2　多変数関数の全微分

前回は偏微分 $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ を導入したが，これらは 1 変数関数の微分の多変数化とはいえなかった．偏微分でうまくいかない理由は x 軸，y 軸の所しか見ていないからである．今回は 1 変数関数の微分の多変数版を紹介する．

1 変数の場合 $x = a$ における Taylor 展開は $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a)$ であった．少し言い換えると「f が微分可能ならば，$y = f(x)$ は $x = a$ の近くで直線により近似できる」となる．式で書けば，

$$\lim_{x\to a}\left|\frac{f(x)-\{f(a)+f'(a)(x-a)\}}{x-a}\right| = 0.$$

逆に $\lim_{x\to a}\left|\frac{f(x)-\{f(a)+A(x-a)\}}{x-a}\right| = 0$ となる定数 A が存在するならば $f(x)$ は $x = a$ で微分可能で $A = f'(a)$ となる．これを多変数に拡張する．

2.1　全微分

前述のように 1 変数の場合は直線で近似した．同様に考えると 2 変数の場合は平面で近似することになる．

定義 2.1. 3 次元空間において，点 (a, b, c) で x 方向に A_x，y 方向に A_y の傾きを持つ平面の方程式は $z = c + A_x(x-a) + A_y(y-b)$ で表される．$\boldsymbol{a} = (a, b)$, $\boldsymbol{A} = (A_x, A_y)$ とすれば $z = c + \boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})$ とかける．

定義 2.2. f が点 $\boldsymbol{a}$ において全微分可能とは，

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}\frac{|f(\boldsymbol{x})-\{f(\boldsymbol{a})+A_x(x-a)+A_y(y-b)\}|}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|} = 0$$

となる $\boldsymbol{A} = (A_x, A_y)$ が存在すること．

注意 2.3. つまり，f が全微分可能であるとは，$\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{a}$ に近いときに f が平面 $z = f(\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})$ で近似できることをいう．この平面を**接平面**という．

命題 2.4. f が点 $\boldsymbol{a}$ で全微分可能ならば，f は点 $\boldsymbol{a}$ で (1) 連続であり，さらに (2) 偏微分可能で $A_x = f_x(\boldsymbol{a})$, $A_y = f_y(\boldsymbol{a})$ となる．

注意 2.5. 全微分が，1 変数関数の微分の多変数版というべきものである．

定義 2.6. $\nabla f(\boldsymbol{a}) := (f_x(\boldsymbol{a}), f_y(\boldsymbol{a}))$ を f の点 $\boldsymbol{a}$ における勾配 (gradient) という[*1]．

勾配 ∇f はベクトルであり，これを使えば接平面は $z = f(\boldsymbol{a}) + \nabla f\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})$ とかける．このように，勾配は微分係数の多変数版である．

例題 2.7. $f(x, y) = \log(x^2+y^2+1)$ の点 (a, b) での勾配を計算し，この点における接平面を求めよ．

(考え方) 勾配 $\nabla f(\boldsymbol{a})$ は f_x, f_y を計算すればよい．接平面は公式 $z = f(\boldsymbol{a}) + f_x(\boldsymbol{a})(x-a) + f_y(\boldsymbol{a})(y-b)$ に必要な値を代入する．

定義 2.8. f が x, y について偏微分可能であり f_x, f_y がともに連続であるとき，f は C^1 級という．

定理 2.9. f が C^1 級ならば，f は全微分可能である．

例題 2.10. $f(x, y) = \log(x^2+y^2+1)$ が $\mathbb{R}^2$ の各点で全微分可能であることを示せ．

(考え方) f_x, f_y を計算し，そのどちらも連続であることを確認すればよい (定理 2.9)．

(証) $f_x(x, y) = \frac{2x}{x^2+y^2+1}$, $f_y(x, y) = \frac{2y}{x^2+y^2+1}$ より．

2.2　高階偏微分

偏微分についても高階のものを考えられる．例えば，

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (f_x)_x = f_{xx},$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = (f_x)_y = f_{xy}.$$

例題 2.11. $f(x, y) = x^3 + xy^2 - 3y^2$ の 2 階偏導関数をすべて求めよ．

定義 2.12. (1) f の k 階までの偏導関数がすべて存在して連続であるとき f を C^k 級，(2) 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して C^k 級となるときは C^∞ 級の関数，(3) 文脈に応じて必要なだけ偏微分可能のときには**なめらか**という．

