演習問題 3

問題 1． (1) 本質的に例題 3.8 と同じであるが，より実際的な解答をする．$z_x = z_r r_x + z_\theta \theta_x$，$z_y = z_r r_y + z_\theta \theta_y$ より，

$$\begin{aligned} z_x^2 + z_y^2 &= (z_r r_x + z_\theta \theta_x)^2 + (z_r r_y + z_\theta \theta_y)^2 \\ &= (r_x^2 + r_y^2) z_r^2 + 2(r_x \theta_x + r_y \theta_y) z_x z_y + (\theta_x^2 + \theta_y^2) z_\theta^2. \end{aligned}$$

ここで $r_x = \cos\theta$, $r_y = \sin\theta$, $\theta_x = -\frac{\sin\theta}{r}$, $\theta_y = \frac{\cos\theta}{r}$ より

$$r_x^2 + r_y^2 = 1, \quad z_r r_x + z_\theta \theta_x = 0, \quad \theta_x^2 + \theta_y^2 = \frac{1}{r^2}$$

であるので，$z_x^2 + z_y^2 = z_r^2 + \frac{1}{r^2} z_\theta^2$ を得る．
ベクトル表記 $\nabla r = (r_x, r_y)$ および $\nabla\theta = (\theta_x, \theta_y)$ を用いると，もっと見易くなる．実際，$\|\nabla r\|^2 = 1$, $\langle \nabla r \,|\, \nabla\theta \rangle = 0$, $\|\nabla\theta\|^2 = \frac{1}{r^2}$ となるので，

$$z_x^2 + z_y^2 = \|\nabla r\|^2 z_x^2 + 2\langle \nabla r \,|\, \nabla\theta \rangle z_r z_\theta + \|\nabla\theta\|^2 z_\theta^2 = z_r^2 + \frac{1}{r^2} z_\theta^2.$$

(2) まず z_{xx} について計算する．計算のコツは, r_x や θ_x などが出てきても, $r_x = \cos\theta$ などとせずにそのまま計算を実行することである．

$$\begin{aligned} z_{xx} &= (z_r r_x + z_\theta \theta_x)_x \\ &= \{(z_r)_x r_x + z_r (r_x)_x\} + \{(z_\theta)_x \theta_x + z_\theta (\theta_x)_x\} \\ &= \{(z_{rr} r_x + z_{r\theta} \theta_x) r_x + z_r r_{xx}\} + \{(z_\theta r) r_x + z_{\theta\theta} \theta_x) \theta_x + z_\theta \theta_{xx}\} \\ &= r_x^2 z_{rr} + 2 r_x \theta_x r_{r\theta} + \theta_x^2 z_{\theta\theta} + z_r r_{xx} + z_\theta \theta_{xx}. \end{aligned}$$

次に z_{yy} についても計算するが，これは z_{xx} の計算において，単に x を y に書き換えればよい (これがそのまま計算することの利点である)．よって，

$$z_{yy} = r_y^2 z_{rr} + 2 r_y \theta_y r_{r\theta} + \theta_y^2 z_{\theta\theta} + z_r r_{yy} + z_\theta \theta_{yy}.$$

以上より

$$\begin{aligned} z_{xx} + z_{yy} &= (r_x^2 + r_y^2) z_{rr} + 2(r_x \theta_x + r_y \theta_y) r_{r\theta} + (\theta_x^2 + \theta_y^2) z_{\theta\theta} \\ &\quad + (r_{xx} + r_{yy}) z_r + (\theta_{xx} + \theta_{yy}) z_\theta \end{aligned}$$

となるので，あとは $r_{xx} + r_{yy}$ と $\theta_{xx} + \theta_{yy}$ を計算すればよい．$r^2 = x^2 + y^2$ において両辺を x で偏微分して $r \cdot r_x = x$ で，これをさらに x で偏微分すれば

$$r_x \cdot r_x + r \cdot r_{xx} = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad r_{xx} = \frac{1 - \frac{x^2}{r^2}}{r} = \frac{\sin^2\theta}{r}.$$

同様にして $r_{yy} = \frac{\cos^2\theta}{r}$．$\theta$ に関しては $\theta = \mathrm{Arctan}\,\frac{y}{x}$ を偏微分する方がよい．

$$\theta_{xx} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}, \quad \theta_{yy} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-2\sin\theta\cos\theta}{r^2}.$$

