線形代数学・同演習 B

11 月 1 日分　演習問題[*1]

1. (1) $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_s \in V$ に対して，$\mathrm{Span}(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_s)$ が V の部分空間となることを確認せよ．
   (2) $m \times n$ 行列 A に関する解空間 $\ker A$ が $\mathbb{R}^n$ の部分空間となることを確認せよ．

2. 次のベクトルで生成される部分空間の次元と，その基底を一組求めよ．

$$(1)\ (\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_4) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 6 \\ 5 & -1 & 4 & -6 \\ -3 & -2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \quad (2)\ (\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_5) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -4 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & -7 & 3 \\ -1 & -1 & 2 & 1 & -9 \end{pmatrix}$$

3.[†] $V = \mathbb{R}[x]_3$ とする．次の多項式たちで生成される V の部分空間の次元と基底を求めよ．
   (1) $f_1(x) = 1 - x^2 + x^3$, $f_2(x) = -1 + x + 2x^2 - 2x^3$, $f_3(x) = 2 + x - x^2 + x^3$.
   (2) $g_1(x) = 1 - x - 2x^2 + x^3$, $g_2(x) = 2 - 5x - 4x^2 + 2x^3$, $g_3(x) = 3 + 4x - 6x^2 + 3x^3$,
   $g_4(x) = 4 + 6x + 6x^2 + 2x^3$, $g_5(x) = 5 + 1x - 3x^2 + 4x^3$.
   (3) $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \dfrac{d^n}{dx^n} \left(e^{-x^2} \right)$ $(n = 0, 1, 2, 3)$.[*2]

4.[†] 次の行列に関する解空間の次元と，その基底を一組求めよ．

$$(1) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 13 \end{pmatrix} \qquad (2) \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 4 \\ 3 & -3 & 1 & -6 \\ -1 & 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

5. 次の二組の基底 $[\boldsymbol{u}]$, $[\widetilde{\boldsymbol{u}}]$ に関する変換行列 P を求めよ．[*3]

$$(1) \quad [\boldsymbol{u}] = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix},\ [\widetilde{\boldsymbol{u}}] = \begin{pmatrix} 10 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \qquad (2)\ [\boldsymbol{u}] = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix},\ [\widetilde{\boldsymbol{u}}] = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(3) \quad [\boldsymbol{u}] = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -3 & 10 & -11 \\ 3 & -11 & 14 \end{pmatrix},\ [\widetilde{\boldsymbol{u}}] = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

6. 基底の変換行列 P が必ず正則になることを示せ．[*4]

7.[†] W をベクトル空間 V の部分空間とする．このとき，次の二つの命題を証明せよ．
   (1) $\dim W \leq \dim V$,
   (2) $\dim W = \dim V$ ならば，$W = V$ となる．

8.[*] 実数の無限数列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ の全体に，和とスカラー倍を

$$\{a_n\}_{n=0}^{\infty} + \{b_n\}_{n=0}^{\infty} = \{a_n + b_n\}_{n=0}^{\infty}, \quad \lambda\{a_n\}_{n=0}^{\infty} = \{\lambda a_n\}_{n=0}^{\infty}$$

   で定めると，これはベクトル空間になる．さて，V を漸化式 $x_{k+3} = 7x_{k+1} + 6x_k$ $(k = 0, 1, 2, \dots)$ を満たす数列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ 全体の集合とするとき，次の問いに答えよ．
   (1) V は線形空間になることを示せ．またその次元はいくつか．
   (2) V の基底で，数列の一般項が明白なものを一組与えよ．[*5]

[*1] 凡例：無印は基本問題，† は特に解いてほしい問題，$*$ は応用問題.
[*2] このようにして構成される多項式を Hermite 多項式とよぶ.
[*3] $[\widetilde{\boldsymbol{u}}] = [\boldsymbol{u}]P$ となる正則行列 P を求める.
[*4] ヒント：P の列ベクトルたちが線形独立となることを示せばよい.
[*5] ヒント：漸化式の特性方程式は $x^{k+3} = 7x^{k+1} + 6x^k$ を共通因子 x^k で割ったもの.