3　関数の極限と連続性

数列は $n \to \infty$ という一方向の極限しかなかったが，関数は $+\infty$ と $-\infty$ の二方向があり，さらに任意の点においても極限を考える事ができる．このことは，現代数学において基本的な役割を果たす「**実数の連続性**」という概念と関係している．これは本講義の後半に解説を行うこととし，まずは関数の極限を扱えるようになることを目標とする．

3.1　関数の極限

$x \to +\infty$ のときは数列のときと同様に考えればよい．また，$x \to -\infty$ のときは，$x = -u$ として，$u \to +\infty$ を考えればよい．もちろん慣れてきたら，変換せずに直接 $x \to -\infty$ でよい．

例題 3.1

次の極限値を求めよ．

$$(1)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} \qquad (2)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-4}{3x^3+1}$$

関数 $y = f(x)$ において，変数 x がある値 a に，a 以外の値を取りながら近づいていくとき，どのような近づけ方に対しても $f(x)$ の値が一定値 A に近づいていくとする（下図参照）．

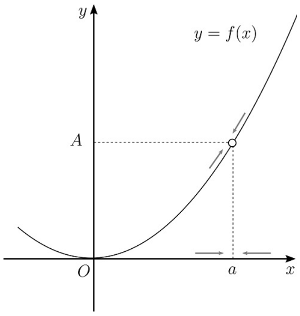

図 1　関数の極限

このとき，A をそのときの**極限値**といい，

x が a に近づくとき，関数 $f(x)$ は A に**収束する**

という．記号では

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \quad \text{または} \quad f(x) \to A \quad (x \to a)$$

にように書く．また，$x = a + h$ とおけば，$x \to a$ と $h \to 0$ とは等しいので，

$$\lim_{h\to 0} f(a+h) = A$$

とも書ける．この表記は微分を考える際によく用いる．

例題 3.2

次の極限値を求めよ．

$$(1)\ \lim_{x\to 2} x^2 \qquad (2)\ \lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$$

数列の極限と同様に，関数の極限も次の性質を持つ．

定理 3.3

a を定数，もしくは $\pm\infty$ とする．$x \to a$ のときに $f(x)$, $g(x)$ がともに収束するならば

(1) $\displaystyle\lim_{x\to a}\bigl(f(x)+g(x)\bigr) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to a}\bigl(k\,f(x)\bigr) = k\lim_{x\to a} f(x)$　(k は定数)

(3) $\displaystyle\lim_{x\to a}\bigl(f(x)g(x)\bigr) = \bigl(\lim_{x\to a} f(x)\bigr)\bigl(\lim_{x\to a} g(x)\bigr)$

(4) a の近くで $g(x) \neq 0$ で $\displaystyle\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$ ならば

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)}{\displaystyle\lim_{x\to a} g(x)}$$

(5) a の近くで常に $f(x) \leqq g(x)$ ならば

$$\lim_{x\to a} f(x) \leqq \lim_{x\to a} g(x)$$

(5) において，a の近くで常に $f(x) < g(x)$ でも，

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)$$

となることがある．演習問題 (5) を参照のこと．

3.2　関数の連続性

関数 $f(x)$ について，$\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)$ が存在していて，なおかつ $x = a$ で定義されていも，一般的には

$\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)$ と $f(a)$ **が一致するとは限らない．**

例えば，下図（図 2）の関数 $f_1(x) = \begin{cases} 1 & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$ に対しては，以下のようになっている．

$$\lim_{x\to 0} f_1(x) = 1 \quad \neq \quad 0 = f_1(0).$$

定義． 関数 $f(x)$ が点 $x = a$ で**連続**であるとは，

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

となることをいう．さらに，$f(x)$ が区間 D のすべての点 x で連続であるときには，**区間 D で連続**という．このとき，関数 $y=f(x)$ のグラフを描いてみれば，一本の線で描けていることになる． □

