線形代数学・同演習 B

10 月 25 日分　演習問題[*1]

1. 次のベクトルの組の中で，線形独立なものの最大個数 r と r 個の線形独立なベクトルを一組求め，他のベクトルをこれらの線形結合で表わせ.

$$(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4,\boldsymbol{a}_5)=\begin{pmatrix}-1&1&4&-2&3\\2&-1&-7&5&-6\\2&0&-6&6&-6\\3&-3&-12&6&-9\end{pmatrix}$$

2. 次のベクトルの組は，$\mathbb{R}^4$ の基底をなすか?

$$(1)\ (\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4)=\begin{pmatrix}1&2&-1&3\\-4&1&6&1\\5&-1&1&-3\\7&-6&5&1\end{pmatrix},\quad (2)\ (\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3,\boldsymbol{b}_4)=\begin{pmatrix}1&-3&0&4\\-1&1&-2&-8\\-3&-4&1&4\\-1&-4&2&9\end{pmatrix}$$

3. V を 2 変数の高々 1 次の多項式 $ax+by+c$ の全体がなす集合とする.
   (1) V は自然な演算でベクトル空間となることを示せ.
   (2) V の次元はいくつか? また V の自然な基底を 1 組求めよ.
   (3) 平面の 3 点 $P_1=(0,0)$, $P_2=(1,0)$, $P_3=(0,1)$ において，それぞれ指定された値 c_1,c_2,c_3 をとるような V の元を表すのに最も適した V の基底を求めよ. [*2]

4.[†] 次の多項式の組の中で，線形独立なものの最大個数 r と r 個の線形独立な多項式を一組求め，他の多項式をこれらの線形結合で表わせ.

$$\begin{aligned}(1)\quad & p_1(x)=1-x-2x^2-x^3,\quad p_2(x)=3-x-2x^2,\quad p_3(x)=2+x^3,\\ & p_4(x)=-9+7x+7x^2-x^3,\quad p_5(x)=-6+4x+x^2-4x^3.\\ (2)\quad & q_1(x)=1+3x+2x^2+4x^3,\quad q_2(x)=1+x-2x^2-x^3,\quad q_3(x)=2+4x+3x^3,\\ & q_4(x)=1-x-6x^2-6x^3,\quad q_5(x)=5x+x^2+2x^3.\end{aligned}$$

5.[†] n 次の対称行列全体の集合を $\mathrm{Sym}(n,\mathbb{R})$ で表す.
   (1) $\mathrm{Sym}(n,\mathbb{R})$ はベクトル空間となることを示せ.
   (2) $\mathrm{Sym}(n,\mathbb{R})$ の次元を求めよ.

6.[†] $\mathbb{R}[x]_2$ において，多項式 $a+bx+cx^2$ を次の基底 q_1,q_2,q_3 に関してベクトル表示せよ.

$$\begin{aligned}&(1)\ q_1(x)=x^2,\ q_2(x)=x,\ q_3(x)=1\\&(2)\ q_1(x)=1,\ q_2(x)=1+x,\ q_3(x)=1+x+x^2\\&(3)\ q_1(x)=1+2x-2x^2,\ q_2(x)=2+5x-2x^2,\ q_3(x)=-2-2x+9x^2\end{aligned}$$

7.[*] (1) 複素数 $\mathbb{C}$ は実数体 $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とみなせることを示し，その次元を求めよ.
   (2) 実数の集合 $\mathbb{R}$ は有理数の集合 $\mathbb{K}=\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間とみなせることを示せ．また，円周率 π が超越数[*3]であることを利用して，その次元は無限大となることを証明せよ.

[*1] 凡例：無印は基本問題，† は特に解いてほしい問題，$*$ は応用問題.
[*2] $f_i(P_j)=\delta_{ij}$ $(i,j=1,2,3)$ となる多項式 f_1,f_2,f_3 を求めればよい.
[*3] どんな整数係数 (有理数係数) 多項式 $p(x)$ に対しても $p(x_0)\neq 0$ であるとき，実数 x_0 を超越数という.