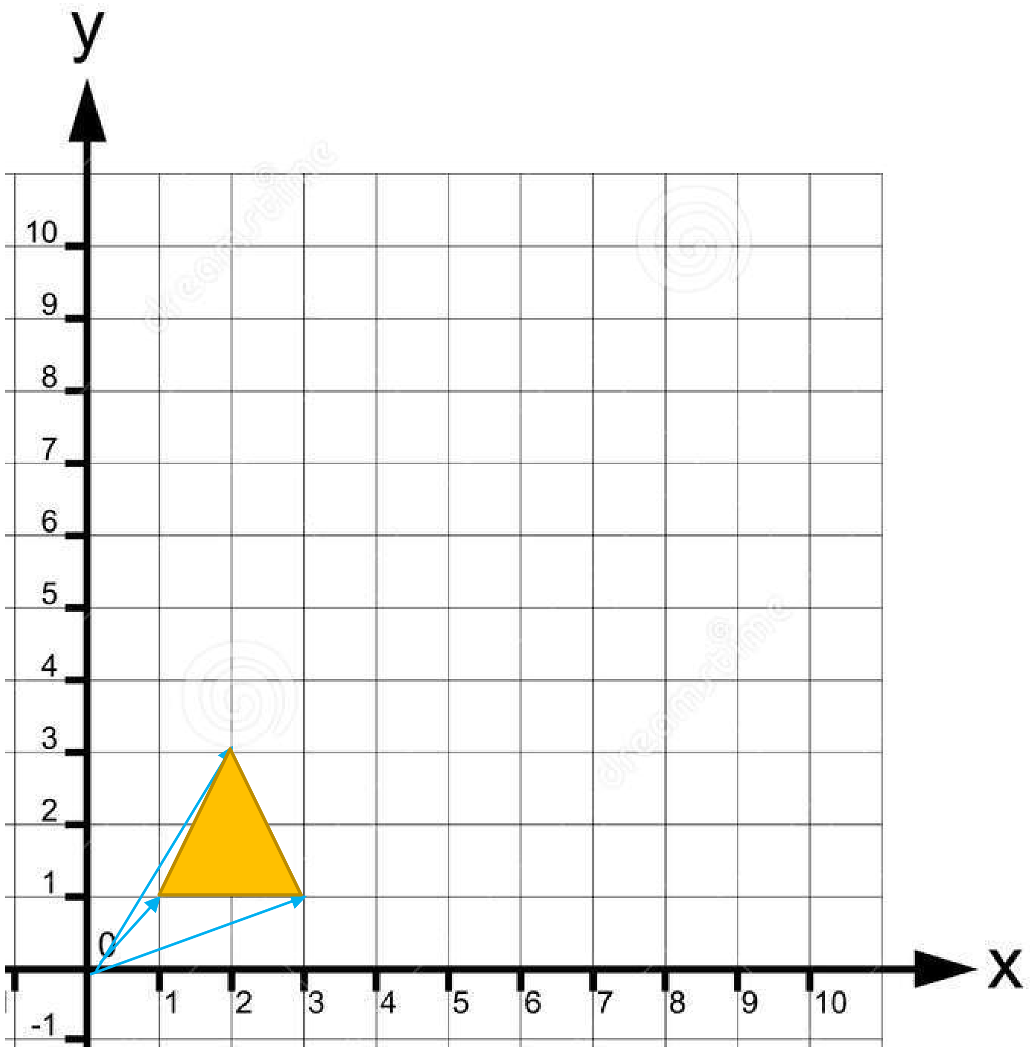
Ponto A [0,0]
Origem

Algumas definições:
Origem -> coordenadas [0,0]
Ponto -> coordenadas [x,y]
Vetor -> diferença entre dois pontos

Podemos interpretar o ponto B = [3,4] como um deslocamento de [3,4] a partir da origem [0,0]

Ou seja, um vetor pode ser interpretado como uma medida de deslocamento entre 2 pontos.