初等関数は，基本的には連続である．「基本的」というのは，例えば分数関数の分母が 0 になる点では不連続になるので，そういった例外があることを表している．

3.3 右極限と左極限

次の関数 $f_2(x)$ について考える（下図（図 3）参照）．

$$f_2(x)=\begin{cases}1 & (x>0)\\ 0 & (x=0)\\ -1 & (x<0)\end{cases}$$

この関数は，x の符号を返す関数である．グラフを見れば明らかなように，$f_2(x)$ は点 $x=0$ で連続ではなく，極限値も存在しない．しかし点 $x=0$ に，右から近づくと 1 に近づいていき，左から近づくと -1 に近づいていく．これらの極限値をそれぞれ**右側極限値**および**左側極限値**といい，記号ではそれぞれ

$$\lim_{x\to a+0} f_2(x)=1, \quad \lim_{x\to a-0} f_2(x)=-1$$

のように書く．ここで $a+0$ は $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0,\ \varepsilon>0}(a+\varepsilon)$ の略記である．$a=0$ のときは，$a+0$ の代わりに，単に $+0$ と書く．$a-0$ についても同様である．

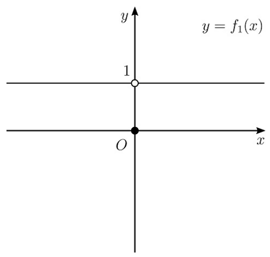

図 2　関数の例 1

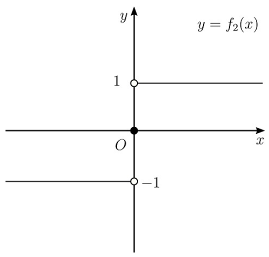

図 3　関数の例 2

例題 3.4

次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 2+0}\frac{1}{x-2}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 2-0}\frac{1}{x-2}$

数列の極限の場合と同じであるが，極限を求める際に，少し工夫が必要な場合もある．なお，関数の極限の場合にも「**はさみうちの定理**」が成り立つことに注意．

例題 3.5

次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-x)$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}$

3.4 まとめ

- 関数の極限・右極限・左極限
- 関数の連続性
- 関数の極限の計算・はさみうちの定理

3.5 演習問題

(1) 次の極限を求めよ．

$$(a)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+1} \quad (b)\ \lim_{x\to-\infty}(x^3+1)$$

(2) 次の極限を求めよ．

$$(a)\ \lim_{x\to-2}\frac{x+3}{(x-1)(x^2+3)} \quad (b)\ \lim_{x\to 2}\frac{2x^2-5x+2}{x^2-4}$$

$$(c)\ \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{x+1}\right) \quad (4)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$$

(3) 次の極限を求めよ．

$$(a)\ \lim_{x\to+0}\frac{x^2+x}{|x|} \quad (b)\ \lim_{x\to-0}\frac{x^2+x}{|x|} \quad (c)\ \lim_{x\to 1+0}\frac{x}{x-1}$$

(4) 次の極限を求めよ．

$$(a)\ \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}) \quad (b)\ \lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}$$

(5) 点 $x=0$ 以外の点で常に $f(x)<g(x)$ であるが，$\displaystyle\lim_{x\to 0}f(x)$, $\displaystyle\lim_{x\to 0}g(x)$ がともに存在して，さらに

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}g(x)$$

となるような関数の組の一例を挙げよ．

3.5.1 ヒント

(1) 数列の極限と同様にして考える．(2) 分数式において $x=a$ をそのまま代入したときに $\dfrac{0}{0}$ となる場合は，まず分数式のまま計算して約分できないかを考える．(3) 絶対値 $|x|$ は，$x>0$ のときは $|x|=x$，$x<0$ のときは $|x|=-x$，のように置き直して考える．(4) (a) は「無理化」してみる．(b) は「はさみうちの定理」を用いる．(5) グラフで描いたときにどのような状況になるのかを考える．