# 堆積モデル説明書

2015/12/09

# Chapter1 一次元堆積モデル

## 1.1 Biogenic silica and clay

この章では鉛直一次元堆積モデルの定式化について説明する。主に *Chikamoto and Yamanaka* (2005) を参考にした。

### 1.1.1 No dissolution / No bioturbation

まず始めに、Clay と Opal の堆積過程を考える。方程式系は、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial S_{\mathrm{Clay}}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial z}(wS_{\mathrm{Clay}}) \\
\frac{\partial S_{\mathrm{Opal}}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial z}(wS_{\mathrm{Opal}}) \\
\frac{\partial w}{\partial z} &= 0
\end{aligned}$$

である。$S_{\mathrm{Clay}}, S_{\mathrm{Opal}}$ の単位は、それぞれ $(\mathrm{g/m^3}), (\mathrm{mmol/m^3})$ を用いる。

境界条件は、

$$\begin{aligned}
w\big|_{z=0} &= \text{(total) sedimentation rate } \left(= F_{\mathrm{Clay}}/\rho_{\mathrm{Clay}} + F_{\mathrm{Opal}}/(\rho_{\mathrm{Opal}} \cdot M_{\mathrm{Opal}}^{-1})\right) \\
wS_{\mathrm{Clay}}\big|_{z=0} &= F_{\mathrm{Clay}} \ (\mathrm{g\ m^{-2}\ yr}) \\
wS_{\mathrm{Opal}}\big|_{z=0} &= F_{\mathrm{Opal}} \ (\mathrm{mmol\ m^{-2}\ yr})
\end{aligned}$$

である。ここで、Clay の密度、Opal の密度およびモル質量は、それぞれ

$$\begin{aligned}
\rho_{\mathrm{Clay}} &= 2.75 \quad \mathrm{g/cm^3} \\
\rho_{\mathrm{Opal}} &= 2.20 \quad \mathrm{g/cm^3} \\
M_{\mathrm{Opal}} &= 60 \quad\ \ \mathrm{g/mol}
\end{aligned}$$

である。堆積層の深さは 100 cm とし、各層の厚さは $\Delta z = 0.5$ cm として、200 層をとる。$\Delta t = 1$ day である。Clay および Opal の重量パーセントは、それぞれ

$$P_{\mathrm{Clay}} = \frac{S_{\mathrm{Clay}}}{S_{\mathrm{Clay}} + S_{\mathrm{Opal}} \cdot M_{\mathrm{Opal}}} \times 100\ (\%)$$
$$P_{\mathrm{Opal}} = \frac{S_{\mathrm{Opal}}}{S_{\mathrm{Clay}} + S_{\mathrm{Opal}} \cdot M_{\mathrm{Opal}}} \times 100\ (\%)$$

である。

方程式を差分化することを考える。

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}(wS)$$

を差分化すると、

$$\frac{S_k^{n+1} - S_k^n}{\Delta t} = \frac{w_k \cdot S_{\overline{k}}^n - w_{k+1} \cdot S_{\overline{k+1}}^n}{\Delta z}$$

となる。ここで、up-wind の場合には、

$$S_{\overline{k}} = \begin{cases} S_{k-1} & (w_k > 0) \\ S_k & (w_k < 0) \end{cases}$$

であり、wighted up-wind の場合には、

$$S_{\overline{k}} = \begin{cases} \alpha \cdot S_{k-1} + (1-\alpha) \cdot S_k & (w_k > 0) \\ (1-\alpha) \cdot S_k + \alpha \cdot S_k & (w_k < 0) \end{cases}$$

である。

境界条件は、

$$w_1 \cdot S_{\overline{1}} = F_{\mathrm{Clay\ or\ Opal}} \begin{cases} 9075 & \mu\mathrm{g/cm^2 \cdot yr} \\ 120 & \mu\mathrm{mol/cm^2 \cdot yr} \end{cases}$$

を与える。また、連続の式

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

より、$w_{k+1} = w_k$ である。境界条件より、

$$\begin{aligned} w_1 &= \text{sedimentation rate} \\ &\quad \big(= F_{\mathrm{Clay}}/\rho_{\mathrm{Clay}} + F_{\mathrm{Opal}}/(\rho_{\mathrm{Opal}} \cdot M_{\mathrm{Opal}}^{-1})\big) \\ &\quad \big(= 3.3 \times 10^{-3}\ \mathrm{cm/yr}\big) \end{aligned}$$

となる。

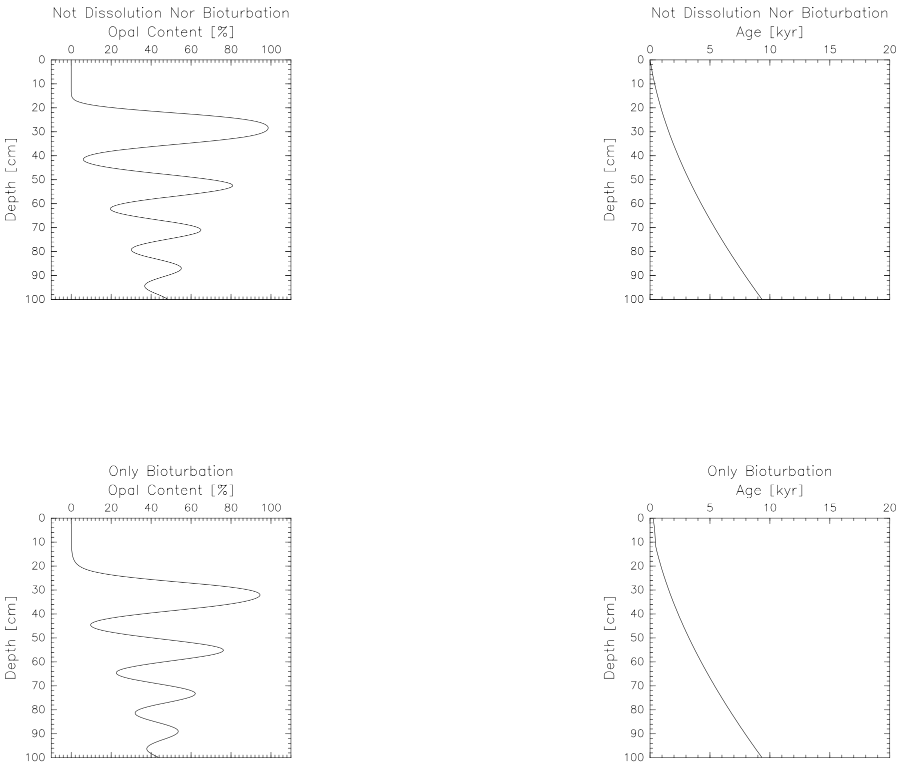


Figure 1.1.1: Not Dissolution Nor Bioturbation. Only Bioturbation.

### 1.1.2 No dissolution

Clay と Opal の堆積過程を考える。生物擾乱による拡散を考慮する。ここで、層に占める液体部分の割合である $\phi$ : porosity を導入する。

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\{(1-\phi)S_{\mathrm{Clay}}\} &= \frac{\partial}{\partial z}\left\{(1-\phi)wS_{\mathrm{Clay}}\right\} + \frac{\partial}{\partial z}\left\{(1-\phi)D_B\frac{\partial S_{\mathrm{Clay}}}{\partial z}\right\} \\
\frac{\partial}{\partial t}\{(1-\phi)S_{\mathrm{Opal}}\} &= \frac{\partial}{\partial z}\left\{(1-\phi)wS_{\mathrm{Opal}}\right\} + \frac{\partial}{\partial z}\left\{(1-\phi)D_B\frac{\partial S_{\mathrm{Opal}}}{\partial z}\right\} \\
\frac{\partial}{\partial z}\{(1-\phi)w\} &= 0
\end{aligned}
$$

である。$\phi$ は、一定の鉛直分布を与えることとし、

$$\phi = \phi_0 \cdot \exp\left(-\frac{z}{z_0}\right) \ \big(\phi_0 = 0.9,\ z_0 = 182.3 \text{ cm}\big)$$

とする。また、$D_B$ は、mixing coffirent of bioturbation で、その分布は、

$$D_B(z) = \frac{D_B^0}{1+\exp\{2(z-z_B)\}} \ \big(D_B^0 = 0.3 \text{ cm}^2/\text{yr},\ z_B = 10 \text{ cm}\big)$$

