# 2020年度　名古屋大学
# 理系基礎科目（文系） 数学入門

第３回

講義担当者：中島秀斗

2020年5月7日

# はじめに

- 授業形態：学習資料 (スライド・ノート) 配布
  - はじめはスライドに目を通してください.
  - ノートはスライドの要約になります．復習にご活用ください.
  - スライド内にある赤い枠で囲った演習問題は，実際に解いてもらうことを想定しています.
- 小テストについて
  - 小テストは NUCT で行われます.
  - 講義日の午前８時から日付が変わるまでの間に完了してください.
- レポートについて
  - 講義 3,4 回毎にレポートを課します.
  - 各回に出題する演習問題を解いたものを，pdf ファイルとして提出してもらいます.
  - 学習資料配布時のお知らせの中で通知します.

# 凡例

公式や定理など，講義において重要な情報は青の枠で囲む．

演習問題は赤の枠で囲む．実際に手を動かして解いてほしい．

コメントや注意すべき点などは緑の枠で囲む．

例題は黄色の枠で囲む．解答も用意されているが，計算量の多いものは実際に手を動かして一緒に解いてほしい．

# §3 関数の極限と連続性

- 数列は $n \to \infty$ という一方向の極限しかなかったが，関数は $+\infty$ と $-\infty$ という二方向があり，さらに任意の点においても極限を考えることができる．
- この後者は，現代数学において基本的な役割を果たす「実数の連続性」という概念と関係している．
- この実数の連続性については本講義の最後に改めて解説を行うことにして，まずは関数の極限を扱えるようになることを目標とする．

今回の目標

- 関数の極限（右極限・左極限）を理解すること
- 関数の連続性について理解すること
- 関数の極限の計算ができるようになること

# §3.1 関数の極限

**例題 3.1.** 次の極限値を求めよ．

$$(1)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} \qquad (2)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-4}{3x^3+1}$$

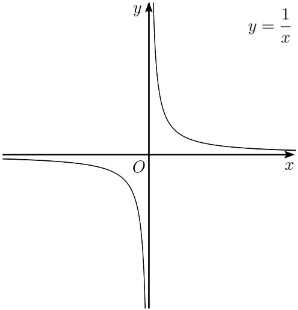
（考え方）

- $x\to+\infty$ のときは数列のときと同様に考えればよい．
- $x\to-\infty$ のときは，$x=-u$ として，$u\to+\infty$ を考えればよい．
  - もちろん，慣れてきたら変換せずに直接 $x\to-\infty$ でよい．

**解.** (1) 数列 $a_n = \dfrac{1}{n}$ と同様に，$x$ を大きくしていけば，$\dfrac{1}{x}$ はどんどん小さくなっていき，限りなく 0 に近づいていく．よって

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

この例は基本的なので公式として覚えておくこと．これを証明するためには「イプシロン-デルタ論法」というものが必要になってくる．余裕があれば本講義でも紹介する．



(2) $x \to -\infty$ なので，まず $x = -u$ と変換すれば，

$$\frac{x^3-4}{3x^3+1} = \frac{-u^3-4}{-3u^3+1}.$$

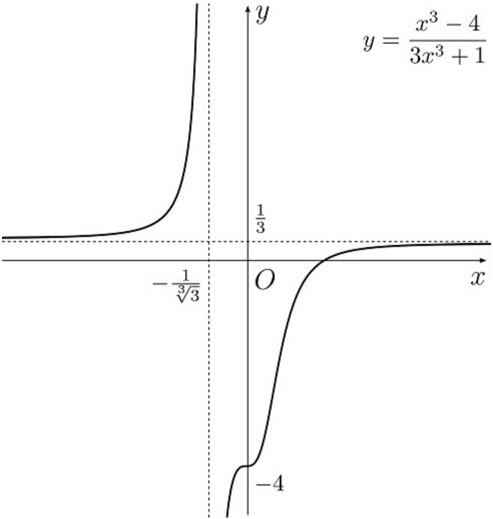
この右辺において $u \to +\infty$ を考えればよい．分数関数なので，数列の場合と同様に，分子分母の中で一番大きいもの（ここでは $u^3$）で分子と分母を割ってみれば

$$\frac{-u^3-4}{-3u^3+1} = \frac{(-u^3-4) \div u^3}{(-3u^3+1) \div u^3} = \frac{-1-\frac{4}{u^3}}{-3+\frac{1}{u^3}}$$