したがって，$r_{xx} + r_{yy} = \frac{1}{r}$, $\theta_{xx} + \theta_{yy} = 0$ なので,

$$z_{xx} + z_{yy} = z_{rr} + \frac{1}{r^2} z_{\theta\theta} + \frac{1}{r} z_r.$$

問題 2. (1) まず $\xi = x\cos\alpha + y\sin\alpha$, $\eta = -x\sin\alpha + y\cos\theta$ に注意する．これより

$$\xi_x = \cos\alpha, \quad \xi_y = \sin\alpha, \quad \eta_x = -\sin\alpha, \quad \eta_y = \cos\alpha$$

となる．またこれらの二階偏導関数は 0 になる．さて,

$$\begin{aligned} z_x &= z_\xi \xi_x + z_\eta \eta_x = (\cos\alpha) z_\xi + (\sin\alpha) z_\eta, \\ z_x &= z_\xi \xi_x + z_\eta \eta_x = (-\sin\alpha) z_\xi + (\cos\alpha) z_\eta \end{aligned}$$

であるので,

$$z_x^2 + z_y^2 = \{(\cos\alpha) z_\xi + (\sin\alpha) z_\eta\}^2 + \{(-\sin\alpha) z_\xi + (\cos\alpha) z_\eta\}^2 = z_\xi^2 + z_\eta^2.$$

(2) まず z_{xx} について計算する．ξ, η の二階偏導関数が 0 になることを思い出して,

$$\begin{aligned} z_{xx} &= (z_\xi \xi_x + z_\eta \eta_x)_x \\ &= \{(z_\xi)_x \xi_x + z_\xi \xi_{xx}\} + \{(z_\eta)_x \eta_x + z_\eta \eta_{xx}\} \\ &= (z_{\xi\xi} \xi_x + z_{\xi\eta} \eta_x) \xi_x + (z_{\eta\xi} \xi_x + z_{\eta\eta} \eta_x) \eta_x \\ &= (\xi_x)^2 z_{\xi\xi} + 2\xi_x \eta_x z_{\xi\eta} + (\eta_x)^2 z_{\eta\eta}. \end{aligned}$$

z_{yy} は, x を y に置き換えたものなので, $z_{yy} = (\xi_y)^2 z_{\xi\xi} + 2\xi_y \eta_y z_{\xi\eta} + (\eta_y)^2 z_{\eta\eta}$ となる．また, $\xi_x^2 + \xi_y^2 = 1$, $\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y = 0$, $\eta_x^2 + \eta_y^2 = 1$ となるので $z_{xx} + z_{yy} = z_{\xi\xi} + z_{\eta\eta}$.

問題 3.† 問題 1(2) の解答より (記号を $r \mapsto u$, $\theta \mapsto v$ とすれば)

$$\begin{aligned} z_{xx} + z_{yy} &= (u_x^2 + u_y^2) z_{uu} + 2(u_x v_x + u_y v_y) u_{uv} + (v_x^2 + v_y^2) z_{vv} \\ &\quad + (u_{xx} + u_{yy}) z_u + (v_{xx} + v_{yy}) z_v \end{aligned}$$

となることを利用する．簡単な計算より $u = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2)$, $\tan v = \frac{y}{x}$ と書ける．これより v については改めて計算する必要はない (問題 1 の θ と同じ変換になるので)．u については，$u_x = \frac{x}{x^2+y^2}$, $u_y = \frac{y}{x^2+y^2}$ であり，さらに

$$u_{xx} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad u_{yy} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

なので,

$$u_x^2 + u_y^2 = \frac{1}{x^2+y^2} = e^{-2u}, \quad u_x v_x + u_y v_y = 0 \quad u_{xx} + u_{yy} = 0$$

となり，$z_{xx} + z_{yy} = e^{-2u}(z_{uu} + z_{vv})$ を得る．

問題 4. ※重大な誤植がありました．示すべき等式は

$$z_{uu}+z_{vv}=\frac{\cosh 2u-\cos 2v}{2}(z_{xx}+z_{yy})$$

です．問題 1(2) の解答より (記号を $x\mapsto u$, $y\mapsto v$, $r\mapsto x$, $\theta\mapsto y$ とすれば)

$$\begin{aligned}z_{uu}+z_{vv}&=(x_u^2+x_v^2)z_{xx}+2(x_uy_u+x_vy_v)u_{xy}+(y_u^2+y_v^2)z_{yy}\\&\quad+(x_{uu}+x_{vv})z_x+(y_{uu}+y_{vv})z_y\end{aligned}$$