とする (*Berner*, 1980)。

境界条件は、

$$
\begin{aligned}
(1-\phi)w\big|_{z=0} &= \text{(total) sedimentation rate} \\
&= \big(F_{\mathrm{Clay}}/\rho_{\mathrm{Clay}} + F_{\mathrm{Opal}}/(\rho_{\mathrm{Opal}}\cdot M_{\mathrm{Opal}}^{-1})\big) \\
(1-\phi)wS_{\mathrm{Clay}}\big|_{z=0} &= F_{\mathrm{Clay}} \ (\mu\text{g/cm}^2/\text{yr}) \\
(1-\phi)wS_{\mathrm{Opal}}\big|_{z=0} &= F_{\mathrm{Opal}} \ (\mu\text{g/cm}^2/\text{yr})
\end{aligned}
$$

である。

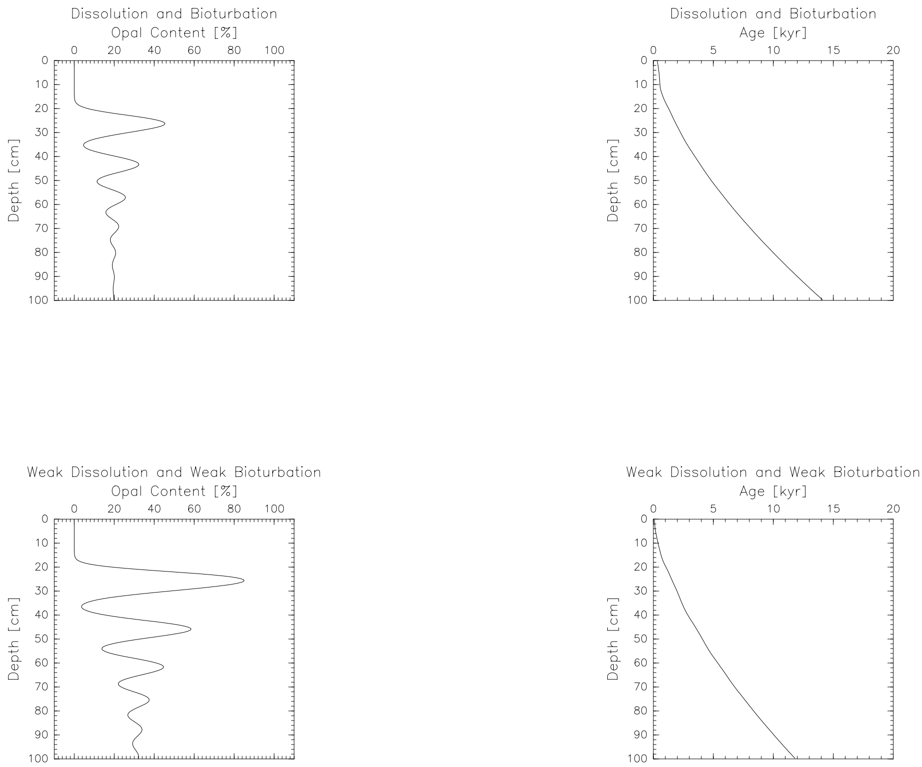


Figure 1.1.2: Dissolution and Bioturbation. Weak Dissolution and Weak Bioturbation.

### 1.1.3 Dissolution and Bioturbation

Clay と Opal の堆積過程を考える。生物擾乱による拡散および、溶解過程を考慮する。

$$\frac{\partial}{\partial t}\{(1-\phi)S_{\mathrm{Clay}}\} = \frac{\partial}{\partial z}\left\{(1-\phi)wS_{\mathrm{Clay}}\right\} + \frac{\partial}{\partial z}\left\{(1-\phi)D_B\frac{\partial S_{\mathrm{Clay}}}{\partial z}\right\}$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\{(1-\phi)S_{\mathrm{Opal}}\} = \frac{\partial}{\partial z}\left\{(1-\phi)wS_{\mathrm{Opal}}\right\} + \frac{\partial}{\partial z}\left\{(1-\phi)D_B\frac{\partial S_{\mathrm{Opal}}}{\partial z}\right\} - (1-\phi)R_{\mathrm{Opal}}S_{\mathrm{Opal}}$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\{(1-\phi)w\} = -(1-\phi)R_{\mathrm{Opal}}$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\{\phi C_{\mathrm{Si(OH)4}}\} = \frac{\partial}{\partial z}\left\{\phi D_E\frac{\partial \mathrm{C}_{\mathrm{Si(OH)4}}}{\partial z}\right\} + (1-\phi)R_{\mathrm{Opal}}S_{\mathrm{Opal}}$$

である。$D_E$ は effective molecular diffusivity で、

$$D_E = \phi^{n-1}\cdot D_{SW}$$

と与える。$D_{SW} = 4.59\times 10^{-6}$ cm$^2$/s, $n = 2.5$ である (*Hensen et al.*, 1998; *Ridgwell et al.*, 2002)。

境界条件は、

$$\begin{aligned}
(1-\phi)w\Big|_{z=0} &= \text{(total) sedimentation rate} \\
&= \left(F_{\mathrm{Clay}}/\rho_{\mathrm{Clay}} + F_{\mathrm{Opal}}/(\rho_{\mathrm{Opal}}\cdot M_{\mathrm{Opal}}^{-1})\right) \\
(1-\phi)wS_{rmClay}\Big|_{z=0} &= F_{\mathrm{Clay}}\ (\mu\mathrm{g/cm^2/yr}) \\
(1-\phi)wS_{\mathrm{Opal}}\Big|_{z=0} &= F_{\mathrm{Opal}}\ (\mu\mathrm{g/cm^2/yr}) \\
C_{\mathrm{Si(OH)4}}\Big|_{z=0} &= C_{WO}\ \left(\text{Opal concentration in freshwater}\right) \\
\frac{\partial C_{\mathrm{Si(OH)4}}}{\partial z}\bigg|_{z=z_{\mathrm{Bottom}}} &= 0
\end{aligned}$$

である。

$z = z_{\mathrm{Bottom}}$ において、$w < 0$ ならば、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial S_{\mathrm{Clay}}}{\partial z}\bigg|_{z=z_{\mathrm{Bottom}}} &= 0 \\
S_{\mathrm{Opal}}\bigg|_{z=z_{\mathrm{Bottom}}} &= 0
\end{aligned}$$

とする。つまり、$z > z_{\mathrm{Bottom}}$ には、Clay のみが存在すると仮定する。

$R_{\rm Opal}$ は Opal dissolution rate ($\rm yr^{-1}$) で、簡単化して、

$$R_{\rm Opal}(z)=\begin{cases} k_0\cdot\left(\dfrac{[\rm Si(OH)_4]^{sat}(z)-[\rm Si(OH)_4](z)}{[\rm Si(OH)_4]^{sat}(z)}\right) & \left([\rm Si(OH)_4]<[\rm Si(OH)_4]^{sat}\right)\\ 0 & \left([\rm Si(OH)_4]>[\rm Si(OH)_4]^{sat}\right)\end{cases}$$

と与える。$k_0\sim 0.032\ \rm yr^{-1}$, $[\rm Si(OH)_4]_{sat}\sim 1000\ \mu mol\ l^{-1}=1.0\ \mu mol/cm^3$ である。さらに、$R_{\rm Opal}(z)$ の表現について、温度、圧力依存性を考慮する。まず始めに、

$$u_{\rm Opal}(z)=\left(\frac{[\rm Si(OH)_4]^{sat}(z)-[\rm Si(OH)_4](z)}{[\rm Si(OH)_4]^{sat}(z)}\right)$$

とする。Al の存在は、ケイ酸の溶解度に影響を与える。よって、

$$\gamma_{\rm Al}=\begin{cases}0.2 & \dfrac{P^{\rm Detrial}}{P^{\rm Opal}}>15\\ 1.0-\left(0.045\dfrac{P^{\rm Detrial}}{P^{\rm Opal}}\right)^{0.58} & \dfrac{P^{\rm Detrial}}{P^{\rm Opal}}\le 15\end{cases}$$

とすると、

$$[\rm Si(OH)_4]^{sat}(z)=\gamma_{\rm Al}10^{\left(6.44-\frac{968}{T(z)}\right)}$$

となる。$P^{\rm Detrial}$ および $P^{\rm Opal}$ は Detrial material、Opal の重量パーセント (wt%) である。次に、

$$\eta_{1\ \rm Opal}(z)=0.225\left(1+\frac{T}{15}\right)u_{\rm Opal}(z)+0.775\left[\left(1+\frac{T}{400}\right)^4u_{\rm Opal}(z)\right]^{9.25}$$
$$\eta_{2\ \rm Opal}(z)=0.26+0.74\ \mathrm{e}^{-\frac{z}{7.0}}$$