よって

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3-4}{3x^3+1} &= \lim_{u\to+\infty} \frac{-u^3-4}{-3u^3+1} = \lim_{u\to+\infty} \frac{-1-\frac{4}{u^3}}{-3+\frac{1}{u^3}} \\ &= \frac{\lim\limits_{u\to+\infty}(-1-\frac{4}{u^3})}{\lim\limits_{u\to+\infty}(-3+\frac{1}{u^3})} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3} \quad \square \end{aligned}$$

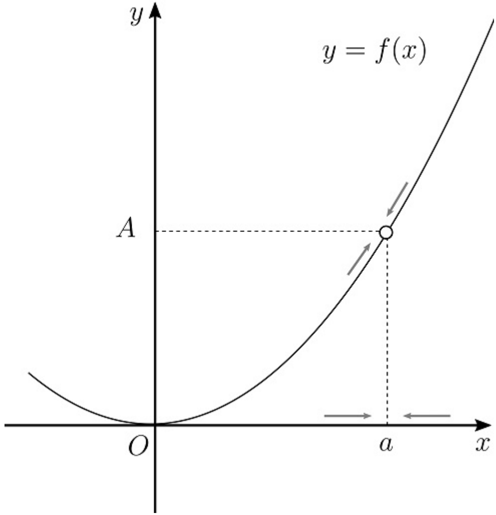
ちなみにグラフは以下のようになる．




$x \to -\infty$(図でいえば左方) に行くにつれて，$y=\frac{1}{3}$ に近づいていくのが見て取れる．ちなみに $x=-\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$ は分母が $0$ になる点で，その前後で関数が発散していることも分かる．

# 各点における極限

- 関数 $y = f(x)$ において，変数 $x$ がある値 $a$ に，$a$ 以外の値を取りながら近づいていくとき，どのような近づけ方に対しても $f(x)$ の値が一定値 $A$ に近づいていくとする（下図参照）.



- このとき，$A$ をそのときの極限値といい，

  $x$ が $a$ に近づくとき，関数 $f(x)$ は $A$ に収束する

  という．記号では以下のように表す．

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \quad \text{または} \quad f(x) \to A \quad (x \to a).$$

- また，$x = a + h$ とおけば，$x \to a$ と $h \to 0$ とは等しいので，

$$\lim_{h \to 0} f(a + h) = A$$

  とも書ける．これは極限を取る変数が，極限を取ったときに消える（=ゼロになる）ので，計算がしやすいためである．

**例題 3.2.** 次の極限値を求めよ．

$$(1)\ \lim_{x\to 2} x^2 \qquad (2)\ \lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x-1}$$

（考え方） いずれも $x=2+h$ あるいは $x=1+h$ と変換して，$h\to 0$ という極限に変えて考える．ここで次の公式を思い出しておこう．

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2, \quad (a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

(1) $x = 2 + h$ と変換すれば

$$x^2 = (2+h)^2 = 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 2h + h^2 = 4 + 4h + h^2.$$

よって

$$\lim_{x \to 2} x^2 = \lim_{h \to 0} (4 + 4h + h^2) = 4 \quad \square$$

このように，初等関数では $x = a$ を代入したときに不定形，すなわち

$$0 \times (+\infty) \quad や \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}$$

などにならなければ，そのまま代入した値になる．

(2) $x = 1 + h$ と変換すれば,

$$(1+h)^3 = 1 + 3h + 3h^2 + h^3$$

より

$$\frac{x^3-1}{x-1} = \frac{(1+3h+3h^2+h^3)-1}{(1+h)-1} = \frac{(3+3h+h^2)h}{h} = 3 + 3h + h^2.$$

よって

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1} = \lim_{h\to 0} 3 + 3h + h^2 = 3 \quad \square$$

(2) は不定形 $\dfrac{0}{0}$ の場合である．この場合は解のようにやるのが間違いないが，変換せずに以下のようにして求めることもできる．まず公式

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

を思い出そう．この公式より

$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$$

なので，

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x-1} &= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} \\ &= \lim_{x\to 1}(x^2+x+1) \\ &= 1+1+1 = 3 \quad \square\end{aligned}$$

数列の極限と同様に，関数の極限も次の性質を持つ．

**定理 3.3.** $a$ を定数，もしくは $\pm\infty$ とする．
$x \to a$ のときに $f(x)$, $g(x)$ がともに収束するならば

(1) $\displaystyle\lim_{x\to a}\bigl(f(x)+g(x)\bigr) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$,

(2) $\displaystyle\lim_{x\to a}\bigl(k\,f(x)\bigr) = k\lim_{x\to a} f(x)$ ($k$ は定数),

(3) $\displaystyle\lim_{x\to a}\bigl(f(x)g(x)\bigr) = \bigl(\lim_{x\to a} f(x)\bigr)\bigl(\lim_{x\to a} g(x)\bigr)$,

