微分積分学・同演習 A

演習問題 13

1.[†] (1) $I_{n+1} = \dfrac{2n-1}{2n} I_n + \dfrac{1}{2n} \cdot \dfrac{x}{(1+x^2)^n}$ (2) $I_2 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{1+x^2} + \operatorname{Arctan} x\right)$

$I_3 = \dfrac{1}{8}\left(\dfrac{2x}{(1+x^2)^2} + \dfrac{3x}{1+x^2} + 3\operatorname{Arctan} x\right)$

$I_4 = \dfrac{1}{48}\left(\dfrac{8x}{(1+x^2)^3} + \dfrac{10x}{(1+x^2)^2} + \dfrac{15x}{1+x^2} + 15\operatorname{Arctan} x\right)$

(考え方) $\frac{1}{(1+x^2)^n} = \frac{(x)'}{(1+x^2)^n}$ と思って部分積分を行えばよい．

2.* まず，ヒントどおりに $x^p(ax+b)^q = ax^{p+1}(ax+b)^{q-1} + bx^p(ax+b)^{q-1}$ として部分積分を行う．すると

$$I_{p,q} = \frac{x^{p+1}(ax+b)^q}{q} - \frac{p+1}{q} I_{p,q} + bI_{p,q-1}$$

を得るので，第一の漸化式が得られる．第 2 の漸化式は，$I_{p-1,q}$ を $(\frac{x^p}{p})'(ax+b)^q$ と思って部分積分すればよい．すると，

$$I_{p-1,q} = -\frac{aq}{p} I_{p,q-1} + \frac{x^p(ax+b)^q}{p}$$

となるので，第一の漸化式を用いて $I_{p,q-1}$ を $I_{p,q}$ を使って書き換える．

3. (1) $y = 1-x$ と変数変換すればよい．(2) 大問 2 を使うとよい．(1) より $B(s,t+1) = \frac{t}{s+t} B(s,t)$ を示す．

$$B(s,t+1) = \int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{t-1}(1-x)\,dx = \int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{t-1}\,dx - \int_0^1 x^s(1-x)^{t-1}\,dx.$$

ここで，2 番目の積分を $x^s(\frac{-1}{t}(1-x)^t)'$ と思って部分積分すれば $B(s,t+1) = B(s,t) - \frac{s}{t} B(s,t)$ を得るので，これを整理する．

(3) 係数 $\frac{1}{2}$ が抜けていました．変数変換 $x = \sin^2\theta$ をすればすぐ得られる．

4. $\frac{1}{2}\Gamma(\frac{\alpha+1}{2})$．**(求め方)** $y = x^2$ と変数変換すれば $dy = 2x\,dx$ であり，変数 y の動く範囲は $0 \to +\infty$ である．あとは単純な式変形である．

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} x^\alpha\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-x^2} x^{\alpha-1} \cdot 2x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-y}(y^{1/2})^{\alpha-1}\,dy.$$

5.* 解析概論 §35 を参照のこと．第 3 版では pp.116,117 にある．

---

7 月 25 日分 (凡例：無印は基本問題，† は特に解いてほしい問題，$*$ は応用問題)
講義用 HP: http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~h-nakashima/lecture/2017C.html