を導入し、まとめると $[\rm Si(OH)_4]<[\rm Si(OH)_4]^{sat}$ の場合に

$$R^{\rm Opal}_{(z)}=\eta_1(z)\eta_2(z)k_0u(z)$$

と書ける (*Ridgwell et al.*, 2002)。

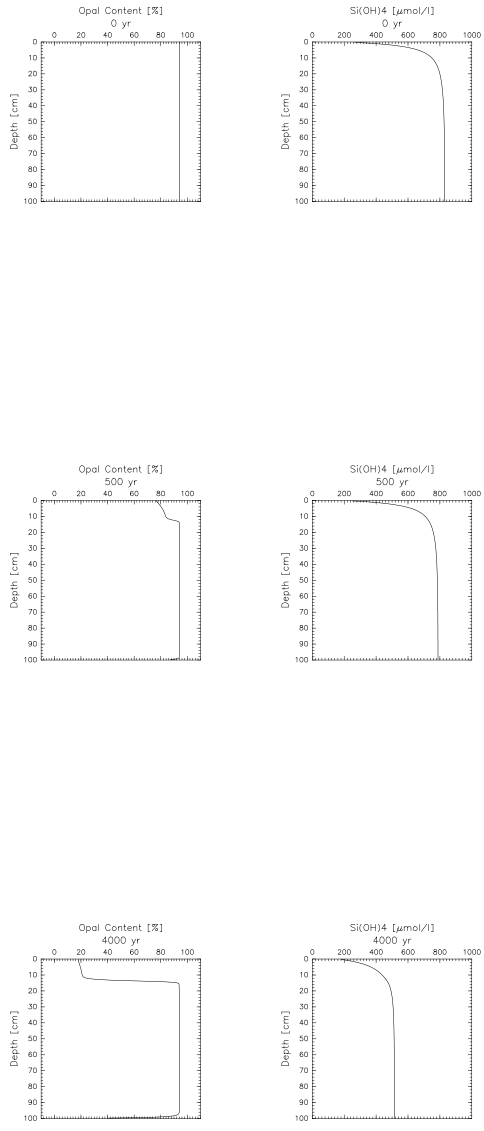


Figure 1.1.3: Dissolution and Bioturbation. Weak Dissolution and Weak Bioturbation.

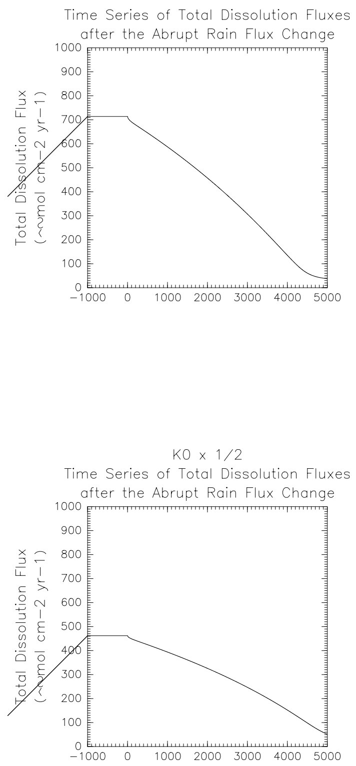


Figure 1.1.4: Time series of the total dissolution flux of biogenic silica.

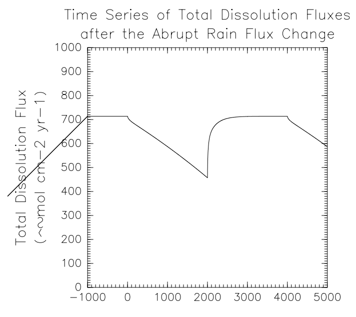


Figure 1.1.5: Time series of the total dissolution flux of biogenic silica.

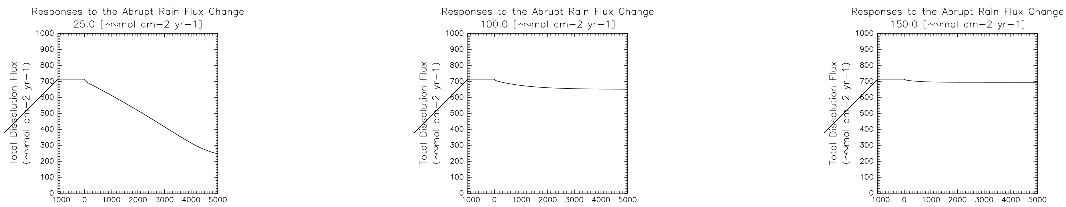


Figure 1.1.6: Time series of the total dissolution flux of biogenic silica.

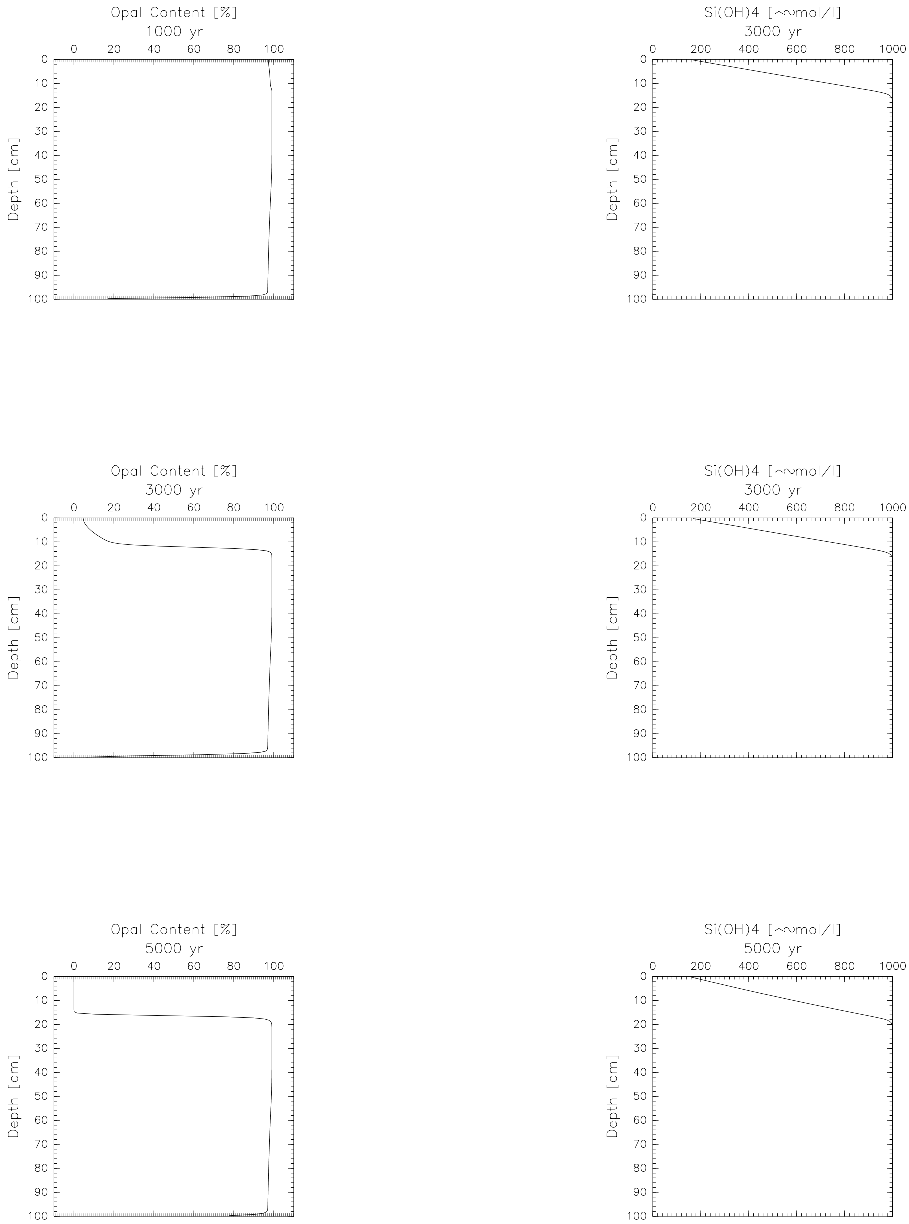


Figure 1.1.7: Time series of the total dissolution flux of biogenic silica.

