study note: 地球流体力学

2012/04/11

目 次

第1章　流体の運動

1.1　運動の記述

流体は剛体と違って連続体であり, 流れたり変形したりする. 流体の運動を記述するには二つの方法がある.

流体を構成する流体粒子 (fluid particle) が時間が経過するにつれてどのような運動していくのかを追うことにする. まず, 初期時刻 $t = 0$ での位置ベクトル $\boldsymbol{r_0}(x_0, y_0, z_0)$ を目印とする. このとき, 時間が経過した後の速度ベクトル u_1, 加速度ベクトル a_1 は, それぞれ

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{d\boldsymbol{r}_1}{dt}, \quad \boldsymbol{a}_1 = \frac{d\boldsymbol{u}_1}{dt} = \frac{d^2\boldsymbol{r}_1}{dt^2} \tag{1.1}$$

である. ただし, 偏微分の際に r_0 を一定としている. 他の熱力学量 (密度 ρ, 圧力 p, 温度 T) も同様に書ける. このように, 時間変化を流体粒子ごとに記述する方法を, **ラグランジュ的記述**という.

ラグランジュ的記述は質点系の記述の自然な延長であるが, 問題点もある. まず, 時間が経ったときの位置と $\boldsymbol{r}_0$ との対応が複雑になること, そして風船やブイの測器などを除き実際の流体の測定観測でこのような記述をしないということがある.

これに対して, **オイラー的記述**では速度や熱力学量は場所と時刻の独立変数として $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}, t)$, $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}, t)$ のように表す.

オイラー的記述をしたときの自然な時間微分の定義 $\dfrac{\partial Q(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t}$ を**オイラー微分 (Euler derivative)** という. これは場所を一定としたときの時間変化を考えている.

オイラー的記述をしていてもラグランジュ的記述の上での自然な時間変化, つまり流体粒子を決めた時間変化を考察することもよくあり, ラグランジュ的記述を

用いると, $\dfrac{DQ(\boldsymbol{r},t)}{Dt}\left(\dfrac{dQ(\boldsymbol{r},t)}{dt}\right)$ となる. これを**ラグランジュ微分 (Lagrangian derivative)** という (物質微分 (material derivative) ともいう).

これら二つの微分を結びつけると,

$$\frac{DQ}{Dt} = \frac{\partial Q}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)Q \tag{1.2}$$

と書ける. 右辺第二項は移流項である.

1.2 流れ

1.2.1 流線, 流跡線, 流脈

流線 (path line) は, 一つ一つの流体粒子が動いた軌跡である. この流線で表した軌跡に時間は関係が無い.

流跡線 (streak line) は, 空間のある一点に注目し, ある時刻にこの一点を通過する (した) 流体粒子のつくる曲線である. 例として煙突がある.

流脈 (stream line) は, 各点での接線と流れの速度ベクトル $\boldsymbol{u}$ の方向が一致する曲線のことである. つまり,

$$d\boldsymbol{r}/\!/\ \boldsymbol{u}, \quad \frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} \tag{1.3}$$

である.

流れの中に閉曲線 C をとり, C の各点を通る流線軍を考えると筒状の曲面となり, これを流管 (stream tube) という.

定常な場合には流線, 流跡線, 流脈は一致する.

1.2.2 流れの局所的な運動と変形場

流体の運動は場所によって速度が異なることがあり, 回転や変形をする. 速度の場所による変化率は,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

と表せて, $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ と書ける. これを 2 階のテンソルまたは速度勾配テンソル (velocity gradient tensor) という. 速度勾配テンソルを対称成分と反対称成分に分けると,

$$\begin{aligned} e_{ij} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \\ \Omega_{ij} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \end{aligned} \tag{1.5}$$

となる. ここで, $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \boldsymbol{u}$ として $\boldsymbol{\omega}$ を**渦度 (vorticity)** という. Ω_{ij} の成分は渦度になっている. e_{ij} は局所的な変形と関係が深い. e_{ij} の対角成分の和 $\delta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$ は大局的な運動と関係が深い.

渦度は流れを考える上で重要である. 各点での接線が渦度ベクトルの方向であるものを, 渦線 (vortex line) という. 閉曲面 C を考えて, C 上の点を通る渦線の作る面を渦管 (vortex tube) という. つまり,

$$d\boldsymbol{\omega} /\!/ \ \boldsymbol{u}, \quad \frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta} = \frac{dz}{\zeta} \tag{1.6}$$

である.

1.2.3 速度ポテンシャルとベクトルポテンシャル

渦なし流れ (irrotational flow) とは, 全領域で渦度がない流れをいう. 渦なし流れの流れ場 $\boldsymbol{u}$ は速度ポテンシャル ϕ を用いると, $\boldsymbol{u} = \nabla\phi$ で書ける. これは, $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times (\nabla\phi) = 0$ のため渦なしであることは明らかである.

非発散流れとは, 全領域で発散がゼロの流れをいう[*1]. 非発散流れの流れ場 $\boldsymbol{u}$ はベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ を用いて, $\boldsymbol{u} = \nabla \times \boldsymbol{A}$ である. これは, $\delta = \nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) = 0$

[*1] ちなみに非圧縮流体 ($\frac{D\rho}{Dt}$) の連続の式は $\nabla \cdot \boldsymbol{u}$ となる

のため非発散であることは明らかである．ベクトルポテンシャルの任意性が残るが, 普通は $\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$ という付加条件をとることが多い.

一般の流れの流れ場は速度ポテンシャル ϕ とベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ を用いて, $\boldsymbol{u} = \nabla\phi + \nabla \times \boldsymbol{A}$ と表される．流れ場がこのように書けるとすると,

$$
\begin{aligned}
\delta &= \nabla \cdot \boldsymbol{u} = \nabla \cdot (\nabla\phi) + \nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \nabla^2\phi \\
\omega &= \nabla \cdot \boldsymbol{u} = \nabla \times (\nabla\phi) + \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla^2\boldsymbol{A} = -\nabla^2\boldsymbol{A}
\end{aligned}
\tag{1.7}
$$

となる．これらはポアソン方程式でそれぞれ解くことができる.

1.2.4 2 次元の流れ

流れが xy 平面に平行で z に依らないような流れを考える．流れ場が z に依らないので, ϕ も $\boldsymbol{A}$ も z に依らないとする．よって,

$$
\begin{aligned}
\nabla\phi &= \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, 0\right) \\
\nabla \times \boldsymbol{A} &= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) \\
&= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y}, -\frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)
\end{aligned}
\tag{1.8}
$$

となる．$w = 0$ より, $\dfrac{\partial A_y}{\partial x} - \dfrac{\partial A_x}{\partial y}$, また $\nabla \times \boldsymbol{A} = 0$ より, $\dfrac{\partial A_x}{\partial x} + \dfrac{\partial A_y}{\partial y} = 0$ なので, $A_x = A_y = 0$ とする.

2 次元の流れでは, $\boldsymbol{u} = (u, v, 0)$ は,

$$
\boldsymbol{u} = \nabla\phi + \nabla \times \boldsymbol{A} = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, 0\right) + \left(\frac{\partial A_z}{\partial y}, -\frac{\partial A_z}{\partial x}, 0\right) \tag{1.9}
$$

より,

$$
\begin{aligned}
u &= \frac{\partial\phi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial y} \\
v &= \frac{\partial\phi}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial x}
\end{aligned}
\tag{1.10}
$$

となる．ただし, $\psi = -A_z$ とした[*2]．ϕ は 3 次元同様速度ポテンシャルという. 一方, ψ は**流線関数 (stream function)** という.

[*2] これは地衡流の関係により, 北半球で高圧部を右手に見るように符号を調整している.

2 次元の渦なし流れは $\psi = 0$ として, $u = \dfrac{\partial \phi}{\partial x}, v = \dfrac{\partial \phi}{\partial y}$ となる. 2 次元の非発散流れは $\phi = 0$ として, $u = -\dfrac{\partial \psi}{\partial y}, v = \dfrac{\partial \psi}{\partial x}$ となる.

流線関数の意味

2 次元非発散流を考える. 流線関数の値を一定にして微分をとる. つまり, $\psi(x, y) = const.$ である. これより,

$$\begin{aligned} d\psi &= \frac{\partial \psi}{\partial x}dx + \frac{\partial \psi}{\partial y}dy = 0 \\ &= vdx - udy = 0 \\ \therefore \frac{dx}{u} &= \frac{dy}{v} \end{aligned} \tag{1.11}$$

となる.

流線関数を一定に考えると, $d\boldsymbol{r} /\!/ \boldsymbol{u}$ となることを示す.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial s} &= \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \\ &= vn_y + un_x \\ &= \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} \\ &= u_n \end{aligned} \tag{1.12}$$

であるので,

$$\begin{aligned} \psi_B - \psi_A &= \int_A^B d\psi \\ &= \int_A^B \frac{\partial \psi}{\partial s} ds \\ &= \int u_n ds \\ &= Q \ (C \text{ を通る流量}) \end{aligned} \tag{1.13}$$

となる. よって, 流線関数の差はその間を通る流量を示すことがわかる.

第2章　基礎方程式

2.1　様々な力

基本的な力

流体の運動はいくつかの方程式によって支配されているが, ここでは自然に存在する力の性質について議論する. 自然に存在する力は**体積力 (body force)** と**表面力 (surface force)** に分けられる. body force とは, 流体粒子の重心に作用し, 質量に比例する力で, 例として重力がある. surface force は質量に依存しない大きさをもち, 例として圧力がある.

ニュートンの第二法則では, 加速度などの運動量の変化率は物体にかかる力に等しいとある. 気象力学分野でのこの基本的な力は重力, 圧力傾度力, 摩擦力である. 地球という回転座標系で考える場合にはこれに加えて見かけの力である中心力やコリオリ力が加わる.

圧力傾度力

静止した流体では, 隣り合った二つの部分が及ぼし合う力は両者の境界面に垂直であり, この単位面積あたりの力のことを圧力という. 微小な直方体で単位体積あたりの力を考えると, $\left(-\dfrac{\partial p}{\partial x}, -\dfrac{\partial p}{\partial y}, -\dfrac{\partial p}{\partial z},\right) = -\nabla p$ の力を受ける. これを圧力傾度力という. 圧力の大きさではなく, その傾度に比例していることがわかる.

重力

質量 M, m の物体が距離 $r \equiv |\boldsymbol{r}|$ だけ離れているとき, M によって m にかかる力は

$$F_g = -\frac{GMm}{r^2}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right) \tag{2.1}$$

である. G は万有引力定数 $(6.67300 \times 10^{-11}\mathrm{m^3kg^{-1}s^{-2}})$ である. よって, 地球質量を M, 流体粒子の質量を m とすると, 単位質量あたりにかかる力は,

$$\frac{F_g}{m} \equiv g^* = -\frac{GM}{r^2}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right) \tag{2.2}$$

である. 気象力学分野では鉛直座標として, 平均海面からの高さを用いるのが慣例であるので, 地球の半径を a, 平均海面からの高さを z で表すと,

$$g^* = \frac{1}{(1+\frac{z}{a})^2} g_0^* \tag{2.3}$$

となる. ここで, $g_o^* = -\dfrac{GM}{a^2}\left(\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}\right)$ は平均海面上の重力加速度である. $z \ll a$ のとき, $g^* = g_0^*$ となる.

粘性力

粘性力の基本的な概念として, 面積 A の距離 l だけ離れた水平な二枚の板に挟まれた非圧縮流体を考える. 上板のみが x 方向に速度 u_0 の流れの中に置かれているとするならば, 上板に接する力は粘性係数を μ とするならば,

$$F = \frac{\mu A u_0}{l} \tag{2.4}$$

である. 一様流を考えるとき, 深さ δz の流体の水平層は下に接する流体に同じ大きさの力を及ぼさなくてはならない. この力は $\delta u = u_0 \dfrac{\delta z}{l}$ を δz の層を横切る速度シアとすると,

$$F = \mu A \frac{\delta u}{z} \tag{2.5}$$

である. ここで, τ_{zx} を鉛直シアに由来する x 方向の速度成分の応力とすると, 単位面積あたりの粘性力 (**シア応力**) は,

$$\tau_{zx} = \lim_{\delta z \to 0} \mu \frac{\partial u}{\partial z} \tag{2.6}$$

である.

分子の観点から見ると, このシアは分子のランダムな運動によって, 熱などの不規則を解消すように輸送するようにはたらいている. これを**分子拡散**という.

動粘性係数 $\nu = \dfrac{\mu}{\rho}$ を用いると, 3 次元直交座標系における単位質量あたりの摩擦力は,

$$
\begin{aligned}
F_{rx} &= \nu\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right] \\
F_{ry} &= \nu\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right] \\
F_{rz} &= \nu\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right]
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

と表せる.

応力

静止流体では隣り合う流体が及ぼし合う力は面に垂直であるが, 現実の流体では, 運動している流体の間では, 面に対して接線方向への力もはたらく. 一般に面を通して及ぼし合う単位面積あたりの力を応力という.

2.2 運動方程式

ニュートンの運動の第二法則より, 慣性系においては

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = \frac{\boldsymbol{F}}{m} \tag{2.7}$$

である.

流体粒子とともに移動する量を q とすると,

$$q(t+\Delta t) = q(t) + \frac{\partial q}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial q}{\partial x}\Delta x \tag{2.8}$$

より, 変化率は,

$$\frac{q(t+\Delta t) - q(t)}{\Delta t} = \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta t} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x}\right)q \tag{2.9}$$

である. 3 次元に拡張すると,

$$\frac{dq}{dt} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{u}\cdot\nabla \right) \tag{2.10}$$

となる. ここで, $q = \boldsymbol{u}$ ならば,

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} \tag{2.11}$$

である.

回転系での Navier-Stokes 方程式は

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - 2\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{u} + \boldsymbol{g} + A\nabla^2\boldsymbol{u} \tag{2.12}$$

である. 右辺はそれぞれ, 圧力傾度力, コリオリ力, 重力, 拡散項である[*1].

[*1] コリオリ項の導出を行う. まず, 位置ベクトル $\boldsymbol{A}$ の点が角速度 $\boldsymbol{\omega}$ で回転している時, $\dfrac{d\boldsymbol{A}}{dt} = \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{A}$ が成り立つことを示す.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}(t+\Delta t) - \boldsymbol{A} &= \frac{\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{A}|}|\boldsymbol{A}|\sin\theta|\boldsymbol{\Omega}|dt \\
&= \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{A}dt \\
\therefore \frac{dA}{dt} &= \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{A}
\end{aligned}$$

より示された.

次に, 任意のベクトル $\boldsymbol{B}$ について, 絶対座標系 I から見た時間微分と角速度 $\boldsymbol{\Omega}$ で回転する回転座標系 R から見た時間微分との間に,

$$\left(\frac{d\boldsymbol{B}}{dt}\right)_I = \left(\frac{d\boldsymbol{B}}{dt}\right)_R + \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{B}$$

が成り立つことを示す.

回転系における単位ベクトルを $\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2, \boldsymbol{i}_3$ とすると,

$$\boldsymbol{B} = B_1\boldsymbol{i}_1 + B_2\boldsymbol{i}_2 + B_3\boldsymbol{i}_3$$

と書ける. よって, 回転系から見た $\boldsymbol{B}$ の時間微分は,

$$\left(\frac{d\boldsymbol{B}}{dt}\right)_R = \frac{dB_1}{dt}\boldsymbol{i}_1 + \frac{dB_2}{dt}\boldsymbol{i}_2 + \frac{dB_3}{dt}\boldsymbol{i}_3$$

となる. 絶対座標系から見ると, $\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2, \boldsymbol{i}_3$ も動くので,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d\boldsymbol{B}}{dt}\right)_I &= \frac{dB_1}{dt}\boldsymbol{i}_1 + \frac{dB_2}{dt}\boldsymbol{i}_2 + \frac{dB_3}{dt}\boldsymbol{i}_3 + B_1\frac{d\boldsymbol{i}_1}{dt} + B_2\frac{d\boldsymbol{i}_2}{dt} + B_3\frac{d\boldsymbol{i}_3}{dt} \\
&= \frac{dB_1}{dt}\boldsymbol{i}_1 + \frac{dB_2}{dt}\boldsymbol{i}_2 + \frac{dB_3}{dt}\boldsymbol{i}_3 + B_1\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{i}_1 + B_2\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{i}_2 + B_3\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{i}_3 \\
\therefore \left(\frac{d\boldsymbol{B}}{dt}\right)_I &= \left(\frac{d\boldsymbol{B}}{dt}\right)_R + \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{B}
\end{aligned}$$

球座標では

$$
\begin{aligned}
\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} &= \frac{du}{dt}\boldsymbol{i} + \frac{dv}{dt}\boldsymbol{j} + \frac{dw}{dt}\boldsymbol{k} + u\frac{d\boldsymbol{i}}{dt} + v\frac{d\boldsymbol{j}}{dt} + w\frac{d\boldsymbol{k}}{dt} \\
&= \frac{du}{dt}\boldsymbol{i} + \frac{dv}{dt}\boldsymbol{j} + \frac{dw}{dt}\boldsymbol{k} + \boldsymbol{\Omega}_{flow} \times \boldsymbol{u}
\end{aligned} \tag{}
$$

より,

$$
\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = \boldsymbol{i}\left(\frac{du}{dt} - \frac{uv\tan\theta}{r} + \frac{uw}{r}\right) + \boldsymbol{j}\left(\frac{dv}{dt} + \frac{u^2\tan\theta}{r} + \frac{vw}{r}\right) + \boldsymbol{k}\left(\frac{dw}{dt} - \frac{u^2+v^2}{r}\right) \tag{2.13}
$$

より示された.

ここで, 粒子を $\boldsymbol{r}$ として表すと,

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\boldsymbol{r}}{dt}\right)_I &= \left(\frac{\boldsymbol{r}}{dt}\right)_R + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r} \\
\boldsymbol{u}_I &= \boldsymbol{u}_R + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}
\end{aligned}
$$

である. これより,

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\boldsymbol{u}_I}{dt}\right)_I &= \left(\frac{\boldsymbol{u}_I}{dt}\right)_R + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{u}_I \\
&= \left(\frac{\boldsymbol{u}_R}{dt}\right)_R + \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\Omega} \times \left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)_R + 2\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{u}_R + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r})
\end{aligned}
$$

となる. ここで, $\dfrac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} = 0$ としている. これを, 非回転系の Navier-Stokes 方程式

$$
\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \boldsymbol{g} + A\nabla^2\boldsymbol{u}
$$

に代入すると,

$$
\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} - \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}) + \boldsymbol{g} + A\nabla^2\boldsymbol{u}
$$

となる. 右辺第三項の遠心力は第四項の $\boldsymbol{g}$ に含めて考えて, 万有引力による $\boldsymbol{g}_f$ と遠心力を合わせて $\boldsymbol{g}$ と定義し直す.

