10　行列式の公式 I

$A=(a_{ij})_{n\times n}$ のとき，$\det A=|A|$ は

$$\det A=\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)}.$$

- $n=2$ のとき.

$$\begin{aligned}A&=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}\\S_2&=\{\varepsilon,\,(1\,2)\}\quad\Rightarrow\quad\det A=1\cdot a_{11}a_{22}+(-1)\cdot a_{12}a_{21}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.\end{aligned}$$

10.1　行列式の性質

命題 10.1.

(1)
$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\0&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=a_1\cdot\begin{vmatrix}a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

(2)　A,D が正方行列のとき
$$\begin{vmatrix}A&B\\O&D\end{vmatrix}=\left|\,A\,\right|\cdot\left|\,D\,\right|$$

証明. (1) $A=(a_{ij})_{n\times n}$ とすれば $a_{21}=\cdots=a_{n1}=0$.
$\sigma\in S_n$ が $\sigma(1)\neq1$ をみたすならば，$\sigma(k)=1$ となる $k\neq1$ がある ($\because\ \sigma$ は 1 対 1 なので)
このとき $\sigma_{k\sigma(k)}=\sigma_{k1}=0$ なので
$$\sigma_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots\sigma_{n\sigma(n)}=0.$$

よって

$$\begin{aligned}\det A&=\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)a_{1\sigma(1)}\cdots a_{n\sigma(n)}\\&=\sum_{\sigma\in S_n,\ \sigma(1)=1}\mathrm{sgn}(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)}+\sum_{\sigma\in S_n,\ \sigma(1)\neq1}\mathrm{sgn}(\sigma)a_{1\sigma(1)}\cdots a_{n\sigma(n)}\\&=a_{11}\sum_{\sigma\in S_n,\ \sigma(1)=1}\mathrm{sgn}(\sigma)a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)}\\&=a_1\cdot\begin{vmatrix}a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}.\end{aligned}$$

(2) も同様に示せる. □

ex.
$$\begin{vmatrix}2&7&13&5\\5&3&8&2\\0&0&9&4\\0&0&-2&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&7\\5&3\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}9&4\\-2&1\end{vmatrix}=(6-35)\cdot(9+7)=-29\cdot17=-493.$$

命題 10.2. $\det{}^tA=\det A$.

証明. $A=(a_{ij})_{n\times n}$，${}^tA=(b_{ij})_{n\times n}$ とすると，$b_{ij}=a_{ji}$ なので，

$$\det {}^{|,t}A=\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)b_{1\sigma(1)}\cdots b_{n\sigma(n)}=\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)a_{\sigma(1)1}\cdots a_{\sigma(n)n}.$$

第 3 項を $a_{1*}a_{2*}\cdots a_{n*}$ に並び替える．
$a_{\sigma(k)k}$ において，$\sigma(k)=i$ ならば $k=\sigma^{-1}(i)$ なので

$$a_{\sigma(k)k}=a_{i\sigma^{-1}(i)}.$$

また，$\sigma\in S_n$ は 1 対 1 なので $\{\sigma(1),\dots,\sigma(n)\}=\{1,\dots,n\}$．よって

$$\begin{aligned}\det {}^tA&=\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)a_{1\sigma^{-1}(1)}a_{2\sigma^{-1}(2)}\cdots a_{n\sigma^{-1}(n)}\\&=\sum_{\sigma^{-1}\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma^{-1})a_{1\sigma^{-1}(1)}a_{2\sigma^{-1}(2)}\cdots a_{n\sigma^{-1}(n)}\\&(\because\ \sigma\text{ と }\sigma^{-1}\text{ は 1 対 1 に対応しているので})\\&=\sum_{\tau\in S_n}\mathrm{sgn}(\tau)a_{1\tau(1)}a_{2\tau(2)}\cdots a_{n\tau(n)}\\&(\tau=\sigma^{-1}\text{と変数変換})\\&=\det A.\end{aligned}$$

□

命題 10.3. 列（行）ごとに加法的．つまり

$$\det(\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_i+\boldsymbol{a}'_i,\dots,\boldsymbol{n})=\det(\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_i,\dots,\boldsymbol{n})=\det(\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}'_i,\dots,\boldsymbol{n}).$$

たとえば,

$$\begin{vmatrix}a&b+b'\\c&d+d'\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a&b'\\c&d'\end{vmatrix}.$$

証明. 行に関して示す．$i=1$ として考える．

$$\begin{aligned}(\text{左辺})&=\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)(a_{1\sigma(1)}+a'_{1\sigma(1)})a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)}\\&=\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)}+\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)a'_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)}\\&=(\text{右辺}).\end{aligned}$$

□

命題 10.4. 列（行）ごとに 1 次同次．つまり，

$$\det(\boldsymbol{a}_1,\dots,\lambda\boldsymbol{a}_i,\dots,\boldsymbol{a}_n)=\lambda\det(\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_i,\dots,\boldsymbol{a}_n).$$

証明. Prop10.3 と同様. □

命題 10.5. 列（行）を入れ替えると符号が変わる．つまり

$$\det(\boldsymbol{a}_1,\dots,\lambda\boldsymbol{a}_i,\dots,\boldsymbol{a}_j,\dots,\boldsymbol{a}_n)=\det(\boldsymbol{a}_1,\dots,\lambda\boldsymbol{a}_j,\dots,\boldsymbol{a}_i,\dots,\boldsymbol{a}_n).$$

たとえば

$$\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}b&a\\d&c\end{vmatrix}.$$

証明. 行に関して示す．$i=1, j=2$ として考える．

$$(*)\ \det(\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_n)=\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)a_{2\sigma(1)}a_{1\sigma(2)}a_{3\sigma(3)}\cdots a_{n\sigma(n)}.$$

ここで $\sigma=\tau\circ(1\,2)$ という変数変換を考える．

$$\sigma(1)=\tau(2),\quad \sigma(2)=\tau(1),\quad \sigma(k)=k\quad (k\geq 3),\quad \mathrm{sgn}(\sigma)=\mathrm{sgn}(\tau)\cdot(-1)$$

なので

$$(*)=\sum_{\tau\in S_n}(-1)\,\mathrm{sgn}(\tau)a_{2\tau(2)}a_{1\tau(1)}a_{3\tau(3)}\cdots a_{n\tau(n)}=-\det(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_n).$$

□

注意 10.6. Prop10.3–10.5 は行列式の公理と呼ばれる (これらの性質を満たす関数は det の定数倍のみ).

命題 10.7. (1) 等しい列（行）があれば $\det=0$.
(2) ある列（行）に他の列（行）の λ 倍を加えても det は変わらない.

$$\det(\boldsymbol{a}_1,\ldots,\overset{i}{\boldsymbol{a}_i+\lambda\boldsymbol{a}_j},\ldots,\boldsymbol{a}_n)=\det(\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_i,\ldots,\boldsymbol{a}_n).$$

<u>行列式の計算方法.</u>

1. $n=2,3$ のときは全展開式
2. 行（列）に関する基本変形
   ただし，行（列）を λ で割ったら det を λ で割る
   行（列）を入れ替えたら符号が変わる
3. 次の公式を用いる
$$\begin{vmatrix} A & B \\ O & D\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A & O \\ C & D\end{vmatrix}=|\,A\,|\cdot|\,D\,|.$$
4. 同じ行（列）があれば $\det=0$.

例題 10.8. 次の行列式を計算せよ.

$$(1)\ \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & -7 \\ 2 & 3 & 4 & -4 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & -5 \end{vmatrix}\qquad (2)\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 6 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$