Transformações em 2D



Translação

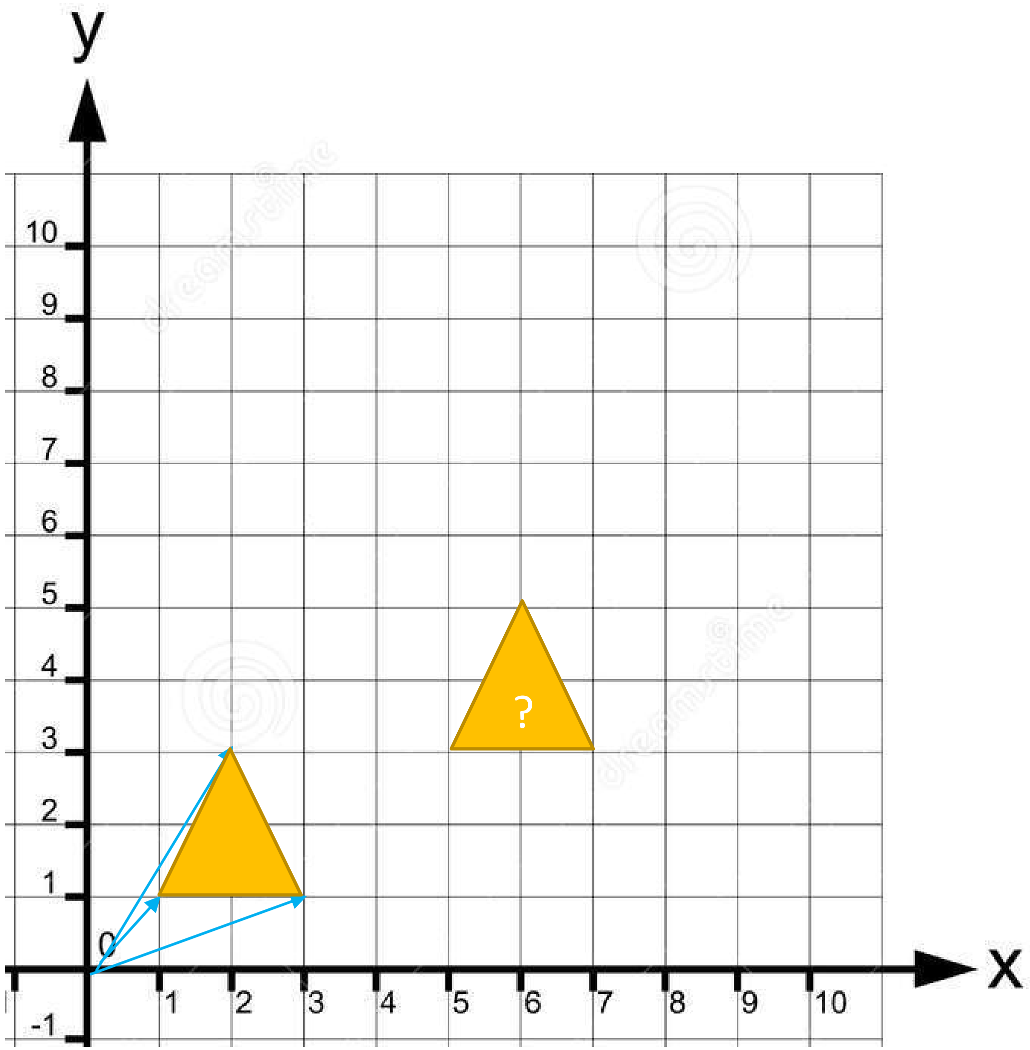
Vamos supor a seguinte figura composta pelos pontos:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Transformações em 2D



Translação

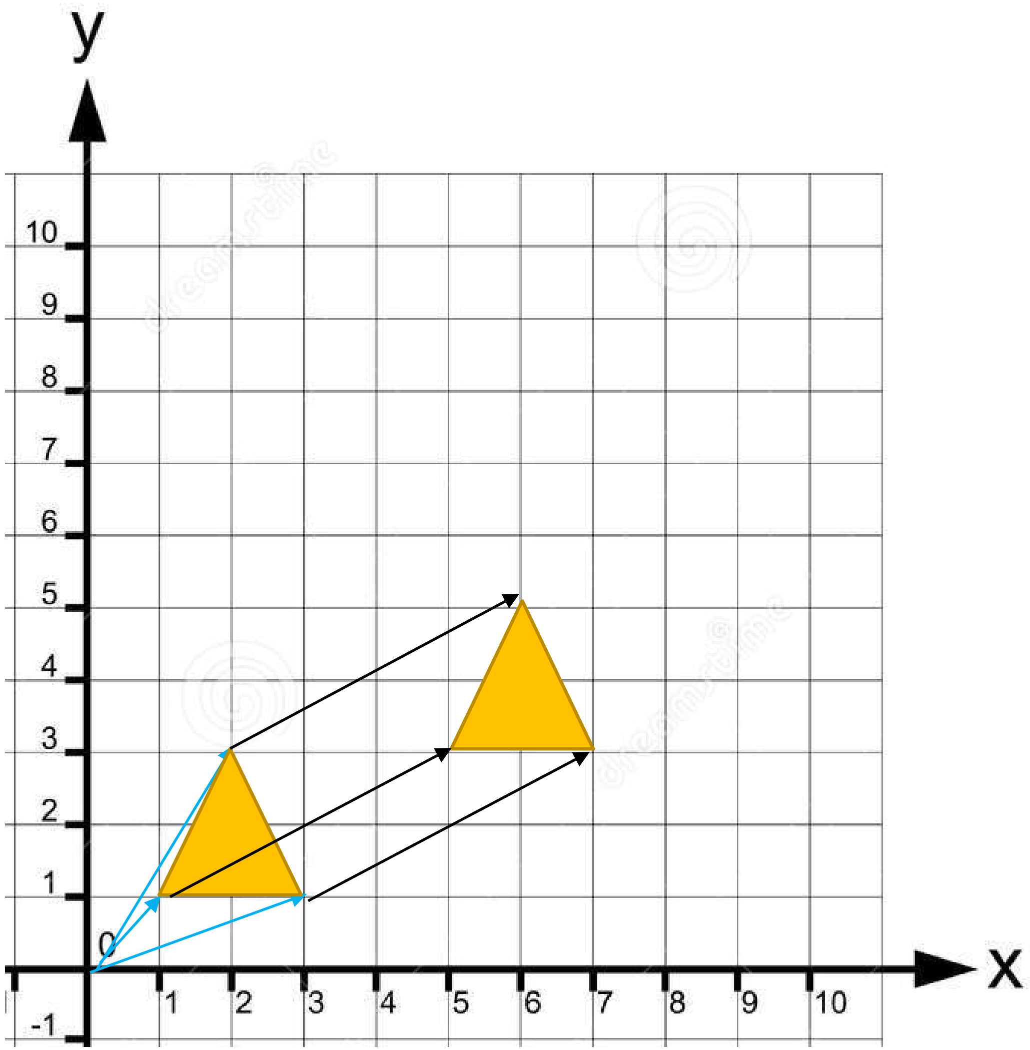
Qual operação preciso realizar para deslocar o pontos para a nova posição?

