線形代数学・同演習 B

小テスト 7　(11 月 21 日分)

学籍番号：　　　　　　　　　　氏名：

次の行列 A の固有値と，対応する固有ベクトルを求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 6 \\ 6 & 1 & -6 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(考え方) まず固有多項式 $g_A(t)$ を計算し，方程式 $g_A(t) = 0$ を解く．その解が固有値である．固有値を λ と書けば連立一次方程式 $(\lambda E_3 - A)\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$ の解空間の基底が，固有値 λ に対応する固有ベクトルである．

解) 固有多項式は以下で与えられるので，固有値は $\lambda = 1, -2$ である．

$$\det(tE_3 - A) = \begin{vmatrix} t+5 & 0 & -6 \\ -6 & t-1 & 6 \\ 3 & 0 & t-4 \end{vmatrix} = (t-1)\begin{vmatrix} t+5 & -6 \\ 3 & t-4 \end{vmatrix} = (t-1)^2(t+2).$$

(i) $\lambda = 1$ のとき．連立方程式 $(E_3 - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を解く．

$$E_3 - A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -6 \\ -6 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\mathrm{rank}(E_3 - A) = 1$ より解空間の次元は 2．方程式に戻せば $x - z = 0$ (y は任意)．解は $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ なので，固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ である．

(ii) $\lambda = -2$ のとき．連立方程式 $(-2E_3 - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を解く．

$$-2E_3 - A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -6 \\ -6 & -3 & 6 \\ 3 & 0 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

解空間の次元は 1．方程式に戻せば $x - 2z = 0$, $y + 2z = 0$ なので解は $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z \\ -2z \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$．よって固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ である．

※講義や講義内容に関して，意見・感想・質問等を自由に記述してください．