となるので[*2], 球座標において運動方程式は

$$
\begin{aligned}
\frac{du}{dt} - \left(2\boldsymbol{\Omega} + \frac{u}{r\cos\theta}\right)(v\sin\theta - w\cos\theta) &= -\frac{1}{\rho r\cos\theta}\frac{\partial p}{\partial\lambda} \\
\frac{dv}{dt} + \frac{wv}{r} + \left(2\boldsymbol{\Omega} + \frac{u}{r\cos\theta}\right)u\sin\theta &= -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial\theta} \\
\frac{dw}{dt} - \frac{u^2+v^2}{r} - 2\boldsymbol{\Omega}u\cos\theta &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} - g
\end{aligned}
\qquad ()
$$

と書ける.

2.3 連続の式・質量保存の式

オイラー的な導出を行う. 質量収束を考えると,

$$
\begin{aligned}
&\rho(t+\Delta t)\Delta x\Delta y\Delta z - \rho(t)\Delta x\Delta y\Delta z \\
&= u(x)\Delta t\Delta y\Delta z\rho(x) - u(x+\Delta x)\Delta t\Delta y\Delta z\rho(x+\Delta x)
\end{aligned}
\qquad ()
$$

[*2]単位ベクトルの方向は場所に依って変化する. 地球に対する流れに伴う単位ベクトルの回転率を導入する.

経度方向の速度 v がもたらすベクトル回転率は $-(v/r)\boldsymbol{i}$ であり, 緯度方向の速度 u がもたらすベクトル回転率は $u/(r\cos\theta)$ である. 地球の角速度ベクトル $\boldsymbol{\Omega} = \Omega(\boldsymbol{j}\cos\theta + \boldsymbol{k}\sin\theta)$ と同様に, 回転率が $u/(r\cos\theta)$ の場合を考えると, $\boldsymbol{j}(u/r) + \boldsymbol{k}(u\tan\theta/r)$ となる. 以上より, 流れと共に運動するベクトルの回転率は

$$
\boldsymbol{\Omega}_{flow} = -\boldsymbol{i}\frac{v}{r} + \boldsymbol{j}\frac{u}{r} + \boldsymbol{k}\frac{u\tan\theta}{r}
$$

となる. 慣性系における任意のベクトル $\boldsymbol{C}$ を考えると

$$
\left(\frac{d\boldsymbol{C}}{dt}\right)_I = \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{C}
$$

なので, 単位ベクトルの回転による時間変化は

$$
\begin{aligned}
\frac{d\boldsymbol{i}}{dt} &= \boldsymbol{\Omega}_{flow}\times\boldsymbol{i} = \frac{u}{r\cos\theta}(\boldsymbol{j}\sin\theta - \boldsymbol{k}\cos\theta) \\
\frac{d\boldsymbol{j}}{dt} &= \boldsymbol{\Omega}_{flow}\times\boldsymbol{j} = -\boldsymbol{i}\frac{u}{r}\tan\theta - \boldsymbol{k}\frac{v}{r} \\
\frac{d\boldsymbol{k}}{dt} &= \boldsymbol{\Omega}_{flow}\times\boldsymbol{k} = \boldsymbol{i}\frac{u}{r} + \boldsymbol{j}\frac{v}{r}
\end{aligned}
$$

となる.

より,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= -\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}, \\ \frac{d\rho}{dt} + \rho\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) &= \frac{d\rho}{dt} + \rho\nabla\boldsymbol{u} = 0 \end{aligned} \tag{}$$

となる. これは圧縮流体の連続の式である. ここで, 密度 ρ の変化が小さいとして, ρ は一定 (ただし z 方向の運動方程式の ρ は除く) とみなすと,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0 \tag{2.14}$$

となる. これは非圧縮流体の連続の式である.

次にラグランジュ的な導出を行う. ある面 S に囲まれた領域 V を考える. V の流体の質量を一定として, V を十分に小さくすると, $\rho_s V = const.$ より,

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt}(\rho V) = V\frac{D\rho}{Dt} + \rho\frac{DV}{Dt} = 0 \\ \therefore \frac{1}{V}\frac{DV}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} \end{aligned} \tag{}$$

である. V の変化を面 S 上の速度で考えると, S 上の素片 δ S の動きによる V の体積変化への寄与は,

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}\delta S \tag{2.15}$$

である. これを S 全体で積分すると,

$$\int_S \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}dS\ (= \frac{DV}{Dt}) \tag{2.16}$$

となる. ガウスの定理より,

$$\int_S \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}dS = \int_V \nabla\cdot\boldsymbol{u}dV = (\nabla\cdot\boldsymbol{u})V \tag{2.17}$$

なので,

$$\begin{aligned} \frac{DV}{Dt} &= V(\nabla\cdot\boldsymbol{u}) \\ \therefore \nabla\cdot\boldsymbol{u} &= \frac{1}{V}\frac{DV}{Dt} \end{aligned} \tag{}$$

となる. $\nabla\cdot\boldsymbol{u}$ は単位体積あたりの体積変化率であるので,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} &= \nabla\cdot\boldsymbol{u}, \\ \frac{d\rho}{dt} &= -\rho(\nabla\cdot\boldsymbol{u}) \end{aligned} \tag{}$$

となり, 連続の式が導かれる. 非圧縮流体の場合には, 流体粒子の密度が運動で変化しないので, $\dfrac{d\rho}{dt} = 0$ より

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0 \tag{2.18}$$

である.

球座標の場合には, $\dfrac{d\rho}{dt} + \rho\nabla\boldsymbol{u} = 0$ は,

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{u}{r\cos\theta}\frac{\partial\rho}{\partial\lambda} + \frac{v}{r}\frac{\partial\rho}{\partial\theta} + w\frac{\partial\rho}{\partial r} \\ &\quad + \frac{\rho}{r\cos\theta}\left[\frac{\partial u}{\partial\lambda} + \frac{\partial(v\cos\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r}\frac{\partial(wr^2\cos\theta)}{\partial r}\right] = 0 \end{aligned} \tag{}$$

であり, $\dfrac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla(\rho\boldsymbol{u}) = 0$ は,

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{1}{r\cos\theta}\frac{\partial(u\rho)}{\partial\lambda} + \frac{1}{r\cos\theta}\frac{\partial(v\rho\cos\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2w\rho)}{\partial r} = 0 \tag{2.19}$$

となる.

2.4 熱力学関係

単位質量あたりの内部エネルギーは

$$I = I(\alpha, \eta, S) \tag{2.20}$$

と表される (α は比容, η は比エントロピー, S は組成). また, エントロピーは同様に

$$\eta = \eta(I, \alpha, S) \tag{2.21}$$

と表される. これらは**基礎的な熱力学的状態方程式**である.

内部エネルギーの微分は

$$dI = \left(\frac{\partial I}{\partial\alpha}\right)_{\eta,S} d\alpha + \left(\frac{\partial I}{\partial\eta}\right)_{\alpha,S} d\eta + \left(\frac{\partial I}{\partial S}\right)_{\alpha,\eta} d\alpha \tag{2.22}$$

と書ける. これらの物理的意味を考えると

$$dI = dQ - dW + dC \tag{2.23}$$

と書けて, それぞれ, 熱の流入, 物体に対する仕事, 化学組成の変化 (化学的仕事) により内部エネルギーが変化するということである. これを**熱力学第一法則**と呼ぶ.

- 熱
  準静的あるいは成分が変化せず可逆の場合には以下の関係がある.

$$T d\eta = dQ \tag{2.24}$$

- 仕事
  物体に対する仕事と圧力, 比容の間には以下の関係がある.

$$dW = p d\alpha \tag{2.25}$$

- 化学組成
  化学組成による寄与は以下である.

$$dC = \mu dS \tag{2.26}$$

  μ は溶液の化学ポテンシャルである.

以上をまとめると,

$$dI = T d\eta - p\alpha + \mu dS \tag{2.27}$$

となり, これが**基礎的な熱力学的関係**である.

基礎的な状態方程式 $I = I(\alpha, \eta, S)$ から熱力学的に平衡状態にある流体についての完全な情報を得ることができる. さらに, $T = \left(\frac{\partial I}{\partial \eta}\right)_{\alpha,S}, T = \left(\frac{\partial I}{\partial \alpha}\right)_{\eta,S}, \mu = \left(\frac{\partial I}{\partial S}\right)_{\eta,\alpha}$ の関係から温度, 圧力, 化学ポテンシャルを得ることができる.

基礎的な状態方程式と同等なものとしてはエンタルピー

$$h = h(p, \eta, S) = I(\alpha, \eta, S) + p\alpha \tag{2.28}$$

やギブスの自由エネルギー

$$G = G(p, T, S) = I(\alpha, \eta, S) - T\eta \tag{2.29}$$

あるいはヘルムホルツの自由エネルギー

$$F = F(\alpha, T, S) = I(\alpha, \eta, S) - T\eta \tag{2.30}$$

がある.

マクスウェルの関係式

マクスウェルの関係式は, 内部エネルギー, エンタルピー, ギブスの自由エネルギー, ヘルムホルツの自由エネルギーを用いて,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial T}{\partial \alpha}\right)_\eta &= -\left(\frac{\partial p}{\partial \eta}\right)_\alpha \\
\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_\eta &= \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \eta}\right)_p \\
\left(\frac{\partial \eta}{\partial p}\right)_T &= -\left(\frac{\partial \alpha}{\partial T}\right)_p \\
\left(\frac{\partial \eta}{\partial \alpha}\right)_T &= \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\alpha
\end{aligned} \qquad ()$$

と導かれる.

理想気体

理想気体 (ideal gas) の場合には, 分子は弾性衝突を除いて相互作用せず, 分子の体積が全体積に比べて十分に小さいため, 気体の内部エネルギーは温度のみに依り, 密度に依らない.

理想気体の伝統的な方程式 $p = \rho RT$ [*3] と基礎的な熱力学的関係を用いると基礎的な状態方程式を推定できる.

[*3] n モルの理想気体の伝統的な方程式は,

$$pV = nR^*T$$

と書ける. ここで, $R^*(= 8.31447\mathrm{JK^{-1}mol^{-1}})$ は普遍気体定数である.

実際の大気は混合気体である. それぞれの気体を理想気体とみなすと, 乾燥大気の分圧はそれを構成するそれぞれの気体の分圧の和に等しい. よって,

$$p = \sum_k p_k$$

と書ける. それぞれの気体の質量を M_k, 分子量を m_k で表すと,

$$p_k = \frac{1}{V}\frac{M_k}{m_k}R^*T$$

となる. 以上より,

$$p = \frac{R^*T}{V}\sum_k \frac{M_k}{m_k} = R^*T\frac{\sum_k M_k}{V}\frac{\sum_k \frac{M_k}{m_k}}{\sum M_k}$$

比熱

組成が一定な流体の基礎的な熱力学的関係は

$$T d\eta = dI + p d\alpha \tag{2.31}$$
$$= \left(\frac{\partial I}{\partial T}\right)_\alpha dT + \left[\left(\frac{\partial I}{\partial \alpha}\right)_T + p\right] d\alpha \tag{2.32}$$

となので, 定積比熱 c_v は

$$c_v \equiv T\left(\frac{\partial \eta}{\partial T}\right)_\alpha = \left(\frac{\partial I}{\partial T}\right)_\alpha \tag{2.33}$$

である. 同様に

$$T d\eta = dh - \alpha dp \tag{2.34}$$
$$= \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p dT + \left[\left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T - \alpha\right] dp \tag{2.35}$$

となるので, 定圧比熱 c_p は

$$c_p \equiv T\left(\frac{\partial \eta}{\partial T}\right)_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p \tag{2.36}$$

である. ここで, $\gamma \equiv \dfrac{c_p}{c_v}$, $\kappa \equiv \dfrac{R}{c_p}$ と定義する.

理想気体では $h = I + RT = (c_v + R)T$ であり, $c_p = \left(\dfrac{\partial h}{\partial T}\right)_p$ であるので, $c_p = c_v + R$, $\dfrac{\gamma - 1}{\gamma} = \kappa$ が成り立つ.

2.5 熱力学方程式

熱力学的関係から運動する流体の方程式を得るために以下のような仮定をおく.

となる. ここで, 平均分子量 $\bar{m} = \dfrac{\sum M_k}{\sum_k \frac{M_k}{m_k}}$, 比容 $\alpha = \dfrac{V}{\sum_k M_k}$ を導入すると, 乾燥大気の状態方程式

$$p\alpha = RT$$

が得られる. ここで, $R = \dfrac{R^*}{m}(= 287\mathrm{JK^{-1}mol^{-1}})$ は乾燥大気の気体定数である.

① 流体は局所的に熱力学平衡が成り立つ. 温度, 圧力, 密度のような熱力学量は時空間的に変化する. しかし, 局所的には (状態方程式やマクスウェルの関係式のような) 熱力学的関係によって結びつけられる.

② 巨視的に流体の運動は可逆でエントロピーは増大しない. エネルギーの粘性散逸や放射, 伝導などによりエントロピーは生成されるが, 流体の運動によるものではない.

熱力学第一法則 $dI = dQ - dW + dC$ より, 流体粒子のエネルギー保存の式は

$$dI = -pd\alpha + dQ_T \tag{2.37}$$

となる. $pd\alpha$ は粒子によってなされた仕事, dQ_T は粒子への全エネルギー流入量である. ① よりラグランジュ微分をとると

$$\frac{dI}{dt} + p\frac{d\alpha}{dt} = \dot{Q}_T \tag{2.38}$$

となる. $\dot{Q}_T$ は単位質量あたりの粒子への全エネルギー流入量である. 連続の式 $\dfrac{d\alpha}{dt} = \alpha\nabla\cdot\boldsymbol{u}$ より

$$\frac{dI}{dt} + p\alpha\nabla\cdot\boldsymbol{u} = \dot{Q}_T \tag{2.39}$$

となり, これは流体の**内部エネルギー方程式**である.

また, 熱力学関係 $dI = Td\eta - pd\alpha + \mu dS$ および内部エネルギー方程式, 組成の時間変化 $\dfrac{dS}{dt} = \dot{S}$ を用いると,

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{1}{T}\dot{Q}_T - \frac{\mu}{T}\dot{S} \equiv \frac{1}{T}\dot{Q} \tag{2.40}$$

となり, これは流体の**エントロピー方程式**である. $\dot{Q}$ は単位質量あたりの粒子への熱流入量である.

2.5.1 理想気体に対する力学的エネルギー方程式

理想気体では, 熱力学第一法則は

$$dQ = c_v dT + pd\alpha \tag{a}$$

$$dQ = c_p dT - \alpha dp \tag{b}$$

である. これらをラグランジュ微分すると

$$c_v \frac{dT}{dt} + p\frac{d\alpha}{dt} = \dot{Q} \tag{a}$$

$$c_p \frac{dT}{dt} - \alpha\frac{dp}{dt} = c_p\frac{dT}{dt} - \frac{RT}{p}\frac{dp}{dt} = \dot{Q} \tag{b}$$

となる. 質量保存の式から (a) は

$$c_v \frac{dT}{dt} + p\alpha\nabla\cdot\boldsymbol{u} = \dot{Q} \tag{2.41}$$

となり, 理想気体の方程式から (b) は

$$\frac{dp}{dt} + \gamma p\nabla\cdot\boldsymbol{v} = \frac{\rho R}{c_v}\dot{Q} \tag{2.42}$$

となる.

エネルギー保存からの導出

コントロールボリュームの全熱力学的エネルギーは, 内部エネルギー (個々の流体粒子の運動エネルギー) と巨視的な流体の運動エネルギーの総和である.

単位質量あたりの内部エネルギーを e とすると, 密度 ρ で体積 δV の流体要素の全熱力学的エネルギーは,

$$\rho\left[I + \frac{1}{2}\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{U}\right]\delta V \tag{2.43}$$

である. 流体要素にはたらく外力として, 圧力や粘性力などの表面力と, 重力やコリオリ力などの体積力がある.

ラグランジュ的コントロールボリュームを考えたとき, 圧力がなす仕事率は,

$$-\nabla\cdot(p\boldsymbol{U})\delta V \tag{2.44}$$

である. またコリオリ力は速度ベクトルに垂直であるため仕事をせず, 重力がなす仕事率は

$$\rho\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{U}\delta V \tag{2.45}$$

である.

したがって, エネルギー保存則より粘性を無視すると,

$$\frac{d}{dt}\left[\rho\left(I+\frac{1}{2}\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{U}\right)\delta V\right] = -\nabla\cdot(p\boldsymbol{U})\delta V + \rho\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{U}\delta V + \rho\dot{Q}\delta V \tag{2.46}$$

を得る. ここで, $\dot{Q}$ は放射, 伝導, 潜熱の解放による単位質量あたりの加熱である. 微分の連鎖律より,

$$\begin{aligned}\rho\delta V\frac{d}{dt}\left(I+\frac{1}{2}\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{U}\right)+\left(I+\frac{1}{2}\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{U}\right)\frac{d}{dt}(\rho\delta V)\\ = -\boldsymbol{U}\cdot\nabla p\delta V - p\nabla\cdot\boldsymbol{U}\delta V - \rho gw\delta V + \rho\dot{Q}\delta V\end{aligned} \quad ()$$

となる. 左辺第二項はゼロとなるので,

$$\rho\frac{dI}{dt}+\rho\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{U}\right) = -\boldsymbol{U}\cdot\nabla p - p\nabla\cdot\boldsymbol{U} - \rho gw + \rho\dot{Q} \tag{2.47}$$

となる.

