線形代数学・同演習 B

12 月 20 日分　演習問題[*1]

1. 次の行列は対角化可能か．可能ならば対角化せよ．

$$(1)\ \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \quad (2)\ \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \quad (3)\ \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \quad (4)\ \begin{pmatrix} 9 & -10 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$$

$$(5)\ \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ -4 & -7 \end{pmatrix} \quad (6)\ \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (7)\ \begin{pmatrix} -7 & -5 \\ 10 & 8 \end{pmatrix} \quad (8)\ \begin{pmatrix} 9 & -7 \\ 14 & -12 \end{pmatrix}$$

2. 問題 1 の行列の中で対角化できるものについて，その n 乗を計算せよ．

3.† 次の行列は対角化可能か．可能ならば対角化せよ．

$$(1)\ \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -4 & 3 & -2 \\ -4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2)\ \begin{pmatrix} -1 & 4 & 9 \\ -1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad (3)\ \begin{pmatrix} -1 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(4)\ \begin{pmatrix} 2 & -10 & 6 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix} \quad (5)\ \begin{pmatrix} 7 & -3 & -6 \\ 6 & -2 & -6 \\ 6 & -3 & -5 \end{pmatrix} \quad (6)\ \begin{pmatrix} -3 & -1 & 5 \\ 6 & 4 & -5 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

4. A を対角化可能な n 次正方行列とする．また，A の互いに異なる固有値を $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ とし，それぞれの重複度を $m_1, \dots, m_r$ と書く[*2]．このとき，次が成り立つことを示せ[*3]．

$$(1)\ \mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{r} m_i \lambda_i \qquad (2)\ \det(A) = \prod_{i=1}^{r} \lambda_i^{m_i}$$

5. A, B を n 次正方行列とし，さらに A は正則行列と仮定する[*4]．このとき，AB の固有多項式と BA の固有多項式は一致することを示せ[*5]．

6.† 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ を考える．A を対角化することにより，その n 乗 A^n を求めよ．また，数列 f_n を次の関係式で定めるとき，f_n の一般項を A^n を用いて求めよ．

$$f_1 = f_2 = 1, \qquad \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n-1} \end{pmatrix} \quad (n \geq 1).$$

7.* 講義における命題 9.3 を証明せよ．すなわち，ベクトル空間 V 上の線形変換 $T\colon V \to V$ の互いに異なる固有値を $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ としたとき，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\sum_{i=1}^{r} \dim W(\lambda_i;\, T) \leq \dim V.$$

[*1] 凡例：無印は基本問題，† は特に解いてほしい問題，$*$ は応用問題．

[*2] $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ と書いたとき，$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{r} a_{ii}$ である．また，$\prod_{i=1}^{r} a_i = a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_r$ である．

[*3] 実は任意の正方行列で成り立つ．

[*4] 実はこの仮定は不要である．

[*5] よって，特にそれぞれの固有値は重複度を込めて一致する．