微分積分学・同演習 A

演習問題 12

1. (1) 収束する (2) 収束する (3) 収束する
(考え方) (1) $(x^2+1)^5 \approx x^{5/2}$ より収束と当たりをつけ，上から抑える関数を探す．この場合は $\frac{1}{x^{5/2}}$ で十分．(2) $\frac{e^x}{\cosh(2x)} \approx 2e^{-x}$ より収束と当たりをつけ，上から抑える関数を探す．この場合は $2e^{-x}$ で十分．(3) 原始関数が計算できるので直接 ($x=\sin\theta$ と変数変換).

2.[†] (1) $\alpha > \frac{1}{2}$ (2) $\alpha < \beta$ (3) $\alpha - 1$ かつ $\beta > 0$
(考え方) (1) 問題が生じるのは $x \to +\infty$ のとき．$(x^2+1)^\alpha \approx x^{2\alpha}$ より $2\alpha > 1$ ならばよいと当たりをつけられる．実際，x が十分大きいとき $0 < x^{2\alpha} < (x^2+1)^\alpha < (x+1)^{2\alpha}$ より
$$\frac{1}{(x+1)^{2\alpha}} < \frac{1}{(x^2+1)^\alpha} < \frac{1}{x^{2\alpha}}$$
なので $2\alpha > 1$ ならば収束し, $2\alpha \le 1$ ならば発散する．(2) 問題が生じるのは $x \to +\infty$ のとき．$\frac{e^{\alpha x}}{(\cosh x)^\beta} \approx e^{(\alpha-\beta)x}$ より $\alpha - \beta < 0$ ならばよいと当たりをつけられる．実際，x が十分大きいとき，$0 < e^{(\alpha-\beta)x} < \frac{e^{\alpha x}}{(\cosh x)^\beta} < 2^\beta e^{(\alpha-\beta)x}$ なので $\alpha < \beta$ ならば収束し，$\alpha \ge \beta$ ならば発散する．(3) 教科書の問題 5.98 を参照.

3.[†] (1) 発散する．積分区間に不連続点 $x=1$ があり，それが原因．(出題ミス．本来は積分の下端が 1 であった．この場合は $\frac{\pi}{2}$ となる．) (2) π (3) $\frac{\pi}{2}$
(考え方) (1) (下端を 1 としたとき) $s=\sqrt{x^2-1}+x$ と変数変換．他にも $t=\sqrt{x^2-1}$ や $u=1/x$ などでも計算できる．(2) $x(1-x)=(\frac{1}{2})^2-(x-\frac{1}{2})^2$ より，原始関数は Arcsin で書ける．(3) $t=e^x$ と変数変換.

4. (1) $ab>0$ のとき収束し，$\frac{\pi}{2\sqrt{ab}}$, $ab<0$ のときは発散する．(2) $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ (3) $ab>0$ のとき収束し，$\frac{\pi}{4\sqrt{ab}}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$, $ab<0$ のときは発散する.
(考え方) (1), (3) $t=\tan x$ と変数変換．(2) は $\cos^4 x+\sin^4 x = 1-2\sin^2 x\cos^2 x = 1-\frac{1}{2}\sin^2 2x$ と変形して $t=\tan 2x$ とする．積分区間に注意.

5. (1) 正しい．(2) 誤り．積分区間に不連続点 $x=1$ があり，定義に従って計算すると発散する．(3) 正しい.
(考え方) (1) は定義どおり．(2) 積分区間内に不連続点がある．(3) $x \to +0$ および $x \to +\infty$ の 2 箇所に広義積分があるが，これらはいずれも収束する．変数変換

---

7 月 18 日分 (凡例：無印は基本問題，† は特に解いてほしい問題，$*$ は応用問題)
講義用 HP: http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~h-nakashima/lecture/2017C.html

$x = 1/t$ をすれば $I = -I$ となるので，$I = 0$ となる．

6.[†] (1), (2), (3) いずれも n が偶数のとき $\frac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \frac{\pi}{2}$，$n$ が奇数のとき $\frac{(n-1)!!}{n!!}$．ただし，$k!!$ は一つおき階乗 (教科書 p.60 参照)．(4) $\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \cdot \frac{\pi}{2}$

(考え方) (1) と (2) が等しいことは変数変換 $y = \frac{\pi}{2} - x$ により分かる．また (1) と (3) が等しいことは，(3) において $x = \sin\theta$ と変数変換することにより分かる．さらに，(4) において $x = \cos\theta$ と変数変換すれば (2) において $n \to 2n-2$ としたものと一致することが分かる．よって，この問題は本質的には (1) を求めればすべて求まる．

I_n とおく．$(\sin x)^n = -(\cos x)'(\sin x)^{n-1}$ とみて部分積分することにより $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ という漸化式を得る．ここで明らかに $I_0 = \frac{pi}{2}$, $I_1 = 1$ であるので解答を得る．

7. (1) 問題となるのは $x \to +0$ のときと $x \to +\infty$ のとき．$x \to +0$ のときは大体 $\log x$ なので問題がなく，$x \to +\infty$ のときは $\frac{\log x}{(1+x)^2} = \frac{1}{(x+1)^{3/2}} \cdot \frac{\log x}{\sqrt{x+1}}$ で後者は 0 に収束し，前者の広義積分は収束する．よって，問題の広義積分も収束する．(2) $|\sin x| \leq 1$ であり，$\left|\frac{\sin x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$ であるので，問題の広義積分も収束する．(3) 問題となるのは $x \to +0$ のときと $x \to +\infty$ のときであるが，後者の場合は (2) と同様の理由で収束する．また $x \to +0$ のときは $\frac{\sin x}{x^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sin x}{x}$ であり前者の広義積分は収束し後者は 1 に収束するので，問題の広義積分も収束する．

8.[*] 演習問題 11 の大問 5 より $\int e^{-x} \sin x \, dx = \frac{\cos x - \sin x}{2} e^{-x}$ であることを用いる．三角関数 $\sin x$ の周期は 2π なので，積分区間 $[2k\pi, (2k+2)\pi]$ で計算したあと，$k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ として足し合わせる．k 番目の区間での積分の結果は $\frac{e^{\pi}+2+e^{-\pi}}{2} e^{-(2k+1)\pi}$ である．