6　微分法の応用

前回までにいろいろな関数の微分について学んだ．そのことを利用して，多くの関数のグラフを描くことができる．そのときに必要になる情報は

- 定義域はどこか
- 定義域の境界あるいは $\pm\infty$ での挙動
- どこで増減が変わるか (極値)
- 特異点の近くでの挙動
- どこで x 軸，y 軸と交わるか

である．特異点とは，例えば分数関数における分母が 0 になる点である．

6.1　関数の増減

関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は，$f(x)$ の接線の傾きの情報を持つ関数である．それはすなわち，関数 $f(x)$ の増減に関する情報も持っているということである．実際，ある区間において

- 常に $f'(x) > 0$ ならば $f(x)$ は増加していき，
- 常に $f'(x) < 0$ ならば $f(x)$ は減少していく．

これは直感的にもわかりやすい性質であるが，厳密に証明する際には「平均値の定理」が必要となる．ここでは細かいことにはこだわらずに，これを認めてしまおう．平均値の定理は講義の後半で紹介することにする．

例題 6.1

関数 $y = x + \dfrac{1}{x}$ の増減を調べよ．

解．与えられた関数を微分すれば $y' = 1 - \dfrac{1}{x^2}$ である．$y' = 0$ となる点は $x = 1$ および -1 である．これより以下のような増減表を得る．ここで $\times$ は関数が定義できないことを表す（特異点）．

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	$\times$	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$\times$	$\searrow$	2	$\nearrow$

6.2　関数の極大と極小

$f(x)$ をある区間で連続な関数とする．$x = a$ を含む十分小さい開区間において，$x \neq a$ ならばいつでも $f(a) > f(x)$ となるとき，$f(x)$ は $x = a$ で「**極大**」であるといい，$f(a)$ を「**極大値**」という．直感的には「局所的に最大」であることである．同様に「**極小**」および「**極小値**」も定義される．これらをまとめて「**極値**」という．下図において，左側の山の頂上に当たる点が極大値であり，右側の谷の底に当たる点が極小点である．

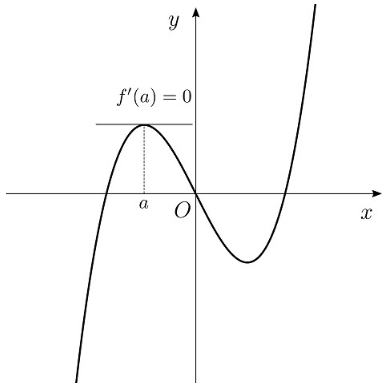

図 6.1　関数の極値

上図の極値での様子をみてもわかるように，微分ができる場合は

$$x = a \text{ で極値をとるならば，} f'(a) = 0 \qquad (6.1)$$

でなければならない．ただし，$f(x) = x^3$ の $x = 0$ を考えればわかるように，その逆は成り立たない．極値となるのは，$x = a$ の前後で $f'(x)$ の符号が変わるときである．また，$y = |x|$ を考えれば分かるように，微分ができない点が極値になることもある．

例題 6.2

関数 $y = f(x) = \dfrac{4x+3}{x^2+1}$ の極値を求めよ．

解．まず (6.1) を利用して，$f(x)$ の極値の候補を探す．

$$\begin{aligned} y' &= \frac{4(x^2+1) - (4x+3)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{-2(2x^2+3x-2)}{(x^2+1)^2} = \frac{-2(2x-1)(x+2)}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

これが 0 になるのは $x = \frac{1}{2}$ と $x = -2$ の 2 点である．増減表を書けば，以下のようになる．

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$

これより，$y = f(x)$ は $x = -2$ で極小値 $f(-2) = -1$，$x = \frac{1}{2}$ で極大値 $f(\frac{1}{2}) = 4$ をとる．　□

例題 6.3

関数 $f(x) = \dfrac{4x+3}{x^2+1}$ のグラフの概形を描け．

解． グラフを描く際に必要となるのは，本節の冒頭に述べた情報である．まず定義域は特に制限はない．次に，

$$\frac{4x+3}{x^2+1} = \frac{\frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}}$$

