

線形代数学・同演習 A

演習問題 8

1. 次の行列式を求めよ .

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \quad (2) \begin{vmatrix} 5 & 2 & -5 \\ -2 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & -4 \end{vmatrix} \quad (3) \begin{vmatrix} 4 & -5 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & -5 \end{vmatrix} \quad (4) \begin{vmatrix} -1 & -4 & 3 \\ -3 & 5 & 3 \\ -3 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

2. 次の行列式を求めよ . ただし , a, b, c は任意の実数とする .

$$(1) \begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} \quad (2) \begin{vmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} \quad (3) \begin{vmatrix} 1 & -a & -b \\ a & 1 & -c \\ b & c & 1 \end{vmatrix}$$

3. 次の行列式を求めよ . 答えはできるだけ因数分解をした形で求めること .^{*1}

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \quad (2) \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} \quad (3) \begin{vmatrix} a & a^2 & b+c \\ b & b^2 & c+a \\ c & c^2 & a+b \end{vmatrix}$$

4. ベクトル x, y が以下のベクトルであるとき , それらの外積 $x \times y$ を求めよ .

$$(1) \begin{cases} x = {}^t(2, 1, 3), \\ y = {}^t(-1, 2, -1) \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x = {}^t(1, 5, 2), \\ y = {}^t(-2, -3, 1) \end{cases} \quad (3) \begin{cases} x = {}^t(3, -4, -1), \\ y = {}^t(-1, 2, 3) \end{cases}$$

5. 任意の数ベクトル $x, y \in \mathbb{R}^n$ に対して , 次の不等式が常に成り立つことを示せ .

$$|\langle x | y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

6. 任意の 2 次正方行列 A に対して , 次の等式が成り立つことを示せ .

$$A^2 - \operatorname{tr}(A)A + \det(A)E_2 = O.$$

ただし , tr は正方行列のトレースと呼ばれるもので , $A = (a_{ij})_{n \times n}$ のとき $\operatorname{tr}(A) = a_{11} + \cdots + a_{nn}$ である .

7. 任意の正方行列 A, B に対して , $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B)$ は成り立つか . 成立するならば証明を , しないのならば反例を与えよ .

8. 同一平面上にない 4 点 $a, b, c, d \in \mathbb{R}^3$ を頂点に持つ四面体の体積を求めよ .

6 月 13 日分 (凡例 : 無印は基本問題 , † は特に解いてほしい問題 , * は応用問題)

講義用 HP: <http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~h-nakashima/lecture/2017LA.html>

^{*1} 後の講義で , より簡単な計算方法を紹介する .