線形代数学・同演習 A

7 月 5 日分　演習問題

1. 行列式の積公式 $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ を，行列式の公式[*1]を用いて証明せよ．
2. 次の行列式を計算せよ．

$$(1)\ \begin{vmatrix} -6 & 1 & -3 \\ -9 & 6 & 2 \\ 8 & -2 & -1 \end{vmatrix} \qquad (2)\ \begin{vmatrix} -6 & -9 & 1 \\ 1 & 6 & -1 \\ -3 & 2 & -1 \end{vmatrix} \qquad (3)\ \begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 7 & -4 & 9 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$(4)\ \begin{vmatrix} 0 & -4 & -1 & -3 \\ -4 & -5 & 4 & -2 \\ 2 & 6 & 3 & -6 \\ 2 & 6 & 8 & -3 \end{vmatrix} \qquad (5)\ \begin{vmatrix} -5 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & 3 & -4 \\ 4 & -4 & 3 & 5 \end{vmatrix} \qquad (6)\ \begin{vmatrix} -5 & 3 & 3 & -1 \\ 3 & -4 & 4 & -5 \\ -3 & -4 & 2 & -4 \\ 4 & 5 & 0 & -4 \end{vmatrix}$$

$$(7)\ \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ -3 & 3 & 2 & 4 \\ 5 & 5 & 3 & -5 \end{vmatrix} \qquad (8)\ \begin{vmatrix} 3 & 4 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & -2 & -3 \\ -2 & -1 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \end{vmatrix} \qquad (9)\ \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 4 & -5 \\ -2 & -4 & -5 & 0 \\ -1 & -4 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$(10)\ \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 2 & -4 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 4 & 1 \\ -2 & -2 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 4 & -1 & 1 & 4 \end{vmatrix} \qquad (11)\ \begin{vmatrix} -1 & -3 & -3 & 1 & 3 \\ 1 & -4 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

3. A, D を正方行列とし，特に A は正則であるとする．このとき以下を示せ．
   (a) $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & O \\ CA^{-1} & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & O \\ O & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & A^{-1}B \\ O & I \end{pmatrix}$.
   (b) $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A)\det(D - CA^{-1}B)$.
4. A, B, C, D を n 次正方行列，λ を任意の実数とするとき，次が成り立つことを示せ．

$$(1)\ \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A + \lambda C & B + \lambda D \\ C & D \end{vmatrix} \qquad (2)\ \begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = |A + B| \cdot |A - B|$$

5. n 次の交代行列[*2] X について，以下を示せ．
   (a) n が奇数ならば，$\det(X) = 0$,
   (b) n が偶数ならば，ある多項式[*3] $\mathrm{Pf}(X)$ が存在して $\det(X) = (\mathrm{Pf}(X))^2$.
6. 4 次交代行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & -a & -b & -d \\ a & 0 & -c & -e \\ b & c & 0 & -f \\ d & e & f & 0 \end{pmatrix}$ のパフィアン $\mathrm{Pf}(X)$ を求めよ．[*4]

[*1] $\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$ のことです．

[*2] 交代行列とは，$X + {}^tX = O$ を満たす正方行列のことです．

[*3] この多項式 $\mathrm{Pf}(X)$ をパフィアン (Pfaffian) という．

[*4] 符号は，$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ のとき $\mathrm{Pf}(J) = 1$ となるように決める．