線形代数学・同演習 B

演習問題 2

1.† (1) ◯ (2) × (3) × (4) ◯

(考え方) 条件 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in W$ ならば $\lambda\boldsymbol{u} + \mu\boldsymbol{v} \in W$ をみたすかどうかを調べる．このような形で定義される集合は，この講義に限らずによく現れてくるものなので，扱い方に慣れておくこと．(2) $(x, x^2), (y, y^2) \in W_2$ をとる．$(x, x^2) + (y, y^2) = (x + y, x^2 + y^2)$ であるが，たとえば $x = y = 1$ とすれば $x^2 + y^2 \neq (x + y)^2$ なので，W_2 は和で閉じていない．(3) ある x について $f(x) > 0$ となる $f \in W_3$ をとる．このとき，負の数 λ に対して関数 λf は $(\lambda f)(x) < 0$ $\lambda f \notin W_3$ となる．すなわち，W_3 はスカラー倍に関して閉じていない．(4) $f, g \in W_4$ をとると，$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx < \infty$, $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|\,dx < \infty$ をみたす．このとき関数 $\lambda f + \mu g$ について考える．三角不等式より，

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\lambda f(x) + \mu g(x)|\,dx \leq |\lambda| \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx + |\mu| \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|\,dx < \infty$$

であるので，$\lambda f + \mu g \in W_4$．零元 (零関数) がこの空間に入っていることは明らか.

2. (1) 線形独立 (2) 線形独立でない

3.† (1) 線形独立 (2) 線形独立でない

(考え方) 問題 2,3 はいずれも，与えられたベクトルの組を並べた行列を簡約化して，その階数を調べる．行列式を計算しても線形独立性は判定できるが，後々への応用を考えると簡約化の方がよい.

4.† (1) 線形独立 (2) 線形独立でない (3) 線形独立 (4) 線形独立でない

(考え方) 多項式の場合は，係数を並べたベクトルに対して問題 2,3 と同様に考える.

5. (1) 線形独立 (2) 線形独立でない

(考え方) 例題 2.8 と同様にすればよい.

6. (1) $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$ より．(2) $x^3 = (x + 1)^3 - 3(x + 1)^2 + 3(x + 1) - 1$.

(考え方) (1) は問題 4 と同様．(2) は $x^3 = a(x + 1)^3 + b(x + 1)^2 + c(x + 1) + d$ とおき，右辺を展開した後に係数比較をする.

7.† (1) 正しい．問題 3 と同様にできる．(2) 誤り．n が偶数のときは線形従属になる.

(考え方) 例題 2.8 と同様．(2) については，$n = 3, 4$ として具体的なものに対して計算してみるとよい.

---

10 月 17 日分 (凡例：無印は基本問題，† は特に解いてほしい問題，$*$ は応用問題)

講義用 HP: http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~h-nakashima/lecture/2017LA.html