線形代数学・同演習 A

4 月 12 日分　演習問題

計算問題は解答のみ，証明問題は大雑把な道筋を説明するに留めています．

1. (1) $\begin{pmatrix} 7 & 7 & 2 \\ -3 & 8 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -8 & 12 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 46 \\ 59 \end{pmatrix}$ (5) $\begin{pmatrix} -6 & 10 & 23 \end{pmatrix}$ (6) $O_{2,2}$
   (7) $\begin{pmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (8) $\begin{pmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & -\sin(\theta_1+\theta_2) \\ \sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) \end{pmatrix}$

2. 略.

3. (1) $(x, y, u, v) = (2, 0, 3, 7)$ (2) $(x, y, u, v) = (\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 4, 2)$

4. (1) $A+B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ (2) $AB - BA = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ (3) $(A+B)(A-B) = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}$ (4) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ (5) $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$ (6) $A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$

5. (1) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ (2) 存在しない． (3) $\frac{1}{ad}\begin{pmatrix} d & -b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

6. (1) A, B, C をそれぞれ $m \times n$ 型，$n \times r$ 型，$r \times s$ 型とし，$A = (a_{ij})$, $B = (b_{jk})$, $C = (c_{kl})$ とおく．$(AB)_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$ なので,[*1]

$$\bigl((AB)C\bigr)_{il} = \sum_{k=1}^{r} (AB)_{ik} c_{kl} = \sum_{k=1}^{r}\sum_{j=1}^{n} (a_{ij} b_{jk}) c_{kl} = \sum_{k=1}^{r}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(b_{jk} c_{kl}).$$

ここで，総和記号を入れ替えることを考える:

$$\sum_{k=1}^{r}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(b_{jk} c_{kl}) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{r} a_{ij}(b_{jk} c_{kl}).$$

(今考えている和は有限和なので入れ替えることができる)．さて，k に関する総和記号においては a_{ij} は定数なので，k に関する総和記号の外に出せるので,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(\sum_{k=1}^{r} b_{jk} c_{kl}\right) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(BC)_{jl} = \bigl(A(BC)\bigr)_{il}.$$

つまり，$\bigl((AB)C\bigr)_{il} = \bigl(A(BC)\bigr)_{il}$ がすべての (i, l) の組で成り立つので，結局 $(AB)C = A(BC)$ である．

[*1] $(AB)_{ik}$ で行列 AB の (i, k) 成分を表すこととする．

(2),(3) も同様にできる．

(4) 例えば $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ など．むしろ，$AB = BA$ となるものを探すほうが大変.

(5) 単位行列は Kronecker のデルタ $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$ を用いると，$E_n = (\delta_{ij})$ と表せることを利用すると，計算が楽.

7. $(x, a, b) = (3, 3, 2)$