

線形代数学・同演習 A

7月26日分 質問への回答

質問 固有ベクトルの求め方がよく分からなかった。

— その辺りの解説が、少し駆け足になってしまいました。行列 A の固有値・固有ベクトルの計算は、

(i) まず A の固有多項式 $g_A(t)$ を計算する。

(ii) 次に $g_A(t) = 0$ を解いて、 A の固有値 λ を求める。

(iii) そして、各固有値 λ に対して、 $(\lambda E_n - A)x = 0$ という斉次の連立一次方程式を解く。

(iv) その解のうち、零ベクトルでないものがちょうど固有ベクトルになっている。

です。質問の回答の後ろに、今日の例題 14.5 の回答の一部を丁寧に書きますので、そちらも参考にしてください。

質問 半年おつかれした \ (^o^) /

— みなさんも半年間お疲れ様でした。

質問 前期はお世話になりました。

後期もよろしくお願いします。

— こちらこそ、拙い講義に付き合っていたいただきありがとうございました。後期もよろしくお願いいたします。

質問 先週はご迷惑をおかけしました。

— お気になさらずに。家庭の事情ならば仕方のない事です。

質問 テストがんばるちゃ!!

— 頑張ってください。計算ミスに注意です。

質問 昨日誕生日でした。

— それはおめでとうございました。

質問 祝ってください

— なにをでしょうか?

例題 14.5 の解答 (の一部)

例題 14.5 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ .

解) A の固有値は $\lambda = \pm 1$ である .

(i) $\lambda = 1$ のとき .

固有ベクトルは , 連立一次方程式

$$(1 \cdot E_2 - A)\mathbf{x} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

の非自明な解である . この連立一次方程式を解けばよいが , 係数行列を簡約化すれば ,

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

なので ,

$$x - y = 0$$

という (連立) 方程式の解を求めればよい . $y = s$ (パラメータ) とすれば , $x = y = s$

なので ,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ s \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

よって , 固有値 $\lambda = 1$ に対応する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ となる .