ここで, 運動方程式と速度ベクトルとの内積をとることで,

$$\rho\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{U}\right) = -\boldsymbol{U}\cdot\nabla p - \rho gw \tag{2.48}$$

が得られる. これは力学的エネルギーのつり合いを示す. また, () から () を引くことで,

$$\rho\frac{dI}{dt} = -p\nabla\cdot\boldsymbol{U} + \rho\dot{Q} \tag{2.49}$$

が得られる. これは熱エネルギーのつり合いを示す. ジオポテンシャルを導入すると, () は

$$\rho\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{U}+\Phi\right) = -\boldsymbol{U}\cdot\nabla p \tag{2.50}$$

と書ける. これは力学的エネルギー方程式と呼ばれる. また, 連続の式より

$$\frac{1}{\rho}\nabla\cdot\boldsymbol{U} = -\frac{1}{\rho^2}\frac{d\rho}{dt} = \frac{d\alpha}{dt} \tag{2.51}$$

であり, 乾燥気体では単位質量あたりの内部エネルギーは $I = c_v T$ と書けることから, () は

$$c_v\frac{dT}{dt}+p\frac{d\alpha}{dt} = c_v\frac{dT}{dt}+p\alpha\nabla\cdot\boldsymbol{u} = \dot{Q} \tag{2.52}$$

が得られる. 熱力学第一法則は動いている流体にも適用できる. 左辺第二項の単位質量あたりの流体系による仕事率は熱エネルギーと力学的エネルギーとの間のエネルギーの変換を表す.

温位, ポテンシャル密度, エントロピー

断熱過程を考えると, () は

$$0 = c_v \frac{dT}{dt} + p\frac{d\alpha}{dt} \tag{2.53}$$

であり, 理想気体の状態方程式より, α を消去すると,

$$\begin{aligned} 0 &= c_v \frac{dT}{dt} + pR\frac{d}{dt}\left(\frac{T}{p}\right) \\ &= c_v \frac{dT}{dt} + R\frac{dT}{dt} + pRT\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{p}\right) \\ &= c_p \frac{dT}{dt} + pRT\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{p}\right) \\ &= c_p \frac{1}{T}\frac{dT}{dt} - R\frac{1}{T}\frac{dp}{dt} \\ &= c_p \frac{d\ln T}{dt} - R\frac{d\ln p}{dt} \end{aligned} \tag{}$$

となる. これを積分すると,

$$T = Cp^{R/C_P} \tag{2.54}$$

を得る. C は各流体要素によって決まる定数である. 気圧が p_0 のときの温度を θ として定数を消去すると,

$$\theta = Tp_0 p^{R/C_P} \tag{2.55}$$

となる. 標準気圧 p_0 として 1000 hPa をとることが多く, この θ を**温位 (potential temperature)** と呼ぶ. 温位 θ を用いて () を書き直すと,

$$c_p \frac{d\theta}{dt} = \frac{\theta}{T}\dot{Q} \tag{2.56}$$

となる. 断熱過程の場合には $\dfrac{d\theta}{dt} = 0$ より θ はラグランジュ保存量になる.

ポテンシャル密度 (potential density) ρ_θ は, 状態方程式が $\rho = f(p, T)$ と書かれるなら, ポテンシャル密度は $\rho_\theta = f(p_R, \theta)$ となり, 理想気体に対しては $\rho_\theta = \frac{p_R}{R\theta}$ となる. $\theta = T\left(\dfrac{p_R}{p}\right)^\kappa$ を用いると, $\rho_\theta = \rho\left(\dfrac{p_R}{p}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$ となる.

2.6 静力学方程式

大気が運動していないとき, 重力と圧力傾度力の鉛直成分がつり合い,

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \tag{2.57}$$

となる．この状態を**静力学平衡**という．静力学平衡は実際の大気の圧力場の高度依存性についてよい近似となる．() を z について積分すると,

$$p(z) = \int_z^\infty \rho g dz \tag{2.58}$$

となり, 圧力は上層の空気の重さに等しいと考えられる．海面圧力 $p(0) = 1013.25\mathrm{hPa}$ は単位面積あたりの大気の重さの平均である．ここで, ジオポテンシャル Φ を導入して静力学方程式を書き直すと,

$$d\Phi = gdz = -\left(\frac{RT}{p}\right)dp = -RT\ln p \tag{2.59}$$

である．これより圧力と関係したジオポテンシャルの変化は温度のみに依存することがわかる．() を鉛直方向に積分することで, “ 側高公式 ”

$$\Phi(z_2) - \Phi(z_1) = g_0(Z_2 - Z_1) = R\int_{p_2}^{p_1} Td\ln p \tag{2.60}$$

を得る．ここで, $Z \equiv \Phi(z)/g_0$ はジオポテンシャル高度で, $g_0 = 9.80665\mathrm{ms}^{-2}$ は海面における重力の世界平均である．対流圏や成層圏の下層では, Z と z はほとんど等しい．Z を用いると, 測高公式は

$$Z_T \equiv Z_2 - Z_1 = \frac{R}{g_0}\int_{p_2}^{p_1} Td\ln p \tag{2.61}$$

となる．Z_T は p_2 面と p_1 の間の大気の厚さといえる．ちなみに層内の平均気温 $< T >$ は,

$$< T >= \frac{\int_{p_2}^{p_1} Td\ln p}{\int_{p_2}^{p_1} d\ln p} \tag{2.62}$$

で与えられる．スケールハイト $H \equiv \dfrac{R < T >}{g_0}$ を用いると,

$$Z_T = H\ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right) \tag{2.63}$$

と書ける．よって, 等圧面の間の層の厚さは層内の温度に比例する．暖かい層に比べて冷たい層では高度とともに圧力が急激に減少する．また, 温度 T の大気におけるジオポテンシャル高度は海面気圧によって規格化された気圧の自然対数に比例する．つまり,

$$Z_T = H \ln\left(\frac{p}{p_0}\right) \tag{2.64}$$

である．よって, 等温大気においては圧力はジオポテンシャル高度に従って指数関数的に減少し,

$$p(Z) = p(0)e^{-Z/H} \tag{2.65}$$

と書ける．

2.7 プリミティブ方程式

プリミティブ方程式は, 先述の方程式を大気・海洋モデルに用いるために簡易化したものであり, 以下の近似を行う．

① 静水圧近似
運動方程式の鉛直方向成分について, 重力項と圧力勾配項とが等しいとする近似.

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

② 浅流体近似
$r = a + z$ について r を地球半径 a で置き換える近似．ただし, r についての微分は置き換えない.

$$\frac{1}{r}\frac{\partial (r^2 w)}{\partial r} \to \frac{\partial w}{\partial z}$$

③ 伝統的近似
運動方程式の水平方向成分について, 速度の鉛直成分によるコリオリ項とメトリックな項を無視する近似.

運動のアスペクト比が大きい場合には ②, ③ の近似は成り立たない．また, 全ての近似が成り立たない場合には矛盾が生じ, 角運動量保存およびエネルギー保存が成り立たない.

以上の近似を用いたとき, 運動方程式は

$$
\begin{aligned}
\frac{du}{dt} - 2\boldsymbol{\Omega}\sin\theta v - \frac{uv}{a}\tan\theta &= -\frac{1}{\rho a\cos\theta}\frac{\partial p}{\partial\lambda} \\
\frac{dv}{dt} + 2\boldsymbol{\Omega}\sin\theta u + \frac{n^2\tan\theta}{a} &= -\frac{1}{\rho a}\frac{\partial p}{\partial\theta} \\
0 &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g
\end{aligned}
\tag{}
$$

$$
\frac{d}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{u}{a\cos\theta}\frac{\partial}{\partial\lambda} + \frac{v}{a}\frac{\partial}{\partial\theta} + w\frac{\partial}{\partial z}\right)
$$

となる.

また, 質量保存の式は

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{u}{a\cos\theta}\frac{\partial\rho}{\partial\lambda} + \frac{v}{a}\frac{\partial\rho}{\partial\theta} + w\frac{\partial\rho}{\partial r} \\
&\quad + \rho\left[\frac{1}{a\cos\theta}\frac{\partial u}{\partial\lambda} + \frac{1}{a\cos\theta}\frac{\partial(v\cos\theta)}{\partial\theta} + \frac{\partial w}{\partial z}\right] = 0, \\
&\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{1}{a\cos\theta}\frac{\partial(u\rho)}{\partial\lambda} + \frac{1}{a\cos\theta}\frac{\partial(v\rho\cos\theta)}{\partial\theta} + \frac{\partial(w\rho)}{\partial r} = 0
\end{aligned}
\tag{}
$$

となる.

2.8 非弾性方程式とブシネスク方程式

非弾性方程式およびブシネスク (Boussinesq) 方程式は, 鉛直方向に密度成層する系の記述するのに有用な方程式系で, 大気海洋の物理現象において本質的ではない音波が除去されるという特徴がある. 系の平均的な鉛直密度勾配が大きい場合には非弾性方程式を, 系の密度がほぼ一定とみなせる場合にはブシネスク方程式をそれぞれ用いる.

2.8.1 ブシネスク方程式

海洋における密度変化は圧力, 温度, 塩分の変化で決まるが, それらは平均密度に比べてかなり小さい. 線形近似した状態方程式は

$$
\rho = \rho_0\left[1 - \beta_T(T - T_0) + \beta_S(S - S_0) + \frac{p}{\rho_0 c_s^2}\right] \tag{2.66}
$$

で $\beta_T \approx 2\times10^{-4}\mathrm{K}^{-1}$, $\beta_T \approx 10^{-3}\mathrm{psu}^{-1}$, $\beta_T \approx 1500\mathrm{ms}^{-1}$ である. それぞれの大きさを見積もると以下のようになる.

圧力

静水圧近似を用いると水深を H としたとき $\Delta_p\rho \approx \Delta p/c_s^2 \approx \rho_0 gHc_s^2$ となる．このとき

$$\frac{|\Delta_p\rho|}{\rho_0} \ll 1 \quad (\text{if } \frac{gH}{c_s^2} \ll 1) \tag{2.67}$$

となる．海洋における密度のスケールハイト c_s^2/g は約 200km であり, 深い場所であっても大きな密度変化は生じ得ない.

温度

$\Delta_T\rho \approx -\beta_T\rho_0\Delta T$ であるので,

$$\frac{|\Delta_T\rho|}{\rho_0} \ll 1 \quad (\text{if} \quad \beta_T\Delta T \ll 1) \tag{2.68}$$

となる．$\Delta T = 20\text{K}$ とすると $\beta_T\Delta T \approx 4\times10^{-3}$ 程度で十分に小さいと言える.

塩分

$\Delta_S\rho \approx -\beta_S\rho_0\Delta T$ であるので,

$$\frac{|\Delta_S\rho|}{\rho_0} \ll 1 \quad (\text{if} \quad \beta_S\Delta S \ll 1) \tag{2.69}$$

となる．$\Delta S = 5\text{psu}$ とすると $\beta_S\Delta S \approx 5\times10^{-3}$ 程度で十分に小さいと言える.

液体中の密度変化を以下のように記述する.

$$\begin{aligned}\rho &= \rho_0 + \delta\rho(x,y,z,t)\\ &= \rho_0 + \hat{\rho}(z) + \rho'(x,y,z,t)\\ &= \tilde{\rho}(z) + \rho'(x,y,z,t)\end{aligned}$$

また以下のような仮定ができる.

$$|\hat{\rho}|, |\rho'|, |\delta\rho| \ll \rho_0 \tag{2.70}$$

ここで, 海洋中では $|\rho'| \ll |\hat{\rho}|$ が大抵成り立っている.

基準密度に対して基準圧力を導入すると,

$$\begin{aligned} p &= p_0(z) + \delta p(x,y,z,t) \\ &= \tilde{p}(z) + p'(x,y,z,t) \end{aligned} \tag{}$$

となる. $|\delta p| \ll |p|,\ |p'| \ll |\tilde{p}|$ である. また

$$\frac{dp_0}{dz} \equiv -g\rho_0, \quad \frac{d\tilde{p}}{dz} = -g\tilde{\rho} \tag{2.71}$$

が成り立つ. $\nabla_z p = \nabla_z p' = \nabla_z \delta p$ であり, $|\hat{\rho}| \ll |\rho_0|$ ならば $p_0 \approx \tilde{p}$ である.

運動方程式

ブシネスク方程式を得るため, $\rho = \rho_0 + \delta\rho$ として $\delta\rho/\rho$ が小さいと仮定する. 運動方程式は

$$\begin{aligned} (\rho_0 + \delta\rho)\left(\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{u}\right) &= -\nabla\delta p - \frac{\partial p_0}{\partial z}\boldsymbol{k} - g(\rho_0 + \delta\rho)\boldsymbol{k} \\ &= -\nabla\delta p - g\delta\rho\boldsymbol{k} \end{aligned} \tag{}$$

となる. 密度変化が小さいならば

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{u} = -\nabla\phi + b\boldsymbol{k} \tag{2.72}$$

となる. ここで $\phi = \delta p/\rho_0,\ b = -g\delta\rho/\rho_0$ で浮力に当たる. ブシネスク近似では密度変化は重力に関する項にのみ関係する.

海洋における大規模現象では, 圧力偏差と密度が静水圧平衡の関係にあり, 鉛直加速度が $g\delta\rho/\rho_0$ に比べて小さい場合に

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = b \tag{2.73}$$

が成り立つ.

質量保存の式

質量保存の式は

$$\frac{d\delta\rho}{dt} + (\rho_0 + \delta\rho)\nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0 \tag{2.74}$$

である. 時間スケールが移流の時間スケールと同程度ならば

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0 \tag{2.75}$$

となり密度が一定の流体と同じとなる. しかしこれは $d\delta\rho/dt = 0$ としてよいというわけではない. 密度変化は熱力学の式によって与える必要がある. 密度の時間微分項を無視することで音波が除去される.

熱力学の式・状態方程式

ブシネスク方程式は熱力学の式, 状態方程式, 塩分の式を加えることで閉じることができる. 塩分を一時的に無視すると, 熱力学の式は

$$\frac{d\rho}{dt} - \frac{1}{c_s^2}\frac{dp}{dt} = \frac{\dot{Q}}{(\partial\eta/\partial\rho)_p T} \approx -\dot{Q}\left(\frac{\rho_0\beta_T}{c_p}\right) \tag{2.76}$$

となる. $(\partial\eta/\partial\rho)_p = (\partial\eta/\partial T)_p(\partial T/\partial\rho)_p \approx c_p/(T\rho_0\beta_T)$ を用いている. ρ, p についての関係から

$$\begin{aligned} \frac{d\delta\rho}{dt} - \frac{1}{c_s^2}\frac{dp_0}{dt} &= -\dot{Q}\left(\frac{\rho_0\beta_T}{c_p}\right), \\ \frac{d}{dt}\left(\delta\rho + \frac{\rho_0 g}{c_s^2}z\right) &= -\dot{Q}\left(\frac{\rho_0\beta_T}{c_p}\right) \end{aligned} \quad ()$$

が得られる. さらに最も厳しい条件である左辺第二項を虫すると, $b = -g\delta\rho/\rho_0$ より

$$\frac{db}{dt} = \dot{b} \tag{2.77}$$

を得る. $\dot{b} = g\beta_T\dot{Q}/c_p$ である. 以上の運動方程式, 連続の式, 熱力学の式は閉じた方程式系を成し, simple Boussinesq 方程式系 と呼ぶ.

より正確には静水圧による圧縮性を含めることが必要である. ポテンシャル密度は $\rho_{pot} = \delta\rho + \rho_0 gz/c_s^2$ で与えられ, 対応するポテンシャル浮力は

$$b_\sigma \equiv -g\frac{\delta\rho_{pot}}{\rho_0} = -\frac{g}{\rho_0}(\delta\rho + \rho_0 gz/c_s^2) = b - g\frac{z}{H_\rho} \tag{2.78}$$

である. $H_\rho = c_s^2/g$ で, 熱力学の式は

$$\frac{db_\sigma}{dt} = \dot{b_\sigma} \tag{2.79}$$

となる. $\dot{b} = \dot{b_\sigma}$ である. さらに, 適切な状態方程式を用いると

$$\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}, \quad \frac{dS}{dt} = \dot{S} \tag{2.80}$$

となり θ, S はそれぞれ温位, 塩分である. 浮力の一般形は $b = b(\quad \theta, S, p)$ となるが, 基準密度による静水圧平衡の関係 $-\rho_0 gz$ 　で置き換えると, 状態方程式は

$$b = b(\theta, S, z) \tag{2.81}$$

となる. これらの熱力学の式および状態方程式で成す閉じた方程式系を general Boussinesq 方程式系 と呼ぶ.

平均成層と浮力振動数

密度変化の原因は, 水平方向と鉛直方向とでは異なることが多いため, $\rho = \rho_0 + \hat{\rho}(z) + \rho'(x, y, z, t)$ として $\tilde{b} \equiv -g\hat{\rho}/\rho_0,\ b' \equiv -g\rho'/^r ho_0$ で定義すると便利である. 熱力学の式は

$$\begin{aligned} \frac{db'}{dt} + N^2 w = 0 \\ N^2(z) = \left(\frac{d\tilde{b}}{dz} - \frac{g^2}{c_s^2}\right) = \frac{d\tilde{b}_\sigma}{dz} \end{aligned} \tag{}$$

となる. $\tilde{b}_\sigma = \tilde{b} - gz/H_\rho$ である. N は浮力振動数で, N^2 は流体の平均的な成層を表し平均場のポテンシャル浮力の鉛直勾配である. これは simple Boussinesq 方程式系 でも $c_s^2 = \infty$ とすれば成り立つ.

エネルギー保存

散逸や他の外力のない一様重力場中の simple Boussinesq 方程式系 は

$$\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{u}}{dt} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{u} = -\nabla\phi + b\boldsymbol{k} \\ \nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0 \\ \frac{db}{dt} = 0 \end{aligned} \tag{a, b, c}$$

である. 運動エネルギーの時間発展 (a), (b)

$$\frac{1}{2}\frac{d\boldsymbol{u}^2}{dt} = bw - \nabla \cdot (\phi\boldsymbol{u}) \tag{2.82}$$

と書ける. ポテンシャル $\phi = -z$ と定義すると $\nabla\Phi = -\boldsymbol{k}$ であり

$$\frac{d\Phi}{dt} = \nabla\cdot(\boldsymbol{u}\Phi) = -w \tag{2.83}$$

であり (c) を用いると

$$\frac{d}{dt}(b\Phi) = -wb \tag{2.84}$$

となる. これらをまとめて物質微分を展開すると

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{u}^2 + b\Phi\right) + \nabla\cdot\left[\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{u}^2 + b\Phi + \phi\right)\right] = 0 \tag{2.85}$$

となる. これは simple Boussinesq 方程式系のエネルギー方程式である.

