線形代数学・同演習 B

11 月 1 日分　小テスト

学籍番号：　　　　　　　　　　　　氏名：

ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ および行列 A を次のように定める．このとき，次の問題に答えよ．

$$A = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4) = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 4 & 3 \\ -2 & 8 & 1 & 6 \\ -1 & 4 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

(1) $\mathbb{R}^3$ の部分空間 $W_1 := \mathrm{Span}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4)$ の次元と，その基底を一組求めよ．

(2) 行列 A に関する解空間 $W_2 := \ker A$ の次元と，その基底を一組求めよ．

解）まず簡約化を行う．

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & 4 & 3 \\ -2 & 8 & 1 & 6 \\ -1 & 4 & -3 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) ベクトルの組 $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_4$ における線形独立なものの最大個数は，上記の簡約化における主成分の数と一致するので，$\dim W_1 = 2$ である．その基底としては，主成分がある列に対応するベクトルを持ってくれば良いので，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3$ が W_1 の基底となる．

(2) 解空間は連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解であるので，上記の簡約化より，

$$\begin{cases} x - 4y - 3w &= 0 \\ z &= 0 \end{cases}$$

の解を求めればよいが，これを解くと

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (s, t \text{ はパラメータ})$$

である．解空間の次元はパラメータの数なので $\dim W_2 = 2$ であり，基底は解を表す際に必要となるベクトルを持ってくれば良いので，$\left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ が W_2 の基底となる．

※講義や講義内容に関して，意見・感想・質問等を自由に記述してください．