$$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$$

Transformações em 2D



Translação

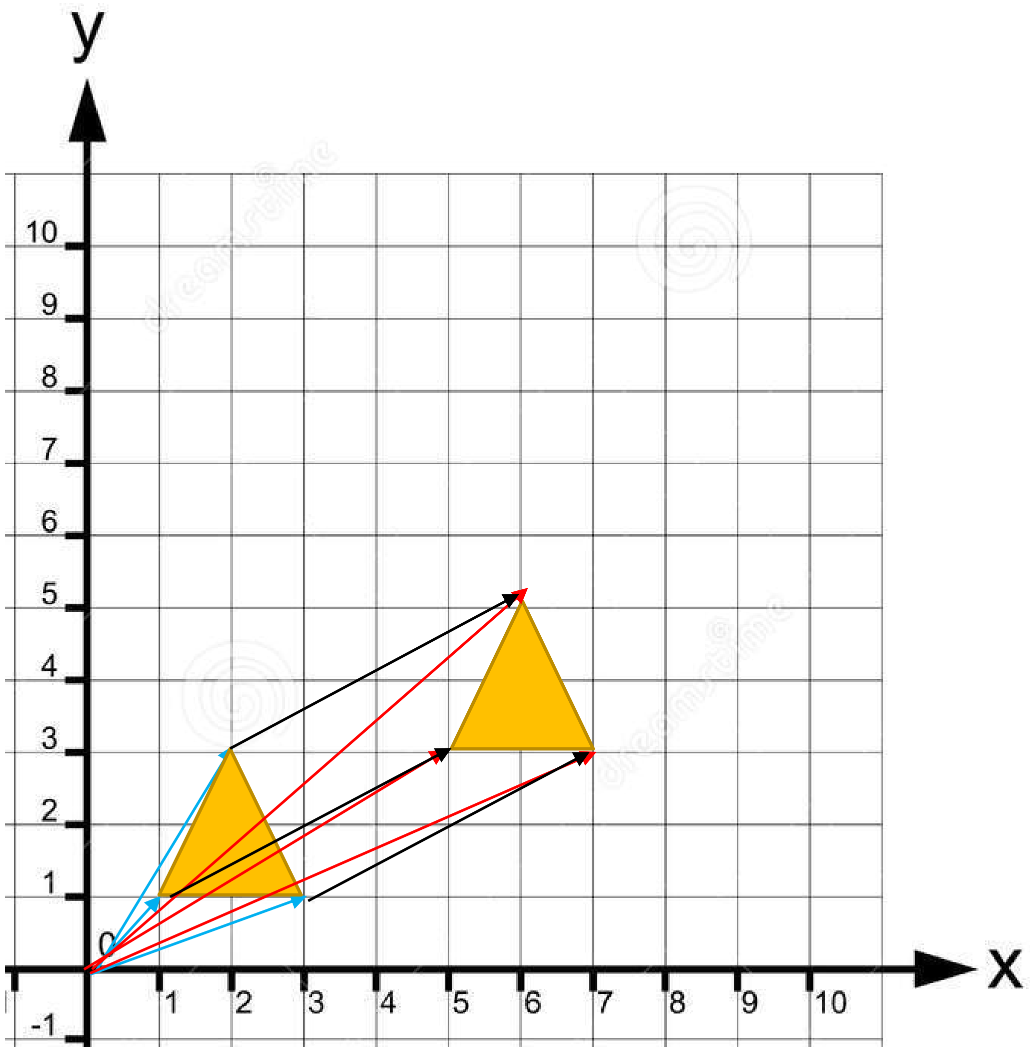
O deslocamento dos pontos é de [4,2], portanto, a operação é equivalente a uma soma vetorial

$$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}$$

Transformações em 2D



Translação

O deslocamento dos pontos é de [4,2], portanto, a operação é equivalente a uma soma vetorial

