線形代数学・同演習 A

演習問題 9

1. 偶置換は

$$\begin{array}{l} \varepsilon\ (\text{単位置換}), \\ (1,\,2,\,3),\ (1,\,2,\,4),\ (1,\,3,\,4),\ (2,\,3,\,4), \\ (1,\,3,\,2),\ (1,\,4,\,2),\ (1,\,4,\,3),\ (2,\,4,\,3), \\ (1,\,2)\circ(3,\,4),\ (1,\,3)\circ(2,\,4),\ (1,\,4)\circ(2,\,3) \end{array}$$

の 12 個．そして奇置換は

$$\begin{array}{l} (1,\,2),\ (1,\,3),\ (1,\,4),\ (2,\,3),\ (2,\,4),\ (3,\,4), \\ (1,\,2,\,3,\,4),\ (1,\,2,\,4,\,3),\ (1,\,3,\,2,\,4), \\ (1,\,4,\,3,\,2),\ (1,\,3,\,4,\,2),\ (1,\,4,\,2,\,3) \end{array}$$

の 12 個．

2. 1 が移り得るのは n 通り，2 が移り得るのは $(n-1)$ 通り，と順に移れる可能性を考えていくと，k が移り得るのは $(n-k+1)$ 通りの可能性があることが分かる．よって，S_n は $\prod_{k=1}^{n}(n-k+1) = n!$ 個の元がある．

3.[†] (1) $\sigma\circ\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\tau\circ\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 4 & 5 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

(2) $\sigma\circ\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\tau\circ\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

4.[†] (a) 1 (b) 1 (c) -1 (d) -1 (e) -1 (f) -1

5. 例えば (a) では，$(1\,2)\circ(3\,4) = (3\,4)\circ(1\,2) = (3\,4)\circ(2\,3)\circ(2\,3)\circ(1\,2)$ など．

6. 各 i に対して $k_i \overset{1\text{回目}}{\to} k_{i+1} \overset{2\text{回目}}{\to} \cdots \overset{r-1\text{回目}}{\to} k_{i-1} \overset{r\text{回目}}{\to} k_i$ となるので．

7. $\operatorname{sgn}\sigma_n = (-1)^{[n/2]}$．ただし，$[x]$ はガウス記号で x を超えない最大の整数を表す．
σ_n の構成から，σ_n は互換 $(1\ n)$, $(2\ n-1)$ たちの積でかける．$n=2k$ のときは互換の数は k 個，$n=2k+1$ のときは互換の数は k 個なので，まとめて書けば $[n/2]$ 個となる．

8. σ を巡回置換とすると，その定義より，巡回域に属さない数 k に対しては $\sigma(k)=k$ である．さて，そのことを踏まえると，k が巡回置換 σ, τ どちらの巡回域にも属さない

---

6 月 20 日分 (凡例：無印は基本問題，† は特に解いてほしい問題，$*$ は応用問題)
講義用 HP: http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~h-nakashima/lecture/2017LA.html

のならば，$(\sigma \circ \tau)(k) = (\tau \circ \sigma)(k) = k$ である．次に，k が σ の巡回域に属しているが τ の巡回域には属していないとする．つまり，$\tau(k) = k$．このとき，σ と τ は互いに素であるため，$\sigma(k)$ は τ の巡回域に属さない．したがって，

$$(\tau \circ \sigma)(k) = \tau(\sigma(k)) = \sigma(k) = \sigma(\tau(k)) = (\sigma \circ \tau)(k).$$

k が τ の巡回域に属しているが σ の巡回域には属していないときも同様に示せる．

9.† (a) $(1\ 3\ 6\ 7\ 2)(4\ 5)$ (b) $(1\ 3\ 5\ 6)(2\ 4)$ (c) $(1\ 3\ 6)(2\ 5\ 4)$ (d) $(1\ 3)(2\ 4\ 5)$