(4) $a$ の近くで $g(x)\neq 0$ で $\displaystyle\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$ ならば

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)}{\displaystyle\lim_{x\to a} g(x)}$$

(5) $a$ の近くで常に $f(x) \leqq g(x)$ ならば

$$\lim_{x\to a} f(x) \leqq \lim_{x\to a} g(x)$$

- これも数列の場合と同じであるが，点 $x=a$ の近くで常に $f(x)<g(x)$ であっても，

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)$$

となることがある．
- (4) の「点 $x=a$ の近くで $g(x)\neq 0$」というのは，例えば $x=0$ の近くにおいて

$$g(x) = \sin\frac{1}{x}$$

のような関数は除外します，ということを主張している．実際，すべての自然数 $n$ に対して $\sin n\pi = 0$ であるが，$x_n = \frac{1}{n\pi}$ とすれば，すべての自然数 $n$ に対して

$$g(x_n) = \sin\frac{1}{x_n} = \sin n\pi = 0$$

である．しかも，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ なので，$x=0$ に近い点において $\dfrac{1}{g(x)}$ は分母に $0$ が何度も現れてしまう．そういったことを避けるための条件である．

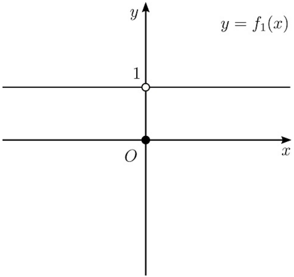
# §3.2 関数の連続性

関数 $f(x)$ について，$\lim_{x \to a} f(x)$ が存在していて，なおかつ $x = a$ で定義されていても，一般的には

$\lim_{x \to a} f(x)$ と $f(a)$ が一致するとは限らない．

例えば，右図の関数

$$f_1(x) = \begin{cases} 1 & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$




に対しては

$$\lim_{x \to 0} f_1(x) = 1 \quad \neq \quad 0 = f_1(0)$$

となっている．

**定義.** 関数 $f(x)$ が点 $x = a$ で**連続**であるとは,

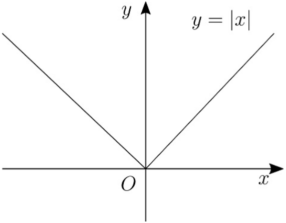
$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

となることをいう．さらに，$f(x)$ が区間 $D$ のすべての点 $x$ で連続であるときには，**区間 $D$ で連続**という.

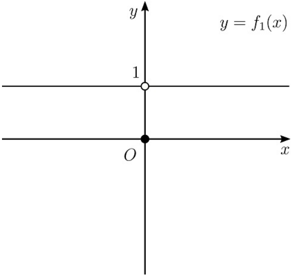
- このとき，関数 $y = f(x)$ のグラフを描いてみれば，その区間の上では途中で途切れることのない一本の線で描けていることになる.

なお，定義されている区間で連続な関数は，単に連続な関数ということが多い.

連続な関数




連続ではない関数

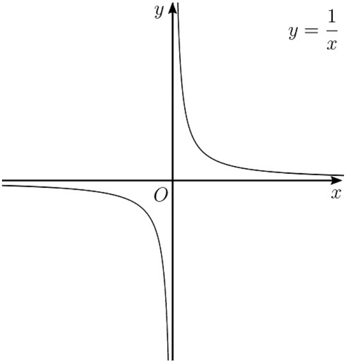


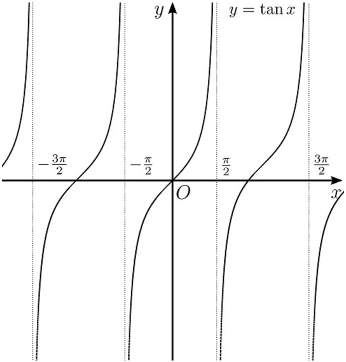

連続な関数のグラフは，左図のように途中で途切れることのない一本の線で描けている．一方で，連続でない関数のグラフは，右図のように途中で途切れている．

初等関数

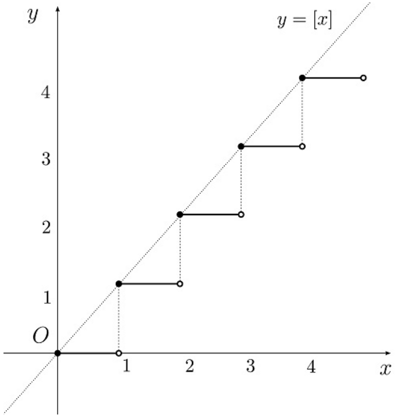
$$x^n, \quad \sin x, \quad \cos x, \quad \tan x, \quad a^x, \quad \log_a x$$

は基本的には連続である．ここで「基本的には」というのは，$n < 0$ のときの $x^n$ における $x = 0$ の点，$\tan x$ の $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ の点においては不連続になるためである．下図参照．本講義では，この事実は証明なしで用いることとする．



「関数の連続性」という概念は直感的に理解しやすい概念ではあるのですが，知っている関数はどれもほとんど連続であり，そうでない例も先に述べた $y = \frac{1}{x}$ や $y = \tan x$，あるいは $y = [x]$ ($x$ の整数部分を返す関数) 程度であり，その必要性がピンとこないという人も多いのではないでしょうか.