# Chapter2　二次元堆積モデル

## 2.1 Equations

モデル内で扱う予報変数は以下である。POM は POC として考える。

- Clay, POM, $CaCO_3$, Opal: 固体 4 種
- $PO_4$, DIC, Alk, $O_2$, $Si(OH)_4$: 液体 5 種

固体の単位は、Clay が (g/m$^3$)、それ以外が (mmol/m$^3$) を用いる。液体の単位は、(mmol/m$^3$) を用いる。

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\{(1-\phi)S_{\rm Clay}\} &= \frac{\partial}{\partial z}\Bigl\{(1-\phi)wS_{\rm Clay}\Bigr\} + \frac{\partial}{\partial z}\Bigl\{(1-\phi)D_B\frac{\partial S_{\rm Clay}}{\partial z}\Bigr\} \\
\frac{\partial}{\partial t}\{(1-\phi)S_{\rm POM}\} &= \frac{\partial}{\partial z}\Bigl\{(1-\phi)wS_{\rm POM}\Bigr\} + \frac{\partial}{\partial z}\Bigl\{(1-\phi)D_B\frac{\partial S_{\rm POM}}{\partial z}\Bigr\} - (1-\phi)R_{\rm POM}S_{\rm POM} \\
\frac{\partial}{\partial t}\{(1-\phi)S_{\rm CaCO_3}\} &= \frac{\partial}{\partial z}\Bigl\{(1-\phi)wS_{\rm CaCO_3}\Bigr\} + \frac{\partial}{\partial z}\Bigl\{(1-\phi)D_B\frac{\partial S_{\rm CaCO_3}}{\partial z}\Bigr\} - (1-\phi)R_{\rm CaCO_3}S_{\rm CaCO_3} \\
\frac{\partial}{\partial t}\{(1-\phi)S_{\rm Opal}\} &= \frac{\partial}{\partial z}\Bigl\{(1-\phi)wS_{\rm Opal}\Bigr\} + \frac{\partial}{\partial z}\Bigl\{(1-\phi)D_B\frac{\partial S_{\rm Opal}}{\partial z}\Bigr\} - (1-\phi)R_{\rm Opal}S_{\rm Opal} \\
\frac{\partial\{(1-\phi)w\}}{\partial z} &= -(1-\phi)(R_{\rm POM}S_{\rm POM} + R_{\rm CaCO_3}S_{\rm CaCO_3} + R_{\rm Opal}S_{\rm Opal}) \\
\frac{\partial\{\phi C_{\rm PO4}\}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial z}\Bigl\{\phi D_E\frac{\partial C_{\rm PO4}}{\partial z}\Bigr\} + \mathcal{R}_{PO_4}/\mathcal{R}_C\cdot(1-\phi)R_{\rm POM}S_{\rm POM} \\
\frac{\partial\{\phi C_{\rm DIC}\}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial z}\Bigl\{\phi D_E\frac{\partial C_{\rm DIC}}{\partial z}\Bigr\} + (1-\phi)R_{\rm POM}S_{\rm POM} + (1-\phi)R_{\rm CaCO_3}S_{\rm CaCO_3} \\
\frac{\partial\{\phi C_{\rm Alk}\}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial z}\Bigl\{\phi D_E\frac{\partial C_{\rm Alk}}{\partial z}\Bigr\} - (1-\phi)R_{\rm POM}S_{\rm POM} + 2\cdot(1-\phi)R_{\rm CaCO_3}S_{\rm CaCO_3} \\
\frac{\partial\{\phi C_{\rm O2}\}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial z}\Bigl\{\phi D_E\frac{\partial C_{\rm O2}}{\partial z}\Bigr\} - \mathcal{R}_{O_2}/\mathcal{R}_C\cdot(1-\phi)R_{\rm POM}S_{\rm POM} \\
\frac{\partial\{\phi C_{\rm Si(OH)4}\}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial z}\Bigl\{\phi D_E\frac{\partial C_{\rm Si(OH)4}}{\partial z}\Bigr\} + (1-\phi)R_{\rm Opal}S_{\rm Opal}
\end{aligned}
$$

である。

$D_B$ は、mixing coffirent of bioturbation で、その分布は、

$$D_B(z) = \frac{D_B^0}{1+\exp\{2(z-z_B)\}} \quad \bigl(D_B^0 = 0.3\ \mathrm{cm^2/yr},\ z_B = 10\ \mathrm{cm}\bigr)$$

とする (*Berner*, 1980)。

$D_E$ は effective molecular diffusivity である。*Hensen et al.* (1998) および *Ridgwell et al.* (2002) において、その分布は、

$$D_E = \phi^{n-1}\cdot D_{SW}$$

であり、$D_{SW} = 4.59\times10^{-6}\ \mathrm{cm^2/s},\ n = 2.5$ である。また、*Archer et al.* (2002) では、$D_E = D_c/F$ の形で与えている。$D_c$ はそれぞれの溶存物質の分子拡散係数で下の表に示す。$F$ は formation factor である。

$$F = \frac{1}{\phi^m}$$

で決定され、*Archer et al.* (2002) では、$m = 3$ を用いている (*Ullman and Aller*, 1982)。本研究では、後者の形を選ぶ。

### 2.1.1 境界条件

$$
\begin{aligned}
(1-\phi)w|_{z=0} &= \text{(total) sedimentation rate} \\
(1-\phi)wS_{\mathrm{Clay}}|_{z=0} &= F_{\mathrm{Clay}}\ (\mathrm{g/m^2\cdot m/yr}) \\
(1-\phi)wS|_{z=0} &= F\ (\mathrm{POM, CaCO_3, Opal})\ (\mathrm{mmol/m^2\cdot m/yr}) \\
C\Big|_{z=0} &= C_W\ (\mathrm{PO_4, DIC, Alk, O_2, Si(OH)_4})\ (\mathrm{mmol/m^2\cdot m/yr}) \\
\left.\frac{\partial C}{\partial z}\right|_{z=z_{\mathrm{Bottom}}} &= 0\ (\mathrm{PO_4, DIC, Alk, O_2, Si(OH)_4})
\end{aligned}
$$

である。ここで、$C_W(c)$ は海底におけるそれぞれの溶存物質の濃度である。

$z = z_{\mathrm{Bottom}}$ において、$w < 0$ ならば、

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{\partial S_{\mathrm{Clay}}}{\partial z}\right|_{z=z_{\mathrm{Bottom}}} &= 0 \\
S_{\mathrm{POM}}\Big|_{z=z_{\mathrm{Bottom}}} &= 0 \\
S_{\mathrm{CaCO_3}}\Big|_{z=z_{\mathrm{Bottom}}} &= 0 \\
S_{\mathrm{Opal}}\Big|_{z=z_{\mathrm{Bottom}}} &= 0
\end{aligned}
$$

とする。つまり、$z > z_{\mathrm{Bottom}}$ には、clay のみが存在すると仮定する。

### 2.1.2 Dissolution terms

$R_{\mathrm{Opal}}$ は Opal dissolution rate ($\mu$mol cm$^{-2}$ s$^{-1}$) で、簡単化して、

$$
R_{\mathrm{Opal}} = \begin{cases} \eta_{1(z)}^{\mathrm{Opal}}\eta_{2(z)}^{\mathrm{Opal}}k_0u_{(z)}^{\mathrm{Opal}} & ([\mathrm{Si(OH)_4}] < [\mathrm{Si(OH)_4}]^{\mathrm{sat}}) \\ 0 & ([\mathrm{Si(OH)_4}] > [\mathrm{Si(OH)_4}]^{\mathrm{sat}}) \end{cases}
$$

と与える。あるいは、*Archer et al.* (1993) より、

$$
R_{\mathrm{Opal}} = \begin{cases} r_{\mathrm{Opal}}\cdot\Big([\mathrm{Si(OH)_4}]^{\mathrm{sat}} - [\mathrm{Si(OH)_4}]\Big) & \big([\mathrm{Si(OH)_4}] < [\mathrm{Si(OH)_4}]^{\mathrm{sat}}\big) \\ 0 & \big([\mathrm{Si(OH)_4}] = [\mathrm{Si(OH)_4}]^{\mathrm{sat}}\big) \end{cases}
$$

と与える。$r_{\mathrm{Opal}} = 5.0 \times 10^{-6}\ \mathrm{cm^3 mol^{-1} s^{-1}}$ である。$[\mathrm{Si(OH)_4}]^{\mathrm{sat}}$ は Al の存在を考慮して、

$$\gamma_{\mathrm{Al}} = \begin{cases} 0.2 & \dfrac{P^{\mathrm{Detrial}}}{P^{\mathrm{Opal}}} > 15 \\ 1.0 - \left(0.045 \dfrac{P^{\mathrm{Detrial}}}{P^{\mathrm{Opal}}}\right)^{0.58} & \dfrac{P^{\mathrm{Detrial}}}{P^{\mathrm{Opal}}} \leq 15 \end{cases}$$

