

線形代数学・同演習 A

6 月 28 日分 演習問題

計算問題は解答のみ，証明問題は太極拳な道筋を説明するに留めています．

1. (1) 63 (2) -40 (3) -42 (4) 54 (5) 100 (6) 41 (7) 256
(8) 52 (9) -3 (10) 118 (11) 3684 (12) -400 (13) 0 (14) 6
2. (i) $\det A = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) = a^3+b^3+c^3-3abc$, $\det W = -3\sqrt{3}i$
(ii) ω は 1 の三乗根であることに注意すると，例えば AW の 2 列目は

$$\begin{pmatrix} a+b\omega+c\omega^2 \\ c+a\omega+b\omega^2 \\ b+c\omega^2+a\omega \end{pmatrix} = (a+b\omega+c\omega^2) \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \\ \omega^2 \end{pmatrix}$$

となる．行列式は 1 次同次なので，

$$\det(AW) = (a+b+c)(a+b\omega+c\omega^2)(a+b\omega^2+c\omega)\det(W)$$

となる．あとは行列式の積公式^{*1}を使えば， $\det(W) \neq 0$ であるので，与式を得る．

3. $B = \begin{pmatrix} b & c & 0 \\ a & 0 & c \\ 0 & a & b \end{pmatrix}$ とすればよい^{*2}．このとき $\det(B) = 2abc$ なので， $\det(A) = \det(B)\det({}^tB) = 4a^2b^2c^2$ となる^{*3}．

^{*1} 出題時点ではまだ積公式を紹介していなかったので，出題ミスではありますが...

^{*2} どうやって見つけるのかは難しいところだが A の (1,1) 成分から， B の 1 行目に b, c があるだろう，というところから構成していくとよい．なお，この B は一意に決まるわけではない（少し難しい言葉で説明すると，直交群の分だけ自由度がある）．

^{*3} これも行列式の積公式を使うのを失念していました．