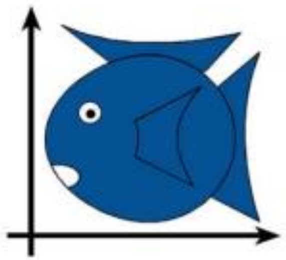
$$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7\\3\end{bmatrix}$$

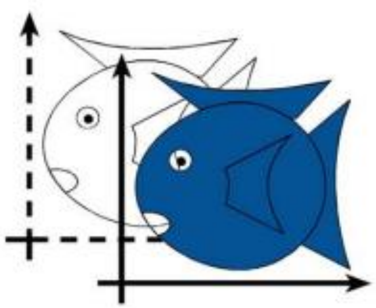
$$\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6\\5\end{bmatrix}$$

Transformações em 2D

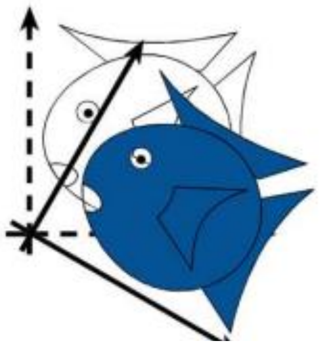
Sendo assim todas as transformações no espaço podem ser obtidas a partir de operações com vetores



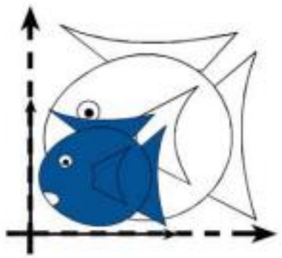
Identidade



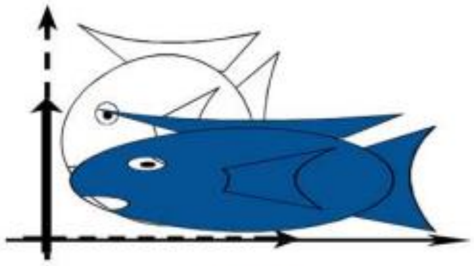
Translação



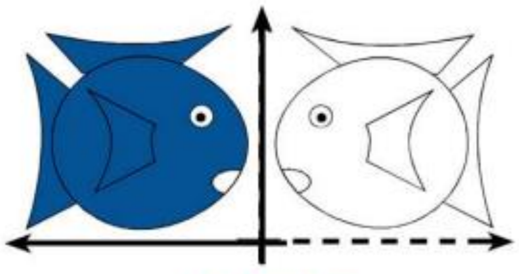
Rotação



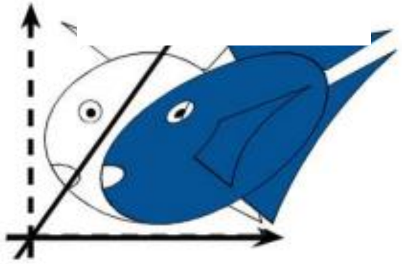
Escala
(Uniforme)