を用いて、

$$[\mathrm{Si(OH)_4}]^{\mathrm{sat}}(z) = \gamma_{\mathrm{Al}} 10^{\left(6.44 - \frac{968}{T(z)}\right)}$$

である。

$R_{\mathrm{POM}}$ は POM dissolution rate ($\mu$mol cm$^{-2}$ s$^{-1}$) で、簡単化して、

$$R_{\mathrm{POM}} = \begin{cases} k_{\mathrm{OX}} & (C_{\mathrm{O_2}} > 0) \\ k_{\mathrm{AX}} & (C_{\mathrm{O_2}} = 0) \end{cases}$$

と与える。$k_{\mathrm{OX}} = 2 \times 10^{-9}\ \mathrm{s^{-1}}$ (*Archer*, 1991), $k_{\mathrm{AX}} = 7.9 \times 10^{-11}\ \mathrm{s^{-1}}$ (*Berner*, 1980) である (*Chikamoto et al.*, 2009)。

$R_{\mathrm{CaCO_3}}$ は CaCO3 dissolution rate ($\mu$mol/cm$^2 \cdot 1$/s) で、簡単化して、

$$R_{\mathrm{CaCO_3}} = \begin{cases} r_{\mathrm{CaCO_3}} \cdot \left(\dfrac{[\mathrm{CO_3^{2-}}]^{\mathrm{sat}} - [\mathrm{CO_3^{2-}}]}{[\mathrm{CO_3^{2-}}]^{\mathrm{sat}}}\right)^n & \left([\mathrm{CO_3^{2-}}] < [\mathrm{CO_3^{2-}}]^{\mathrm{sat}}\right) \\ 0 & \left([\mathrm{CO_3^{2-}}] = [\mathrm{CO_3^{2-}}]^{\mathrm{sat}}\right) \end{cases}$$

と与える。$r_{\mathrm{CaCO_3}} = 1.0\ \mathrm{day^{-1}}$ (*Archer*, 1991) で、$n = 4.5$ (*Keir*, 1980) である (*Chikamoto et al.*, 2009)。$[\mathrm{CO_3^{2-}}]$ は DIC, Alk から計算する。

パラメタ設定は、以下の文献を参照している。

Table 2.1: モデル中のパラメタとリファレンス

| Symbol | Parameter | Value | Reference |
|---|---|---|---|
| $\rho$ | Density of solid sediment components | 2.6 g cm$^{-3}$ | (*Heinze*, 1999) |
| $M_{\mathrm{POM}}$ | Molar weight of POM | 32.74 g mol$^{-1}$ | (*Heinze*, 1999) |
| $M_{\mathrm{CaCO_3}}$ | Molar weight of $CaCO_3$ | 100.0 g mol$^{-1}$ | (*Heinze*, 1999) |
| $M_{\mathrm{Opal}}$ | Molar weight of Opal | 67.2 g mol$^{-1}$ | (*Heinze*, 1999) |
| | for porewater silicic acid | | |
| $\phi\big\vert_{z=0}$ | Porosity ($z = 0$) | 0.9 | (*Berner*, 1980) |
| $z_0$ | Porosity e-folding depth | 182.3 cm | (*Berner*, 1980) |
| $D_B\big\vert_{z=0}$ | Bioturbation diffusion coefficient ($z = 0$) | $3 \times 10^{-1}$ cm$^2$ yr$^{-1}$ | (*Berner*, 1980) |
| $z_B$ | Bioturbation diffusion e-folding depth | 10.0 cm | (*Berner*, 1980) |
| $D_c^{\mathrm{PO_4}}$ | Pore water diffusion coefficient | $5.00 \times 10^{-10}$ cm$^2$ s$^{-1}$ | (*Archer et al.*, 2002) |
| $D_c^{\mathrm{DIC}}$ | Pore water diffusion coefficient | $6.40 \times 10^{-10}$ cm$^2$ s$^{-1}$ | (*Archer et al.*, 2002) |
| $D_c^{\mathrm{Alk}}$ | Pore water diffusion coefficient | $6.40 \times 10^{-10}$ cm$^2$ s$^{-1}$ | (*Archer et al.*, 2002) |
| $D_c^{\mathrm{O_2}}$ | Pore water diffusion coefficient | $1.20 \times 10^{-9}$ cm$^2$ s$^{-1}$ | (*Archer et al.*, 2002) |
| $D_c^{\mathrm{Si(OH)_4}}$ | Pore water diffusion coefficient | $5.00 \times 10^{-10}$ cm$^2$ s$^{-1}$ | (*Archer et al.*, 2002) |
| $D_{SW}$ | Pore water diffusion coefficient | $4.59 \times 10^{-6}$ cm$^2$ s$^{-1}$ | (*Ridgwell et al.*, 2002) |
| $N$ | Pore water diffusion coefficient | 2.5 | (*Ridgwell et al.*, 2002) |
| $r_{\mathrm{Opal}}$ | Rate constant for Opal redissolution | $5.0 \times 10^{-6}$ cm$^3$mol$^{-1}$s$^{-1}$ | (*Archer et al.*, 1993) |
| $r_{\mathrm{POM}}$ | Rate constant for POM redissolution | $2.0 \times 10^{-9}$ s$^{-1}$ | (*Archer*, 1991) |
| $r_{\mathrm{POM}}$ | Rate constant for POM redissolution | $7.9 \times 10^{-11}$ s$^{-1}$ | (*Berner*, 1980) |
| $r_{\mathrm{CaCO_3}}$ | Rate constant for $CaCO_3$ redissolution | 1.0 day$^{-1}$ | (*Archer*, 1991) |
| $\mathcal{R}_{\mathrm{PO_4}}$ | Redfield coefficient for phosphate | 1 | (*Anderson and Sarmiento*, 1995) |
| $\mathcal{R}_{\mathrm{O_2}}$ | Redfield coefficient for oxygen | 170 | (*Anderson and Sarmiento*, 1995) |
| $\mathcal{R}_{\mathrm{C}}$ | Redfield coefficient for carbon | 16 | (*Anderson and Sarmiento*, 1995) |

## 2.2 差分化

粒子トレーサーに関しては, 生物擾乱による拡散項を陰的に解く. 移流項, 溶解項は, 陽的に解く. 溶存トレーサーに関しては, 分子拡散による拡散項を陰的に解く. 溶解項は, 陽的に解く. オパールの系に関しては, まずケイ酸について溶解項も陰的に解く計算を実施し, そこから得られる n+1 ステップの溶解項を用いてオパールの計算を行う.

POM のフラックスが大きな場所では, 堆積速度とカップルした ”振動 ”が見られるため, 1 ステップ目の計算で得られたトレーサーの濃度を用いて, 溶解項と堆

積速度を再計算し, 改めて 2 ステップ目で時間発展した後のトレーサー濃度を算出する.

**Particles**

解くべき式は、

$$\frac{\partial}{\partial t}\{(1-\phi)S\} = \frac{\partial}{\partial z}\left\{(1-\phi)wS\right\} + \frac{\partial}{\partial z}\left\{(1-\phi)D\frac{\partial S}{\partial z}\right\} - DIS$$

である。

まず移流項を QUICKEST を用いて差分化し、各層においてフラックスを求める。

$$\frac{(1-\phi_k)(S_k^{n+1}-S_k^n)}{\Delta t} = \frac{(1-\phi_{k-1/2})w_{k-1/2}S_{k-1/2}^n - (1-\phi_{k+1/2})w_{k+1/2}S_{k+1/2}^n}{\Delta z_k} + \alpha$$

であり、

$$S_{k-1/2}^n = c_0 - c_1\frac{w\Delta t}{2} + c_2\left(\frac{w^2\Delta t^2}{3} - \frac{\Delta z^2}{12}\right)$$

ここで、$c_0, c_1, c_2$ について、

$$c_0 = \frac{\Delta z_k \times S_{k-1}^n + \Delta z_{k-1}\times S_k^n}{2\times\Delta_{k-1/2}} - \frac{\Delta z_{k-1}\times\Delta z_k}{4}\times c_2$$

$$c_1 = \frac{S_k^n - S_{k-1}^n}{\Delta z_{k-1/2}} + \frac{\Delta z_{k-1}-\Delta z_k}{2}\times c_2$$

$$c_2 = \frac{1}{\Delta z_{k-3/2}+\Delta z_{k-1/2}}\times\left\{\frac{S_{k-2}^n - S_{k-1}^n}{\Delta z_{k-3/2}} - \frac{S_{k-1}^n - S_k^n}{\Delta z_{k-1/2}}\right\} \qquad (w_{k-1/2}>0)$$

$$c_2 = \frac{1}{\Delta z_{k-1/2}+\Delta z_{k+1/2}}\times\left\{\frac{S_{k-1}^n - S_k^n}{\Delta z_{k-1/2}} - \frac{S_k^n - S_{k+1}^n}{\Delta z_{k+1/2}}\right\} \qquad (w_{k-1/2}<0)$$