次に general Boussinesq 方程式系のエネルギー保存を考える. 状態方程式が圧力の関数であるとすると (c) は

$$\frac{d\theta}{dt} = 0, \quad \frac{dS}{dt} = 0, \quad b = b(\theta, S, \phi) \tag{2.86}$$

となるのでこの系に対するエネルギー保存則は存在しない. これは流体が非圧縮で内部エネルギーと運動エネルギーの変換が行われないためである. 一方, 浮力を $b = b(\theta, S, z)$ とするとエネルギー保存則は存在する. 位置エネルギー Π は浮力 b を等温位, 等塩分の下での鉛直積分で定義され

$$\Pi(\theta, S, z) = -\int_a^z b dz' \tag{2.87}$$

である. a は定数である. 左辺の物質微分は

$$\frac{d\Pi}{dt} = \left(\frac{\partial\Pi}{\partial\theta}\right)_{S,z}\frac{d\theta}{dt} + \left(\frac{\partial\Pi}{\partial S}\right)_{\theta,z}\frac{dS}{dt} + \left(\frac{\partial\Pi}{\partial z}\right)_{\theta,S}\frac{dz}{dt} = -bw \tag{2.88}$$

となる. 以上より

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{u}^2 + \Pi\right) + \nabla\cdot\left[\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{u}^2 + \Pi + \phi\right)\right] = 0 \tag{2.89}$$

となる. つまり, 状態方程式の圧力が z の関数で書ける場合には任意の状態方程式に対してエネルギー保存が成り立つ.　z に依らない場合には保存即は () と同じ形になる.

2.8.2 非弾性方程式

大気では海洋と異なり密度が (特に鉛直方向に) 顕著に変化する．しかし, 静止平衡状態からの密度, 圧力の偏差は十分に小さく, 温位の鉛直変化は小さい．これらの観測事実から, 非弾性近似によって音波を無視することができる．密度と圧力を

$$\begin{aligned} \rho &= \tilde{\rho(z)} + \delta\rho(x,y,z,t) \\ p &= \tilde{p(z)} + \delta p(x,y,z,t) \end{aligned} \tag{}$$

とする．ここで, $|\delta\rho| \ll |\tilde{\rho}|$ で

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} \equiv -g\tilde{\rho}(z) \tag{2.90}$$

と定義される．非弾性近似では基本場の密度 $\tilde{\rho}$ は与えられる．非弾性近似ではブシネスク近似と同様に重力以外に起因する力学的な密度変動を無視する．まず理想気体について, 温位 θ とエントロピー $s(=\eta/c_p)$ の熱力学的関係は

$$s \equiv \log\theta = \log T - \frac{R}{c_p}\log p(+\mathrm{const}) = \frac{1}{\gamma}\log p - \log\rho(+\mathrm{const}) \tag{2.91}$$

となる．$\gamma = c_p/c_v$ である．さらに微小変化は

$$\delta s = \frac{1}{\theta}\delta\theta = \frac{1}{\gamma}\frac{\delta p}{p} - \frac{\delta\rho}{\rho} \approx \frac{1}{\gamma}\frac{\delta p}{\tilde{p}} - \frac{\delta\rho}{\tilde{\rho}} \tag{2.92}$$

となる．$\tilde{s} \equiv \gamma^{-1}\log\tilde{p} - \log\tilde{\rho}$ とすると

$$\frac{d\tilde{s}}{dz} = \frac{1}{\gamma\tilde{p}}\frac{d\tilde{p}}{dz} - \frac{1}{\tilde{\rho}}\frac{d\tilde{\rho}}{dz} = -\frac{g}{\gamma}\frac{\tilde{\rho}}{\tilde{p}} - \frac{1}{\tilde{\rho}}\frac{d\tilde{\rho}}{dz} \tag{2.93}$$

となる．大気において, 左辺 (エントロピーの鉛直方向変化) は右辺 (密度の鉛直方向変化や圧力に関する項) に比べて小さいことが多い．

運動方程式

近似のない非粘性流体の運動方程式の水平成分は

$$(\tilde{\rho} + \delta\rho)\left(\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} + \boldsymbol{f}\times\boldsymbol{u}\right) = -\nabla_z \delta p \tag{2.94}$$

であり, $|\delta\rho| \ll |\tilde{\rho}|$ より

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} + \boldsymbol{f}\times\boldsymbol{u} = -\nabla_z\phi \tag{2.95}$$

となる. $\phi = \delta p/\tilde{\rho}$ である. 近似のない非粘性流体の運動方程式の鉛直成分は

$$(\tilde{\rho} + \delta\rho)\frac{dw}{dt} = -\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial z} - \frac{\partial\delta p}{\partial z} - g\tilde{\rho} - g\delta\rho = -\frac{\partial\delta p}{\partial z} - g\delta\rho \tag{2.96}$$

であり, $|\delta\rho| \ll |\tilde{\rho}|$ より

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\tilde{\rho}}\frac{\partial\delta p}{\partial z} - g\frac{\delta\rho}{\tilde{\rho}} = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\delta p}{\tilde{\rho}}\right) - \frac{g}{\gamma}\frac{\delta p}{\tilde{\rho}^2}\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial z} - g\frac{\delta\rho}{\tilde{\rho}} \tag{2.97}$$

となる. この方程式は密度 $\tilde{\rho}$ の鉛直変化が無視できない大気においてはあまり有用ではない. しかし, 密度をエントロピー s で置き換えると

$$\begin{aligned}\frac{dw}{dt} &= g\delta s - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\delta p}{\tilde{\rho}}\right) - \frac{g}{\gamma}\frac{\delta p}{\tilde{p}} - \frac{\delta p}{\tilde{\rho}^2}\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial z} \\ &= g\delta s - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\delta p}{\tilde{\rho}}\right) + \frac{d\tilde{s}}{dz}\frac{\delta p}{\tilde{p}}\end{aligned} \qquad ()$$

となる. 以上より, 重力に燗する項が $\delta\rho$ ではなく δs によって記述されたため, 熱力学の式と直接結びつけることができるようになった. また大気において温位のスケールハイト (100km) は密度のスケールハイト (10km) よりも十分に大きいので, () の右辺最後の項は小さい. $d\tilde{s}/dz$ を含む項を消去すると運動方程式の鉛直成分は

$$\frac{dw}{dt} = g\delta s - \frac{\partial\phi}{\partial z} \tag{2.98}$$

となる. $\phi = \delta p/\tilde{\rho},\ \delta s = \delta\theta/\theta_0$ である. $b_a \equiv g\delta s = g\delta\theta/\theta_0$ とすればブシネスク近似の運動方程式と一致するが, 浮力の定義が異なる.

質量保存の式

近似の無い質量保存の式は

$$\frac{\partial\delta\rho}{\partial t} + \nabla[(\tilde{\rho} + \delta\rho)\boldsymbol{u}] = 0 \tag{2.99}$$

である. 第二項の $\delta\rho$ を無視し, 時間スケールが移流によって決まる ($T \sim L/U$ であり, 音波は支配的ではない) と考え局所的な時間変化が小さいとすると

$$\nabla_z \cdot \boldsymbol{u} + \frac{1}{\tilde{\rho}}\frac{\partial}{\partial z}(\tilde{\rho}w) = 0 \tag{2.100}$$

となる. これにより非弾性近似を用いたこととなる. 極座標で表すと

$$\frac{1}{a\cos\theta}\frac{\partial u}{\partial\lambda} + \frac{1}{a\cos\theta}\frac{\partial(v\cos\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{\tilde{\rho}}\frac{\partial(w\tilde{\rho})}{\partial z} = 0 \tag{2.101}$$

と表される.

熱力学の式

理想気体の熱力学方程式は

$$\frac{d\ln\theta}{dt} = \frac{\dot{Q}}{Tc_p} \tag{2.102}$$

である. $\dot{Q}$ は単位時間あたりの加熱を表す. 非弾性近似においては $\theta = \theta_0 + \delta\theta$ であるので熱力学方程式は

$$\frac{d\delta s}{dt} = \frac{\dot{Q}}{Tc_p} \tag{2.103}$$

となる. 回転系における消散 (粘性) 項と非断熱項を含まない非弾性方程式をまとめると

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} + 2\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{u} = \boldsymbol{k}b_a - \nabla\phi \tag{2.104}$$

$$\frac{db_a}{dt} = 0 \tag{2.105}$$

$$\nabla\cdot(\tilde{\rho}\boldsymbol{u}) = 0 \tag{2.106}$$

となる. $b_a = g\delta s = g\delta\theta/\theta_0$ である. $\tilde{\rho} = \rho_0 =$ 一定　とするとブシネスク近似の方程式と完全に一致する. 非弾性近似は大きなスケールの大気循環において十分によい近似ではない (特に温位が一定という近似, $\delta\rho$ が小さいという仮定について). 非弾性方程式は large eddy simulation(LES) の分野に関しては有用である.

エネルギー保存

エネルギー保存については (a) より

$$\tilde{\rho}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{u}^2\right) = -\nabla\cdot(\phi\tilde{\rho}\boldsymbol{u}) + b_a\tilde{\rho}w \tag{2.107}$$

となる. ポテンシャル $\Phi(z)$ を $\nabla\Phi = -\boldsymbol{k}$ と定義すると

$$\tilde{\rho}\frac{d\Phi}{dt} = -w\tilde{\rho} \tag{2.108}$$

となる. 熱力学の式より

$$\tilde{\rho}\frac{d(b_a\Phi)}{dt} = -wb_a\tilde{\rho} \tag{2.109}$$

となるのでこれらをまとめて物質微分を展開すると

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\tilde{\rho}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{u}^2+b_a\Phi\right)\right]+\nabla\cdot\left[\tilde{\rho}\boldsymbol{u}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{u}^2+b_a\Phi+\phi\right)\right]=0 \tag{2.110}$$

となる．さらに展開すると

$$\frac{\partial E}{\partial t}+\nabla\cdot[\boldsymbol{u}(E+\tilde{\rho}\phi)]=0 \tag{2.111}$$

となる．エネルギー密度 $E=\tilde{\rho}(\boldsymbol{u}^2/2b_a\Phi)$ である．これは整合的なエネルギー方程式であり, 任意の閉領域内で積分すると全エネルギーは保存する．全エネルギー密度は運動エネルギーと simple Boussinesq 近似でのポテンシャルエネルギーに相当するものから成り立つ．ただし, 浮力 b_a は密度ではなく温位に基づくので完全に同値ではなく, むしろ内部エネルギーとポテンシャルエネルギーの両方の効果を含んだエントロピー的な物理量である.

浮力に関してはブシネスク近似では密度, 非弾性近似では温位 (エントロピー) の観点から解釈していることから, 前者を強いブシネスク近似, 後者を弱いブシネスク近似と呼ぶこともある.

2.9 地衡流

回転系での Navier-Stokes 方程式は

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}=-\frac{1}{\rho}\nabla p-2\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{u}+\boldsymbol{g}+A\nabla^2\boldsymbol{u} \tag{2.112}$$

である. ここで各項のオーダーの見積りから, 鉛直方向には静力学方程式, そして水平方向には圧力傾度力とコリオリ力のバランスから,

$$f\boldsymbol{u}=\frac{1}{\rho}\boldsymbol{k}\times\nabla p \tag{2.113}$$

の関係が現れる[*4]．このとき, 流れは圧力の等値線 (等圧線) 沿う．このような流れのことを地衡流という．北半球では高圧部を右手に見るような流れである．摩擦力がほとんどはたらかないような地点における流れは地衡流に近い.

[*4] 地衡流の近似が成り立つのは, 流れの速さのスケールを U, コリオリパラメータを f, 水平の長さスケールを L としたとき, ロスビー数 $\dfrac{U}{fL}$ が小さいときである．地衡流の近似はロスビー数による展開の第ゼロ次近似であり, 一次の項まで展開すると準地衡流近似となる.

第3章　循環と渦度

3.1　渦度

渦度は流れの回転する傾向を表す量である． 水平流速 (u, v) に対して，渦度 $\zeta = \dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y} = \boldsymbol{k} \cdot \nabla \times \boldsymbol{u}$ である．渦度には，流れ $\boldsymbol{u}$ による渦度 (相対渦度 ζ) と地球の自転による渦度 (惑星渦度 f) があり，これらの合計を絶対渦度という．

半径 A，角速度 $\boldsymbol{\Omega}$ で円運動する物体のもつ渦度は，

$$\begin{aligned} x &= A\cos\Omega t \quad u = -A\Omega\sin\Omega t \\ y &= A\sin\Omega t \quad v = A\Omega\cos\Omega t \end{aligned} \qquad ()$$

より，

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 2\Omega \qquad (3.1)$$

である．緯度 θ にいる水粒子の渦度は $2\Omega\sin\theta = f$ である．

次に水柱の厚さ H が変化するとどうなるかを考える．この場合に保存するのはポテンシャル渦度 (渦位) $\dfrac{f+\zeta}{H}$ である．

ここで，連続成層した海のポテンシャル渦度を導出する． 2 次元の渦度の形式より，3 次元に拡張した渦度ベクトル $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \boldsymbol{u}$ と定義できる． 惑星渦度についても，3 次元で改めて求める． 位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の粒子が角速度 Ω で運動しているとき，その速度は $\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}$ である． よって，惑星渦度は，ベクトル解析の公式 $\nabla \times (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}\nabla \cdot \boldsymbol{B} + (\boldsymbol{B}\nabla)\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\nabla \cdot \boldsymbol{A} - (\boldsymbol{A} \cdot \nabla)\boldsymbol{B}$ より，

$$\begin{aligned} \nabla \times (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}) &= \boldsymbol{\Omega}\nabla \cdot \boldsymbol{r} + (\boldsymbol{r} \cdot \nabla)\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{r}\nabla \cdot \boldsymbol{\Omega} - (\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla)\boldsymbol{r} \\ &= 2\boldsymbol{\Omega} \end{aligned} \qquad ()$$

となる．ゆえに絶対渦度 $\boldsymbol{\omega_a}$ は，

$$\boldsymbol{\omega_a} = \boldsymbol{\omega} + 2\boldsymbol{\Omega} = \nabla \times (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}) \qquad (3.2)$$

となる.

3.2 渦度方程式

回転系の Navier-Stokes 方程式

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - 2\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{u} + \boldsymbol{g} + \boldsymbol{F_r} \tag{3.3}$$

について, ベクトル解析の公式

$$\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} + (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) + \boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B}) \tag{3.4}$$

より,

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} &= \frac{1}{2}\nabla(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{u}\times(\nabla\times\boldsymbol{u}) \\ &= \nabla\frac{|\boldsymbol{u}|^2}{2} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{u}\end{aligned} \tag{}$$

なので, これを代入すると,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{u} &= -\frac{1}{\rho}\nabla p - 2\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{u} + \nabla\left(\phi - \frac{|\boldsymbol{u}|^2}{2}\right) + \boldsymbol{F_r} \\ \therefore \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega_a}\times\boldsymbol{u} &= -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nabla\left(\phi - \frac{|\boldsymbol{u}|^2}{2}\right) + \boldsymbol{F_r}\end{aligned} \tag{}$$

となる. この式の rotation をとる (ここからは**渦度方程式**となる) と,

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega_a}}{\partial t} + \nabla\times(\boldsymbol{\omega_a}\times\boldsymbol{u}) = \frac{\nabla\rho\times\nabla p}{\rho^2} + \nabla\times\boldsymbol{F_r} \tag{3.5}$$

となる ($\boldsymbol{\Omega}$ は不変なので, $\dfrac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \dfrac{\partial\boldsymbol{\omega_a}}{\partial t}$ より). ここで, ベクトル解析の公式

$$\nabla\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = (\nabla\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{A} + (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} - (\nabla\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B} \tag{3.6}$$

より $(\nabla\cdot\boldsymbol{\omega_a})\boldsymbol{u} = 0$ なので

$$\nabla\times(\boldsymbol{\omega_a}\times\boldsymbol{u}) = (\nabla\cdot\boldsymbol{u})\boldsymbol{\omega_a} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{\omega_a} - (\boldsymbol{\omega_a}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} \tag{3.7}$$

となり, これを代入して,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{\omega_a}}{\partial t} + (\nabla\cdot\boldsymbol{u})\boldsymbol{\omega_a} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{\omega_a} - (\boldsymbol{\omega_a}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} &= \frac{\nabla\rho\times\nabla p}{\rho^2} + \nabla\times\boldsymbol{F_r} \\ \therefore \frac{d\boldsymbol{\omega_a}}{dt} &= (\boldsymbol{\omega_a}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} - (\nabla\cdot\boldsymbol{u})\boldsymbol{\omega_a} + \frac{\nabla\rho\times\nabla p}{\rho^2} + \nabla\times\boldsymbol{F_r}\end{aligned} \tag{}$$

となる ($\because \Omega = const.$). ここで, 右辺第 3 項は傾圧項 (ソレノイド項), 右辺第 4 項は外力項である. ① 右辺第 1 項と ② 第 2 項については組み合わせを変えて考える. 注目する方向 s の成分を取り出してみると,

$$\begin{aligned}
(\text{①の } s \text{ 成分}) &= (\boldsymbol{\omega_a} \cdot \nabla) u_s = \omega_{as} \frac{\partial u_s}{\partial s} + (\boldsymbol{\omega_{an}} \cdot \nabla_n) u_s \\
(\text{②の } s \text{ 成分}) &= -(\nabla \cdot \boldsymbol{u}) \boldsymbol{\omega_a} = -\frac{\partial u_s}{\partial s} \omega_{as} - (\nabla_n \cdot \boldsymbol{u}_n) \omega_{as} \\
(\text{①} + \text{②の } s \text{ 成分}) &= (\boldsymbol{\omega_{an}} \cdot \nabla_n) u_s - (\nabla_n \cdot \boldsymbol{u}_n) \omega_{as}
\end{aligned} \tag{}$$

となる. () の右辺第 1 項を tilting term, 第 2 項を streching term という.

順圧な流れ

渦度方程式は, 外力がゼロまたはポテンシャル力 ($f = -\nabla\Omega$) の条件下では,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} &= \nabla \times (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{\omega}), \\
\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} &= (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \boldsymbol{u} - (\nabla \cdot \boldsymbol{u}) \boldsymbol{\omega}
\end{aligned} \tag{}$$

となる. さらに非発散の条件下では,

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \boldsymbol{u} \tag{3.8}$$

となる. 2 次元流の場合, $\boldsymbol{\omega}$ は流れの方向に垂直で, 流れは流れに垂直な方向に変化しないので, $\dfrac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = 0$ となる. つまり渦度はラグランジュ的に保存する.

