**問題**

数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ がそれぞれ $\alpha, \beta$ に収束するとき，$\lim_{n\to+\infty} a_n b_n = \alpha\beta$ を示せ.

**証明**. $\varepsilon > 0$ を任意にとる．まず，数列 $\{a_n\}$ は収束するので特に有界であることより，ある正数 $M > 0$ を用いて $|a_n| < M$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ とできる．また，$\{a_n\}, \{b_n\}$ はそれぞれ $\alpha, \beta$ に収束するので，$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{M+|\beta|} > 0$ という正数に対してある番号 $N_1$ があり，$n \geq N_1$ ならば

$$|a_n - \alpha| < \varepsilon_1, \quad |b_n - \beta| < \varepsilon_1$$

とできる．よって，$n \geq N_1$ のとき

$$\begin{aligned} |a_n b_n - \alpha\beta| &= |a_n b_n - a_n\beta + a_n\beta - \alpha\beta| \\ &\leq |a_n| \cdot |b_n - \beta| + |a_n - \alpha| \cdot |\beta| \\ &\leq M \cdot \varepsilon_1 + \varepsilon_1 \cdot \beta = \varepsilon. \end{aligned}$$

これより，任意の正数 $\varepsilon$ に対して番号 $N_1$ を上記のように取れば，$n \geq N_1$ なる自然数に対して常に $|a_n b_n - \alpha\beta| < \varepsilon$ が成り立つので，$\lim_{n\to+\infty} a_n b_n = \alpha\beta$ である．□

**コメント**

● 収束することを示すには，まず正数 $\varepsilon$ を与えることから始めなくてはいけません．それは，「収束すること」の定義が「与えられた正数 $\varepsilon$ に対して番号 $N$ が見つかり…」となっているからです．定義をしっかりと押さえましょう．

● 証明は上記のように書くのですが，実際に証明をしていくときには，まず $|a_n b_n - \alpha\beta| = \cdots$ の計算から始めます．そして，これを $\varepsilon$ という任意の正数で上から抑えるために何が必要なのかを考えます．この問題の場合は数列 $\{a_n\}$ を上から抑える正数 $M$ や $\{a_n\}, \{b_n\}$ の収束に関する $N_1$ などです．これらを合わせて，最後に，実際に証明を書き始めるのです．必要となる情報は問題毎に異なりますので，証明を書き始める前に準備が必要なのです.