線形代数学・同演習 A

演習問題 13

1. 余因子行列を $\widetilde{A}$，逆行列を A^{-1} とする．

(1) $\widetilde{A}=\begin{pmatrix}5&2&-1\\3&5&7\\3&-14&-12\end{pmatrix}$，$A^{-1}=\dfrac{1}{19}\begin{pmatrix}5&2&-1\\3&5&7\\3&-14&-12\end{pmatrix}$

(2) $\widetilde{A}=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&4&3\\-5&-18&-11\end{pmatrix}$，$A^{-1}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1&2&1\\1&4&3\\-5&-18&-11\end{pmatrix}$

(3) $\widetilde{A}=\begin{pmatrix}8&-6&-11\\-13&7&22\\-9&4&11\end{pmatrix}$，$A^{-1}=\dfrac{1}{11}\begin{pmatrix}8&-6&-11\\-13&7&22\\-9&4&11\end{pmatrix}$

2. まず $\det(A)\neq 0$ とする．このとき，$A\widetilde{A}=(\det A)E_n$ の両辺の det をとれば，行列式の積公式より

$$\det(A)\det(\widetilde{A})=\det(|A|E_n)=(\det(A))^n$$

であるので，$\det(\widetilde{A})=(\det(A))^{n-1}$．次に，$\det(A)=0$ とする．$A=O$ ならば明らかなので $A\neq O$ とする．このとき，もし $\det(\widetilde{A})\neq 0$ ならば，$\widetilde{A}$ は逆行列 B を持つことになるが，$A\widetilde{A}=0E_n=O$ の両辺に右から B をかけると $A=O$ となってしまう．よって $\det(\widetilde{A})=0$ となる．

3. (1) $\det A=2a-7$　　(2) $a=3,4$

4.* $A=\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)$ (a,b,c,d は整数) とする．このとき $|A|=ad-bc$ は整数である．さて，A^{-1} は

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}$$

であるので，この成分が全て整数であるとすると，

$$\frac{a}{|A|},\quad \frac{b}{|A|},\quad \frac{c}{|A|},\quad \frac{d}{|A|}$$

がすべて整数になっていることになる．したがって，

$$a=a'|A|,\quad b=b'|A|,\quad c=c'|A|,\quad d=d'|A|$$

---

7 月 25 日分 (凡例：無印は基本問題，† は特に解いてほしい問題，∗ は応用問題)
講義用 HP: http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~h-nakashima/lecture/2017LA.html

となる整数 a', b', c', d' が存在することになる．このとき，$|A| = ad - bc = |A|^2(a'd' - b'c')$ であるので，

$$a'd' - b'c' = \frac{1}{|A|}$$

となる．ここで左辺は整数の和と積なので整数であるが，右辺は $|A| \neq \pm 1$ ならば整数になり得ない．したがって，$|A| = \pm 1$ でなければならない．

5.* $\alpha = \max_{i,j} |a_{ij}|$ とおく (A の成分の中で絶対値が最も大きいもの)．さて，すべての成分が 1 である $n \times n$ 行列を I と書くと，$I^k = n^k I$ となる．これを用いると，行列 X の (i, j) 成分を $(X)_{ij}$ と書くことにすれば，

$$|(A^k)_{ij}| \leq |((\alpha I)^k)_{ij}| = (n\alpha)^k$$

となる．ここで $|x_{ij}(M) - x_{ij}(N)|$ $(M > N)$ を考える．

$$|x_{ij}(M) - x_{ij}(N)| = \left| \sum_{k=N+1}^{M} \frac{1}{k!}(A^k)_{ij} \right| \leq \sum_{k=N+1}^{M} \frac{1}{k!} \left|(A^k)_{ij}\right| \leq \sum_{k=N+1}^{M} \frac{(n\alpha)^k}{k!}$$

であり，指数関数 $e^x = \sum_k \frac{x^k}{k!}$ は収束するので，$M, N \to \infty$ のとき $|x_{ij}(M) - x_{ij}(N)| \to 0$ となる．つまり各 (i, j) について $x_{ij}(N)$ は Cauchy 列である．Cuachy 列は収束するので，$\{x_{ij}(N)\}$ は収束列である．

6.* (1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(3) $n = 2k$ のとき，$(-1)^k E_2$，$n = 2k+1$ のとき，$(-1)^k \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(4) $A^3 = A$ に注意して，$A^n = E_2$ $(n = 3k)$, $A^n = A$ $(n = 3k+1)$, $A^n = A^2 = -A - E$ $(n = 3k+2)$.

(5) $n = 1$ のとき $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，$n = 2$ のとき $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，$n \geq 3$ のとき O.

7.* (1) $\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} e^t & 2te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

(4) $-2e^{-t/2} \begin{pmatrix} \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{2\pi}{3}) & -\sqrt{3}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t) \\ \frac{1}{\sqrt{3}}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t) & \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{2\pi}{3}) \end{pmatrix}$ (5) $\begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

8.* $\det(\exp(tA)) = e^{t \operatorname{tr} A}$ という関係が成立する．これは，$A = PDP^{-1}$ と対角化[*1]と

[*1] 実際は Jordan 標準形まで考えないといけないが…。

したとき，

$$\exp(tA) = \sum_k \frac{t^k}{k!}(PDP^{-1})^k = P\sum_k \frac{t^k}{k!}D^k P^{-1} = P(\exp tD)P^{-1}$$

と，対角行列 D の指数写像の共役 (P と P^{-1} で挟んだ形) になることからわかる．実際，D を対角に $d_1, \ldots, d_n$ が並んでいるとすると，$\exp(tD)$ は対角に $e^{td_1}, \ldots, e^{td_n}$ が並んでおり，

$$\det\exp(tA) = \det P\exp(tD)P^{-1} = \det\exp(tD) = \prod_j (e^{td_j}) = e^{\sum_j td_j}.$$

ここで $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} D$ であることを思い出せば，$\det(\exp(tA)) = e^{t\operatorname{tr} A}$ という関係が得られる．