線形代数学・同演習 A

6 月 28 日分　演習問題

1. 次の行列式を計算せよ．

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{vmatrix}$　(2) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$　(3) $\begin{vmatrix} 7 & 4 & 0 \\ -2 & 4 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$　(4) $\begin{vmatrix} -5 & 2 & -1 \\ 4 & -2 & -5 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix}$

(5) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -4 & 4 & -4 \\ -2 & 0 & 5 \end{vmatrix}$　(6) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 6 \\ 4 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & 2 & 7 \end{vmatrix}$　(7) $\begin{vmatrix} 8 & 3 & 2 & -5 \\ 4 & -1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 2 & 3 \\ 1 & 6 & 2 & 7 \end{vmatrix}$　(8) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

(9) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 4 & -4 & 2 & -1 \\ 5 & 5 & -2 & -2 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$　(10) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & -3 & -2 & -5 \\ 3 & -2 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix}$　(11) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 8 & -1 & 3 & 3 \\ -1 & 6 & 5 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 8 & -1 \end{vmatrix}$

(12) $\begin{vmatrix} -4 & -5 & -1 & -3 \\ -4 & -4 & 3 & -3 \\ 3 & 3 & -5 & -2 \\ 5 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$　(13) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{vmatrix}$　(14) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}, W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{pmatrix}$ とする．ただし，$\omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ である．

(i) $\det(A), \det(W)$ を求めよ．また，$\det(W) \neq 0$ を確かめよ．

(ii) $\det(AW) = (a+b+c)(a+b\omega+c\omega^2)(a+b\omega^2+c\omega)\det(W)$ を示し，次の因数分解の結果を証明せよ．

$$a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)(a+b\omega+c\omega^2)(a+b\omega^2+c\omega).$$

3. 行列 $A = \begin{pmatrix} b^2+c^2 & ab & ca \\ ab & c^2+a^2 & bc \\ ca & bc & a^2+b^2 \end{pmatrix}$ を $A = B\,{}^tB$ の形に直し，$\det(A) = 4a^2b^2c^2$ を証明せよ．