線形代数学・同演習 A

演習問題 7

1. 一般の線形写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ が与えられたとき，ある $m \times n$ 行列 A が存在して，$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ となることを示せ．
2. $D = \{(x, y);\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$ を単位正方形，K を 4 点 $(0,0)$, $(1,2)$, $(0,4)$, $(-1,2)$ を頂点とする菱形とする．このとき，D を K に写すような平面の線形写像をすべて決定せよ．
3. 単位正方形 D は，次の 2 次正方行列によってどのような図形に変形するかを図示せよ．また，変形後の図形の面積を計算せよ[*1]．

$$(1)\ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (2)\ \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & -2 \end{pmatrix} \qquad (3)\ \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad (4)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

4. 二つの空間ベクトル $\boldsymbol{a} = {}^t(a_1, a_2, a_3)$, $\boldsymbol{b} = {}^t(b_1, b_2, b_3)$ の外積 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ を考える．ただし，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ は平行ではなく，どちらも $\boldsymbol{0}$ ではないとする．
   (1) 原点 O を通り，方向 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を持つ平面は次に表わされることを示せ:

$$(a_2b_3 - a_3b_2)x + (a_3b_1 - a_1b_3)y + (a_1b_2 - a_2b_1)z = 0.$$

   (2) $(a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 = \|\,\boldsymbol{a}\,\|^2 \|\,\boldsymbol{b}\,\|^2 - \langle \boldsymbol{a} \,|\, \boldsymbol{b} \rangle^2$ を示せ．
   (3) $\|\,\boldsymbol{a}\,\|^2 \|\,\boldsymbol{b}\,\|^2 - \langle \boldsymbol{a} \,|\, \boldsymbol{b} \rangle^2 = \|\,\boldsymbol{a}\,\|^2 \|\,\boldsymbol{b}\,\|^2 \sin^2\theta$ を示せ．
   この問題 (1)–(3) より，次を得る[*2]:

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}.$$

   この結果を用いると，(2) の等式は $\|\,\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\,\|^2 = \|\,\boldsymbol{a}\,\|^2 \|\,\boldsymbol{b}\,\|^2 - \langle \boldsymbol{a} \,|\, \boldsymbol{b} \rangle^2$ と書ける．
   (4) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ を示せ．
   (5) $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} + (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) \times \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = 0$ を示せ[*3] (Jacobi の恒等式).

---

5 月 30 日分 (凡例：無印は基本問題，† は特に解いてほしい問題，$*$ は応用問題)
講義用 HP: http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~h-nakashima/lecture/2017LA.html

[*1] 行列式と比較してみよ．

[*2] 法線ベクトルは平面と垂直なベクトルであるが，この平面は 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ を含むので，これら 2 つのベクトルと垂直になっている．よって $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ はこの法線ベクトルのスカラー倍であるが，(2) よりそのスカラーは 1 で良いことが分かる．(実はまだ不十分で，符号を確認しないといけない．これには “行列式” の概念が必要なので，ここでは深入りしない．ここに簡単に書いておくと，外積 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ の方向は $\det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) > 0$ となるように取っている．)

[*3] 上の結果を用いて良い．