となることを利用する．この問題は u_x, u_y などを求めるのが少し難しいため，右辺から出発して示す．まず

$$x_u=\sinh u\cos v,\quad x_v=-\cosh u\sin v,\quad y_u=\cosh u\sin v,\quad y_v=\sinh u\cos v$$

および

$$\begin{gathered}x_{uu}=\cosh u\cos v,\quad x_{uv}=x_{vu}=-\sinh u\sin v,\quad x_{vv}=-\cosh u\cos v,\\y_{uu}=\sinh u\sin v,\quad y_{uv}=y_{vu}=\cosh u\cos v,\quad y_{vv}=-\sinh u\sin v\end{gathered}$$

である．よって

$$x_u^2+x_v^2=y_u^2+y_v^2=\sinh^2 u\cos^2 v+\cosh^2 u\sin^2 v,$$

$$x_uy_u+x_vy_v=x_{uu}+x_{vv}=y_{uu}+y_{vv}=0$$

となり，$z_{uu}+z_{vv}=(\sinh^2 u\cos^2 v+\cosh^2 u\sin^2 v)(z_{xx}+z_{yy})$ となることが分かる．ここで三角関数，双曲線関数の性質 (倍角の公式) を使えば

$$\sinh^2 u\cos^2 v+\cosh^2 u\sin^2 v=\frac{\cosh 2u-\cos 2v}{2}$$

がわかり証明が終わる．

問題 5.[†] 問題 1 (2) の証明より

$$\begin{aligned}z_{xx}+z_{yy}&=(\xi_x^2+\xi_y^2)z_{\xi\xi}+2(\xi_x\eta_x+\xi_y\eta_y)z_{\xi\eta}+(\eta_x^2+\eta_y^2)z_{\eta\eta}\\&\quad+(\xi_{xx}+\xi_{yy})z_\xi+(\eta_{xx}+\eta_{yy})z_\eta\end{aligned}$$

である．また，簡単な計算から $\xi=\frac{x}{x^2+y^2}$, $\eta=\frac{y}{x^2+y^2}$ である．よって

$$\xi_x=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},\quad \xi_y=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2},\quad \eta_x=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2},\quad \eta_y=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

および

$$\xi_{xx}=\frac{2x(x^2-3y^2)}{(x^2+y^2)^3},\ \xi_{yy}=\frac{2x(3y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^3},\ \eta_{xx}=\frac{2y(3x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3},\ \eta_{yy}=\frac{2y(y^2-3x^2)}{(x^2+y^2)^3}$$

である．したがって

$$\xi_x^2+\xi_y^2=\frac{1}{(x^2+y^2)^2},\qquad \eta_x^2+\eta_y^2=\frac{1}{(x^2+y^2)^2}$$
$$\xi_x\eta_x+\xi_y\eta_y=\xi_{xx}+\xi_{yy}=\eta_{xx}+\eta_{yy}=0$$

であり，$\frac{1}{x^2+y^2}=\xi^2+\eta^2$ であることを思い出せば,

$$z_{xx}+z_{yy}=\frac{\xi^2+\eta^2}{x^2+y^2}(z_{\xi\xi}+z_{\eta\eta})\quad\Leftrightarrow\quad(x^2+y^2)(z_{xx}+z_{yy})=(\xi^2+\eta^2)(z_{\xi\xi}+z_{\eta\eta}).$$

小レポート 3

(1) 問題が「原始関数を一つ求めよ」なので，積分定数は書かなくてもよいです．また，$\int \frac{dt}{t} = \log|t|$ のように，積分して log になるときは絶対値を書く必要がありますので，気をつけましょう．

- $f_1(x) = \dfrac{1}{\sin x}$
  三角関数の有理関数の積分は，$t = \tan\frac{x}{2}$ と変数変換すれば機械的に計算ができる[*1]．このとき $dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$ であり，また $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ である．これより，

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{1+t^2}{2t} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{t} = \log|t| = \log\left|\tan\frac{x}{2}\right|. \quad \square$$

- $f_2(x) = \dfrac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$
  $f_1(x)$ の場合と同様に変数変換すれば，

$$\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} dx = \int \frac{\frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = -2\int \frac{t^2+2t-1}{(t^2-2t-1)(t^2+1)} dt.$$

ここで部分分数分解する．

$$\frac{t^2+2t-1}{(t^2-2t-1)(t^2+1)} = \frac{at+b}{t^2-2t-1} + \frac{ct+d}{t^2+1}$$

