哲学演習
「論理学入門」
第 5 回

池田 真治*

2014 年 5 月 20 日

「存在しない者は、欺かれることもありえない。だから、もし私が欺かれるならば、私は存在する。」—-アウグスティヌス『神の国』より

「矛盾は真理のしるしとしてはふさわしくない。いくつかの確かな事柄は矛盾する。いくつかの偽な事柄は矛盾なしに成立する。矛盾は偽のしるしでもないし、無矛盾は真のしるしでもない。」—-パスカル『パンセ』より

「我々の推論は２つの大原理の上に基礎づけられている。すなわち、［１つ目は］矛盾の原理であり、それによって我々は矛盾を含むものを偽と判断するし、偽に反するあるいは偽と矛盾するものを真と判断する」—-ライプニッツ『モナドロジー』より

目次

* 富山大学 人文学部 shinji@hmt.u-toyama.ac.jp ; URL: http://researchmap.jp/shinjike

5 論証の妥当性

5.1 真理値分析

われわれが真理表を用いて真理値計算してきたことを一般化したものを、真理値分析と言う。真理値分析というのは、原子式（P, Q など）に対する真理値割り当て（$0, 1$）を拡張して、複合的論理式（$((P \land (P \to Q)) \to Q$ など）への真理値割り当てを行うことである。

このような拡張ができるのは、結合子（$\land, \lor, \to, \neg$）の意味（つまり結合子が与える真理値）が、いわば「型」として固定されていて、繰り返し適用できるからである。

5.2 真理値割り当て

以下では、論理式全体に対する真理値割り当てを構成する。そのために、まず原子式に対する真理値割り当てを定義し、その定義が、すべての論理式に対する真理値割り当てに拡張できることを、論理式の帰納的定義にしたがって示す。

定義 1. L の原子式からなる或る集合を F とする。F に対する真理値割り当て V を、次の関数で定める。$V : F \to \{1, 0\}$

この定義が言っていることは、こうである。F には何らかの原子式が入る。たとえば、F に原子式 P, Q, R が入るとする、つまり、$F = \{P, Q, R\}$ とする。このとき、P, Q, R の各々に対して、P には 1、Q には 0、R には 1 として、1 つの値を定めると、一つの関数 V が定まる。つまり、$V(P) = 1, V(Q) = 0, V(R) = 1$ のようにである。V はそれぞれがとる値によって、何種類も定められる。それぞれの V は、真理表の一行に対応している。区別したい場合には V_1 のように添え字を付けたりする。V を付値関数と呼んだりする。

論理式の帰納的定義を用いて、原子式の集合 F から出発して帰納的に定義されるすべての論理式の集合 $\overline{F}$、およびその $\overline{F}$ に対する真理値割り当て $\overline{V}$ へと拡張することができる (56-57 頁)。

このような真理値割り当ては、唯一に定まることが証明できる (57 頁)。

したがって、次のように定義できる。

定義 **2.** 原子式への真理値割り当て V が論理式 A を充足する（A は V のもとで真である）$\Leftrightarrow \overline{V}(A) = 1$

真理値割り当てを原子式から論理式に拡張できることが示せたし、煩雑さを避けるため、以下では、$\overline{V}$ を単に V と書くことにする。

5.3　矛盾

P と $\neg P$ が矛盾していることはもう理解していると思う。次は、「論理式の集合が矛盾している」、つまり複数の論理式の集まりが互いに矛盾している、ということを定義しよう。

定義 **3** (矛盾 contradiction)**.** 論理式の集合 Γ が矛盾している $\Leftrightarrow$ Γ に含まれるすべての論理式を同時に真にするような真理値割り当て V が存在しない。

たとえば、さっきの P と $\neg P$ が矛盾していることは、集合 $\Gamma = \{P, \neg P\}$ と考えて、定義に当てはめれば良い。たしかに、P と $\neg P$ を、同時に真にするような真理値割り当ては存在しないので、$\Gamma = \{P, \neg P\}$ は矛盾している。あと、このように集合は、論理式の集まりを $\{\ \}$ でくくって表す。