Escala

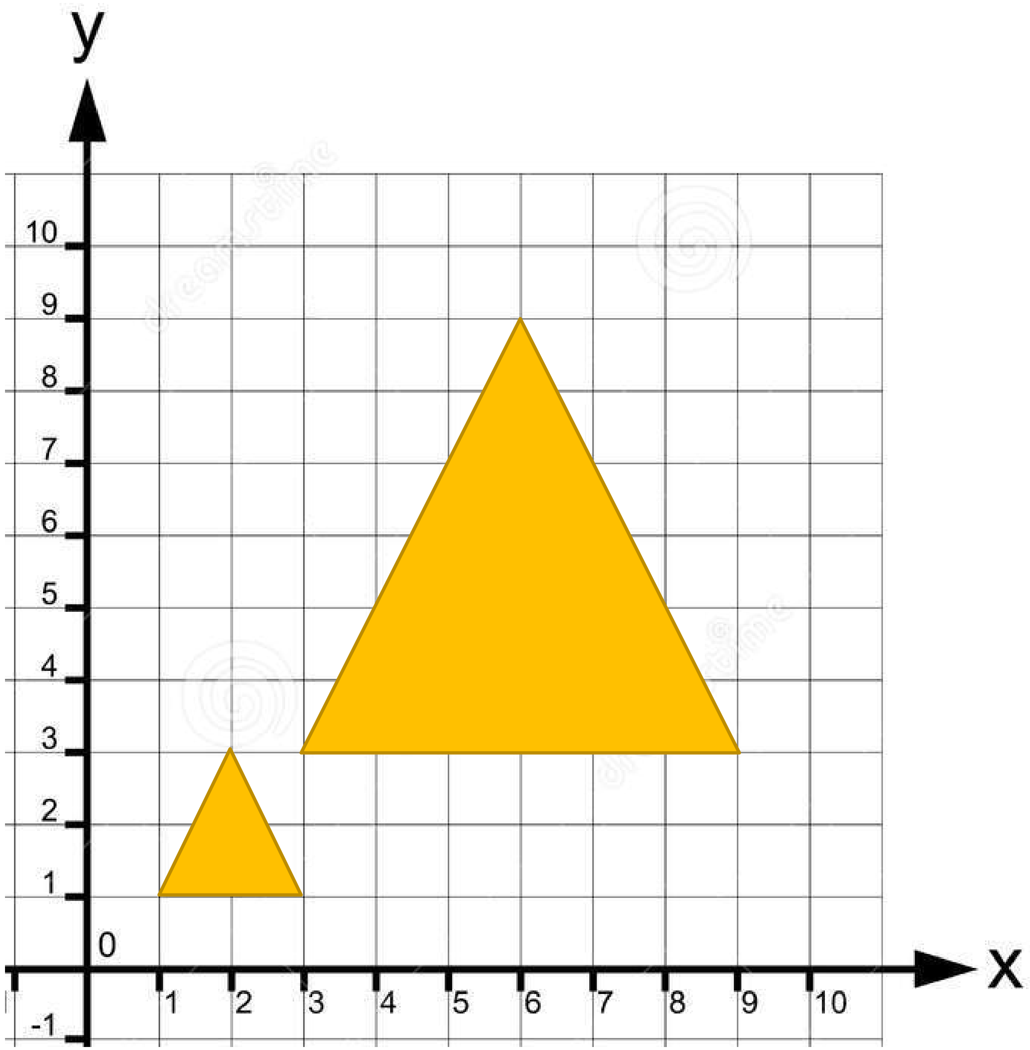


Reflexão



Cisalhamento

Transformações em 2D



Escala Uniforme

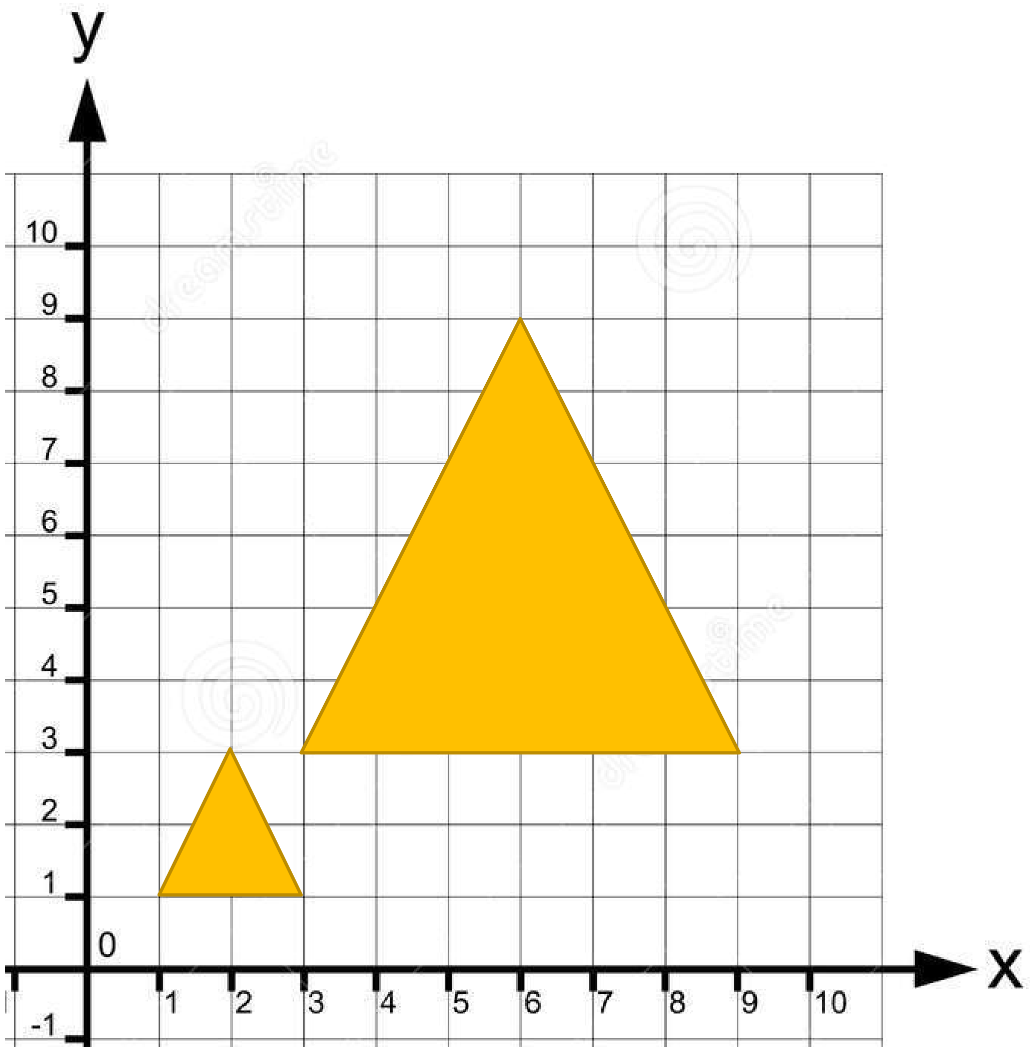
Variação proporcional de todas as coordenadas (multiplicação):

