哲学演習
「論理学入門」
第 4 回

池田 真治*

2014 年 5 月 13 日

「真理にも二種類ある。理性［的推論］の真理と事実の真理である。理性［的推論］の真理は、必然的なもので、その反対が不可能なものである。事実の真理は、偶然的なもので、その反対が可能なものである。ある真理が必然的なとき、分析によってそのうちにその理由を見いだすことができる。すなわち、その真理を、より単純な観念や真理に分解していき、ついには原初的なものに至るまで分解することで。」
——ライプニッツ『モナドロジー』1714、§33

目次

* 富山大学 人文学部 shinji@hmt.u-toyama.ac.jp ; URL: http://researchmap.jp/shinjike

4　トートロジー

4.1　トートロジーとは何か

トートロジーとは、構成要素となっている命題の内容によらず、その形式だけで真になりうるような命題、すなわち論理定項の意味だけで形式的に真になる命題のことである。

4.1.1　真理値に基づく論理式の分類

1. トートロジー：それに含まれる原子式の真理値の取り方とは無関係に、真理値が常に 1 となる式。恒真式とも言う。
2. 事実式：それに含まれる原子式の真理値の取り方に応じて、真理値が 1 にも 0 にもなる式。
3. 矛盾式：それに含まれる原子式の真理値の取り方とは無関係に、真理値が常に 0 となる式。

4.1.2　問題

練習問題 8 をやってみよう（教科書 p.44）。

4.2　代表的なトートロジー

教科書 p.44-45 にある代表的なトートロジーを眺めてみよう。

4.2.1　問題

練習問題 9 をやってみよう（教科書 p.45）。

定理 4.1. *(2)* 結合子として $\rightarrow$ と $\wedge$ のみを含むような論理式はすべて充足可能である。

Proof. 証明は、結合子の数についての帰納法による。詳しくは、板書で。 □

4.3 トートロジーあれこれ

ライプニッツはその有名な『モナドロジー』（1714）で、真理を二種類に区別した（冒頭引用参照）。すなわち、「理性の真理」と「事実の真理」である。ライプニッツはこれを「必然的真理」と「偶然的真理」と言い換えてもいる。カント的には、「分析的真理」と「経験的真理」に対応するだろう。

ところで、トートロジーは、情報量 0 である。しかし、「内容によらず形式によってのみ真である」というトートロジーの特徴は、真なる学問を目指す論理学の核心に触れているもので、実際、論理学において重要な役割を果たす。

4.4 論理的同値性

(1)「富山は晴れか雨だ。」

(2)「富山は晴れじゃなかったら雨だ。」

(1), (2) を記号化し、その真理表を書いてみよう。ただし、「富山は晴れである」を P、「富山は雨である」を Q とする。

P	Q			
1	1			
1	0			
0	1			
0	0			

定義 1 (論理的同値).
論理式 A と B が論理的同値である (これを、$A \models\!\dashv B$ と省略して書く) $\Leftrightarrow_{def}$ A, B は、それを構成する原子式の真理値のいかなる組み合わせに対しても常に同じ真理値をとる。

注意. $A \models\!\dashv B$ は日本語に属する文なので、形式言語 L に属する論理式 $A \leftrightarrow B$ と混同しないこと。

また、「$\Leftrightarrow_{def}$」は、左辺が右辺で定義されることを意味する省略記号として今後も用いる。同様に、「$\Leftrightarrow$」は左辺から右辺が導かれ、かつ、右辺から左辺が導かれることの省略記号として用いる。とにかく、「記号的思考」になれること！

4.4.1 論理的同値の例

$\neg\neg A \models\!\dashv A, \neg(A \wedge B) \models\!\dashv \neg A \vee \neg B, \neg(A \vee B) \models\!\dashv \neg A \wedge \neg B, \ldots$ （教科書 p.51 参照）

