

微分積分学・同演習 A

演習問題 11

1. $t = \tan \frac{x}{2}$ と変数変換する. (1) は $s = \sin x$ としてもできる.

$$(1) \frac{1}{16} \log \left| \frac{(\tan \frac{x}{2} + 1)^8}{(\tan \frac{x}{2} - 1)^2 (5 \tan^2 \frac{x}{2} + 6 \tan \frac{x}{2} + 5)^3} \right|$$

$$\text{或いはさらに変形して } \frac{1}{4} \log \left| \frac{(1 + \sin x)^4}{(1 - \sin x)(5 + 3 \sin x)^3} \right|$$

$$(2) \log(2 + \cos x) + \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan} \frac{\tan \frac{x}{2}}{\sqrt{3}} \quad (3) \frac{x}{2} + \operatorname{Arctan} \left(\frac{1+a}{1-a} \tan \frac{x}{2} \right)$$

2. $t = \tan \frac{x}{2}$ と変数変換する.

$$(1) \tan \frac{x}{2} \quad (2) \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan} \frac{\tan \frac{x}{2}}{\sqrt{3}} \quad (3) \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctanh} \frac{\tan \frac{x}{2}}{\sqrt{3}} \quad (4) -\frac{\cos x}{\sin x}$$

3. $t = \tan x$ と変数変換する.

$$(1) \frac{1}{ab} \operatorname{Arctan} \left(\frac{b}{a} \tan x \right) \quad (2) \frac{2}{3} \operatorname{Arctan} \left(\frac{\tan x}{2} \right) - \frac{x}{3}$$

$$(3) \frac{ax}{a^2 + b^2} + \frac{b}{a^2 + b^2} \log |a \cos x + b \sin x| \quad (4) \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{8} - \frac{\sqrt{3}}{4} \operatorname{Arctan} \frac{\tan x}{\sqrt{3}}$$

$$4. (1) \text{発散する.} \quad (2) \frac{2 - \sqrt{2}}{4} \pi \quad (3) \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

(1) は $x \rightarrow 0$ と $x \rightarrow \infty$ の二つについて考える必要がある. 次回扱う内容ですので, 出題ミスです.

$$5.^\dagger \quad I(a, b) = -\frac{a \cos bx - b \sin bx}{a^2 + b^2} e^{-ax}, \quad J(a, b) = -\frac{b \cos bx + a \sin bx}{a^2 + b^2} e^{-ax}$$

$I(a, b)$ に関して一回部分積分をすれば $aI(a, b) + bJ(a, b) = -e^{-ax} \cos bx$, $J(a, b)$

に関して一回部分積分をすれば $-bI(a, b) + aJ(a, b) = -e^{-ax} \sin bx$ なので, これを

$I(a, b)$, $J(a, b)$ に関して解く.

$$6.^\dagger \quad (1) \frac{a}{a^2 + b^2} \quad (2) \frac{b}{a^2 + b^2}$$

$$7.^\dagger \quad (1) \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{Arcsin} \frac{\sqrt{2}x}{1+x^2} \quad (2) 2 \operatorname{Arctan} \left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \right) - \sqrt{1-x^2}$$

$$(3) \log(x + \sqrt{x-1}) - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan} \frac{2\sqrt{x-1}+1}{\sqrt{3}}$$

$$(4) \frac{1}{2} \left(x^2 - x\sqrt{x^2-1} + \log |x + \sqrt{x^2-1}| \right) \quad (5) -\log \left| \frac{x+2+2\sqrt{x^2+x+1}}{x} \right|$$

$$(6) \log |\sin x| - \frac{\sin^2 x}{2} \quad (7) 2\sqrt{\sin x} \left(\frac{\sin x}{3} - \frac{\sin^3 x}{7} \right) \quad (8) -\frac{1}{12} \frac{3e^{2x} + 1}{(e^{2x} + 1)^3}$$