中間試験の大問 $\boxed{3}$ の解答.

(1) 求める平面は $\overrightarrow{OP}$ を通り，$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ の方向を持つ平面であるので，そのパラメータ表示は $\boldsymbol{x} = \overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. これからパラメータを消去すれば

$$x - 2y + 2z = 3 \qquad (\text{答}).$$

(2) 法線ベクトル $\boldsymbol{a}$ は平面の方程式の係数からなるベクトルなので，$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$. 単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ は，この法線ベクトルを長さで割ったものであるので，$\boldsymbol{n} = \frac{1}{\|\boldsymbol{a}\|}\boldsymbol{a} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ (答).

(3) 平面 π 上の点 H を取ったとき，空間上の点 P との距離 $\overrightarrow{PH}$ を最小にする方向は法線ベクトルの方向である[1]．よって $\overrightarrow{PH} = \alpha\boldsymbol{n}$ とすれば，$\|\boldsymbol{n}\| = 1$ より $|\alpha|$ が求める距離となる．さて，$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PH}$ が平面 π 上にあるので，

$$3 = \left\langle \boldsymbol{a} \,\middle|\, \overrightarrow{OH} \right\rangle = \langle \boldsymbol{a} | \boldsymbol{x} + \alpha\boldsymbol{n} \rangle = \langle \boldsymbol{a} | \boldsymbol{x} \rangle + \alpha\|\boldsymbol{a}\|.$$

これより $\alpha = \frac{3 - \langle \boldsymbol{a} | \boldsymbol{x} \rangle}{3}$，すなわち

$$|\alpha| = \frac{|3 - \langle \boldsymbol{a} | \boldsymbol{x} \rangle|}{3} = \frac{|3 - x + 2y - 2z|}{3} \quad (\text{答}).$$

(4) 与えられた図より鏡映写像によって点 P が移る点 P' は，(3) で用いた平面 π 上の点 H を用いると $\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + 2\overrightarrow{PH}$ と表すことができる．ここで $\overrightarrow{PH} = \frac{3-x+2y-2z}{3}\boldsymbol{n}$ であったので，

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} + 2 \cdot \frac{3 - x + 2y - 2z}{3}\boldsymbol{n} = \cdots (\text{略}) \cdots = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7x + 4y - 4z + 6 \\ 4x + y + 8z - 12 \\ -4x + 8y + z + 12 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & 4 & -4 \\ 4 & 1 & 8 \\ -4 & 8 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (\text{答}).$$

---

[1] 本来は証明すべき事実であるが，講義中で紹介したので既知とする．証明するならば，2 変数関数の最大最小問題になるので少し面倒．というよりも，扱うのは後期になってからのはず．