線形代数学・同演習 B

1 月 17 日分　演習問題[*1]

1. (1) $\frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & -3\end{pmatrix}$ (2) $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$ (3) $\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}3 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$ (4) $\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}$

2.† (3) $\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2}\\ 0 & 2 & -\sqrt{2}\\ \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2}\end{pmatrix}$ (4) $\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 0 & \sqrt{5} & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$

3.† (1) $u_1(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}$, $u_2(x) = \sqrt{\frac{5}{2}}x$, $u_3(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}}(5x^2 - 3)$
(2) $u_1(x) = \sqrt{\frac{7}{2}}x^2$, $u_2(x) = \sqrt{\frac{5}{2}}x$, $u_3(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}(-7x^2 + 5)$
(3) $u_1(x) = -\sqrt{\frac{5}{2}}x$, $u_2(x) = -\sqrt{\frac{7}{2}}x^2$, $u_3(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}(7x^2 - 5)$

4. $\boldsymbol{u}_1 = \left(\begin{smallmatrix}a\\ b\end{smallmatrix}\right)$, $\boldsymbol{u}_2 = \left(\begin{smallmatrix}c\\ d\end{smallmatrix}\right)$ とおく．まず $\|\boldsymbol{u}_1\|^2 = a^2 + b^2 = 1$ なので $a = \cos\theta$, $b = \sin\theta$ とおく．ここで $(\boldsymbol{u}_1|\boldsymbol{u}_2) = 0$，つまりベクトル $\boldsymbol{u}_1$ と $\boldsymbol{u}_2$ は直交しているので，$\boldsymbol{u}_2$ は $\left(\begin{smallmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)\boldsymbol{u}_1 = \left(\begin{smallmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{smallmatrix}\right)$ と平行である．そこで $\boldsymbol{u}_2 = \alpha\left(\begin{smallmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{smallmatrix}\right)$ とおけば $\|\boldsymbol{u}_2\| = 1$ より $\alpha = \pm 1$ となるので結論を得る．

5. $P = (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2)$ が直交行列であることと $[\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2]$ が正規直交基底であることが同値であること，および先の問題より $\mathbb{R}^2$ の正規直交基底が全て求まっていることより，

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}.$$

6.† $A = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ とし，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ に対して Gram–Schmidt の直交化法を適用する．そうして得られた $\boldsymbol{u}_i$ は，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ を用いて

$$\boldsymbol{u}_1 = \lambda_1\boldsymbol{a}_1, \quad \boldsymbol{u}_2 = \lambda_2\boldsymbol{a}_2 - \alpha\boldsymbol{a}_1, \quad \boldsymbol{u}_3 = \lambda_3\boldsymbol{a}_3 - \beta\boldsymbol{a}_2 - \gamma\boldsymbol{a}_1$$

のように書ける．ただし λ_i や α, β, γ は $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ の内積などを用いて書ける量である (正確に書くと読みづらいのでこのように書いた)．すると，

$$[\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3] = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3]\begin{pmatrix}\lambda_1 & -\alpha & -\gamma\\ 0 & \lambda_2 & -\beta\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}$$

と書けるが，$P = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$ は直交行列であり，$U^{-1} = \left(\begin{smallmatrix}\lambda_1 & -\alpha & -\gamma\\ 0 & \lambda_2 & -\beta\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{smallmatrix}\right)$ は上三角行列であるので，$A = PU$ のように表すことができる．

7.* (1) $H_0(x) = 1$, $H_1(x) = 2x$, $H_2(x) = 4x^2 - 2$, $H_3(x) = 8x^3 - 12x$, $H_4(x) = 16x^4 - 48 + 12$.
(2) $\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2} = p_n(x)e^{-x^2}$ ($p_n(x)$ は n 次の多項式) となることを示せばよい．これは帰納法で簡単に示すことができるので略.
(3) 例題 10.3 とほぼ同様に示すことができる．

[*1] 凡例：無印は基本問題，† は特に解いてほしい問題，$*$ は応用問題.

(4) 被積分関数が

$$H_n H_m e^{-x^2} = (-1)^n \left(\frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \right) H_m(x)$$

のように書けることに注意．簡単のため $n \geq m$ と仮定する．部分積分を繰り返し行うことにより，

$$\begin{aligned}(-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \right) H_m(x)\, dx &= (-1)^{n+1} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} e^{-x^2} \right) H_m^{(1)}(x)\, dx \\ &= \cdots = (-1)^{n+m} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}} e^{-x^2} \right) H_m^{(m)}(x)\, dx\end{aligned}$$

を得る．これより $n > m$ ならば 0 となることが分かる．つまり，この内積に関して多項式 $H_n(x)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ は互いに直交している．因みに $n = m$ とすれば $2^n(n!)\sqrt{\pi}$ となる．

8.* (1) ${}^tE_n = E_n$ より明らか．(2) $P, Q \in O(n)$ とすれば ${}^tPP = E_n$, ${}^tQQ = E_n$．すると ${}^t(PQ)PQ = {}^tQ{}^tPPQ = {}^tQQ = E_n$ なので $PQ \in O(n)$．(3) $({}^tP)^{-1} = {}^t(P^{-1})$ であることを用いる．${}^tPP = E_n$ より $E_n = {}^t(P^{-1})P^{-1}$ なので $P^{-1} \in O(n)$.