$$3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$3 \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$3 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Transformações em 2D



Escala Uniforme

Variação proporcional de todas as coordenadas (multiplicação):

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Esta operação pode ser substituída por uma multiplicação matricial....

Revisão - Multiplicação por matriz

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boxed{x_1} \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{a_{11}x_1} + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}$$

https://mathinsight.org/matrix_vector_multiplication

Revisão - Multiplicação de Matrizes

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & \boxed{a_{12}} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \boxed{x_2} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + \boxed{a_{12}x_2} + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}$$

https://mathinsight.org/matrix_vector_multiplication

Revisão - Multiplicação de Matrizes

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \boxed{\ldots} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \boxed{\vdots} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \boxed{+ \cdots +} a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}$$

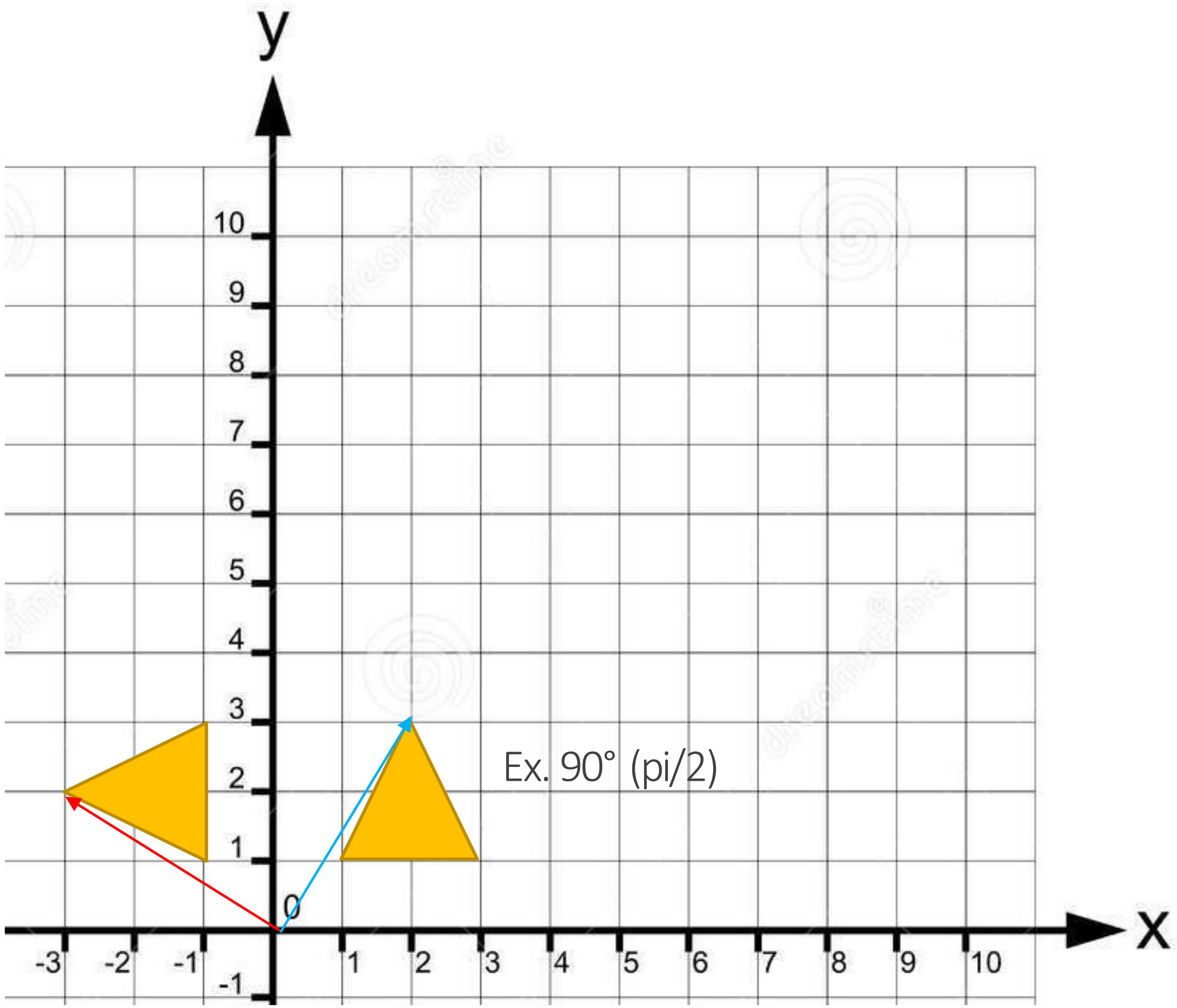
https://mathinsight.org/matrix_vector_multiplication