とおき，この両辺に $(t^2-2t-1)(t^2+1)$ を掛けて

$$\begin{aligned} t^2+2t-1 &= (at+b)(t^2+1) + (ct+d)(t^2-2t-1) \\ &= (a+c)t^3 + (b-2c+d)t^2 + (a-c-2d)t + (b-d) \end{aligned}$$

となる．これより

$$a+c=0, \quad b-2c+d=1, \quad a-c-2d=2, \quad b-d=-1$$

であり，これを解いて $a=1$, $b=c=-1$, $d=0$ を得る．したがって

$$-2\frac{t^2+2t-1}{(t^2-2t-1)(t^2+1)} = \frac{2t}{t^2+1} - \frac{2t-2}{t^2-2t-1}$$

なので，

$$\begin{aligned} I &= \int \left\{ \frac{2t}{t^2+1} - \frac{2t-2}{t^2-2t-1} \right\} dt = \log(t^2+1) - \log|t^2-2t-1| \\ &= \log\left|\frac{1+t^2}{t^2-2t-1}\right|. \end{aligned}$$

[*1] ただし，必ずしも計算が楽というわけではない．

ここで $1+t^2=(\cos^2\frac{x}{2})^{-1}$ および

$$t^2-2t-1=\frac{\sin^2\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-\cos^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{-\cos x-\sin x}{\cos^2\frac{x}{2}}$$

であることに注意すれば,

$$I=\log\left|\frac{1+\tan^2\frac{x}{2}}{\tan^2\frac{x}{2}-2\tan\frac{x}{2}-1}\right|=-\log|\cos x+\sin x|. \quad \square$$

- $f_3(x)=\dfrac{1}{1+\tan x}$
  被積分関数が $\tan x$ や $\cos^2 x$, $\sin^2 x$ による有理関数になっているならば, $t=\tan x$ と変数変換するとよい．この場合, $dt=\dfrac{dt}{1+t^2}$ および $\sin^2 x=\dfrac{t^2}{1+t^2}$, $\cos^2 x=\dfrac{1}{1+t^2}$ であることより,
  $$\int\frac{dx}{1+\tan x}=\int\frac{1}{1+t}\cdot\frac{dt}{1+t^2}.$$
  ここで部分分数分解を行う．
  $$\frac{1}{(1+t)(1+t^2)}=\frac{a}{1+t}+\frac{bt+c}{t^2+1}$$
  とおいて，両辺に $(1+t)(1+t^2)$ を掛けると
  $$1=a(1+t^2)+(bt+c)(1+t)=(a+b)t^2+(b+c)t+(a+c)$$
  なので $a+b=0$, $b+c=0$, $a+c=1$ となる．これを解いて $a=c=\frac{1}{2}$, $b=-\frac{1}{2}$ を得る．したがって
  $$\frac{1}{(1+t)(1+t^2)}=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1+t}-\frac{t-1}{t^2+1}\right\}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+t}-\frac{1}{4}\cdot\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+t^2}$$
  なので,
  $$\begin{aligned}I&=\frac{1}{2}\log|1+t|-\frac{1}{4}\log(1+t^2)+\frac{1}{2}\operatorname{Arctan}t\\&=\frac{1}{4}\log\frac{(1+t)^2}{1+t^2}+\frac{1}{2}\operatorname{Arctan}t\\&=\frac{1}{2}\log|\sin x+\cos x|+\frac{1}{2}x. \quad \square\end{aligned}$$
- $f_4(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$
  $f_3(x)$ と同様にすれば $\displaystyle\int\frac{dx}{\cos^2 x}=\int\frac{1+t^2}{1}\cdot\frac{dt}{1+t^2}=\int dt=t=\tan x. \quad \square$
- 別解もあります.

- $f_1(x) = \dfrac{\sin x}{\sin^2 x} = -\dfrac{(\cos x)'}{1-\cos^2 x}$ とみる.
- $f_2(x) = -\dfrac{(\sin x + \cos x)'}{\sin x + \cos x}$ とみる.
- あるいは，$f_2(x) = \dfrac{\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})}{\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})} = \dfrac{(\cos(x-\frac{\pi}{4}))'}{\cos(x-\frac{\pi}{4})}$ とみる[*2].
- $f_3(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x + \cos x} = \dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x} - \dfrac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\right\}$ とみて，$f_2(x)$ の結果を使う[*3].
- $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = f_4(x)$ よりすぐ分かる.

(2) は演習問題 3 の問題 1 (2) を参照してください (実は同じ問題です).

[*2] このように解答した方が数名いました.

[*3] 私は気が付きませんでしたが，このように解答した方がいました.