線形代数学・同演習 A

演習問題 11

1.* 行列式の積公式 $\det(AB)=\det(A)\det(B)$ を，行列式の公式[*1]を用いて証明せよ．

2.† 次の行列式を計算せよ．

$$(1)\ \begin{vmatrix} -3 & 4 & 4 \\ 2 & -4 & -2 \\ -4 & 7 & 5 \end{vmatrix} \qquad (2)\ \begin{vmatrix} -6 & -9 & 1 \\ 1 & 6 & -1 \\ -3 & 2 & -1 \end{vmatrix} \qquad (3)\ \begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 7 & -4 & 9 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$(4)\ \begin{vmatrix} 1 & -7 & -29 & -22 \\ 0 & 5 & 15 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -7 & -5 \end{vmatrix} \qquad (5)\ \begin{vmatrix} 0 & 3 & 6 & -5 \\ 1 & -3 & -8 & 6 \\ 0 & 2 & 5 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \qquad (6)\ \begin{vmatrix} 4 & -1 & -4 & 5 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$(7)\ \begin{vmatrix} -7 & -7 & -7 & -9 \\ -6 & -6 & -5 & -5 \\ 6 & 7 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad (8)\ \begin{vmatrix} 9 & -17 & 26 & -3 \\ 4 & -10 & 6 & -2 \\ -2 & 8 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & 0 \end{vmatrix} \qquad (9)\ \begin{vmatrix} 5 & -5 & -2 & -5 \\ -4 & -7 & 2 & -8 \\ 4 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & 4 & -2 & 5 \end{vmatrix}$$

3.† A, D を正方行列とし，特に A は正則であるとする．このとき以下を示せ．

(a) $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & O \\ CA^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & O \\ O & D-CA^{-1}B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A^{-1}B \\ O & I \end{pmatrix}$.

(b) $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A)\det(D-CA^{-1}B)$.

4. A, B, C, D を n 次正方行列，λ を任意の実数とするとき，次が成り立つことを示せ．

$$(1)\ \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+\lambda C & B+\lambda D \\ C & D \end{vmatrix} \qquad (2)\ \begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = |A+B|\cdot|A-B|$$

5.* n 次の交代行列[*2] X について，n が奇数ならば $\det(X)=0$，n が偶数ならばある多項式[*3] $\mathrm{Pf}(X)$ が存在して $\det(X)=(\mathrm{Pf}(X))^2$ となることを示せ．

6.† 4 次交代行列 $X=\begin{pmatrix} 0 & -a & -b & -d \\ a & 0 & -c & -e \\ b & c & 0 & -f \\ d & e & f & 0 \end{pmatrix}$ のパフィアン $\mathrm{Pf}(X)$ を求めよ．[*4]

---

7 月 4 日分 (凡例：無印は基本問題，† は特に解いてほしい問題，$*$ は応用問題)

講義用 HP: http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~h-nakashima/lecture/2017LA.html

[*1] $\det A = \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)}\cdots a_{n\sigma(n)}$ のことです．

[*2] 交代行列とは，$X+{}^tX=O$ を満たす正方行列のことです．

[*3] この多項式 $\mathrm{Pf}(X)$ をパフィアン (Pfaffian) という．

[*4] 符号は $J=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ に対して $\mathrm{Pf}(J)=1$ となるように決める．問題 3 (b) を用いると計算が楽．