圧力座標系での渦度方程式

圧力座標系において渦度方程式を考える. ここで, 次のようなベクトル表記

$$(\boldsymbol{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{u} = \nabla \left(\frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}}{2} \right) + \omega_z \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{u} \tag{3.9}$$

を用いて

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} + f \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{u} = -\nabla_p \Psi \tag{3.10}$$

を書き換えると, $\dfrac{d}{dt} = \dfrac{\partial}{\partial t} + u\dfrac{\partial}{\partial x} + v\dfrac{\partial}{\partial y} + \omega\dfrac{\partial}{\partial p}$ であるので,

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} = -\nabla\left(\frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}}{2} + \phi\right) - (\omega_z + f)\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{u} - \omega\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial p} \tag{3.11}$$

となる. $\boldsymbol{k}\cdot\nabla\times$ () を行うと, ベクトル解析の公式 $\nabla\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = (\nabla\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{a} - (\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b} - (\nabla\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{a}$ を用いて,

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t} = -\boldsymbol{u}\cdot\nabla(\omega_z + f) - \omega\frac{\partial \omega_z}{\partial p} - (\omega_z + f)\nabla\cdot\boldsymbol{u} + \boldsymbol{k}\cdot\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial p}\times\nabla\omega\right) \tag{3.12}$$

となる. 圧力座標系での渦度方程式は密度と気圧のソレノイド項による渦度の生成がないことがわかる.

3.3 ラグランジュの渦定理

渦度方程式 () について, 連続の式 $\dfrac{d\omega}{dt} = -\rho(\nabla\cdot\boldsymbol{u})$ を用いて,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\rho}\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} + \frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho^2}\frac{d\rho}{dt} &= \frac{1}{\rho}(\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} + \frac{\nabla\rho\times\nabla p}{\rho^3} + \frac{\nabla\times\boldsymbol{F_r}}{\rho}\\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}\right) &= (\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} + \frac{\nabla\rho\times\nabla p}{\rho^3} + \frac{\nabla\times\boldsymbol{F_r}}{\rho}\end{aligned} \tag{}$$

となる.

順圧でかつ外力がゼロまたはポテンシャル力の条件では,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}\right) = \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}\cdot\nabla\right)\boldsymbol{u} \tag{3.13}$$

となる. ある流体粒子に注目すると, $t=0$ で $\boldsymbol{\omega}=0$ ならその後もずっと $\boldsymbol{\omega}=0$ であり, $t=0$ で $\boldsymbol{\omega}\neq 0$ ならその後もずっと $\boldsymbol{\omega}\neq 0$ である. つまり, 渦なしならその後も渦なしで, 渦ありならその後も渦ありである. これをラグランジュの渦定理 (Lagrange's vortex theorem) または渦の不生不滅の定理という.

3.4 ヘルムホルツの渦定理

渦度方程式について, 順圧でかつ外力がゼロまたはポテンシャル力の条件では,

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = (\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} - (\nabla\cdot\boldsymbol{u})\boldsymbol{\omega} \tag{3.14}$$

となる．ここで, $\boldsymbol{\omega}$ に垂直な成分と平行な成分とに分ける．すると,

$$\begin{aligned}\left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\right)_{/\!/} &= \omega_{/\!/}\frac{\partial}{\partial s}u_{/\!/} - \left(\frac{\partial u_{/\!/}}{\partial s} + \nabla\cdot\boldsymbol{u}_{\perp}\right)\boldsymbol{\omega}_{/\!/} = -(\nabla_{\perp}\cdot\boldsymbol{u}_{\perp})\omega_{/\!/} \\ \left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\right)_{\perp} &= \boldsymbol{\omega}_{/\!/}\frac{\partial}{\partial s}\boldsymbol{u}_{/\!/}\end{aligned} \tag{}$$

となり, s は $\boldsymbol{\omega}$ に沿った長さで $\boldsymbol{\omega} = \omega$ である．ある点 P とそこから $\boldsymbol{\omega}$ の方向に微小距離 $\delta\boldsymbol{r}$ だけ離れた Q を考える．δs 後に P, Q は P′, Q′ に移動する．P での $\boldsymbol{\omega}$ から P′ での $\boldsymbol{\omega}$ での $\boldsymbol{\omega}$ への δt の間の変化 $\dfrac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\delta t$ は

$$(\boldsymbol{\omega}\text{方向への変化}) = \left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\right)_{\perp}\delta t/\boldsymbol{\omega} \tag{3.15}$$

と書ける．一方, $\boldsymbol{PQ}$ から $\boldsymbol{P'Q'}$ の δt の間の変化 $\dfrac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial s}\delta\boldsymbol{r}\cdot\delta t$ は,

$$(\boldsymbol{PQ}\text{方向への変化}) = \frac{\partial\boldsymbol{u}_{\perp}}{\partial s}\delta\boldsymbol{r}\cdot\delta t/\delta\boldsymbol{r} = \frac{\partial\boldsymbol{u}_{\perp}}{\partial s}\cdot\delta t \tag{3.16}$$

と書ける．() より両者は一致する．よって, ある時に二点の相対位置が渦度の方向を向いていれば, 時間が経っても常にその方向を向いていて, 渦線は時間が経っても同じ流体粒子に乗っている．

一方, P の周りで渦線に垂直な小さな面積 δS をとると,

$$\nabla_{\perp}\cdot\boldsymbol{u}_{\perp} = \frac{1}{\delta S}\frac{d\delta s}{dt} \tag{3.17}$$

であり, () より

$$\begin{aligned}\frac{d\omega}{dt} &= -\frac{1}{\delta S}\frac{d\delta S}{dt}\omega, \\ \delta S\frac{d\omega}{dt} + \omega\frac{d\delta S}{dt}\omega &= 0, \\ \frac{d}{dt}\left(\omega\delta S\right) &= 0\end{aligned} \tag{}$$

となる．よって $\omega\delta S$ はラグランジュ的に保存する．$\omega\delta S$ を渦管の強さという．

ある時刻に一つの渦線を成している流体粒子 (群) はその後も同じ渦線をつくり, 渦管の強さは変わらない．これをヘルムホルツの渦定理という．

3.5 渦位方程式

ここで, 連続の式より $\nabla\cdot\boldsymbol{u} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{d\rho}{dt}$ を代入すると.

$$\frac{d\boldsymbol{\omega_a}}{dt} = \frac{\boldsymbol{\omega_a}}{\rho}\frac{d\rho}{dt} + (\boldsymbol{\omega_a}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} + \frac{\nabla\rho\times\nabla p}{\rho^2} + \nabla\times\boldsymbol{F_r} \tag{3.18}$$

となる. 両辺に $\dfrac{1}{\rho}$ を掛けると,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\rho}\frac{d\boldsymbol{\omega_a}}{dt} - \frac{\boldsymbol{\omega_a}}{\rho^2}\frac{d\rho}{dt} &= \left(\frac{\boldsymbol{\omega_a}}{\rho}\cdot\nabla\right)\boldsymbol{u} + \frac{\nabla\rho\times\nabla p}{\rho^3} + \frac{1}{\rho}(\nabla\times\boldsymbol{F_r})\\ \therefore \frac{d}{dt}\left(\frac{\boldsymbol{\omega_a}}{\rho}\right) &= \left(\frac{\boldsymbol{\omega_a}}{\rho}\cdot\nabla\right)\boldsymbol{u} + \frac{\nabla\rho\times\nabla p}{\rho^3} + \frac{1}{\rho}(\nabla\times\boldsymbol{F_r})\end{aligned}$$

さてここで, 次の式を満たす量 λ を考える (Ψ は λ の source または sink である).

$$\frac{d\lambda}{dt} = \Psi \tag{3.19}$$

() と $\nabla\lambda$ との内積をとると,

$$\nabla\lambda\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{\boldsymbol{\omega_a}}{\rho}\right) = \left[\left(\frac{\boldsymbol{\omega_a}}{\rho}\cdot\nabla\right)\boldsymbol{u}\right]\cdot\nabla\lambda + \nabla\lambda\cdot\frac{\nabla\rho\times\nabla p}{\rho^3} + \frac{\nabla\lambda}{\rho}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{F_r}) \tag{3.20}$$

となる. ここで,

$$\left[\left(\frac{\boldsymbol{\omega_a}}{\rho}\cdot\nabla\right)\boldsymbol{u}\right]\cdot\nabla\lambda = \left(\frac{\boldsymbol{\omega_a}}{\rho}\cdot\nabla\right)\frac{d\lambda}{dt} - \frac{\boldsymbol{\omega_a}}{\rho}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\nabla\lambda \tag{3.21}$$

なので,

$$\begin{aligned}\nabla\lambda\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{\boldsymbol{\omega_a}}{\rho}\right) + \frac{\boldsymbol{\omega_a}}{\rho}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\nabla\lambda &= \left(\frac{\boldsymbol{\omega_a}}{\rho}\cdot\nabla\right)\frac{d\lambda}{dt} + \nabla\lambda\cdot\frac{\nabla\rho\times\nabla p}{\rho^3} + \frac{\nabla\lambda}{\rho}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{F_r})\\ \therefore \frac{d}{dt}\left(\frac{\boldsymbol{\omega_a}}{\rho}\cdot\nabla\lambda\right) &= \left(\frac{\boldsymbol{\omega_a}}{\rho}\cdot\nabla\right)\Psi + \nabla\lambda\cdot\frac{\nabla\rho\times\nabla p}{\rho^3} + \frac{\nabla\lambda}{\rho}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{F_r})\end{aligned}$$

となる. したがって, もし

- λ が各水粒子について保存量 $(\Psi = 0)$
- 摩擦なし $(\boldsymbol{F_r} = 0)$

- 右辺第二項が無視できる $\left(\nabla\lambda\cdot\dfrac{\nabla\rho\times\nabla p}{\rho^3}=0\right)$

ならば, $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\boldsymbol{\omega_a}}{\rho}\cdot\nabla\lambda\right)=0$ となる．すなわち, $\dfrac{\boldsymbol{\omega_a}}{\rho}\cdot\nabla\lambda=\dfrac{2\boldsymbol{\Omega}+\boldsymbol{\omega}}{\rho}\cdot\nabla\lambda$ が保存する．$\left(\dfrac{2\boldsymbol{\Omega}+\boldsymbol{\omega}}{\rho}\cdot\nabla\lambda\right)$ は渦位の定義である．

λ としては, 大気では温位 θ が, 海洋ではポテンシャル密度 σ_θ がよく選ばれる．ポテンシャル密度 σ_θ を代入すると,

$$Q=\frac{\boldsymbol{\omega_a}}{\rho}\cdot\nabla\sigma_\theta \tag{3.22}$$

となる．$\boldsymbol{\Omega}=(0,\Omega\cos\theta,\Omega\sin\theta)$ および $\boldsymbol{\omega}=\nabla\times\boldsymbol{u}=\left(\dfrac{\partial w}{\partial y}-\dfrac{\partial v}{\partial z},\dfrac{\partial u}{\partial z}-\dfrac{\partial w}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial x}-\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)$ を代入すると,

$$Q=\frac{\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}}{\rho}\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial x}+\frac{2\Omega\cos\theta+\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}}{\rho}\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial y}+\frac{2\Omega\sin\theta+\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}}{\rho}\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial z} \tag{3.23}$$

となる．$H\ll L$ より, $\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial z}\gg\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial x},\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial y}$ なので,

$$Q=\frac{2\Omega\sin\theta+\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}}{\rho}\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial z}=\frac{f+\zeta}{\rho}\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial z} \tag{3.24}$$

となる．これが連続成層おける渦位の式である．渦位は保存量なので, 水塊のトレーサーとして広く用いられる．

3.6 ケルヴィンの循環定理

流体中に閉曲線 C をとる．このとき, $\Gamma=\oint_C\boldsymbol{u}\cdot d\boldsymbol{r}$ を**循環**という．ストークスの定理を用いると, $\Gamma=\oint_C\boldsymbol{u}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_S(\nabla\times\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{n}dS=\int_S\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{n}dS$ となる．Γ のラグランジュ的な時間変化がどうなるかを調べる．すると,

$$\frac{d\Gamma}{dt}=\oint_C\frac{d}{dt}(\boldsymbol{u}\cdot d\boldsymbol{r})=\oint_C\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}\cdot d\boldsymbol{r}+\oint_C\boldsymbol{u}\cdot\frac{d}{dt}(d\boldsymbol{r}) \tag{3.25}$$

と書ける．ここで, $\boldsymbol{u}\cdot\dfrac{d}{dt}(d\boldsymbol{r})=\boldsymbol{u}\cdot d\boldsymbol{u}=\dfrac{1}{2}du^2$ より,

$$\oint_C\boldsymbol{u}\cdot\frac{d}{dt}(d\boldsymbol{r})=\frac{1}{2}\oint_C du^2=0 \tag{3.26}$$

となる. $\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \boldsymbol{f}$ より

$$\oint_C \frac{d\boldsymbol{u}}{dt} \cdot d\boldsymbol{r} = -\oint_C \frac{1}{\rho}\nabla p d\boldsymbol{r} + \oint_C \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r} \tag{3.27}$$

となる. ここで,

$$-\oint_C \frac{1}{\rho}\nabla p d\boldsymbol{r} = -\int_S \nabla \times \left(\frac{1}{\rho}\nabla p\right) \cdot \boldsymbol{n} dS = \int_S \frac{\nabla\rho \times \nabla p}{\rho^2} \cdot \boldsymbol{n} dS \tag{3.28}$$

より, 結局

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \int_S \frac{\nabla\rho \times \nabla p}{\rho^2} \cdot \boldsymbol{n} dS + \oint_C \boldsymbol{f} d\boldsymbol{r} \tag{3.29}$$

となる. 順圧でかつ外力がゼロまたはポテンシャル力の条件では,

$$\frac{d\Gamma}{dt} = 0 \tag{3.30}$$

である. これをケルヴィンの循環定理 (Kelvin's circulation theorem) という.

3.7 渦定理, 渦度方程式, 渦位方程式の意味

ケルヴィンの循環定理を元に, これまで出てきた定理や方程式を容易に理解することができる.

まず, 閉曲線 C を小さくすると, $\Gamma = \omega_n \delta S$ である. ここから, Γ が保存するから, ω が最初にゼロならその後もずっとゼロであり, ゼロでないならその後もずっとゼロでないという渦の不生不滅の定理が言える. また, Γ が保存するから, C として $\boldsymbol{\omega}$ に垂直な面をとると, $\omega\delta S$ は不変であるというヘルムホルツの渦定理の後半が言える.

P を通る渦線を含む渦線群で面 (渦面) を作る. その上に微小な平曲面 C をとる. $\boldsymbol{\omega} \perp \boldsymbol{n}$ だから, $\Gamma = 0$ である. これは時間が経っても $\Gamma = 0$ である. P$'$ でも $\boldsymbol{\omega}$ は C' に平行で, C' は P$'$ を通る渦面上にある. 渦面として, P を通る別の渦面をとっても同じ結論が導かれる. つまり, その交線として P を通る渦線は P$'$ を通る渦線に移るのでヘルムホルツの渦定理の前半が言える.

渦度方程式

$$\frac{d\omega_s}{dt} = (\boldsymbol{\omega}_n \cdot \nabla_n) u_s - (\nabla_n \cdot \boldsymbol{u}_n)\omega_s + (\text{傾圧外力}) \tag{3.31}$$

について, 例えば s の方向として z 軸の方向をとる. すると,

$$\frac{d\omega_z}{dt} = \omega_x \frac{\partial w}{\partial x} + \omega_y \frac{\partial w}{\partial y} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \omega_z \tag{3.32}$$

となる. ここで, x 軸方向にある渦管を考えると, 右辺第 1 項は渦管が $\dfrac{\partial w}{\partial x}$ で起き上がって ω_z 成分が出てくる効果 (tilting) で, 右辺第 3 項 z 軸にある渦管が $-\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)$ で横に縮まる (渦の方向に伸びる) 効果 (streching) である.

閉曲面 C として $\lambda = const.$ を選ぶ. さらに隣の $\lambda = \lambda + \delta\lambda$ の面も考える. すると,

$$\nabla \cdot \frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} = \frac{\delta\lambda}{d} \frac{\omega_n}{\rho} \tag{3.33}$$

である. また, 微小な流体柱の質量 M は

$$M = \rho d \delta S \tag{3.34}$$

であり, 時間が経っても不変なので

$$\frac{\delta\lambda}{d} \frac{\omega_n}{\rho} = \omega_n \delta S \frac{\delta\lambda}{d\rho\delta S} \tag{3.35}$$

である. これは渦位の保存を示す.

以上をまとめる. ケルヴィンの循環定理は理解しやすく基本的である. ラグランジュの渦定理とヘルムホルツの渦定理は標語的である. 渦度方程式と渦位方程式は解析によく用いられるが, 渦度方程式は 3 成分を考えているので小規模現象に適していて, 渦位方程式は 1 成分のみを考えているので, 大規模現象に適している.

3.8 非圧縮流体のポテンシャル流

完全流体では渦度の保存性がよく, 初期で渦なしならその後も渦なしである. 非圧縮流体 ($\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0$) のポテンシャル流 ($\boldsymbol{u} = \nabla\phi$) を考えるときにはラプラス方程式の解を求めればよい. ϕ に関して線形で解の重ね合わせがきく.

一様流

ポテンシャルが

$$\phi = Ux + Vy + Wz = \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{r} \tag{3.36}$$

のとき,

$$\nabla\phi = (U, V, W) = \boldsymbol{U} \tag{3.37}$$

の一様流である.

湧き出し, 吸い込み

ポテンシャルが

$$\phi = -\frac{m}{r} \tag{3.38}$$

のとき,

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\phi}{dr}\right) = 0 \tag{3.39}$$

となる. ここで,

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{m}{r^2} \\ u_\theta &= 0 \\ u_\phi &= 0 \end{aligned} \quad ()$$

である. $m > 0$ ならば湧き出し, $m < 0$ ならば吸い込みである. ちなみに流量 Q は

$$Q = \int u_r dS = \frac{m}{r^2} \times 4\pi r^2 = 4\pi m \tag{3.40}$$

である.

一様流と湧き出しの重ね合わせ

ポテンシャルが

$$\phi = Ux - \frac{m}{r} \tag{3.41}$$

のとき, 流れは物体の周りの流れに置き換えられる.

$\boldsymbol{u}(x,y,z)=0$ の点をよどみ点という. $U>0, m>0$ のとき, よどみ点は

$$\begin{aligned} U-\frac{m}{x^2}&=0 \\ \therefore x&=-\sqrt{\frac{m}{U}} \end{aligned} \tag{}$$

である.