なので，$\pm\infty$ での挙動は，$x \to +\infty$ のときも $x \to -\infty$ のときも $f(x) \to 0$ となる．次は極値だが，これは例題 6.2 ですでに調べている．x 軸，y 軸との交点．y 軸との交点は $x = 0$ での値を見ればよく，x 軸との交点は方程式 $f(x) = 0$ を解けばよい:

$$f(0) = \frac{4 \cdot 0 + 3}{0^2+1} = 3, \quad \frac{4x+3}{x^2+1} = 0 \text{ より } x = -\frac{3}{4}.$$

特異点．この関数は特異点を持たないので調べる必要はない．以上のことを増減表にまとめると，

x	$-\infty$	$\cdots$	-2	$\cdots$	$-\frac{3}{4}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$+\infty$
y'		$-$	0			$+$			0	$-$	
y	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	3	$\nearrow$	4	$\searrow$	0

よって関数 $y = f(x)$ のグラフの概形は以下の通り．

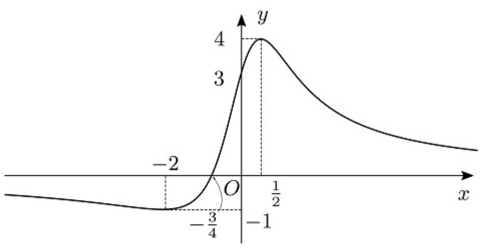

図 6.2　例題 6.3 の関数のグラフ

6.3　曲線の媒介変数表示

変数 t に関する関数 $f(t)$, $g(t)$ を用いて

$$(x, y) = \big(f(t),\, g(t)\big)$$

のように表される点 $P(x, y)$ を考える．これは t が変化するに従って xy 平面上で一つの曲線を描く．例えば $(x, y) = (\cos t, \sin t)$ とすれば，半径 1，中心原点の円になる．このようにして，新たなパラメータ t を用いて曲線の x, y 座標を表して曲線を表示することを「**曲線の媒介変数（パラメータ）表示**」という．なお，半径 1，中心原点の円は $(x, y) = (\sin t, \cos t)$ としても表すことができる．このように，1 つの図形を媒介変数を用いて表示する仕方はたくさんある．

通常の関数 $y = f(x)$ は，$(x, y) = \big(t, f(t)\big)$ と見ることで媒介変数表示ができる．媒介変数表示のメリットの一つとして，関数のグラフよりも多くの種類の曲線を描くことができるという点がある．例えば先程の円であっても，関数を使って描こうとすれば

$$f_1(x) = \sqrt{1-x^2}, \quad f_2(x) = -\sqrt{1-x^2}$$

と 2 つの関数に分けなければならない．またプログラミングを用いて曲線を描画する際にも非常に有効である．

曲線の媒介変数表示が与えられたとき，関係式をうまく使ってパラメータを消去できるときがある．例えば先程の円ならば $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ なので

$$x^2 + y^2 = 1$$

という表示を得る（曲線の「**陰関数**」表示という）．

6.4　まとめ

- 関数の極大・極小
- 関数のグラフの描き方
- 関数の媒介変数表示について

6.5　演習問題

(1) 次の関数の極値を調べよ．

(a) $3x^4 + 4x^3 + 1$　　(b) $\sqrt{4 - 9x^2}$

(c) e^{-x^2}　　(d) $(1 + \cos x)\sin x$

(2) 次の関数のグラフの概形を描け．

(a) $\dfrac{xe^x}{x-1}$　　(b) $x^2 \log x$

(3) 次の媒介変数表示を，陰関数表示に書き換えよ．

(a) $(\cos^3 t, \sin^3 t)$　　(b) $\left(\dfrac{3t}{t^3+1}, \dfrac{3t^2}{t^3+1}\right)$

6.5.1　ヒント

(1) (a) 極値は一つである．(d) 周期関数なので，$0 \leqq x \leqq 2\pi$ の範囲のみを調べれば十分．(2) (a) 特異点近くでの挙動を調べる必要がある．(b) 定義域に注意．$x \to +0$ と $x \to +\infty$ を調べる必要がある．(3) (a) $\sin^2 + \cos^2 = 1$ を使う．(b) $t = \frac{y}{x}$ を用いる．(a) は星芒形（アステロイド），(b) はデカルトの正葉線と呼ばれている．