である。ここで、$S_{k-1/2}^{n+1}$ が $S_{k-1}^n, S_k^n$ よりも小さくなる、あるいは大きくなる場合があるため、フラックスリミッターをかける。$w_{k-1/2}>0$ のとき、

$$\delta = S_k^n - S_{k-2}^n,$$

$$\gamma = \frac{S_k^n - S_{k-1}^n}{\Delta z_{k-1/2}} - \frac{S_{k-1}^n - S_{k-2}^n}{\Delta z_{k-3/2}}$$

であり、リミッターの基準は、

$$S_{k-1/2}^{n+1} = S_{k-1}^n \quad (|\gamma\Delta z_{k-1}| > |\delta|)$$

$$S_{k-1}^n \le S_{k-1/2}^{n+1} \le \min\left(S_{k-2}^n + \frac{S_{k-1}^n - S_{k-2}^n}{w_{k-1/2}}\Delta z_{k-1/2}, S_k^n\right) \quad (|\gamma\Delta z_{k-1}| < |\delta|, \delta>0)$$

$$\max\left(S_{k-2}^n + \frac{S_{k-1}^n - S_{k-2}^n}{w_{k-1/2}}\Delta z_{k-1/2}, S_k^n\right) \le S_{k-1/2}^{n+1} \le S_{k-1}^n \quad (|\gamma\Delta z_{k-1}| < |\delta|, \delta<0)$$

である。

また、$w_{k-1/2} < 0$ のとき、

$$
\begin{aligned}
\delta &= S_{k-1}^n - S_{k+1}^n, \\
\gamma &= \frac{S_{k-1}^n - S_k^n}{\Delta z_{k-1/2}} - \frac{S_k^n - S_{k+1}^n}{\Delta z_{k+1/2}}
\end{aligned}
$$

であり、リミッターの基準は、

$$
\begin{aligned}
&S_{k-1/2}^{n+1} = S_k^n \quad (|\gamma \Delta z_k| > |\delta|) \\
&S_k^n \leq S_{k-1/2}^{n+1} \leq \min\left( S_{k+1}^n + \frac{S_k^n - S_{k+1}^n}{|w_{k-1/2}|}\Delta z_{k-1/2}, S_{k-1}^n \right) \quad (|\gamma \Delta z_k| < |\delta|, \delta > 0) \\
&\max\left( S_{k+1}^n + \frac{S_k^n - S_{k+1}^n}{|w_{k-1/2}|}\Delta z_{k-1/2}, S_{k-1}^n \right) \leq S_{k-1/2}^{n+1} \leq S_k^n \quad (|\gamma \Delta z_k| < |\delta|, \delta < 0)
\end{aligned}
$$

である。移流フラックスを以下のようにおく。

$$
F_k^{adv} = (1 - \phi_k) w_k S_k
$$

クランク・ニコルソン法 (Crank-Nicolson method) で差分化すると、

$$
\begin{aligned}
&\frac{(1-\phi_k)(S_k^{n+1} - S_k^n)}{\Delta t} \\
=&\frac{1}{\Delta z_k}\left\{ \left[ (1-\phi_{k-1/2}) D_{k-1/2} \left.\frac{\partial S}{\partial z}\right|_{k-1/2} \right] - \left[ (1-\phi_{k+1/2}) D_{k+1/2} \left.\frac{\partial S}{\partial z}\right|_{k+1/2} \right] \right\} \\
&- (1-\phi_k) R_k^n S_k^n + \frac{F_{k-1/2}^{adv} - F_{k+1/2}^{adv}}{\Delta z_k} \\
=&\frac{1}{\Delta z_k}\left\{ \left[ (1-\phi_{k-1/2}) D_{k-1/2} \frac{S_{k-1} - S_k}{\Delta z_{k-1/2}} \right] - \left[ (1-\phi_{k+1/2}) D_{k+1/2} \frac{S_k - S_{k+1}}{\Delta z_{k+1/2}} \right] \right\} \\
&- (1-\phi_k) R_k^n S_k^n + \frac{F_{k-1/2}^{adv} - F_{k+1/2}^{adv}}{\Delta z_k}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{(1-\phi_k)}{\Delta t}\{S_k^{n+1}-S_k^n\} \\
&\quad = \left(\frac{(1-\phi_{k-1/2})D_{k-1/2}}{\Delta z_k \Delta z_{k-1/2}}\right)S_{k-1} - \left(\frac{(1-\phi_{k-1/2})D_{k-1/2}}{\Delta z_k \Delta z_{k-1/2}}\right)S_k \\
&\quad - \left(\frac{(1-\phi_{k+1/2})D_{k+1/2}}{\Delta z_k \Delta z_{k+1/2}}\right)S_k + \left(\frac{(1-\phi_{k+1/2})D_{k+1/2}}{\Delta z_k \Delta z_{k+1/2}}\right)S_{k+1} \\
&\quad - (1-\phi_k)R_k^n S_k^n + \frac{F_{k-1/2}^{adv} - F_{k+1/2}^{adv}}{\Delta z_k} \\
&\quad = \left(\frac{(1-\phi_{k-1/2})D_{k-1/2}}{\Delta z_k \Delta z_{k-1/2}}\right)\frac{S_{k-1}^n + S_{k-1}^{n+1}}{2} - \left(\frac{(1-\phi_{k-1/2})D_{k-1/2}}{\Delta z_k \Delta z_{k-1/2}}\right)\frac{S_k^n + S_k^{n+1}}{2} \\
&\quad - \left(\frac{(1-\phi_{k+1/2})D_{k+1/2}}{\Delta z_k \Delta z_{k+1/2}}\right)\frac{S_k^n + S_k^{n+1}}{2} + \left(\frac{(1-\phi_{k+1/2})D_{k+1/2}}{\Delta z_k \Delta z_{k+1/2}}\right)\frac{S_{k+1}^n + S_{k+1}^{n+1}}{2} \\
&\quad - (1-\phi_k)R_k^n S_k^n + \frac{F_{k-1/2}^{adv} - F_{k+1/2}^{adv}}{\Delta z_k} \\
&\frac{(1-\phi_k)}{\Delta t}\{S_k^{n+1}-S_k^n\} \\
&\quad = \left(\frac{(1-\phi_{k-1/2})D_{k-1/2}}{2\Delta z_k \Delta z_{k-1/2}}\right)(S_{k-1}^n + S_{k-1}^{n+1}) - \left(\frac{(1-\phi_{k-1/2})D_{k-1/2}}{2\Delta z_k \Delta z_{k-1/2}}\right)(S_k^n + S_k^{n+1}) \\
&\quad - \left(\frac{(1-\phi_{k+1/2})D_{k+1/2}}{2\Delta z_k \Delta z_{k+1/2}}\right)(S_k^n + S_k^{n+1}) + \left(\frac{(1-\phi_{k+1/2})D_{k+1/2}}{2\Delta z_k \Delta z_{k+1/2}}\right)(S_{k+1}^n + S_{k+1}^{n+1}) \\
&\quad - (1-\phi_k)R_k^n S_k^n + \frac{F_{k-1/2}^{adv} - F_{k+1/2}^{adv}}{\Delta z_k}
\end{aligned}
$$

となる。ここで、

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \frac{(1-\phi_k)}{\Delta t} \\
\beta &= \frac{(1-\phi_{k-1/2})D_{k-1/2}}{2\Delta z_k \Delta z_{k-1/2}} \\
\gamma &= \frac{(1-\phi_{k+1/2})D_{k+1/2}}{2\Delta z_k \Delta z_{k+1/2}}
\end{aligned}
$$

とおくと、

$$
\begin{aligned}
&-\beta S_{k-1}^{n+1} + (\alpha+\beta+\gamma)S_k^{n+1} - \gamma S_{k+1}^{n+1} \\
&\quad = +\beta S_{k-1}^n + (\alpha-\beta-\gamma)S_k^n + \gamma S_{k+1}^n - (1-\phi_k)R_k^n S_k^n + \frac{F_{k-1/2}^{adv} - F_{k+1/2}^{adv}}{\Delta z_k}
\end{aligned}
$$

