問題

任意の 3 次の対角行列 D と可換になる 3 次正方行列は対角行列に限ること，すなわち 3 次正方行列 A が $DA = AD$ を満たすならば A は対角行列であることを示せ.

証明. $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}$, $A = (a_{ij})_{3\times 3}$ とおく．DA, AD を計算すると，それぞれ

$$DA = \begin{pmatrix} d_1a_{11} & d_1a_{12} & d_1a_{13} \\ d_2a_{21} & d_2a_{22} & d_2a_{23} \\ d_3a_{31} & d_3a_{32} & d_3a_{33} \end{pmatrix}, \qquad AD = \begin{pmatrix} a_{11}d_1 & a_{12}d_2 & a_{13}d_3 \\ a_{21}d_1 & a_{22}d_2 & a_{23}d_3 \\ a_{31}d_1 & a_{32}d_2 & a_{33}d_3 \end{pmatrix} \tag{1}$$

となる．ここで $DA = AD$ とすれば，各成分が等しいので $d_ia_{ij} = a_{ij}d_j$ $(i, j = 1, 2, 3)$，すなわち

$$a_{ij}(d_i - d_j) = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3) \tag{2}$$

である．これが任意の対角行列 D について成り立つので，特に $d_1 \neq d_2$, $d_2 \neq d_3$, $d_3 \neq d_1$ とすれば，$a_{ij} = 0$ $(i \neq j)$ でなければならないことがわかる．これは

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

であることを意味しており，この場合は，式 (1) より任意の対角行列 D と可換になる．よって，任意の 3 次の対角行列 D と可換になる 3 次正方行列は対角行列に限ることが示された. $\square$

コメント

- まず定義をしっかりと把握しましょう.「対角行列」とは，対角成分 (つまり a_{ii} たち)以外の成分がすべて 0 である行列です．ここで，対角成分にはなんの制約もないことに注意が必要です．よって，例えば単位行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ や零行列 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ なども対角行列に含まれます.

- 問われていることをしっかりと把握しましょう．この問題を標語的に表せば,

「A :正方行列 s.t. $AD = DA$ for $\forall D$:対角行列 $\Rightarrow$ A :対角行列」を示せ

となります．この問題のポイントは，A の成分は自由に動かすことができないが，D の成分は自由に動かすことができるという点です．その御蔭で，式 (2) において $d_i \neq d_j$ ととることができて，$a_{ij} = 0$ $(i \neq j)$ を導けるのです.