線形代数学・同演習 A

7 月 12 日分　演習問題

計算問題は解答のみ，証明問題は大雑把な道筋を説明するに留めています．

1. (1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^{2k} = 1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n}$

   (2) $\displaystyle\lambda c_1 \cdots c_{n-1} - \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_k c_1 \cdots \overset{\vee}{c}_k \cdots c_{n-1}$ [*1]

   (3) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^{n-k} = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots + a_n$ (ただし $a_0 := 1$ とおいた)

   (4) $x_1x_2\cdots x_n + \sum_{k=1}^{n} kx_1x_2\cdots \overset{\vee}{x}_k \cdots x_n$

2. $(x, y, z(, w)) =$

   (1) $\frac{1}{2}(-13, -14, 1)$　(2) $\frac{1}{6}(79, -39, 5)$　(3) $\frac{1}{8}(10, -1, 16)$　(4) $\frac{1}{7}(-10, -10, 14, -18)$

3. (1) $3x - 3y - z = 7$　(2) $4x - 9y + 21z = -11$　(3) $4x + 11y + 4z = -31$

4. (1) 与えられた方程式は $a(x^2+y^2)+bx+cy+d=0$ の形であり，三点が同一直線上にないという仮定から $a \neq 0$ となるため，この方程式は円を表すことが分かる．また，$(x, y) = (x_i, y_i)$ $(i = 1, 2, 3)$ とすれば行列式の性質から左辺は 0 になるので，この円は三点 (x_i, y_i) $(i = 1, 2, 3)$ を通っていることが分かる．

   (2) (a) $x^2-5x+y^2-9y+24 = 0$　(b) $x^2-8x+y^2+4y+15 = 0$　(c) $x^2+15x+y^2-9y-86 = 0$

   (3) 三点が同一直線上にあるとき，(1) の記号を用いれば $a = 0$ ということになる．このときには方程式は $bx + cy + d = 0$ となり，これは直線になる (或いは，もっと退化して情報を何も持たなくなってしまう可能性もある)．

[*1] ここで $c_1 \cdots \overset{\vee}{c}_k \cdots c_{n-1}$ は $c_1, c_2, \ldots, c_n$ の積のうち，c_k だけ除外する，という意味である．