線形代数学・同演習 A

演習問題 2

1.† 2 次正方行列 A, B に対して，$\det(AB) = \det(A)\det(B)$ が成り立つことを証明せよ．

2.† $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して，次の恒等式が成り立つことを示せ[*1]．

$$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E_2 = O.$$

3. 行列のブロック分割を利用して次の行列の積を計算せよ．

$$(1)\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -2 \\ 0 & -8 & 3 \end{pmatrix} \qquad (2)\ \begin{pmatrix} 2 & -5 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & -5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

4. 次の行列に逆行列があれば，それを求めよ．ただし，θ は任意の実数とする．

$$(1)\ \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (2)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad (3)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad (3)\ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

5. 次の行列が正則行列となるための a の条件を求めよ．

$$(1)\ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 3 & a \end{pmatrix} \quad (2)\ \begin{pmatrix} 2a & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (3)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+a^2 \end{pmatrix}$$

6. 2 次の一般の対角行列は $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ $(a, b \in \mathbb{R})$ のように書くことができる．2 次の一般の上三角行列，下三角行列，対称行列および交代行列をそれぞれ同様に表せ．

7. 3 次の対角行列，上三角行列，下三角行列，対称行列および交代行列についてもそれぞれ同様に表せ．

8.† 2 次正則行列で $A^{-1} = {}^tA$ をみたすものを求めよ．

9. 2 本のベクトル $\boldsymbol{x} = {}^t(1, 0, 1)$, $\boldsymbol{y} = {}^t(2, -1, -2)$ に対して，次の二つの積を計算せよ．

$$(1)\quad {}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{y} \qquad (2)\quad \boldsymbol{x}\,{}^t\boldsymbol{y}$$

10.† 次の条件を満たす 2 次正方行列 A は存在するか．

(1) $A \neq O$ であるが $A^2 = O$　　(2) $A^2 = E_3$ かつ $A^3 = O$

(3) $A \neq E_2, O$ かつ $A^2 = A$

---

4 月 18 日分 (凡例：無印は基本問題，† は特に解いてほしい問題，$*$ は応用問題)

講義用 HP: http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~h-nakashima/lecture/2017LA.html

[*1] Cayley(ケーリー)–Hamilton(ハミルトン)の定理と呼ばれている．