Revisão - Multiplicação de Matrizes

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \boxed{a_{1n}} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \boxed{x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + \boxed{a_{1n}x_n} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}$$

https://mathinsight.org/matrix_vector_multiplication

Transformações em 2D



Rotação

A partir de relações trigonométricas, uma matriz de rotação pode ser definida da seguinte forma:

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Onde **theta** define o ângulo de rotação (em radianos) .

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Transformações em 2D

Acabamos de definir 3 operações de transformação no espaço 2D:

- Translação (soma)
- Escala (multiplicação por matriz)
- Rotação (multiplicação por matriz)

Será que é possível combinar as operações com matrizes?

Ex. Desejo realizar uma operação de **rotação** e depois uma operação de **escala**:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & ? & \\ & & \end{bmatrix}$$

A matriz resultante desta multiplicação é uma matriz que realiza as duas operações juntas!

E se minha operação de translação também fosse uma multiplicação matricial?
<u>Seria possível combinar todas as operações!</u>

Coordenadas homogêneas

Utilizando as coordenadas homogêneas é possível representar a operação de **Translação** como uma multiplicação matricial.

- Adicionamos uma dimensão extra em nosso vetor, contendo um valor arbitrário (nesse caso 1).

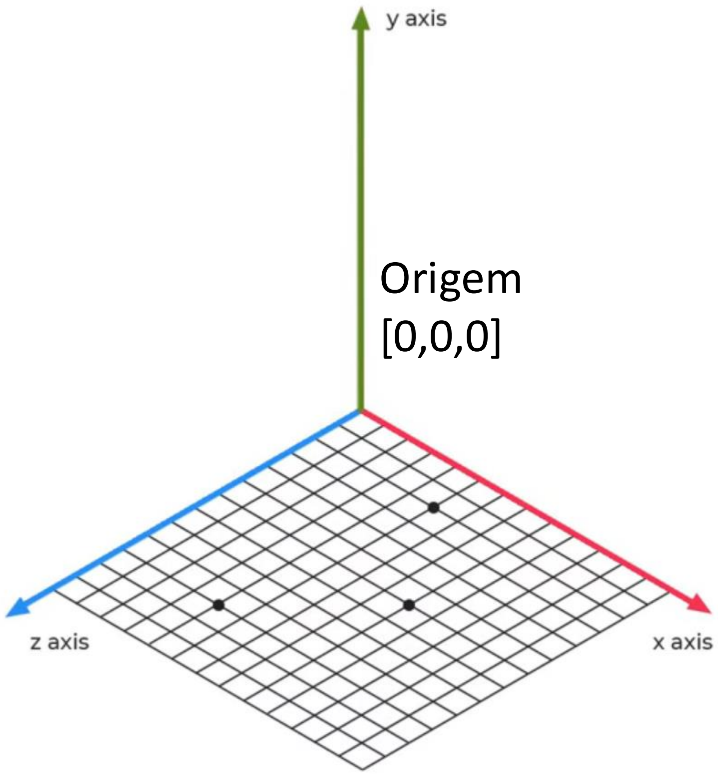
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Agora, todas as transformações podem ser representadas por matrizes 3x3 (para o 2D).

Translate	Scale	Rotate
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & X \\ 0 & 1 & Y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} X & 0 & 0 \\ 0 & Y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta & 0 \\ \sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Transformações em 3D

Todos os conceitos vistos em 2D também se aplicam ao 3D.
Inclusive a utilização das coordenadas homogêneas!



Coordenadas 3D [x,y,z]

Transformações em 3D

- Translação

Translation in 3D

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & Tx \\ 0 & 1 & 0 & Ty \\ 0 & 0 & 1 & Tz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

https://matrix.reshish.com/multiplication.php

- Escala

Scale in 3D

$$\begin{bmatrix} Sx & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Sy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Sz & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Rotação (em torno do eixo)