となる。よって、

$$\begin{bmatrix} \alpha+\beta+\gamma & -\gamma & & & & \\ -\beta & \alpha+\beta+\gamma & -\gamma & & & \\ & & \cdots & & & \\ & & & \cdots & & \\ & & & -\beta & \alpha+\beta+\gamma & -\gamma \\ & & & & -\beta & \alpha+\beta+\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1^{n+1} \\ S_2^{n+1} \\ \cdots \\ \cdots \\ S_{N-1}^{n+1} \\ S_N^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \chi_1^n \\ \chi_2^n \\ \cdots \\ \cdots \\ \chi_{N-1}^n \\ \chi_N^n \end{bmatrix}$$

であり、ここで、

$$\chi_k^n = +\beta S_{k-1}^n + (\alpha-\beta-\gamma)S_k^n + \gamma S_{k+1}^n - (1-\phi_k)R_k^n S_k^n + \frac{F_{k-1/2}^{adv} - F_{k+1/2}^{adv}}{\Delta z_k}$$

である。

また、陰解法で差分化すると、

$$\begin{aligned} &\frac{(1-\phi_k)(S_k^{n+1}-S_k^n)}{\Delta t} \\ =&\frac{1}{\Delta z_k}\left\{\left[(1-\phi_{k-1/2})D_{k-1/2}\frac{\partial S}{\partial z}\bigg|_{k-1/2}\right] - \left[(1-\phi_{k+1/2})D_{k+1/2}\frac{\partial S}{\partial z}\bigg|_{k+1/2}\right]\right\} \\ &-(1-\phi_k)R_k^n S_k^n + (F_{k-1/2}^{adv} - F_{k+1/2}^{adv}) \\ =&\frac{1}{\Delta z_k}\left\{\left[(1-\phi_{k-1/2})D_{k-1/2}\frac{S_{k-1}-S_k}{\Delta z_{k-1/2}}\right] - \left[(1-\phi_{k+1/2})D_{k+1/2}\frac{S_k-S_{k+1}}{\Delta z_{k+1/2}}\right]\right\} \\ &-(1-\phi_k)R_k^n S_k^n + \frac{F_{k-1/2}^{adv} - F_{k+1/2}^{adv}}{\Delta z_k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{(1-\phi_k)}{\Delta t}\{S_k^{n+1}-S_k^n\} \\ &= \left(\frac{(1-\phi_{k-1/2})D_{k-1/2}}{\Delta z_k \Delta z_{k-1/2}}\right)S_{k-1} - \left(\frac{(1-\phi_{k-1/2})D_{k-1/2}}{\Delta z_k \Delta z_{k-1/2}}\right)S_k \\ &- \left(\frac{(1-\phi_{k+1/2})D_{k+1/2}}{\Delta z_k \Delta z_{k+1/2}}\right)S_k + \left(\frac{(1-\phi_{k+1/2})D_{k+1/2}}{\Delta z_k \Delta z_{k+1/2}}\right)S_{k+1} \\ &-(1-\phi_k)R_k^n S_k^n + \frac{F_{k-1/2}^{adv} - F_{k+1/2}^{adv}}{\Delta z_k} \\ &= \left(\frac{(1-\phi_{k-1/2})D_{k-1/2}}{\Delta z_k \Delta z_{k-1/2}}\right)S_{k-1}^{n+1} - \left(\frac{(1-\phi_{k-1/2})D_{k-1/2}}{\Delta z_k \Delta z_{k-1/2}}\right)S_k^{n+1} \\ &- \left(\frac{(1-\phi_{k+1/2})D_{k+1/2}}{\Delta z_k \Delta z_{k+1/2}}\right)S_k^{n+1} + \left(\frac{(1-\phi_{k+1/2})D_{k+1/2}}{\Delta z_k \Delta z_{k+1/2}}\right)S_{k+1}^{n+1} \\ &-(1-\phi_k)R_k^n S_k^n + \frac{F_{k-1/2}^{adv} - F_{k+1/2}^{adv}}{\Delta z_k} \end{aligned}$$

$$\alpha = \frac{(1-\phi_k)}{\Delta t}$$
$$\beta = \frac{(1-\phi_{k-1/2})D_{k-1/2}}{\Delta z_k \Delta z_{k-1/2}}$$
$$\gamma = \frac{(1-\phi_{k+1/2})D_{k+1/2}}{\Delta z_k \Delta z_{k+1/2}}$$

とおくと、

$$\begin{aligned} &-\beta S_{k-1}^{n+1} + (\alpha+\beta+\gamma)S_k^{n+1} - \gamma S_{k+1}^{n+1} \\ &\quad = \alpha S_k^n - (1-\phi_k)R_k^n S_k^n + \frac{F_{k-1/2}^{adv} - F_{k+1/2}^{adv}}{\Delta z_k} \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{bmatrix} \alpha+\beta+\gamma & -\gamma & & & & \\ -\beta & \alpha+\beta+\gamma & -\gamma & & & \\ & & \cdots & & & \\ & & & \cdots & & \\ & & & -\beta & \alpha+\beta+\gamma & -\gamma \\ & & & & -\beta & \alpha+\beta+\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1^{n+1} \\ S_2^{n+1} \\ \cdots \\ \cdots \\ S_{N-1}^{n+1} \\ S_N^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \chi_1^n \\ \chi_2^n \\ \cdots \\ \cdots \\ \chi_{N-1}^n \\ \chi_N^n \end{bmatrix}$$

であり、ここで、

$$\chi_k^n = \alpha S_k^n - (1-\phi_k)R_k^n S_k^n + \frac{F_{k-1/2}^{adv} - F_{k+1/2}^{adv}}{\Delta z_k}$$

である。

### Dissolved material

解くべき式は、

$$\frac{\partial}{\partial t}\{\phi C\} = \frac{\partial}{\partial z}\left\{\phi D \frac{\partial C}{\partial z}\right\} + DIS$$

である。空間差分をクランク・ニコルソン法 (Crank-Nicolson method) で差分化すると、

$$\begin{aligned} \frac{\phi_k(C_k^{n+1} - C_k^n)}{\Delta t} &= \frac{1}{\Delta z_k}\left\{\left[\phi_{k-1/2}D_{k-1/2}\left.\frac{\partial C}{\partial z}\right|_{k-1/2}\right] - \left[\phi_{k+1/2}D_{k+1/2}\left.\frac{\partial C}{\partial z}\right|_{k+1/2}\right]\right\} + DIS_k^n \\ &= \frac{1}{\Delta z_k}\left\{\left[\phi_{k-1/2}D_{k-1/2}\frac{C_{k-1} - C_k}{\Delta z_{k-1/2}}\right] - \left[\phi_{k+1/2}D_{k+1/2}\frac{C_k - C_{k+1}}{\Delta z_{k+1/2}}\right]\right\} + DIS_k^n \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\phi_k}{\Delta t}\{C_k^{n+1}-C_k^n\} &= \left(\frac{\phi_{k-1/2}D_{k-1/2}}{\Delta z_k \Delta z_{k-1/2}}\right)C_{k-1} - \left(\frac{\phi_{k-1/2}D_{k-1/2}}{\Delta z_k \Delta z_{k-1/2}}\right)C_k \\
&- \left(\frac{\phi_{k+1/2}D_{k+1/2}}{\Delta z_k \Delta z_{k+1/2}}\right)C_k + \left(\frac{\phi_{k+1/2}D_{k+1/2}}{\Delta z_k \Delta z_{k+1/2}}\right)C_{k+1} \\
&+ DIS_k^n \\
&= \left(\frac{\phi_{k-1/2}D_{k-1/2}}{\Delta z_k \Delta z_{k-1/2}}\right)\frac{C_{k-1}^n + C_{k-1}^{n+1}}{2} - \left(\frac{\phi_{k-1/2}D_{k-1/2}}{\Delta z_k \Delta z_{k-1/2}}\right)\frac{C_k^n + C_k^{n+1}}{2} \\
&- \left(\frac{\phi_{k+1/2}D_{k+1/2}}{\Delta z_k \Delta z_{k+1/2}}\right)\frac{C_k^n + C_k^{n+1}}{2} + \left(\frac{\phi_{k+1/2}D_{k+1/2}}{\Delta z_k \Delta z_{k+1/2}}\right)\frac{C_{k+1}^n + C_{k+1}^{n+1}}{2} \\
&+ DIS_k^n \\
\frac{\phi_k}{\Delta t}\{C_k^{n+1}-C_k^n\} &= \left(\frac{\phi_{k-1/2}D_{k-1/2}}{2\Delta z_k \Delta z_{k-1/2}}\right)(C_{k-1}^n + C_{k-1}^{n+1}) - \left(\frac{\phi_{k-1/2}D_{k-1/2}}{2\Delta z_k \Delta z_{k-1/2}}\right)(C_k^n + C_k^{n+1}) \\
&- \left(\frac{\phi_{k+1/2}D_{k+1/2}}{2\Delta z_k \Delta z_{k+1/2}}\right)(C_k^n + C_k^{n+1}) + \left(\frac{\phi_{k+1/2}D_{k+1/2}}{2\Delta z_k \Delta z_{k+1/2}}\right)(C_{k+1}^n + C_{k+1}^{n+1}) \\
&+ DIS_k^n
\end{aligned}
$$