これは,「関数」の定義があまりに一般的すぎて，それだけだと十分に解析できないという理由があります．例えば

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x \text{ は有理数}), \\ 0 & (x \text{ は無理数}) \end{cases}$$

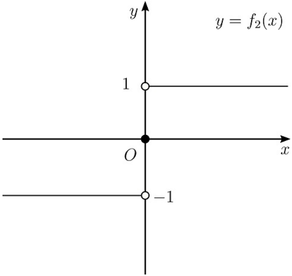
は，数 $x$ に対してただ一つの値が定まるので，たしかに関数の定義を満たしていますが，どの点においても連続ではありません（ディリクレの関数と呼ばれる）．そもそもグラフもちゃんとは描けません.

連続関数は中間値の定理や (リーマン) 積分が可能など様々な良い性質を持っており，最も基本的なものになります.

# §3.3 右極限と左極限

次の関数 (グラフは右図) について考える.

$$f_2(x) = \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ 0 & (x = 0) \\ -1 & (x < 0) \end{cases}$$




- この関数は $x$ の符号を返す関数である.
- グラフを見れば明らかなように, $f_2(x)$ は点 $x = 0$ で連続ではなく, 極限値も存在しない.
- しかし点 $x = 0$ に, 右から近づくと $1$ に近づいていき, 左から近づくと $-1$ に近づいていく.
- これらの極限値をそれぞれ右側極限値および左側極限値といい, 記号ではそれぞれ以下のように表す:

$$\lim_{x \to a+0} f_2(x) = 1, \quad \lim_{x \to a-0} f_2(x) = -1.$$

ここで，$\lim$ の下に現れた $a+0$ は，$\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0,\ \varepsilon>0}(a+\varepsilon)$ の略記である．$a=0$ のときは，$a+0$ の代わりに，単に $+0$ と書く．$a-0$ についても同様である．すなわち，

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{1}{x}=\lim_{x\to +0}\frac{1}{x},\quad \lim_{x\to 0-0}\frac{1}{x}=\lim_{x\to -0}\frac{1}{x}$$

のように表す．

右極限・左極限は有界な区間，例えば $(0,1)$ 上で定義された関数の端点（$x=0$ と $x=1$）における振る舞いを調べる際に必要になる．

**例題 3.4.** 次の極限値を求めよ．

$$(1)\ \lim_{x\to 2+0}\frac{1}{x-2} \qquad (2)\ \lim_{x\to 2-0}\frac{1}{x-2}$$

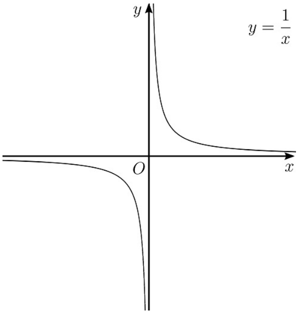
（考え方） $x\to a+0$ のときは $x=a+h$ $(h>0)$, $x\to a-0$ のときは $x=a-h$ $(h>0)$ と変換して，正の数 $h$ の $h\to 0$ の極限を考えるのが定石である (グラフで右から近づけていく)．基本的な関数の極限については覚えておくとよい．

**解.** (1) $x \to 2+0$ なので，まず $x = 2+h$ $(h>0)$ と変換すれば

$$\frac{1}{x-2} = \frac{1}{(2+h)-2} = \frac{1}{h}.$$

関数 $y = \frac{1}{x}$ のグラフを思い出してみれば，$x \to +0$ のとき，$y$ は正の無限大に発散していることが分かる．よって，

$$\lim_{x\to 2+0} \frac{1}{x-2} = \lim_{h\to +0} \frac{1}{h} = +\infty \quad \square$$