二重湧き出し

距離 d だけ離れた湧き出しと吸い込みの和で表される. それぞれのポテンシャルは,

$$\begin{aligned} -\frac{d}{2}\text{のところの吸い込み：}\quad \phi_- &= \frac{m}{[(x+\frac{r}{2})^2+y^2+z^2]^{\frac{1}{2}}} \\ +\frac{d}{2}\text{のところの湧き出し：}\quad \phi_+ &= \frac{m}{[(x-\frac{r}{2})^2+y^2+z^2]^{\frac{1}{2}}} \end{aligned} \tag{}$$

となる. $\phi=\phi_-+\phi_+, md\equiv\mu$ を一定にして $d\to 0$ の極限をとると,

$$\begin{aligned} \phi_- &= \frac{m}{[x^2+y^2+z^2+xd+\frac{d^2}{4}]^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{m}{[r^2+xd+\frac{d^2}{4}]^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{m}{r[1+\frac{1}{r}(xd+\frac{d^2}{4})]^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{m}{r}\left(1-\frac{xd}{2r^2}+\cdots\right) \end{aligned} \tag{}$$

より

$$\begin{aligned} \phi &= \phi_-+\phi_+ \\ &= \frac{m}{r}\left(1-\frac{xd}{2r^2}+\cdots\right)+\frac{m}{r}\left(1+\frac{xd}{2r^2}+\cdots\right) \\ &= -\frac{xmd}{r}+\cdots O\left(\left(\frac{d}{r}\right)^2\right) \end{aligned} \tag{}$$

となるので,

$$\phi \to -\frac{\mu x}{r^3} = -\frac{\mu\cos\theta}{r^2} \tag{3.42}$$

となる. これは電気双極子と同じ形である.

一様流と二重湧き出しの重ね合わせ

ポテンシャルは

$$\phi = Ux - \frac{\mu x}{r^2} = Ur\cos\theta - \frac{\mu\cos\theta}{r^2} = \left(Ur - \frac{\mu}{r^2}\right)\cos\theta \tag{3.43}$$

である．よって，

$$u_r = \frac{\partial\phi}{\partial r} = \left(U + \frac{2\mu}{r^3}\right)\cos\theta \tag{3.44}$$

である． ここで，$U > 0, \mu < 0$ ならば $U + \dfrac{2\mu}{r^3} = 0$ となる r が存在し，つまり $r = \sqrt[3]{-\dfrac{2\mu}{U}}$ のときに θ に関わらず $u_r = 0$ である． $R = \sqrt[3]{-\dfrac{2\mu}{U}}$ と置くと $\mu = -\dfrac{UR^3}{2}$ であり，$\phi = \left(r + \frac{R^3}{2r^2}\right)U\cos\theta$ は遠方で U, 半径 R の球の周りの流れとみなせる．

ダランベールのパラドックス (D'Alembert's paradox)

上でみた球の周りの流れは

$$\begin{aligned}
\phi &= \left(r + \frac{R^3}{2r^2}\right)U\cos\theta \\
u_r &= \frac{\partial\phi}{\partial r} = U\left(1 - \frac{R^3}{r^3}\cos\theta\right) \\
u_\theta &= \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} = U\left(1 - \frac{R^3}{2r^3}\sin\theta\right) \\
u_\psi &= \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\psi} = 0
\end{aligned} \tag{}$$

で表される．球面上 $r = R$ では $u_r = 0, u_\theta = \dfrac{3}{2}\sin\theta, u_\psi = 0$ である．ここで，ベルヌーイの定理より

$$\begin{aligned}
p + \frac{1}{2}\rho u^2 &= const. \\
p + \frac{1}{2}\rho u_\theta^2 &= p_\infty + \frac{1}{2}\rho U^2
\end{aligned} \tag{}$$

$$\therefore p = p_\infty + \frac{1}{2}\rho U^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{9}{4}U^2\sin^2\theta$$

であるので, 球が流体から受ける力は y, z 成分は対称性からゼロ. x 成分は $-p\cos -theta$ を積分すると

$$F = \int_0^{\pi} -p\cos\theta \cdot 2\pi R^2 \sin\theta d\theta = 0 \tag{3.45}$$

となる. つまり抵抗力はゼロである. これは粘性を考慮していない完全流体のためである.

3.9　2 次元非圧縮流体のポテンシャル流

2 次元の場合も 3 次元と同様. $\boldsymbol{u} = \nabla\phi$ $(u = \frac{\partial\phi}{\partial x}, v = \frac{\partial\phi}{\partial y})$ とすると, $\phi^2 = 0$ を解けばよい. また, 2 次元で非圧縮なので流線関数が導入できる $(u = -\frac{\partial\psi}{\partial y}, v = \frac{\partial\psi}{\partial x})$. 渦なし条件を入れると, $\omega = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = \nabla^2\psi = 0$ となり, ψ に関してもラプラス方程式を解けばよい. さらに,

$$\begin{aligned} \frac{\partial\phi}{\partial x} &= -\frac{\partial\psi}{\partial y} \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} &= \frac{\partial\psi}{\partial x} \end{aligned} \tag{}$$

の関係は, $f = \phi - i\psi, z = x + iy$ としたときの f が z の解析関数になる条件 (コーシーリーマンの関係式) である. $f(z)$ を速度速度ポテンシャル (complex velocity potential) という.

$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial\phi}{\partial x} - i\frac{\partial\psi}{\partial x} = u - iv = |\boldsymbol{u}e^{-i\theta}| \tag{3.46}$$

である. この $u - iv$ を複素速度 (complex velocity) という. 複素解析関数と 2 次元非圧縮ポテンシャル流が 1 対 1 で対応することになる.

閉曲線 C を 1 周する f の変化は

$$\begin{aligned} \oint &= \oint \frac{df}{dz}dz \\ &= \oint (u - iv)(dx + idy) \\ &= \oint (udx + vdy) + i\oint (udy - idx) \\ &= \oint \boldsymbol{u}d\boldsymbol{l} + i\oint \boldsymbol{m} \\ &= \Gamma + iQ \end{aligned} \tag{}$$

である.

一様流

複素速度ポテンシャルは $f(z) = Az \ \ (A = U - iV)$ で書ける. このとき,

$$\begin{aligned} \phi &= Ux + Vy \\ \psi &= Vx - Uy \\ \frac{df}{dz} &= A = U - iV \quad (u = U, v = V) \end{aligned} \tag{}$$

である.

角を回る流れ

複素速度ポテンシャルは $f(z) = Az^n \ \ (A > 0, z > 0)$ で書ける. 極座標で書くと,

$$\begin{aligned} z &= x + iy = re^{i\theta} \\ f(z) &= Ar^n e^{in\theta} \\ \phi &= Ar^n \cos n\theta \\ \psi &= -Ar^n \sin n\theta \end{aligned} \tag{}$$

となる. $\psi = 0$ となるのは $\theta = \dfrac{k\pi}{n}$ のときである. これは角度 $\frac{\pi}{n}$ の角の周りの流れ

$$\begin{aligned} \frac{df}{dz} &= Anz^{n-1} \\ |\boldsymbol{u}| &= Anr^{n-1} \end{aligned} \tag{}$$

である. $n < 1$ では $r = 0$ で $|\boldsymbol{u}| \to \infty$ となる.

3.10 レイノルズ数と相似則

ナヴィエ-ストークス方程式

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu \nabla^2 \boldsymbol{u} \tag{3.47}$$

について,

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{x}} &= \frac{\boldsymbol{x}}{L}\\ \tilde{t} &= \frac{t}{L/U}\\ \tilde{\boldsymbol{u}} &= \frac{\boldsymbol{u}}{U}\\ \tilde{p} &= \frac{p}{\rho U^2}\end{aligned} \qquad ()$$

を用いて無次元化すると,

$$\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{u}}}{\partial t} + (\tilde{\boldsymbol{u}} \cdot \tilde{\nabla})\tilde{\boldsymbol{u}} = -\tilde{\nabla}\tilde{p} + \frac{\nu}{UL}\tilde{\nabla}^2\tilde{\boldsymbol{u}} \qquad (3.48)$$

となる．ここで, $R_e \equiv \frac{UL}{\nu}$ は無次元数で, レイノルズ数 (Reynold's number) という．レイノルズ数は移流項と粘性項の大きさの比を表す.

3.11 ナヴィエ-ストークス方程式の厳密解

ナヴィエ-ストークス方程式は非線形であるため, 厳密に解くことは難しい．しかし, 平行流の場合は非線形項が恒等的にゼロになる.

クェット流 (Couette flow)

無限に広がる二枚の平板 (間隔 h) を, 片方のみを速さ U で平行に移動させる．このときナヴィエ-ストークス方程式は,

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\\ \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)\\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0\end{aligned} \qquad ()$$

となる．境界条件は

$$\begin{aligned}u = v = 0 &\quad (\text{ at } y = 0\ )\\ u = U, v = 0 &\quad (\text{ at } y = h\ )\end{aligned} \qquad ()$$

である．定常状態を考えるので時間微分はゼロとなり，また流れは x 方向に一様なので $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0$ である．連続の式より $\dfrac{\partial v}{\partial y} = 0, v = const.$ で，境界条件から $v = 0$ となる．また，

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ 0 &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \end{aligned} \tag{}$$

となる．流れの方向にも圧力勾配がないとすると $\left(\frac{\partial p}{\partial x} = 0\right)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad u = Ay + B \tag{3.49}$$

となる．境界条件より，

$$u = U\frac{y}{h} \tag{3.50}$$

である．

平面ポアズイユ流 (plane Poiseuille flow)

静止している平行平板間に $\dfrac{dp}{dx} = const. \neq 0$ の圧力勾配をかける．() まではクエット流と同じであるので，

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{1}{\rho\nu}\frac{dp}{dx} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{1}{\rho\nu}\frac{dp}{dx}y + C \\ u &= \frac{1}{\rho\nu}\frac{dp}{dx}y^2 + C_1 y + C_2 \end{aligned} \tag{}$$

となる．境界条件は

$$u = 0 \quad (\text{ at } y = 0, h\ ) \tag{3.51}$$

である．よって，

$$u = \frac{1}{\rho\nu}\frac{dp}{dx}(y - h)y \tag{3.52}$$

である．

最大速度 U_{MAX} は

$$U_{MAX} = u_{(y=\frac{1}{2}h)} = -\frac{1}{8\rho\nu}\frac{dp}{dx}h^2 \tag{3.53}$$

であり, 流量 Q は

$$Q = \int_0^h u dy = \frac{1}{2\rho\nu}\frac{dp}{dx}\int_0^h (y^2 - hy)dy = -\frac{1}{12\rho\nu}\frac{dp}{dx}h^2 \tag{3.54}$$

である.

ハーゲン・ポアズイユ流 (Hagen-Poiseuille flow)

半径 a の円形断面をもつ管路内に $\dfrac{dp}{dz} = const. \neq 0$ の圧力勾配をかける. このときナヴィエ-ストークス方程式は,

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \phi}u_\phi = 0 \\
&\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_z\frac{\partial u_z}{\partial z} + u_r\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\phi}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \phi} \\
&\quad = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\left[\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_z}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2}\right] \\
&\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_z\frac{\partial u_r}{\partial z} + u_r\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\phi}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \phi} - \frac{u_\phi^2}{r} \\
&\quad = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\left[\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_r}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\phi}{\partial \phi}\right] \\
&\frac{\partial u_\phi}{\partial t} + u_z\frac{\partial u_\phi}{\partial z} + u_r\frac{\partial u_\phi}{\partial r} + \frac{u_\phi}{r}\frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} - \frac{u_r u_\phi}{r} \\
&\quad = -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\left[\frac{\partial^2 u_\phi}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_\phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial \phi} - \frac{u_\phi}{r^2}\right]
\end{aligned} \tag{}$$

となる. 境界条件は

$$u_z = u_r = u_\phi = 0 \quad (\text{ at } r = a\ ) \tag{3.55}$$

である. 定常状態を考えるので時間微分はゼロとなり, 流れは z, ϕ 方向に一様なので,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{\partial u_r}{\partial z} = \frac{\partial u_\phi}{\partial z} \\
\frac{\partial u_z}{\partial \phi} = \frac{\partial u_r}{\partial \phi} = \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi}
\end{aligned} \tag{}$$

である. 連続の式より

$$\begin{aligned}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_r) &= 0\\ \frac{\partial}{\partial r}(ru_r) &= 0\\ ru_r &= C\\ u_r &= \frac{C}{r}\end{aligned} \tag{}$$

となるので $u_r = u_\phi = 0$ である. よって,

$$\begin{aligned}0 &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\nu}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)\\ \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_z}{\partial r}\right) &= \frac{1}{\rho\nu}\frac{\partial p}{\partial z}r\\ r\frac{\partial u_z}{\partial r} &= \frac{1}{2\rho\nu}\frac{\partial p}{\partial z}r^2 + C_1\\ u_z &= \frac{1}{4\rho\nu}\frac{\partial p}{\partial z}r^2 + C_1\log r + C_2\end{aligned} \tag{}$$

となる. $r = a$ で $u_z = 0$ であり, $r = 0$ でも発散しないという条件から

$$u_z = \frac{1}{4\rho\nu}\frac{\partial p}{\partial z}(r^2 - a^2) \tag{3.56}$$

である.

最大速度 U_{MAX} は

$$U_{MAX} = u_{(r=0)} = -\frac{1}{4\rho\nu}\frac{dp}{dz}a^2 \tag{3.57}$$

であり, 流量 Q は

$$Q = \int_0^a u_z 2\pi r dr = \frac{2\pi}{4\rho\nu}\frac{dp}{dz}\int_0^a (r^3 - a^2 r)dr = -\frac{\pi}{8\rho\nu}\frac{dp}{dz}a^4 \tag{3.58}$$

である.

レイリーの流れ (Rayleigh flow)

無限長の平板に接した半無限領域の流体を考える．$t=0$ で静止していて, $t=0$ から U で自身に平行に動くものとする．ナヴィエ-ストークス方程式は

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)\\ \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0\end{aligned} \tag{}$$

となる．初期条件は

$$u=0 \quad (\text{ at } t=0 \text{ }) \tag{3.59}$$

であり, 境界条件は

$$u=v=0 \quad (\text{ at } y=0 \text{ }) \tag{3.60}$$

$$u\to 0 \quad (\text{ at } y\to\infty \text{ }) \tag{3.61}$$

である．流れは x 方向に一様なので, x についての微分がゼロとなり, $\dfrac{\partial v}{\partial y}=0$ となる．境界条件より $v=0$ となる．よって,

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{3.62}$$

と書き直せる．ここで, $\eta=\dfrac{y}{2\sqrt{\nu t}}$ を導入すると,

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}&=\frac{du}{d\eta}\frac{\partial\eta}{\partial t}=\frac{du}{d\eta}\left(-\frac{y}{4\sqrt{\nu}}\frac{1}{t^{3/2}}\right)=-\frac{du}{d\eta}\frac{\eta}{2t}\\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}&=\frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{d}{d\eta}\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{du}{d\eta}\right)-\frac{1}{4\nu t}\frac{d^2u}{d\eta^2}\\ -\frac{du}{d\eta}\frac{\eta}{2t}&=\frac{1}{4t}\frac{d^2u}{d\eta^2}\\ \frac{d^2u}{d\eta^2}+2\eta\frac{du}{d\eta}&=0\\ \frac{du}{d\eta}=C_1\exp-\eta^2 u&=C_1\frac{\sqrt{\pi}}{2}erf(\eta)+C_2\\ erf(\eta)&\equiv\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\eta\exp-\xi^2 d\xi\end{aligned} \tag{}$$

となる．境界条件より,

$$u=-Uerf(\eta)+U=U\left[1-erf\left(\frac{y}{2\sqrt{\nu t}}\right)\right] \tag{3.63}$$

となる. これは自己相似解 (self-similar solution) になる.

$$ \qquad () $$

第4章　浅水波動

4.1　浅水波方程式

非粘性の運動方程式および連続の式,

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}-fv&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\\ \frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+fu&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}\\ \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}&=0\end{aligned} \tag{}$$

を考える.

ここから浅水波方程式を導く.

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}-fv&=-g\frac{\partial h}{\partial x}\\ \frac{\partial v}{\partial t}+fu&=-g\frac{\partial h}{\partial y}\\ \frac{\partial h}{\partial t}+H\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)&=0\end{aligned} \tag{}$$

ここで, 密度が一様で深さ一定 (H_0) の浅い $(L \gg H_0)$ 海を考える. 浅い海だと静水圧近似 $p=\rho_0 g(\eta-z)$ が使えて,

$$\begin{aligned}-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x}&=-g\frac{\partial \eta}{\partial x}\\ -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial y}&=-g\frac{\partial \eta}{\partial y}\end{aligned} \tag{}$$

である. w は小さいので, 鉛直移流は無いものとして拡散も無視する. 水平方向の

運動方程式は,

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}-fv&=-g\frac{\partial \eta}{\partial x}\\ \frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+fu&=-g\frac{\partial \eta}{\partial y}\end{aligned} \quad ()$$

であり, 質量保存の式は,

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z} \quad (4.1)$$

である.(), () は深さに依らず成り立つ (u, v は z に依らない). そこで質量保存の式を z 方向に積分すると,

$$w(x,y,z,t)=-z\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+A(x,y,t) \quad (4.2)$$

となる.

海底では $w=0$ なので, $w(x,y,-H_0,t)=0$ である. よって,

$$A(x,y,t)=w(x,y,-H_0,t)-H_0\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=-H_0\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right) \quad (4.3)$$

であり,

$$w(x,y,z,t)=-(H_0+z)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right) \quad (4.4)$$

である.

次に, 海面 ($z=\eta(x,y,t)$) では

$$w(x,y,z,t)=\frac{\partial \eta}{\partial t}+u\frac{\partial \eta}{\partial x}+v\frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (4.5)$$

である. よって,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \eta}{\partial t}+u\frac{\partial \eta}{\partial x}+v\frac{\partial \eta}{\partial y}&=-(H_0+\eta)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\\ \therefore\left(\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}\right)(H_0+\eta)+(H_0+\eta)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)&=0\\ \therefore\frac{dH}{dt}+H\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)&=0\end{aligned} \quad ()$$

となる. ()∼() を合わせて浅水波方程式という.