X-Rotation in 3D

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

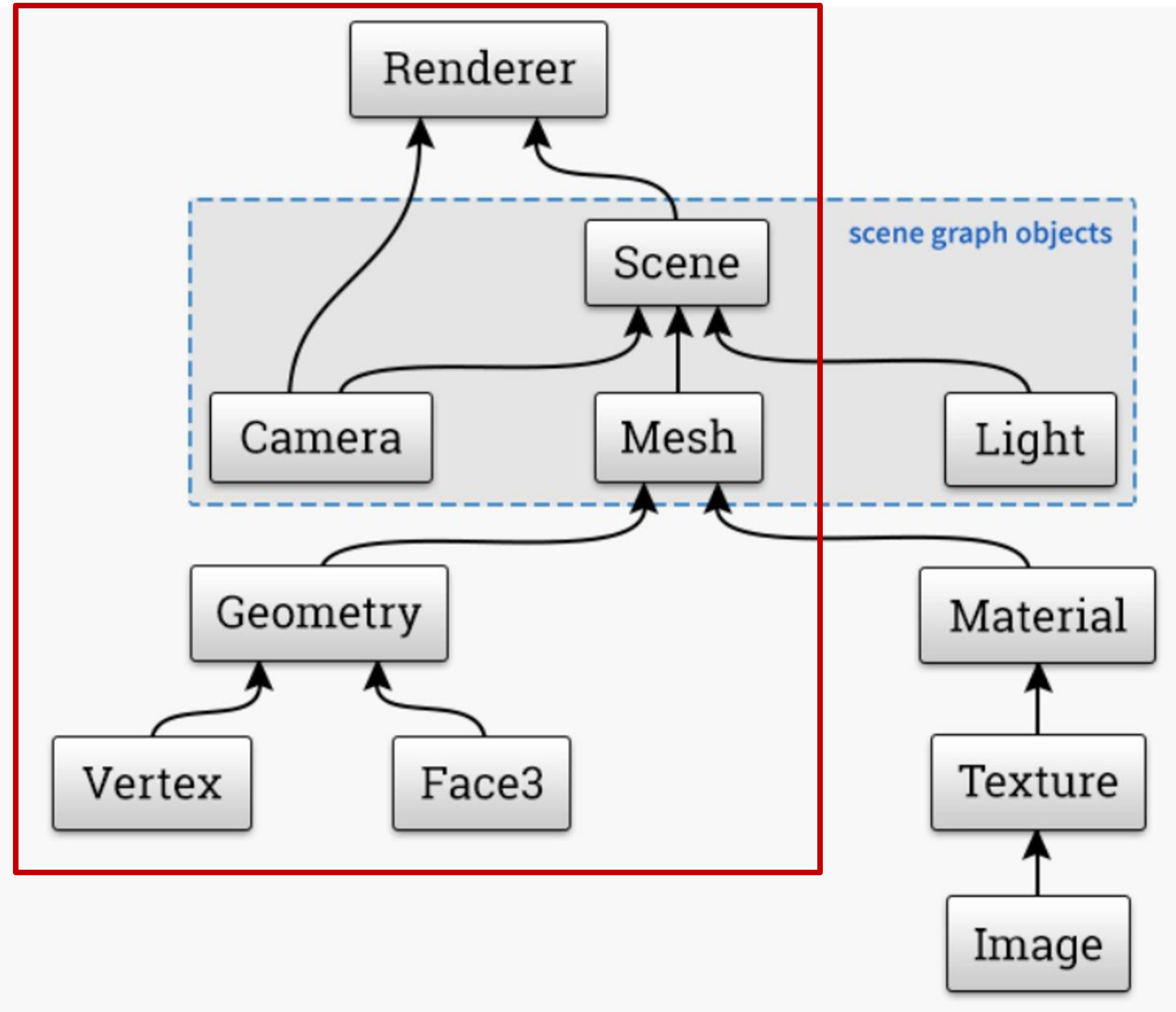
Y-Rotation in 3D

$$\begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & \sin\phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Z-Rotation in 3D

$$\begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Praticando no Three.js



Praticando no Three.js

```html
<html>
   <head>
      <title>Aula03</title>
      <style>
         body { margin: 0; }
         canvas { width: 100%; height: 100% }
      </style>
   </head>
   <body>
      <script src="js/three.js"></script>
      <script>
         var scene = new THREE.Scene();
         var camera = new THREE.PerspectiveCamera( 75, window.innerWidth/window.innerHeight, 0.1, 1000 );

         var renderer = new THREE.WebGLRenderer();
         renderer.setSize( window.innerWidth, window.innerHeight );
         document.body.appendChild( renderer.domElement );

         //--------

         //Script aqui

         //---------
         renderer.render( scene, camera );
      </script>
   </body>
</html>
```

Praticando no Three.js

Utilizando o código elaborado em sala:

Crie um código que implemente um **cubo,** encontre as matrizes que realiza as operações individualmente, e em seguida encontre a matriz resultante e aplique a transformação no cubo (entregar cada exercício em um arquivo).

Obs.: Não é necessário incluir luzes, fundo e etc...

Exercício 1:

- Rotação de 60° em z
- Escala de Sx=2 e Sy=3
- Translação de Δx=5 e Δy=5

Exercício 2:

- Translação de Δx=5 e Δy=5
- Rotação de 30° em z
- Rotação de 45° em x