となる。ここで、

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \frac{\phi_k}{\Delta t} \\
\beta &= \frac{\phi_{k-1/2}D_{k-1/2}}{2\Delta z_k \Delta z_{k-1/2}} \\
\gamma &= \frac{\phi_{k+1/2}D_{k+1/2}}{2\Delta z_k \Delta z_{k+1/2}}
\end{aligned}
$$

とおくと、

$$
-\beta C_{k-1}^{n+1} + (\alpha+\beta+\gamma)C_k^{n+1} - \gamma C_{k+1}^{n+1} = +\beta C_{k-1}^n + (\alpha-\beta-\gamma)C_k^n + \gamma C_{k+1}^n + DIS_k^n
$$

となる。よって、

$$
\begin{bmatrix}
\alpha+\beta+\gamma & -\gamma & & & & \\
-\beta & \alpha+\beta+\gamma & -\gamma & & & \\
 & & \cdots & & & \\
 & & & \cdots & & \\
 & & & -\beta & \alpha+\beta+\gamma & -\gamma \\
 & & & & -\beta & \alpha+\beta+\gamma
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
C_1^{n+1} \\ C_2^{n+1} \\ \cdots \\ \cdots \\ C_{N-1}^{n+1} \\ C_N^{n+1}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\chi_1^n \\ \chi_2^n \\ \cdots \\ \cdots \\ \chi_{N-1}^n \\ \chi_N^n
\end{bmatrix}
$$

であり、ここで、

$$
\chi_k^n = +\beta C_{k-1}^n + (\alpha-\beta-\gamma)C_k^n + \gamma C_{k+1}^n + DIS_k^n
$$

である。

　また、陰解法で差分化すると、

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \frac{\phi_k}{\Delta t} \\
\beta &= \frac{\phi_{k-1/2} D_{k-1/2}}{\Delta z_k \Delta z_{k-1/2}} \\
\gamma &= \frac{\phi_{k+1/2} D_{k+1/2}}{\Delta z_k \Delta z_{k+1/2}}
\end{aligned}
$$

とおくと、

$$-\beta C_{k-1}^{n+1} + (\alpha+\beta+\gamma) C_k^{n+1} - \gamma C_{k+1}^{n+1} = \alpha C_k^n + DIS_k^n$$

となる。よって、

$$
\begin{bmatrix}
\alpha+\beta+\gamma & -\gamma & & & & \\
-\beta & \alpha+\beta+\gamma & -\gamma & & & \\
 & & \cdots & & & \\
 & & & \cdots & & \\
 & & & -\beta & \alpha+\beta+\gamma & -\gamma \\
 & & & & -\beta & \alpha+\beta+\gamma
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
C_1^{n+1} \\ C_2^{n+1} \\ \cdots \\ \cdots \\ C_{N-1}^{n+1} \\ C_N^{n+1}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\chi_1^n \\ \chi_2^n \\ \cdots \\ \cdots \\ \chi_{N-1}^n \\ \chi_N^n
\end{bmatrix}
$$

であり、ここで、

$$\chi_k^n = \alpha C_k^n + DIS_k^n$$

である。

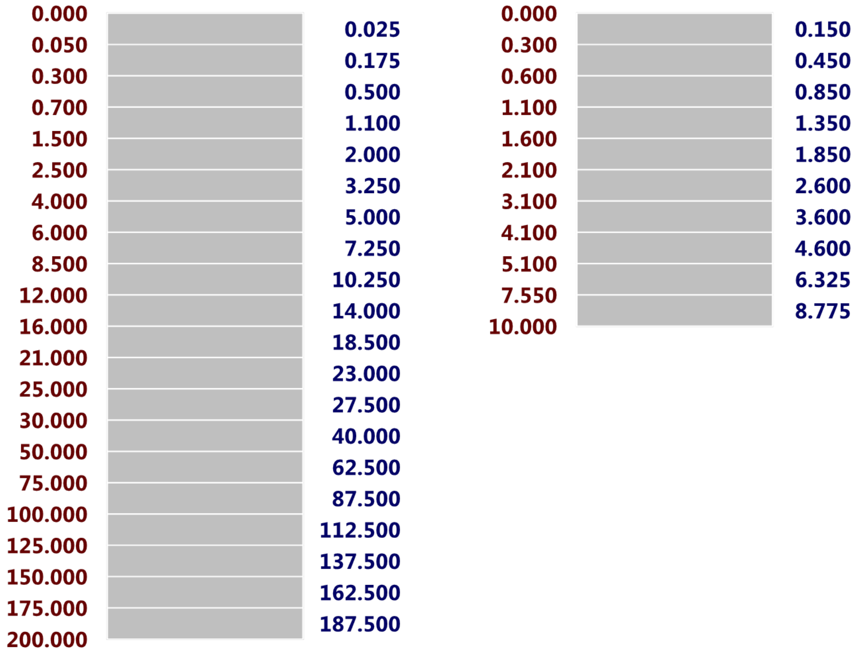


Figure 2.2.1: *Archer* (2003) および *Heinze* (1999) のグリッド配置。単位は (cm) である。

# 参考文献

Anderson, L. A. and J. L. Sarmiento (1995), Global ocean phosphate and oxygen simulations, *Glob. Biogeochem. Cycles*, *9*(4), 621–636, doi: 10.1029/95GB01902

Archer, D. E. (1991), Modeling the calcite lysocline, *J. Geophys. Res.*, *96*(C9), 17037, doi: 10.1029/91JC01812

Archer, D., M. Lyle, K. Rodgers, and P. Froelich (1993), What Controls Opal Preservation in Tropical Deep-Sea Sediments?, *Paleoceanography*, *8*(1), 7–21, doi: 10.1029/92PA02803

Archer, D. E., J. L. Morford, and S. R. Emerson (2002), A model of suboxic sedimentary diagenesis suitable for automatic tuning and gridded global domains, *Glob. Biogeochem. Cycles*, *16*(1), 1017, doi: 10.1029/2000GB001288

Archer, D. E., P. A. Martin, J. Milovich, V. Brovkin, G. -K. Plattner, and C. Ashendel (2003), Model sensitivity in the effect of Antarctic sea ice and stratification on atmospheric $p\mathrm{CO_2}$, *Paleoceanography*, *18*(1), 1012, doi: 10.1029/2002PA000760

Berner, R. A. (1980), Early Diagenesis: A Theoretical Approach, *Princeton University Press*, 241 pp., doi:

Chikamoto, M. O. and Y. Yamanaka (2005), Sedimentary responses to an abrupt change of biogenic silica flux by a sediment odel for long timescale simulations, *J. Oceanogr.*, *61*(4), 733–746, doi: 10.1007/s10872-005-0080-9

Chikamoto, M. O., K. Matsumoto, and Y. Yamanaka (2009), Influence of export rain ratio changes on atmospheric $CO_2$ and sedimentary calcite preservation, *J. Oceanogr.*, *65*(2), 209–221, doi: 10.1007/s10872-009-0020-1

Heinze, C. (1999), A global oceanic sediment model for long-term climate studies, *Glob. Biogeochem. Cycles*, *13*(1), 221–250, doi:10.1029/98GB02812

Hensen, C., H. Landenberger, M. Zabel, and H. D. Schulz (1998), Quantification of diffusive benthic fluxes of nitrate, phosphate, and Si(OH)4 in the southern Atlantic Ocean, *Glob. Biogeochem. Cycles*, *12*(1), 193–210, doi: 10.1029/97GB02731

Keir, R. S. (1980), The dissolution kinetics of biogenic calcium carbonates in seawater, *Geochim Cosmochim. Acta.*, *44*(2), 241–252, doi: 10.1016/0016-7037(80)90135-0

Ridgwell, A. J., A. J. Watson, and D. E. Archer (2002), Modeling the response of the oceanic Si inventory to perturbation, and consequences for atmospheric $CO_2$, *Glob. Biogeochem. Cycles*, *16*(4), 1071, doi: 10.1029/2002GB001877

Ullman, W. J. and R. C. Aller (1982), Diffusion coefficients in nearshore marine sediments, *Limnol. Oceanogr.*, *27*(3), 552–556, doi: 10.4319/lo.1982.27.3.0552