4.4.2 問題

練習問題 10 の (1) と (2) を解きなさい（やりたい人は (3), (4) も）。

定理 4.2. 論理式 A, B が論理的同値 $\Leftrightarrow$ 論理式 $A \leftrightarrow B$ はトートロジー。

Proof.
$\Rightarrow$) 論理式 A, B が論理的同値とする。このとき、A, B は、それを構成する原子式の真理値のいかなる組み合わせに対しても常に同じ真理値をとる（論理的同値の定義より）。よって、A が真理値 0 のとき B も真理値 0 であり、かつ、A が真理値 1 のとき B も真理値 1 である。したがって、論理式 $A \leftrightarrow B$ はトートロジー。
$\Leftarrow$) 論理式 $A \leftrightarrow B$ がトートロジーとする。このとき、$A \leftrightarrow B$ は、それに含まれる原子式の真理値の取り方とは無関係に、真理値が常に 1 となる。ここで、$A \leftrightarrow B$ すなわち $(A \to B) \wedge (B \to A)$ の真理表を考える。$A:1, B:0$ および $A:0, B:1$ の真理値の組み合わせは、$(A \to B) \wedge (B \to A)$ を 0 にするため、このケースはありえず、$(A \to B) \wedge (B \to A)$ を 1 にするのは、$A:0, B:0$ および $A:1, B:1$ のときである。したがって、A が真理値 0 のとき B も真理値 0 であり、かつ、A が真理値 1 のとき B も真理値 1 である。また、このことは、$A \leftrightarrow B$ に含まれる原子式の真理値の取り方とは無関係に成り立っている。したがって、A, B は、それを構成する原子式の真理値のいかなる組み合わせに対しても常に同じ真理値をとる。つまり、論理式 A, B が論理的同値である。 □

4.4.3　置き換えの定理

補題 4.3. A と $A \to B$ がともにトートロジーならば、B もトートロジー。

Proof. 練習問題 9(1)a ですでに証明済み。 □

定理 4.4 (強い置き換えの定理)**.** $(A \leftrightarrow B) \to (C[A] \leftrightarrow C[B])$ はトートロジー。

Proof. A と B の真理値で場合分けする。

まず、A と B の真理値が異なるときは、$A \leftrightarrow B$ の真理値が 0 になる。したがって、前件が 0 より全体は常に 1。

次に、A と B の真理値が同じとき、$A \leftrightarrow B$ の真理値は 1 になる。また、A と B の真理値が同じなので、同じ真理値を持つ論理式に置き換えただけの C[A] と C[B] の真理値も同じになる。したがって、$C[A] \leftrightarrow C[B]$ は 1。よって全体も 1。

以上より、$(A \leftrightarrow B) \to (C[A] \leftrightarrow C[B])$ はトートロジー。 □

定理 4.5 (置き換えの定理)**.** 論理式 A を何回か含む論理式を、$C[A]$ と書くことにする。$C[A]$ の中の A を論理式 B で置き換えた結果（ただし、すべての A を B で置き換えなくてもよい）を $C[B]$ とする。このとき、
A と B が論理的同値ならば、$C[A]$ と $C[B]$ も論理的同値。

Proof. A と B が論理的同値だと仮定する。また、「強い置き換えの定理」より、$(A \leftrightarrow B) \to (C[A] \leftrightarrow C[B])$ はトートロジー。A と B が論理的同値なので、定理 4.2 より、$A \leftrightarrow B$ がトートロジー。したがって、補題より、$C[A] \leftrightarrow C[B]$ もトートロジー。このとき、ふたたび定理 4.2 より、$C[A]$ と $C[B]$ は論理的同値。 □

4.4.4　連言（あるいは選言）だけが続く場合の規約

$A \wedge (B \wedge C)$ と $(A \wedge B) \wedge C$ 論理的同値である、つまりいつも同じ真理値をとる。したがって、この場合には区別をする必要がないので、$A \wedge B \wedge C$ という書き方を許すことにする。$A \vee (B \vee C)$ と $(A \vee B) \vee C$ についても同様に、$A \vee B \vee C$ という書き方を許すことにする。

4.4.5　問題

$(A \to B) \to C$ と $A \to (B \to C)$ が、論理的同値ではないことを真理表で確かめよう。