10　積分法

高校のときに学んだように，微分すると関数 $f(x)$ になる関数，すなわち $F'(x) = f(x)$ となる関数 $F(x)$ を，$f(x)$ の**原始関数** (不定積分ともいう) といい，次の記号で表す．

$$\int f(x)\,dx$$

定数 C は微分すると 0 になるので，$F(x)+C$ の形の関数はすべて $f(x)$ の不定積分となる．逆に，$f(x)$ の任意の原始関数は，ある定数 C を用いて以下のようになる．

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

10.1　原始関数

原始関数を求めるには，導関数の公式が逆に利用できる．次の公式は基本公式として引用していく．

定理 10.1

C を積分定数とする．

(1) $\alpha \neq -1$ のとき $\displaystyle\int x^\alpha\,dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C$

(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \log|x| + C$

(3) $\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

(4) $\displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x + C$

(5) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$

(6) $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + C$

(7) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

(8) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+1} = \arctan x + C$

$\displaystyle\int \frac{1}{f(x)}dx$, $\displaystyle\int 1\,dx$ をそれぞれ $\displaystyle\int \frac{dx}{f(x)}$, $\displaystyle\int dx$ と書くことが多い．

10.2　定積分

ある区間で連続な関数 $f(x)$ の原始関数を $F(x)$ とするとき，この区間に属する 2 つの数 a, b に対して，$F(b) - F(a)$ の値を関数 $f(x)$ の a から b までの**定積分**といい，以下の記号を用いる．

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

このとき a を定積分の下端といい，b を上端という．ここで下端 a と上端 b の大小関係は $a < b$, $a = b$, $a > b$ のいずれであってもよい．

特に，区間 $[a, b]$ で常に $f(x) \geqq 0$ ならば，定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ は，曲線 $y = f(x)$ と x 軸，および 2 直線 $x = a$, $x = b$ で囲まれた部分の面積に等しい．なお，定積分において積分記号内の記号はダミー変数であり，別の記号に変えても結果は変わらない．

例題 10.2

定積分 $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} |\cos x|\,dx$ を求めよ．

10.3　和の極限としての定積分

積分を微分の逆演算として定義したが，もともとは別の文脈で研究がなされていたものであり，それを結びつけたのが Newton と Leibniz である．ここでは，関数のグラフの面積としての定積分について学ぶ．

関数 $y = f(x)$ が区間 $[a, b]$ で連続で，その曲線と x 軸，2 直線 $x = a$, $x = b$ で囲まれた図形 A を考える．ただし，負の部分はマイナスの面積を持つと考える．区間 $[a, b]$ を n 等分して，n 個の小区間に分ける．

$$[a_0, a_1],\ [a_1, a_2],\ \ldots,\ [a_{n-1}, a_n]$$

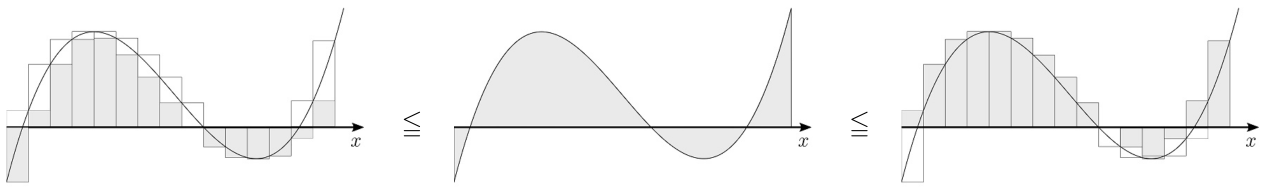
ここで $a_i = a + \frac{i}{n}(b-a)$ である．特に $a_0 = a$, $a_n = b$. 各小区間の幅は $\Delta = \frac{b-a}{n}$ である．さて，各小区間 $[a_i, a_{i+1}]$ における $f(x)$ の最大値と最小値をそれぞれ M_i および m_i とすれば，

$$m_i \leqq f(x) \leqq M_i \quad (a_i \leqq x \leqq a_{i+1})$$

となる．A の面積を S とすると，

$$s_n = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \times \Delta \leqq S \leqq \sum_{i=0}^{n-1} M_i \times \Delta = S_n$$

