固有値は，大まかに言えば線形変換の拡大率のことです．例えば $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ は x 軸方向を 2 倍にして，y 軸方向を 3 倍にするような変換だということは，変換の様子を見てもらえば分かるかと思います．固有値が実数のときは，これと同様のことが，対応する固有ベクトルの方向について成り立ちます．複素数になると具体的に描写することができないのでイメージするのが難しいですが，本質的な点は実数のときと同様です．

この講義では，扱うベクトル空間は有限次元のものに限っています．それは，無限次元になると，有限次元のときには起こらなかった現象が生じてしまうからです．例えば，(可微分) 関数全体の空間 $C^1(\mathbb{R})$ において，“微分するという写像” $\frac{d}{dx}$ は線形写像ですが，指数関数 $e^{\xi x}$ ($\xi \in \mathbb{R}$) は

$$\tfrac{d}{dx} e^{\xi x} = \xi \, e^{\xi x}$$

となるので，固有ベクトルの定義を満たしており，その固有値は ξ ということになります[1)]．このように，無限次元においても固有値・固有ベクトル（に対応するもの）を考えること自体は可能ですが，有限次元のときとは全く違う現象が起きています．それは，固有値としてどんな実数でも取ることができるという点です．つまり，固有ベクトルが無限個[2)]あるので，有限次元のときに使う対角化の議論[3)]などが行えないのです．もちろん，学年が進むと，無限次元のものも扱う必要が出てきます[4)]が，考え方の基本は有限次元のときと同じですので，しっかりと押さえておきましょう．

---

1) 無限次元のときはスペクトルと呼ぶことが多い．

2) しかも実数濃度!

3) 後期後半の内容

4) 二乗可積分関数全体のなす空間など．Hilbert（ヒルベルト）空間というクラスの代表的なもので，量子力学で中心的な役割を果たす．