線形代数学・同演習 A

7 月 5 日分　演習問題

計算問題は解答のみ，証明問題は大雑把な道筋を説明するに留めています．

1. $A = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n), B = (b_{ij}) = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ のように表す．また, $AB = (c_{ij}) = (\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_n)$ とおく．さて，$AB = (A\boldsymbol{b}_1, \ldots, A\boldsymbol{b}_n)$ であるので，$\boldsymbol{c}_j = A\boldsymbol{b}_j = \sum_{i_j=1}^{n} b_{i_j j}\boldsymbol{a}_{i_j}$ とかける．よって

$$\det(AB) = \det(\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_n) = \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_n=1}^{n} b_{i_1 1} b_{i_2 2} \cdots b_{i_n n} \det(\boldsymbol{a}_{i_1}, \boldsymbol{a}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{a}_{i_n})$$

である．ここで，$\det(\boldsymbol{a}_{i_1}, \boldsymbol{a}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{a}_{i_n})$ は $i_1, i_2, \ldots, i_n$ がすべて異なるとき以外は 0 になるので，i_k を置換 $\sigma \in S_n$ を用いて $i_k = \sigma(k)$ と表すことができることに注意する．これより

$$\det(AB) = \sum_{\sigma \in S_n} b_{\sigma(1)1} b_{\sigma(2)2} \ldots b_{\sigma(n)n} \det(\boldsymbol{a}_{\sigma(1)}, \boldsymbol{a}_{\sigma(2)}, \ldots, \boldsymbol{a}_{\sigma(n)})$$

であるが，$\det(\boldsymbol{a}_{\sigma(1)}, \boldsymbol{a}_{\sigma(2)}, \ldots, \boldsymbol{a}_{\sigma(n)}) = \operatorname{sgn}(\sigma)\det(A)$ なので,

$$\det(AB) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) b_{\sigma(1)1} b_{\sigma(2)2} \ldots b_{\sigma(n)n} \cdot \det(A) = \det(A)\det(B)$$

を得る．

2. (1) 109　(2) 8　(3) 20　(4) -968　(5) -730　(6) 1185
(7) 22　(8) 33　(9) 11　(10) 112　(11) -1207

3. (a) 右辺を計算すれば左辺になる．
(b) 行列式の積公式と (a) を用いる．

4. (1) $i = 1, \ldots, n$ に対して，$n+i$ 行の λ 倍を i 行目に加える行基本変形を，行えばよい．
(2) はじめに (1) の結果は列に関しても成り立つことに注意する．

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+B & B+A \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+B & (B+A)-(A+B) \\ B & A-B \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} A+B & O \\ B & A-B \end{vmatrix} = |\,A+B\,|\,|\,A-B\,|.$$

5. まず n が奇数のとき．このときは行列式の性質から

$$\det(X) = \det(-{}^tX) = (-1)^n \det({}^tX) = -\det(X)$$

なので，$\det(X) = 0$ となることが分かる．さて，$n = 2p$ (偶数) のとき．このときは，問題 3 を用いると計算が楽である (単純に基本変形を用いても同様にできる)．X を n 次の交代行列とし，それを

$$X = \begin{pmatrix} aJ & {}^tB \\ B & Y \end{pmatrix}; \qquad a \in \mathbb{R}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} B \text{ は } (n-2)\times 2 \text{ 行列} \\ Y \text{ は } n-2 \text{ 次の交代行列} \end{cases}$$

のようにブロック分割する．$n = 2$ ならば交代行列 X は $X = aJ$ の形であり，このとき $\det(X) = a^2$ なので確かに $(\text{多項式})^2$ の形をしている．ここで $J^{-1} = {}^tJ = -J$ であることに注意しよう．さて，問題 3 より

$$\det X = \det(aJ)\det(Y - B(aJ)^{-1}\,{}^tB) = a^{2-2p}\det(aY - BJ\,{}^tB) \qquad (n = 2p)$$

となる．$Z := aY - BJ\,{}^tB$ とおけば，Z は交代行列となるため，帰納法の仮定より $\det(Z) = \mathrm{Pf}'(Z)^2$ となる多項式 $\mathrm{Pf}'(Z)$ がある．これを用いれば，

$$\det(X) = (a^{1-p}\mathrm{Pf}'(Z))^2$$

であるため，あとは $\mathrm{Pf}(X) := a^{1-p}\mathrm{Pf}'(Z)$ が多項式であることを示せばよい．ここで左辺 $(= \det(X))$ は当然多項式である．一方で，$\mathrm{Pf}(X)$ がもし多項式関数ではない有理関数[*1]ならば，その自乗も多項式関数ではない有理関数になっているはずである．これが多項式と等しいということなので，$\mathrm{Pf}(X)$ 自体が多項式でなければならない．

6. $\mathrm{Pf}(A) = af - be + cd.$

[*1] 有理関数とは，二つの多項式 $f(x), g(x)$ を用いて $\frac{f(x)}{g(x)}$ と表わされる関数のこと．