浅水波方程式を線形化する. η は小さいので $H \to H_0$, u, v も小さいので移流項は無いとする. すると,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} - fv &= -g\frac{\partial \eta}{\partial x} \\
\frac{\partial v}{\partial t} + fu &= -g\frac{\partial \eta}{\partial y} \\
\frac{\partial \eta}{\partial t} + H_0\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) &= 0
\end{aligned} \tag{}
$$

となる. () を f について場合分けして考える.

$f = 0$ のとき

() は

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= -g\frac{\partial \eta}{\partial x} \\
\frac{\partial v}{\partial t} &= -g\frac{\partial \eta}{\partial y} \\
\frac{\partial \eta}{\partial t} + H_0\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) &= 0
\end{aligned} \tag{}
$$

となるので

$$
\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = gH_0\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)\eta \tag{4.6}
$$

となる. 平面波解 $\eta = \eta_0 \exp i(kx + ly - \omega t)$ を仮定すると,

$$
\begin{aligned}
\omega^2 &= gH_0(k^2 + l^2) \\
\therefore \omega &= \pm\sqrt{gH_0(k^2 + l^2)}, \\
c &= \frac{\omega}{\sqrt{k^2 + l^2}} = \pm\sqrt{gH_0}
\end{aligned} \tag{}
$$

となる. これは重力波 (の中でも波長の大きい浅水波) である.

$f = f_0$(一定) のとき

() は

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} - f_0 v &= -g\frac{\partial \eta}{\partial x}\\ \frac{\partial v}{\partial t} + f_0 u &= -g\frac{\partial \eta}{\partial y}\\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + H_0\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) &= 0\end{aligned} \tag{}$$

となる. 解の形として

$$\begin{aligned}u &= u_0 \exp i(kx + ly - \omega t)\\ v &= v_0 \exp i(kx + ly - \omega t)\\ \eta &= \eta_0 \exp i(kx + ly - \omega t)\end{aligned} \tag{}$$

を仮定すると,

$$\omega\omega^2 - f_0^2 - gH_0(k^2 + l^2) = 0 \tag{4.7}$$

となる. まず, $\omega = 0$ (定常状態) のとき,

$$\begin{aligned}-f_0 v &= -g\frac{\partial \eta}{\partial x}\\ f_0 u &= -g\frac{\partial \eta}{\partial y}\end{aligned} \tag{}$$

となり, 地衡流バランスの式である. 次に, $\omega \neq 0$ のとき

$$\begin{aligned}\omega^2 &= gH_0(k^2 + l^2) + f_0^2 = gH_0(k^2 + l^2)\left(1 + \frac{f_0^2}{gH_0(k^2 + l^2)}\right)\\ \therefore \omega &= \pm\sqrt{gH_0}(k^2 + l^2)^{\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{f_0^2}{gH_0(k^2 + l^2)}\right)^{\frac{1}{2}},\\ c &= \frac{\omega}{\sqrt{k^2 + l^2}} = \pm\sqrt{gH_0}\left(1 + \frac{f_0^2}{gH_0(k^2 + l^2)}\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned} \tag{}$$

となる. これはコリオリ力で変形された重力波で慣性重力波である.

$f = f_0 + \beta y$ のとき

() と () を cross 微分すると,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) + f\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \beta y \tag{4.8}$$

となる. (), (), () に前と同じように平面波の式 () を代入すると,

$$\begin{pmatrix} -i\omega, -f, ikg \\ ikH_0, ilH_0, -i\omega \\ -\omega l + ifk, \omega k + \beta + ikl, 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ \eta_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.9}$$

となる. (行列式)$= 0$ より,

$$(\omega k + \beta)(\omega^2 - k^2 gH_0) - \omega f^2 k - \omega k l^2 gH_0 = 0 \tag{4.10}$$

である.

重力波よりも遅い波の場合

$\omega^2 \ll k^2 gH_0$ より $\omega^2 - k^2 gH_0 \sim -k^2 gH_0$ となるので, () は

$$\begin{aligned} -(\omega k + \beta)k^2 gH_0 - \omega f^2 k - \omega k l^2 gH_0 = 0 \\ \omega(k^2 + l^2 + \frac{f^2}{gH_0}) + \beta k = 0 \end{aligned} \tag{}$$

となる. よって, x 方向の位相速度は

$$C_x = \frac{\omega}{k} = \frac{\beta}{k^2 + l^2 + \frac{f^2}{gH_0}} = \frac{\beta}{k^2 + l^2 + \frac{1}{\lambda^2}} < 0 \tag{4.11}$$

となる. $\lambda = \dfrac{\sqrt{gH_0}}{f}$ はロスビー変形半径である. C_x は常に負であり, このような位相速度をもつ波をロスビー波という.

$\omega k \gg \beta$ の場合

() は

$$\begin{aligned} \omega k(\omega^2 - k^2 gH_0) - \omega f^2 k - \omega k l^2 gH_0 = 0 \\ \omega^2 = f_0^2 + gH_0(k^2 + l^2) \end{aligned} \tag{}$$

となり慣性重力波である.

これまでの議論をまとめると,

$$
\begin{aligned}
f=0 \quad \text{重力波} \quad C=\sqrt{gH_0} \\
f=f_0 \quad \text{慣性重力波} \quad C=\sqrt{gH_0}\left(1+\frac{1}{\lambda(k^2+l^2)}\right)^{\frac{1}{2}} \\
f=f_0+\beta y \quad \text{慣性重力波}+\text{ロスビー波} \quad C_x=-\frac{\beta}{k^2+l^2+\frac{1}{\lambda^2}}
\end{aligned}
\tag{}
$$

ということになる.

地形性ロスビー波とは, 北半球では水深の浅い方を右に見るように伝わる波で, 特にこれが海岸沿いにできるものを陸棚波 (continental shelf wave) という.

ケルビン波

y 軸に沿って壁があるような状況を考える. x 方向に運動がないと仮定する. このとき, ()∼() は

$$
\begin{aligned}
-fv &= -g\frac{\partial\eta}{\partial x} \\
\frac{\partial v}{\partial t} &= -g\frac{\partial\eta}{\partial y} \\
\frac{\partial\eta}{\partial t}+H_0\frac{\partial v}{\partial y} &= 0
\end{aligned}
\tag{}
$$

となる. () より

$$
\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}=gH_0\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2} \tag{4.12}
$$

となり, これは y 方向に $C_y=\pm\sqrt{gH_0}$ で伝わる波である. そこで, $\eta=A(x)\sin k(y\pm\sqrt{gH_0}t)$ とおくと, () より

$$
\frac{\partial^2\eta}{\partial t\partial x}=-f\frac{\partial\eta}{\partial y} \tag{4.13}
$$

なので,

$$
\begin{aligned}
\pm\frac{\partial A(x)}{\partial x}k\sqrt{gH_0}\cos k(y\pm\sqrt{gH_0}t) &= -fA(x)k\cos k(y\pm\sqrt{gH_0}t) \\
\therefore \frac{\partial A(x)}{\partial x} &= \mp\frac{f}{\sqrt{gH_0}}A(x)=\mp\frac{1}{\lambda}A(x) \\
\therefore A(x) &= \eta_0 e^{\mp\frac{x}{\lambda}}
\end{aligned}
\tag{}
$$

となる．ここで, $x \to -\infty$ で $A(x) \to 0$ より符号は正である．よって

$$\eta = \eta_0 e^{\frac{x}{\lambda}} \sin k(y - \sqrt{gH_0}t) \tag{4.14}$$

となる．この波は y の正の方向に岸を右に見ながら進む波で, 海面の形は x 方向には指数関数 (距離のスケール λ), y 方向には正弦関数である．また, () より x 方向には地衡流バランス, y 方向には重力波で伝わる．

もし $x < 0$ が陸地の場合には符号が逆になり,

$$\eta = \eta_0 e^{-\frac{x}{\lambda}} \sin k(y + \sqrt{gH_0}t) \tag{4.15}$$

となるので, 西岸に沿って南に進む波である．ケルビン波は北半球では岸を右に見て進む波である．

これまで H_0 が変化するとして陸棚波を導出し, H_0 が一定であるとしてケルビン波を導出したが, 現実の海洋ではケルビン波と陸棚波を合わせて沿岸補足波 (coastally trapped wave) と呼ばれる．

赤道ケルビン波

赤道の南北に位置する一対のケルビン波である．位相は東に伝播する．

慣性振動

(), () で海面の凹凸がない ($\eta = 0$) とすると,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - fv = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + fu = 0 \end{aligned} \tag{}$$

となる．この場合は $\boldsymbol{u}$ に直交するコリオリ力のみがはたらくので円運動をする．$\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + f^2 u = 0$ より,

$$\begin{aligned} u = V_0 \cos ft, \quad v = -V_0 \sin ft \\ x = x_0 + \frac{V_0}{f} \sin ft, \quad y = y_0 + \frac{V_0}{f} \cos ft \end{aligned} \tag{}$$

である. 慣性周期 (inertial period) T は

$$T = \frac{2\pi}{|f|} = \frac{2\pi}{2 \cdot \frac{2\pi}{24hr}\sin\theta} = \frac{12hr}{\sin\theta} \tag{4.16}$$

であり, 円運動の半径 $R = \dfrac{V_0}{f}$ である.

無限小振幅波 (2 層, 1.5 層の場合)

各層の深さ z における圧力は,

$$\begin{aligned} p_1 &= \rho_1 g(\eta_1 - z) \\ p_2 &= \rho_1 g(\eta_1 + H_1 - \eta_2) + \rho_2 g(-H_1 + \eta_2 - z) \end{aligned} \tag{}$$

である. また, 各層における圧力傾度力は

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_1}{\partial x} &= -g\frac{\partial \eta_1}{\partial x} \\ -\frac{1}{\rho_2}\frac{\partial p_2}{\partial x} &= -\frac{\rho_1}{\rho_2}g\frac{\partial(\eta_1 - \eta_2)}{\partial x} - g\frac{\partial \eta_2}{\partial x} \\ &= -\frac{\rho_1}{\rho_2}g\frac{\partial \eta_1}{\partial x} - \frac{\Delta\rho}{\rho_2}g\frac{\partial \eta_2}{\partial x} \\ &\sim g\frac{\partial \eta_1}{\partial x} - g'\frac{\partial \eta_2}{\partial x} \end{aligned} \tag{}$$

である. 上層の運動方程式は,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} - fv_1 &= -g\frac{\partial \eta_1}{\partial x} \\ \frac{\partial v_1}{\partial t} + fu_1 &= -g\frac{\partial \eta_1}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial t}(\eta_1 - \eta_2) + H_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y}\right) &= 0 \end{aligned} \tag{}$$

であり, 下層の運動方程式は,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_2}{\partial t} - fv_2 &= -g\frac{\partial \eta_1}{\partial x} - g'\frac{\partial \eta_2}{\partial x} \\ \frac{\partial v_2}{\partial t} + fu_2 &= -g\frac{\partial \eta_1}{\partial y} - g'\frac{\partial \eta_2}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta_2}{\partial t} + H_2\left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y}\right) &= 0 \end{aligned} \tag{}$$

である. 1.5 層の場合は下層が静止しているので,

$$g\Delta\eta_1 + g'\Delta\eta_2 = 0 \tag{4.17}$$

$$\therefore \Delta\eta_1 = -\frac{g'}{g}\Delta\eta_2(\ll \eta_2) \tag{4.18}$$

となる. 1.5 層の場合の上層の運動方程式は,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} - fv_1 &= -g'\frac{\partial(-\eta_2)}{\partial x} \\ \frac{\partial v_1}{\partial t} + fu_1 &= -g'\frac{\partial(-\eta_2}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial t}(-\eta_2) + H_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y}\right) &= 0 \end{aligned} \tag{}$$

となる. これは reduced gravity model と呼ばれる.

$$\tag{}$$

$$\tag{}$$

$$\tag{}$$

$$\tag{}$$

$$\tag{}$$

$$\tag{}$$

第5章　海洋風成循環

5.1　エクマン層

風はどのようにして海に流れを作っているのかを考える．風によるエネルギーによって, 波の励起と流水の駆動が起こる. 風による水平方向の摩擦力が風応力で,

$$\boldsymbol{\tau} = \rho_a C_D |\boldsymbol{w}|\boldsymbol{w} \tag{5.1}$$

と表される．ここで, ρ_a は空気の密度 [1.3kg/m^3], C_D はドラッグ係数 ($\mathrm{O}(10^{-3})$ で海面の荒さに依存する), $\boldsymbol{w}$ は高さ 10 m における風速 [m/s] である.

水平方向の運動方程式のスケールを考えると, $H = \sqrt{\dfrac{A_V}{f}} = \sqrt{\dfrac{10^{-2}\mathrm{m^2/s}}{10^{-4}1/\mathrm{s}}} = 10\mathrm{m}$ である．海面近くでは乱流が強いため, A_V は内部領域よりも大きい.

海面の境界層特有の流速を (u^e, v^e) として, 流速を $(u+u^e, v+v^e)$ でとして運動方程式に代入すると,

$$\begin{aligned} -f(v+v^e) &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z}\left(A_V \frac{\partial u^e}{\partial z}\right) \\ f(u+u^e) &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\left(A_V \frac{\partial v^e}{\partial z}\right) \end{aligned}$$

となり, 地衡流の関係から

$$\begin{aligned} -fv^e &= \frac{\partial}{\partial z}\left(A_V \frac{\partial u^e}{\partial z}\right) \\ fu^e &= \frac{\partial}{\partial z}\left(A_V \frac{\partial v^e}{\partial z}\right) \end{aligned} \tag{}$$

となる．これを適当な境界条件の下で解く.

次のような場合を考える.

- 海は深さ方向, 水平方向ともに無限に大きい
- 風は定常 ($\tau^x, \tau^y = const.$)
- f は一定 ($f = f_0$)

この場合, 解くべき式は

$$
\begin{aligned}
-f_0 v^e &= A_V \frac{\partial^2 u^e}{\partial z^2} \\
f_0 u^e &= A_V \frac{\partial^2 v^e}{\partial z^2}
\end{aligned}
$$

である. ここでは北半球 ($f_0 > 0$) を仮定する. ベクトル形式で表すと,

$$
\frac{\partial^2}{\partial z^2} \begin{pmatrix} u^e \\ v^e \end{pmatrix} = \frac{f_0}{A_V} \begin{pmatrix} -v^e \\ u^e \end{pmatrix} \tag{5.2}
$$

となる. $\boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} u^e \\ v^e \end{pmatrix}$ とおくと,

$$
\frac{\partial^2 \boldsymbol{q}}{\partial z^2} = \frac{f_0}{A_V} \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{q} \tag{5.3}
$$

と表せる. $\boldsymbol{k} \times (\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{q}) = -\boldsymbol{q}$ なので,

$$
\frac{\partial^2 (\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{q})}{\partial z^2} = -\frac{f_0}{A_V} \boldsymbol{q} \tag{5.4}
$$

となる. よって, $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{q} + i\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{q}$ とおくと,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \boldsymbol{Q}}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\boldsymbol{q} + i\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{q}) \\
&= \frac{f_0}{A_V} (\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{q} - i\boldsymbol{q}) \\
&= -\frac{i f_0}{A_V} (\boldsymbol{q} + i\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{q}) \\
&= -\frac{i f_0}{A_V} \boldsymbol{Q}
\end{aligned}
$$

まず海面 ($z \sim 0$) での境界条件を考える.

$$
\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{A} e^{\sqrt{\frac{f_0}{2A_V}}(1-i)z} \tag{5.5}
$$

とおける ($z=0$ から下に向かうにつれ急速に小さくなる．$\boldsymbol{A}$ は z に依らない.).
境界条件は

$$
\begin{aligned}
\rho_0 A_v \frac{\partial u^e}{\partial z} &= \tau^x \\
\rho_0 A_v \frac{\partial v^e}{\partial z} &= \tau^y \\
w^e &= 0
\end{aligned}
$$

である．ここで,

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial z}\right|_{z=0} &= \left.\frac{\partial}{\partial z}(\boldsymbol{q} + i\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{q})\right|_{z=0} \\
&= \left.\frac{\partial}{\partial z}\begin{pmatrix} u^e - iv^e \\ v^e + iu^e \end{pmatrix}\right|_{z=0} \\
&= \frac{1}{\rho_0 A_V}\begin{pmatrix} \tau^x - i\tau^y \\ \tau^y + i\tau^x \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

であり,

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial z}\right|_{z=0} &= \left.\sqrt{\frac{f_0}{2A_v}}(1-i)\boldsymbol{A}e^{\sqrt{\frac{f_0}{2A_V}}(1-i)z}\right|_{z=0} \\
&= \sqrt{\frac{f_0}{2A_V}}(1-i)\boldsymbol{A}
\end{aligned}
$$

である．よって,

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A} &= \sqrt{\frac{2A_V}{f_0}}\frac{1+i}{2}\frac{1}{\rho_0 A_V}\begin{pmatrix} \tau^x - i\tau^y \\ \tau^y + i\tau^x \end{pmatrix} \\
\boldsymbol{Q} &= \sqrt{\frac{2A_V}{f_0}}\frac{1+i}{2}\frac{1}{\rho_0 A_V}\begin{pmatrix} \tau^x - i\tau^y \\ \tau^y + i\tau^x \end{pmatrix} e^{\sqrt{\frac{f_0}{2A_V}}(1-i)z}
\end{aligned}
$$

これより,

$$
\begin{aligned}
u^e &= \frac{1}{\rho_0\sqrt{2A_V f_0}} e^{\sqrt{\frac{f_0}{2A_V}}z}\left\{(\tau^x + \tau^y)\cos\sqrt{\frac{f_0}{2A_V}}z + (\tau^x - \tau^y)\sin\sqrt{\frac{f_0}{2A_V}}z\right\} \\
v^e &= \frac{1}{\rho_0\sqrt{2A_V f_0}} e^{\sqrt{\frac{f_0}{2A_V}}z}\left\{(-\tau^x + \tau^y)\cos\sqrt{\frac{f_0}{2A_V}}z + (\tau^x + \tau^y)\sin\sqrt{\frac{f_0}{2A_V}}z\right\}
\end{aligned}
$$

が得られる. u^e, v^e をエクマン層内で鉛直積分すると,

$$
\begin{aligned}
U^e &= \int_{-D_e}^{0} u^e dz \\
&= \int_{-D_e}^{0} \frac{1}{\rho_0\sqrt{2A_V f_0}} e^{\sqrt{\frac{f_0}{2A_V}}z}\left\{(\tau^x+\tau^y)\cos\sqrt{\frac{f_0}{2A_V}}z + (\tau^x-\tau^y)\sin\sqrt{\frac{f_0}{2A_V}}z\right\}dz \\
&= \frac{1}{\rho_0\sqrt{2A_V f_0}}\frac{1}{2\sqrt{\frac{f_0}{2A_V}}}\left[e^{\sqrt{\frac{f_0}{2A_V}}z}\left\{(\tau^x+\tau^y)\cos\sqrt{\frac{f_0}{2A_V}}z + (\tau^x-\tau^y)\sin\sqrt{\frac{f_0}{2A_V}}z\right\}\right]_{-D_e}^{0} \\
&= \frac{\tau^y}{\rho_0 f_0} \quad (\text{深さ} -D_e \text{での寄与は十分小さいのでゼロとした}) \\
V^e &= \int_{-D_e}^{0} v^e dz \\
&= -\frac{\tau^y}{\rho_0 f_0}
\end{aligned}
$$

よって, 積分流量 (エクマン輸送) は風の向きに対して 90° 右で, その大きさは (A_V に依らず) $\dfrac{\tau}{\rho_0 f_0}$ である.