定理 2.13. f が C^2 級[*2]ならば，$\boxed{f_{xy} = f_{yx}.}$

つまり，偏微分の順番に依らずに，どの変数で何回微分したかということで決まる．

注意 2.14. 一般には $f_{xy} \neq f_{yx}$ であることに注意．

まとめ (1) 1 変数関数の微分の多変数化は「全微分」．(2) 接平面と高階偏微分の定義．(3) 関数がなめらかならば，偏微分の順番は自由に入れ替えられる．

10 月 17 日．

[*1] ∇ はナブラと読む．竪琴のギリシャ語名に由来するらしい．

[*2] またはなめらかでもよい．

演習問題 2

問題 1. 次の関数は原点で全微分可能かどうか調べよ．

$$\begin{aligned}&(1)\quad f(x,y)=x^3+3x^2y+3y^3,\\&(2)\quad g(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & (\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}),\\ 0 & (\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}).\end{cases}\end{aligned}$$

問題 2. 定理 2.9 の逆は成立しない（f_x, f_y がともに不連続であるが f は全微分可能）ことを，次の例によって確認せよ (教科書の問題 6.20).

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} & (\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}),\\ 0 & (\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}).\end{cases}$$

問題 3.[†] 次の関数に対して，(i) 原点で全微分可能であることを示せ，(ii) 原点における接平面を求めよ．

$$\begin{aligned}f(x,y)&=x^3+y^3-3x-3y,\\ g(x,y)&=\sqrt{1-x^2-y^2},\\ h(x,y)&=\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}.\end{aligned}$$

問題 4.[†] 次の関数に対して，(i) 点 (x,y) における勾配を求めよ，(ii) 2 階偏導関数をすべて求めよ．

$$\begin{aligned}f(x,y)&=x^3+y^3-3x-3y,\\ g(x,y)&=\mathrm{Arctan}\,\frac{y}{x},\\ h(x,y)&=\frac{xy}{\sqrt{x^2-y^2}}.\end{aligned}$$

問題 5.[*] 次の関数 $f(x,y)$ について，$f_{xy}(0,0)$, $f_{yx}(0,0)$ を求めよ．

$$f(x,y)=xy\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2},\quad f(0,0)=0.$$

多変数関数では，「偏微分」と「全微分」という 2 種類の微分が出てきて紛らわしいですが，これは微分が「傾き」を表す量であることを考えると，仕方のない事です．変数が増えたことにより，各座標軸方向の「傾き」が現れます (偏微分)．しかし，偏微分可能であっても，その点で連続にならないという不都合が生じるので，より強い概念が必要になってきます．それが全微分です．

大雑把なイメージとしては，全微分は平面による近似で，偏微分はその平面の各座標軸方向の傾きです．

小レポート

(1) 次の関数の n 階導関数を求めよ．

$$\text{(i)}\ \sin x\quad \text{(ii)}\ \frac{1}{x+1}\quad \text{(iii)}\ e^{2x}$$
$$\text{(iv)}\ e^x\sin x\quad \text{(v)}\ \sin^3 x$$

(2) 2 変数関数 $f(x,y)$ を次で定義する．

$$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}\quad (x^2+y^2<1).$$

(i) $f(x,y)$ は各点で全微分可能であることを示せ．
(ii) $f(x,y)$ の 2 階偏導関数をすべて求めよ．
(iii) $a^2+b^2<1$ をみたす a,b に対して $f(x,y)$ の点 (a,b) における接平面の方程式を求めよ．

注意． (1) (iv) は三角関数の加法定理 $\sin(x+\theta)=\sin x\cos\theta+\cos x\sin\theta$ をうまく使って，帰納法に持ち込む．(v) は三倍角の公式を利用する．(2) (i) は定理 2.8 を用いる．(ii) は f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy} をすべて計算する．(iii) 接平面の公式を用いる．

小レポートについて． 次回の講義の際に提出すること．原則として期限を過ぎての提出は認めないが，やむを得ない事情がある際は，必ずその旨を**期限日までにメールにより**連絡すること．