1　行列式の公式

- $\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$
- $\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$

添字の現れ方は？ $a_{1\bigcirc}a_{2\bigcirc}a_{3\bigcirc}$ としたときの $\bigcirc$ を調べる．

<u>$n=2$ のとき</u>

	1 2	符号
1.	(1 2)	$+$
2.	(2 1)	$-$

<u>$n=3$ のとき</u>

	1 2 3	符号
1.	(1 2 3)	$+$
2.	(2 3 1)	$+$
3.	(2 3 1)	$+$
4.	(3 2 1)	$-$
5.	(1 3 2)	$-$
6.	(2 1 3)	$-$

$\to$ 順列が現れてくる．

<u>**行列式の公式**</u> 正方行列 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ に対して

$$\det A = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)}.$$

ここで S_n は順列に関するもの，sgn はこれから定義をしていくもの．

1.1　置換群 S_n

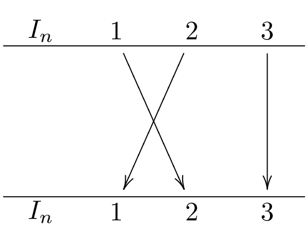
$I_n := \{1, 2, \dots, n\}$

定義 1.1. I_n からそれ自身への１対１写像全体を S_n で表す．

$$S_n := \{\sigma\colon I_n \to I_n\colon \text{１対１}\}.$$

$\sigma \in S_n$ を置換という．

例 1.2. $n=3$ のとき．



$$\begin{cases} \sigma(1) = 2 \\ \sigma(2) = 1 \\ \sigma(3) = 3 \end{cases} \quad \text{とすれば } \sigma \in S_3.$$

これを $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ と表す．（普通は矢印は書かないが，行列と混同するのを避けるため，本講義では矢印を明記する．）

注意 1.3. 大事なのは上下の組み合わせ．これを変えないのならば，順番は自由．また，動かさない文字は省略してもよい．

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \downarrow & \downarrow \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{など}.$$

定義 1.4. $\sigma, \tau \in S_n$ に対して，その積 $\sigma \circ \tau \in S_n$ を

$$(\sigma \circ \tau)(k) = \sigma(\tau(k)) \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

により定義する．

例題 1.5. $n = 4$ のとき，次の σ, τ の積 $\sigma \circ \tau$ を計算せよ．

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

解) τ を先に計算することに注意．σ の上段を τ の下段にそろえると

$$\sigma = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

すると，

$$\begin{array}{cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \tau \\ \sigma\circ\tau & 2 & 3 & 4 & 1 & \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \sigma \\ & 3 & 1 & 2 & 4 & \end{array}$$

なので，$\sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

定義 1.6. 1. S_n を置換群という．

2. 単位置換 $\varepsilon \cdots \varepsilon(k) = k$ $(k = 1, \ldots, n)$
3. 逆置換

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{pmatrix}$ に対して $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_n \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$ を σ の逆置換という．これは次を満たす．

$$\sigma \circ \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \circ \sigma = \varepsilon.$$

定義 1.7. (i) $1, 2, \ldots, n$ のうち，$k_1, \ldots, k_r$ 以外は動かさずに，$k_1 \to k_2$, $k_2 \to k_3, \ldots, k_{r-1} \to k_r$, $k_r \to k_1$ と順にずらす置換を巡回置換といい，$(k_1\, k_2\, \ldots\, k_r)$ とかく．

$$\text{ex.} \quad \sigma = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} = (2\,3\,5) \quad (= (3\,5\,2)).$$

$$\begin{tikzcd} & 2 \arrow[dr, bend left] & \\ 5 \arrow[ur, bend left] & & 3 \arrow[ll, bend left] \end{tikzcd}$$

(ii) 2 文字の巡回置換を，特に互換という．

例題 1.8. 次の $\sigma \in S_n$ を巡回置換の積で表せ.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 4 & 1 & 6 & 2 & 7 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

解) まず，1 がどう移っていくかを調べる.

$$1 \to 4 \to 2 \to 1$$

よって $(1\,4\,2)$ が現れる．次に $1, 2, 4$ を除いた中で最小の 3 について

$$3 \to 6 \to 5 \to 7 \to 3$$

なので $(3\,6\,5\,7)$ も現れる．1〜7 がすべて現れたので

$$\sigma = (1\,4\,2) \circ (3\,6\,5\,7).$$

注意 1.9. (i) 任意の置換は，この方法で巡回置換の積として表せる.

(ii) 巡回置換は，互換の積で表せる.

$$(k_1\, k_2\, \ldots\, k_r) = (k_1\, k_r) \cdots (k_1\, k_3)(k_1\, k_2).$$

これより特に任意の置換は互換の積で表せる (ただし，一意的ではない).

定義 1.10. $\sigma \in S_n$ が m コの <u>互換</u> の積で表せるとき，

$$\mathrm{sgn}(\sigma) := (-1)^m$$

と定義し，σ の符号という．また，$\mathrm{sgn}(\sigma) = 1$ となるものを偶置換，$\mathrm{sgn}(\sigma) = -1$ となるものを奇置換という.

注意 1.11. σ の互換への分解の仕方は複数通りあるが，その分解に現れる互換の数の偶奇は変わらない.

補題 1.12. (1) $\mathrm{sgn}(\varepsilon) = 1$.

(2) $\mathrm{sgn}(\sigma \circ \tau) = \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot \mathrm{sgn}(\tau)$.

(3) $\mathrm{sgn}(\sigma^{-1}) = \mathrm{sgn}(\sigma)$.

(4) $\mathrm{sgn}\left((k_1\, k_2\, \ldots\, k_r)\right) = (-1)^{r-1}$.

例題 1.13. 例題 1.8 の σ の符号を求めよ.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 4 & 1 & 6 & 2 & 7 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

解) まず巡回置換の積に分解する.

$$\sigma = (1\,4\,2) \circ (3\,6\,5\,7).$$

ここで補題 1.12 を用いると

$$\mathrm{sgn}(\sigma) = \mathrm{sgn}(1\,4\,2)\ \mathrm{sgn}(3\,6\,5\,7) = (-1)^{3-1} \cdot (-1)^{4-1} = -1.$$

よって $\mathrm{sgn}(\sigma) = -1$ である.