定義 **4** (充足可能 satisfiable)**.** 論理式の集合 Γ が充足可能（整合的）$\Leftrightarrow$ Γ が矛盾していない（$\Leftrightarrow$ Γ に含まれるすべての論理式を真にするような真理値割り当て V が少なくとも *1* つ存在する)。

要するに、論理式の真理表を書いたときに、横一行すべてが 1 になっている場合があるとき、充足可能である。

※論理式の集合 Γ は、有限・無限、いずれの場合もありうる。

5.3.1　問題

練習問題 12(1), (2) を解くこと（余裕のある人は、(3) も）。

5.4　論証の妥当性

定義 5 (反例 counterexample)**.** 論証の前提がすべて真になるが、結論は偽になるような場合を、その論証の反例と呼ぶ。

5.4.1　問題

次の論理的帰結に、反例はあるだろうか。反例があるかどうか、真理表で確かめよ。
$\neg P \vee \neg Q, P \to Q$。したがって $\neg Q$。

定義 6 (論証の妥当性 validity)**.** 前提 $A_1, A_2, ..., A_n$ から結論 C を導く論証が妥当である $\Leftrightarrow$ $A_1, A_2, ..., A_n, C$ を構成している原子式への真理値割り当てのうち、$A_1, A_2, ..., A_n$ を同時に *1* とし、C を *0* とするようなもの（すなわち反例）が存在しない。

5.4.2　宿題

練習問題 14 をやってくること。

5.5　ジレンマ

田中がスライダーを投げると打者は打てない ($A \to C$)。
田中がスプリッターを投げると打者は打てない ($B \to C$)。
田中はスライダーかスプリッターを投げる ($A \vee B$)。
どっちみち打者は打てない (C)。

ヤマアラシは近づくと、（相手を傷つけるので）相手と仲良くなれない ($A \to C$)。
ヤマアラシは距離をとると、（相手と疎遠になるので）相手と仲良くなれない ($B \to C$)。
相手と仲良くなるには、ヤマアラシは近づくか、距離をとるしかない ($A \vee B$)。
どっちみち、相手と仲良くなれない (C)。

5.5.1　問題

ジレンマとなるような例を作ってみよう。

5.6　アンチノミー (Antinomie)

アンチノミーとは、同等の根拠から、２つの対立する命題が導かれてしまうこと。

A を根拠とする。このとき、A ならば B が導かれ、また、A ならば $\neg B$ も導かれるとしよう。このように、同じ A から、B（テーゼ）と $\neg B$（アンチテーゼ）が共に導かれてしまうことを、アンチノミーという。(アンチノミーは矛盾ではないことに注意。根拠としてとった A が成り立つとすると、B と $\neg B$ も成り立たねばならないので、矛盾が導かれる。)

5.6.1　カントの第一アンチノミー

アンチノミーの最も有名な例は、カントが『純粋理性批判』で述べたものだ。カントが述べている細かい証明をざっくり省略すると、たとえば第一アンチノミーは次のような構造をとっている。

純粋理性を根拠とすると、世界は有限であること（テーゼ)、および、世界は無限であること（アンチテーゼ)、両方が成立してしまう。

5.7　矛盾からは何でも

矛盾した前提からは、何でも導ける。なぜなら、そのような論証は妥当であるからである。実際、真理表で確かめてみよう。反例が作れないでしょう。

ラテン語では、"Ex falso quodlibet"（偽からは何でも）と言っていた。現代では、矛盾した前提から何でも導けることを、爆発する、とも言う。矛盾した体系からは、どんな主張でも導けてしまうので、そうした体系は、トンデモだということである。

5.8　論証の妥当性、矛盾、トートロジーの関係

定理 5.1. 前提 $A_1, \cdots, A_n$ から結論 C を導く論証が妥当である $\Leftrightarrow$ 論理式 $(A_1 \land \cdots \land A_n) \to C$ がトートロジー。

Proof. 略。板書するかも。 □

定理 5.2. A と B が論理的に同値 $\Leftrightarrow$ 論証 $\frac{A}{B}$ と論証 $\frac{B}{A}$ がともに妥当。

Proof. 略。板書するかも。 □

5.8.1　宿題

テキスト p.67 の練習問題 15 をやってくること。(考えること。考えてわからない場合も、答えでやり方を見てくること。)