線形代数学・同演習 B

1 月 24 日分　演習問題[*1]

1. $(x\cos\theta - y\sin\theta)^2 + (x\sin\theta + y\cos\theta)^2 = x^2 + y^2$ を確かめればよい.

2.[†] (1) 正定値ではない (固有値は $1, 2, -1$)

(2) 正定値 (固有値は $4, 4, 1$)

(3) 正定値ではない (固有値は $7, -2, -2$)

3. (1) エルミート内積を $\langle\cdot|\cdot\rangle$ とする．交代行列 X の固有値を μ，固有ベクトルを $\boldsymbol{x}$ とすれば,

$$\mu\langle\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}\rangle = \langle X\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}\rangle = \left\langle\boldsymbol{x}|{}^tX\boldsymbol{x}\right\rangle = \langle\boldsymbol{x}|-X\boldsymbol{x}\rangle = -\overline{\mu}\langle\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}\rangle$$

なので $\mu = -\overline{\mu}$，つまり μ は純虚数 (もしくは 0) である.

(2) λi に対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x}$ とすると $X\boldsymbol{x} = \lambda i\boldsymbol{x}$ であり，この式の両辺の複素共役をとることにより

$$\overline{X\boldsymbol{x}} = \overline{\lambda i\boldsymbol{x}} \quad\Leftrightarrow\quad X\overline{\boldsymbol{x}} = -\lambda i\overline{\boldsymbol{x}}.$$

(3) (1) より交代行列の固有値は純虚数か 0 であるが，(2) より 0 でない純虚数は $\pm$ が必ず対となる．したがって，n が奇数ならば少なくとも 1 つは固有値 0 を持つことになる．一方，行列式は固有値の積として得られるので，奇数次の交代行列の行列式は必ず 0 になる.

4.[†] (1)⇒(2) A の固有多項式は $g_A(t) = t^2 - (a+c)t + (ac - b^2)$ であるので，固有値は

$$\lambda = \frac{(a+c) \pm \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}}{2} \tag{1}$$

となる．これが正なのだから

$$(a+c)^2 - ((a-c)^2 + 4b^2) = 4(ac - b^2) > 0,$$

つまり $ac - b^2 > 0$ を得る．これより特に a と c は同符号であるが，式 (1) より $a > 0$ がわかる．(2)⇒(1) は逆を辿ればよい.

5.[†] $L = \begin{pmatrix} \sqrt{a} & 0 \\ b/\sqrt{a} & \sqrt{(ac-b^2)/a} \end{pmatrix}$.

$L = \left(\begin{smallmatrix} x & 0 \\ y & z \end{smallmatrix}\right)$ とおいたとき，$L\,{}^tL = \left(\begin{smallmatrix} x^2 & xy \\ xy & y^2+z^2 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & c \end{smallmatrix}\right)$ なので，x, y, z を a, b, c で表せばよい．問題 4 より $a > 0$, $ac - b^2 > 0$ なので根号を取れることに注意.

6. ヒントが間違っていました．正しくは $\mathrm{tr}(M) = \mathrm{tr}({}^tM)$ です.

${}^t(AX) = {}^tX\,{}^tA = -XA$ であることより

$$\mathrm{tr}(AX) = \mathrm{tr}({}^t(AX)) = -\mathrm{tr}(XA).$$

ここで $\mathrm{tr}(AX) = \mathrm{tr}(XA)$ であることを用いると，$2\mathrm{tr}(AX) = 0$ を得る.

7.[*] (1) 例題 10.3 とほぼ同様．正値性条件も $(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x})_0 = \lambda x^2 + \mu y^2$ であることより明らかであろう.

[*1] 凡例：無印は基本問題，† は特に解いてほしい問題，$*$ は応用問題.

(2) $\widetilde{X} = \left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{smallmatrix}\right)^{-1} {}^t X \left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{smallmatrix}\right)$.

$D = \left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{smallmatrix}\right)$ とおいたとき，$(\,\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{y}\,) = (x, y)D\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ とかけることより

$$(\,X\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{y}\,) = (x, y)^t XD\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x, y)D \cdot \underline{D^{-1}\,{}^t XD}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

(3) ${}^t P \left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{smallmatrix}\right) P = \left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{smallmatrix}\right)$.

条件は $\widetilde{P}P = E_2$ であるが，(2) よりこれは $D^{-1}\,{}^t PD \cdot P = E_2$ となるので.

8.* Jacobian を J とすれば，$J = |\det A|$ となる．したがって，A が直交行列ならば $J = 1$ である.

9.* (1) $\begin{pmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^b \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} \cosh x & \sinh x \\ \sinh x & \cosh x \end{pmatrix}$