が成り立つ (s_n と S_n はこの式で定義をする)．s_n は図形 A に含まれる長方形の面積の和であり，S_n は全体として図形 A を含む長方形の面積の和である．$n \to \infty$ としたとき，もし s_n と S_n とが同一の極限値に収束するならば，はさみうちの定理より，S はその極限値と一致する．この極限値を図形 A の面積と定義するわけである．このアイデアにより定義された積分は，Riemann 積分と呼ばれる．



図を描けば，上図のようになる．ただし，x 軸より下方にある長方形の面積は負であるとしておく．曲線で囲まれた図形を，たくさんの長方形を用いて上からと下からとで挟み，それらの面積の和の極限を取ることで，関数で囲まれた図形の面積を計算しましょう，ということである．もちろん，すべての関数に対してこのような積分が定義できるわけではない．以下の例を参照のこと．

例 (Dirichlet の関数)．関数 $f(x)$ を以下で定義する．

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x \text{ は有理数}) \\ 0 & (x \text{ は無理数}) \end{cases}$$

このとき，区間 $\left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right]$ には必ず無理数が含まれるので[*1]，この区間における $f(x)$ の最大値は 1 になる．一方で端点は有理数なので最小値は 0 である．よって

$$s_n = 0, \quad S_n = 1$$

となるので，はさみうちの定理が使えず，面積が定義できない． □

積分を利用することにより，以下のような興味深い不等式を示すことができる．

例題 10.3

次の不等式が成り立つ．

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} > \log(n+1)$$

（考え方）$\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \log|x|$ を通して，$\dfrac{1}{x}$ と $\log x$ は関連している．よって右辺の log は $\dfrac{1}{x}$ の積分で出てきたものと推測できる．積分を使って不等式を導くことを考える．今回は積分したもの（log）のほうが小さいので，関数 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ を上から長方形で囲むとよい．すなわち，k を $1, 2, \ldots, n-1$ のいずれかとするとき，区間 $[k, k+1]$ において常に

$$\frac{1}{k} \geqq \frac{1}{x}$$

となることを用いる（図 10.1 参考）．

[*1] 例えば $i \geqq 1$ のときは $\frac{\sqrt{i^2+1}}{n}$ とすれば，これは区間 $\left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right]$ に含まれる無理数になる．

10.4　まとめ

- 初等関数の積分の公式
- 定積分と面積との関係
- Riemann 積分の定義

10.5　演習問題

(1) 次の図形の面積を求めよ．

(a) $y = \sin x$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$ と x 軸

(b) $y = \dfrac{1}{x^2+1}$ と x 軸，y 軸および直線 $x = 1$

(c) $y = e^x$ と x 軸，y 軸および直線 $x = 1$

(2) 次の不定積分を求めよ．

$$\text{(a)} \int x\sqrt{x}\,dx \quad \text{(b)} \int \frac{\cos^3 x + 2}{\cos^2 x}\,dx$$

(3) 次の不等式を証明せよ．ただし，$n \geqq 2$ とする．

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} < 1 + \log n$$

10.5.1　ヒント

(1) (b) $\theta = \mathrm{Arctan}\,1$ は，$\tan\theta = 1$ $\left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ を満たす数である．(2) 被積分関数を式変形して基本公式にある形に持っていく．(3) 例題 10.3 において，$y = \frac{1}{x}$ のグラフで囲まれた面積とそのグラフの下に並べた長方形の面積とを比較する（下図参照）．

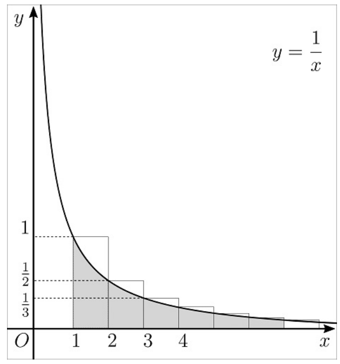


図 10.1　例題 10.3 のグラフ