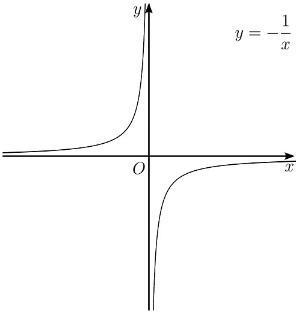


(2) $x \to 2-0$ なので，まず $x = 2-h\ (h>0)$ と変換すれば

$$\frac{1}{x-2} = \frac{1}{(2-h)-2} = -\frac{1}{h}.$$

関数 $y = -\frac{1}{x}$ のグラフを思い出してみれば，$x \to +0$ のとき，$y$ は負の無限大に発散していることが分かる．よって，

$$\lim_{x\to 2-0} \frac{1}{x-2} = \lim_{h\to +0}\left(-\frac{1}{h}\right) = -\infty \quad \square$$



**例題 3.5.** 次の極限値を求めよ．

$$(1)\quad \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-x) \qquad (2)\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}$$

数列の極限の場合と同じであるが，極限を求める際に，少し工夫が必要な場合もある．なお，関数の極限の場合にもはさみうちの定理，すなわち点 $a$ に近い場所で常に

$$f(x) \leqq h(x) \leqq g(x)$$

でかつ $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)$ ならば，$h(x)$ も $x \to a$ で収束して

$$\lim_{x\to a} h(x) = \lim_{x\to a} f(x)$$

が成り立つ．

解. (1) $\infty - \infty$ 型の不定形である．数列の場合と同様に,「無理化」してみれば,

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+x+1}-x &= (\sqrt{x^2+x+1}-x)\times\frac{\sqrt{x^2+x+1}+x}{\sqrt{x^2+x+1}+x}\\ &= \frac{(x^2+x+1)-x^2}{\sqrt{x^2+x+1}+x}\\ &= \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x}.\end{aligned}$$

これより $\frac{\infty}{\infty}$ 型の不定形になったが，分数関数は同じものを分子分母に掛けたり割ったりしても変わらないので，一番大きい項で割ってみると

$$\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x} = \frac{(x+1)\div x}{(\sqrt{x^2+x+1}+x)\div x} = \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}.$$

(次ページに続く)

ここで $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ であること，関数 $f(x)=\sqrt{x}$ が連続であることより

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\sqrt{\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}=\sqrt{1+0+0}=1$$

となる．よって，

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right) &= \lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}\\ &= \frac{\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)}\\ &= \frac{1+0}{1+1}=\frac{1}{2} \qquad \square\end{aligned}$$

$\sqrt{x^2+x+1}$ の項の大きさについては，$x>0$ が十分に大きいときに

$$\sqrt{x^2+x+1} \cong \sqrt{x^2} = x,$$

のようにして考える．また

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = \sqrt{\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}$$

の箇所で，関数 $f(x)=\sqrt{x}$ の連続性が必要になっていることに注意．

(2) $x \to +\infty$ のとき $\sin x$ は $1$ と $-1$ の間の数を繰り返すので扱いに困るが，今の例題の場合は $\frac{1}{x}$ という，$x \to +\infty$ のときに $0$ に収束する関数が掛けられている．よって，はさみうちの定理が使える．まず，すべての $x$ について

$$-1 \leqq \sin x \leqq 1$$

なので，この式に各辺に $\dfrac{1}{x}$ を掛ければ

$$-\frac{1}{x} \leqq \frac{\sin x}{x} \leqq \frac{1}{x}.$$

ここで $\frac{1}{x} > 0$ なので不等号の向きが変わらないことに注意する．よって，$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0,\quad \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right) = 0$ なので，はさみうちの定理より

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0 \qquad \square$$

# 演習問題

(1) 次の極限を求めよ.

$$(a)\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+1} \qquad (b)\quad \lim_{x\to-\infty}(x^3+1)$$

(2) 次の極限を求めよ.

$$(a)\quad \lim_{x\to-2}\frac{x+3}{(x-1)(x^2+3)} \qquad (b)\quad \lim_{x\to2}\frac{2x^2-5x+2}{x^2-4}$$

$$(c)\quad \lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{x+1}\right) \qquad (4)\quad \lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$$

(3) 次の極限を求めよ.

$$(a)\quad \lim_{x\to+0}\frac{x^2+x}{|x|} \qquad (b)\quad \lim_{x\to-0}\frac{x^2+x}{|x|} \qquad (c)\quad \lim_{x\to1+0}\frac{x}{x-1}$$

(4) 次の極限を求めよ.

$$(a)\quad \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}) \qquad (b)\quad \lim_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}$$

(5) 点 $x=0$ 以外の点で常に $f(x)<g(x)$ であるが，$\lim_{x\to0}f(x)$, $\lim_{x\to0}g(x)$ がともに存在して，さらに

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}g(x)$$

となるような関数の組の一例を挙げよ.