次に海底 ($z \sim -D_0$) での境界条件を考える.

$$
\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{A}e^{-\sqrt{\frac{f_0}{2A_V}}(1-i)(z+D_0)} \tag{5.6}
$$

とおける ($z = -D_e$ から上に向かうにつれ急速に小さくなる. $\boldsymbol{A}$ は z に依らない.). 境界条件は,

$$
\begin{aligned}
u + u^e &= 0 \\
v + v^e &= 0
\end{aligned}
$$

である. ここで,

$$
\boldsymbol{Q}\Big|_{z=-D_0} = \boldsymbol{A} \tag{5.7}
$$

であり, $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{q} + i\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{q}$ なので,

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{Q}\Big|_{z=-D_0} &= \left.\begin{pmatrix} u^e - iv^e \\ v^e + iu^e \end{pmatrix}\right|_{z=-D_0} \\
&= \begin{pmatrix} -u + iv \\ -v + iu \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

よって,

$$
\left.\boldsymbol{Q}\right|_{z=-D_0} = \begin{pmatrix} -u+iv \\ -v+iu \end{pmatrix} e^{-\sqrt{\frac{f_0}{2A_V}}(1-i)(z+D_0)}
= \begin{pmatrix} u^e - iv^e \\ v^e + iu^e \end{pmatrix}
$$

である. これより,

$$
u^e = -e^{-\sqrt{\frac{f_0}{2A_V}}z}\left\{u\cos\sqrt{\frac{f_0}{2A_V}}(z+D_0) + v\sin\sqrt{\frac{f_0}{2A_V}}(z+D_0)\right\}
$$
$$
v^e = -e^{-\sqrt{\frac{f_0}{2A_V}}z}\left\{v\cos\sqrt{\frac{f_0}{2A_V}}(z+D_0) + u\sin\sqrt{\frac{f_0}{2A_V}}(z+D_0)\right\}
$$

が得られる. $u=\sqrt{u^2+v^2}\cos\theta$, $v=\sqrt{u^2+v^2}\sin\theta$ (θ は (u,v) が x 軸となす角度) とおくと,

$$
u^e = -\sqrt{u^2+v^2}e^{-\sqrt{\frac{f_0}{2A_V}}z}\cos\left(\theta - \sqrt{\frac{f_0}{2A_V}}(z+D_0)\right)
$$
$$
v^e = -\sqrt{u^2+v^2}e^{-\sqrt{\frac{f_0}{2A_V}}z}\sin\left(\theta - \sqrt{\frac{f_0}{2A_V}}(z+D_0)\right)
$$

となる.

実際の流速は $(u,v)+(u^e,v^e)$ となり, 平均流との二つの速度ベクトルの和になる. 速度ベクトルの先端は螺旋を描く. 現実問題としては, エクマン層を観測するのは難しい. 風が時間変化していることや, 成層しているので $A_V(z)$ であること, 海底地形が影響すること, 地衡流が重なることなどがその原因である. $\sqrt{\frac{f_0}{2A_V}}D_e=\pi$ となる深さ $D_e=\sqrt{\frac{2\pi^2 A_V}{f_0}}$ をエクマン深度という. 海面からエクマン深度までの層のことをエクマン層と呼び, 中緯度では数 10 m である. ポイントとしては, 海面の流れは有限の深さまでしか伝わらない.

5.2 1 層モデル: 準地衡流渦度モデル

密度一定 (ρ_0), 深さ一定 (D_0) の海を考える. 内部領域では準地衡流バランスをしているとする. w が小さいとして鉛直移流と鉛直拡散は無視できる. 水平方向の

運動方程式は,

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}-fv=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+A_H\nabla_H^2 u \tag{5.8}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+fv=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+A_H\nabla_H^2 v \tag{5.9}$$

である. $\frac{\partial}{\partial x}(4.2)-\frac{\partial}{\partial y}(4.1)$ より

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}\right)(\omega+f)+(\omega+f)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=A_H\nabla_H^2\omega \tag{5.10}$$

となる. ここで $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$ より,

$$\frac{d}{dt}(\omega+f)=(\omega+f)\frac{\partial w}{\partial z}+A_H\nabla_H^2\omega \tag{5.11}$$

となる. 内部領域では $\omega \ll f$ かつ $L \ll$ (地球の半径) より $f=f_0$ なので,

$$\frac{d}{dt}(\omega+f)=f_0\frac{\partial w}{\partial z}+A_H\nabla_H^2\omega \tag{5.12}$$

となる. 左辺は絶対渦度の時間変化, 右辺第 1 項は水柱の伸縮, 右辺第 2 項は相対渦度の拡散を表す. (4.1), (4.2) はどの深さでも成り立つ. (4.5) を海底から海面まで積分すると,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\omega+f)&=\frac{f_0}{D_0}\int_{-D_0}^{0}\frac{\partial w}{\partial z}dz+A_H\nabla_H^2\omega\\&=\frac{f_0}{D_0}(w|_{z=0}-w|_{z=-D_0})+A_H\nabla_H^2\omega\\&=\frac{f_0}{D_0}\left(\frac{curl\tau}{\rho_0 f_0}-\sqrt{\frac{A_V}{2f_0}}\omega\right)+A_H\nabla_H^2\omega\\&=\frac{curl\tau}{\rho_0 D_0}-\sqrt{\frac{f_0A_V}{2D_0^2}}\omega+A_H\nabla_H^2\omega\end{aligned} \tag{}$$

今準地衡流を仮定しているので,

$$\begin{aligned}-f_0v=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x},\quad v=\frac{1}{\rho_0 f_0}\frac{\partial p}{\partial x}\\f_0u=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial y},\quad u=\frac{1}{\rho_0 f_0}\frac{\partial p}{\partial y}\end{aligned} \tag{}$$

より $\psi = \dfrac{p}{\rho_0 f_0}$ が流線関数である．この ψ を用いると,

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \nabla_H^2 \psi \\ \frac{d}{dt}(\nabla_H^2 \psi + f) &= \frac{curl \tau}{\rho_0 D_0} - r\nabla_H^2 \psi + A_H \nabla_H^4 \psi \quad \left(r = \sqrt{\frac{f_0 A_V}{2D_0^2}} \right) \end{aligned} \quad ()$$

となる．左辺は絶対渦度の変化, 右辺第 1 項は風応力 $curl$ による渦度の注入, 右辺第 2 項は海底摩擦による渦度の減衰, 右辺第 3 項は水平拡散による渦度の減衰を表す．

5.3 Sverdrup flow

5.4 Stommel の解

前節と同様に矩形の海にサイン型の風

$$\tau^x = -\tau_0 \cos\left(\frac{\pi y}{b}\right), \quad \tau^y = 0 \tag{5.13}$$

が吹いているとする．この条件で海底摩擦の入った式

$$\begin{aligned} \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} &= -\frac{\tau_0 \pi}{\rho_0 D_0 \beta} \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) - r\nabla^2 \psi \\ \psi &= 0 \quad (\text{ at } x = 0, a; y = 0, b\ ) \end{aligned} \quad ()$$

を考える．簡単のために式を無次元化する．$x \to ax, y \to by, \psi \to \dfrac{\tau_0}{\rho_0 D_0 \beta}\psi$ を代入して整理すると,

$$\begin{aligned} \varepsilon_S \nabla^2 \psi + \frac{\partial \psi}{\partial x} &= -\pi \sin(\pi y) \\ \psi &= 0 \quad (\text{ at } x = 0, 1; y = 0, 1\ ) \end{aligned} \quad ()$$

となる．ここで, $\varepsilon_S = \dfrac{r}{\beta a} = \dfrac{r}{f_0} = 10^{-3} \ll 1$ である．内部領域では摩擦項が無視でき, そこでの解は Sverdrup 型

$$\psi_I = (C - x)\pi \sin(\pi y) \tag{5.14}$$

となる．$C = 0$ または 1 で $C = 0$ のとき東岸で $\psi_I \neq 0$, $C = 1$ のとき西岸で $\psi_I \neq 0$ である．残る岸に沿って幅の狭い領域で ψ が大きく変化する．摩擦項が他の項と同程度に寄与する．境界層付近の x 座標を ε_S を用いてスケーリングする．①$x = 0$ 付近で $x = X\varepsilon_S^a$ の場合と ②$x = 1$ 付近で $x - 1 = X\varepsilon_S^a$ の場合である．これを () に代入すると,

$$\varepsilon_S^{1-2a}\frac{\partial^2\psi}{\partial X^2} + \varepsilon_S\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \varepsilon_S^{-a}\frac{\partial\psi}{\partial X} = -\pi\sin(\pi y) \tag{5.15}$$

となる．左辺第 1 項が卓越するには $a = 1$ でなくてはならないので,

$$\begin{aligned}\varepsilon_S^{-1}\frac{\partial^2\psi}{\partial X^2} + \varepsilon_S\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \varepsilon_S^{-1}\frac{\partial\psi}{\partial X} &= -\pi\sin(\pi y)\\ \varepsilon_S^{-1}\frac{\partial^2\psi}{\partial X^2} + \varepsilon_S^{-1}\frac{\partial\psi}{\partial X} &= 0\\ \therefore \frac{\partial^2\psi}{\partial X^2} + \frac{\partial\psi}{\partial X} &= 0\end{aligned} \tag{}$$

となる．これを解くと

$$\psi = A + B\exp(-X) = \begin{cases} A + B\exp(-\frac{x}{\varepsilon_S}), & \text{(西岸に境界層)}\\ A + B\exp(-\frac{x-1}{\varepsilon_S}) & \text{(東岸に境界層)}\end{cases} \tag{}$$

となる．しかし, 二つ目の解では東岸から離れると発散してしまうので, 境界層は西でなくてはならない．よって $C = 1$ である．これを代入すると,

$$\begin{aligned}\psi_I &= A + B\exp\left(-\frac{x}{\varepsilon_S}\right) \quad (\text{ at } O(\varepsilon_S) < x < 1\ )\\ \psi_{WBL} &= A + B\exp\left(-\frac{x}{\varepsilon_S}\right) \quad (\text{ at } 0 < x < O(\varepsilon_S)\ )\end{aligned} \tag{}$$

となる．ここで, $x = 0$ で $\psi_{WBL} = 0$ であり, $\psi_{WBL}|_{x\to\infty} = \psi_I|_{x\to 0}$ であるので, $\psi_{WBL} = \left(1 - \exp\left(-\dfrac{x}{\varepsilon_S}\right)\right)\pi\sin(\pi y)$ となる．これらをまとめると,

$$\psi = \left(1 - x - \exp\left(-\frac{x}{\varepsilon_S}\right)\right)\pi\sin(\pi y) \quad (\text{ at } 0 < x < 1\ ) \tag{5.16}$$

と書ける．

5.5 Munk の解

Stommel と同じ設定で, 海底摩擦ではなく水平拡散を考える. 解くべき無次元化した渦度方程式は

$$
\begin{aligned}
&-\varepsilon_M \nabla^4 \psi + \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\pi \sin(\pi y) \quad \left(\varepsilon_M = \frac{A_H}{\beta a^2} = 10^{-8}\right) \\
&\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad (\text{ at } x = 0, 1 \text{ }) \quad (\text{ 東西岸では no slip })\\
&\psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial^2 y} = 0 \quad (\text{ at } y = 0, 1 \text{ }) \quad (\text{ 南北岸では no stress })
\end{aligned}
\tag{}
$$

である. 解き易さのために南北の境界条件は考えない. (省略)

$$
\psi = \pi \sin(\pi y) \left\{ 1 - x - \frac{2}{\sqrt{3}} \exp\left(-\frac{x}{2\varepsilon_M^{1/3}} \right) \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2\varepsilon_M^{1/3}} - \frac{\pi}{6} \right) \right\} \tag{5.17}
$$

となる. $v = 0$ となる x は $\dfrac{\sqrt{3}x}{2\varepsilon_M^{1/3}} = \pi$ つまり $x = \dfrac{2\pi\varepsilon_M^{1/3}}{\sqrt{3}}$ であり, これを ψ に代入すると, $\psi = 1 + \exp\left(-\dfrac{\pi}{\sqrt{3}}\right)$ である. Munk の解では再循環 (recirculation) が見られる.

5.6 Fofonoff の解

移流ありの極端な場合を考える. 条件として定常状態, 外力なし, 拡散なしである. 解くべき無次元化した渦度方程式は

$$
R_0 \left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) \nabla^2 \psi + \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad (\ \psi = 0 \text{ at } x = 0, 1; y = 0, 1\ ) \tag{5.18}
$$

であり, 解は

$$
\begin{aligned}
\psi = (y - y_0) &\left(1 - \exp\left(-\frac{x}{R_0^{1/2}} - \exp\left(-\frac{1-x}{R_0^{1/2}} \right) \right) \right) \\
&+ y_0 \exp\left(-\frac{y}{R_0^{1/2}} \right) + (1 - y_0) \exp\left(-\frac{1-y}{R_0^{1/2}} \right)
\end{aligned}
\tag{}
$$

となる. 4 つの岸沿いに $R_0^{1/2}$ の慣性境界層ができる.

5.7　1.5 層モデル

薄い上層の運動を, その下に無限の厚さを持つ下層があると仮定して浅水方程式系で表す. 上層 (密度 ρ_1, 基準深度 $z = 0 \sim -H_1$) と下層 (密度 ρ_2, 基準深度 $z = -H_1 \sim -H_2$) の 2 つの層に分ける. 各層の深さ z における圧力は

$$
\begin{aligned}
p_1 &= \rho_1 g(\eta_1 - z) \\
p_2 &= \rho_1 g(\eta_1 + H_1 - \eta_2) + \rho_2 g(-H_1 + \eta_2 - z)
\end{aligned}
\tag{}
$$

である. 今, 下層が静止していると考える ($p_2 = const.$). すると,

$$
\begin{aligned}
0 = \Delta p_2 &= \rho_1 g(\Delta\eta_1 - \Delta\eta_2) + \rho g \Delta\eta_2 \\
\therefore \Delta\eta_1 &= -\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1}\eta_2 = -\frac{\Delta\rho}{\rho}\Delta\eta_2
\end{aligned}
\tag{}
$$

となる. ここで $\dfrac{\Delta\rho}{\rho} \sim \dfrac{1}{300}$ である.

上層は地衡流バランスより

$$
\begin{aligned}
-fv_1 &= -g\frac{\partial\eta_1}{\partial x} \\
fu_1 &= -g\frac{\partial\eta_1}{\partial y}
\end{aligned}
\tag{}
$$

となる. ここで, $g\Delta\eta_1 = -\dfrac{\Delta\rho}{\rho}g\Delta\eta_2 = -g'\Delta\eta_2$ (g' は reduced gravity) となるので,

$$
\begin{aligned}
-fv_1 &= g'\frac{\partial\eta_2}{\partial x} \\
fu_1 &= g'\frac{\partial\eta_2}{\partial y}
\end{aligned}
\tag{}
$$

と書き直せる. また, 上層の厚さ $h_1 = \eta_1 + H_1 - \eta_2 = H_1 - \eta_2$ を用いると

$$
\begin{aligned}
-fv_1 &= g'\frac{\partial h_1}{\partial x} \\
fu_1 &= g'\frac{\partial h_1}{\partial y}
\end{aligned}
\tag{}
$$

となる. h_1 の分布から $\boldsymbol{u_1}$ の分布を求める.

流体柱の質量保存より

$$
\frac{\partial}{\partial x}(h_1 u_1) + \frac{\partial}{\partial y}(h_1 v_1) + w^e = 0 \tag{5.19}
$$

である. ここに () を代入すると,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{h_1\left(-\frac{g'}{f}\frac{\partial}{\partial y}h_1\right)\right\}+\frac{\partial}{\partial y}\left\{h_1\left(\frac{g'}{f}\frac{\partial}{\partial x}h_1\right)\right\}+w^e=0$$
$$\therefore -g'h_1\frac{\partial h_1}{\partial x}\frac{\beta}{f^2}+w^e=0 \qquad ()$$
$$\therefore \frac{\partial}{\partial x}(h_1^2)=\frac{2f^2}{\beta g'}w^e$$

となる. x から x_E (東岸) まで積分すると,

$$\begin{aligned} h_{1E}^2-h_1^2 &= \frac{2f^2}{\beta g'}\int_x^{x_E} w^e dx \\ &= \frac{2f^2}{\beta g'}\int_x^{x_E}\frac{curl\tau}{\rho_0 f}dx \\ &= \frac{2f}{\beta\rho_0 g'}\int_x^{x_E} curl\tau dx \qquad () \\ \therefore h_1^2 &= h_{1E}^2-\frac{2f}{\beta\rho_0 g'}\int_x^{x_E} curl\tau dx \end{aligned}$$

となる. h_{1E} は未知定数である.

コサイン型の風応力 ($\tau^x=-\tau_0\cos\left(\frac{\pi y}{b}\right)$) を代入すると,

$$h_1^2=h_{1E}^2-\frac{2f\tau_0\pi}{\beta\rho_0 g' b}(x_E-x)\sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \qquad (5.20)$$

となる.

$$()$$

$$()$$

$$()$$

$$()$$

参考文献

- Holton, J. R., 2004: An Introduction to Dynamic Meteorology, Fourth Edition, Academic Press, 535pp.
- Pedlosky, J., 1987: Geophysical Fluid Dynamics, Second Edition, Springer, 728pp.