線形代数学・同演習 B

12 月 13 日分　演習問題[*1]

1. 次の行列の固有値および対応する固有空間を求めよ．

$$(1)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ 9 & 16 & 3 & 1 \\ -5 & -9 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

2.† $V = \mathbb{R}[x]_n$ (n は自然数) とし，$T\colon V \to V$ を V 上の線形変換とする．このとき，次のような部分集合は V の部分空間となるか．なるのならばそれを証明し，ならないのであればその反例を挙げよ．

(1) 線形変換 T の像 $\mathrm{Im}(T)$　(2) $W_1 := \{q(x) \in V\,;$ 最高次の係数が 1 である多項式全体 $\}$
(3) 線形変換 T の核 $\mathrm{Ker}(T)$　(4) $W_2 := \{p(x) \in V\,;\, T(p(x)) = x\}$

3. $V = \mathbb{R}[x]_1$ とする．次の線形変換 T_1, T_2, T_3 に対して，(i) 固有多項式，(ii) 固有値と対応する固有空間，をそれぞれ求めよ．

(1) $T_1(p(x)) = xp'(x)$　(2) $T_2(p(x)) = p'(x) + p(0)x$　(3) $T_3(p(x)) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x p(t)\,dt + p(0)$

4. a, b を任意の実数 (ただし $a \neq 0, 1$, $b \neq 0$) とする．また，自然数 $n = 1, 2, 3, \ldots$ に対して $\mathbb{R}[x]_n$ 上の線形変換 T_n を，$T_n(p(x)) := p(ax + b)$ により定義する．
(1) $n = 1$ のとき，T_1 の固有値と，対応する固有空間を求めよ．
(2)† $n = 2$ のとき，T_2 の固有値と，対応する固有空間を求めよ．
(3)* 一般の n に対して，T_n の固有値と，対応する固有空間を求めよ．

5.† $V = \mathbb{R}[x]_2$ とし，基底は標準基底 $[x^2, x, 1]$ であるとする．V 上の線形変換 T の表現行列 A が以下のように与えられているとき，T の固有値および対応する固有空間をそれぞれ求めよ．

$$(1)\ \begin{pmatrix} -3 & 0 & -12 \\ 0 & -2 & -15 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad (2)\ \begin{pmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 3 & 10 & -21 \\ 3 & 6 & -11 \end{pmatrix} \quad (3)\ \begin{pmatrix} 6 & -1 & -5 \\ -5 & 2 & 5 \\ 5 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

6.† 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は対角化できないことを示せ．[*2]

7.* W_1, W_2 をベクトル空間 V の部分空間とする．$W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$ であるとき，$W_1 \oplus W_2 := \{\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 \in V\,;\, \boldsymbol{w}_1 \in W_1,\ \boldsymbol{w}_2 \in W_2\}$ を W_1, と W_2 の直和という．このとき，以下を示せ．
(1) $\boldsymbol{w}_1 \in W_1, \boldsymbol{w}_2 \in W_2$ が $\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 = \mathbf{0}$ を満たすならば，$\boldsymbol{w}_1 = \mathbf{0}$ かつ $\boldsymbol{w}_2 = \mathbf{0}$.
(2) $\boldsymbol{w}_j, \boldsymbol{w}_j' \in W_j$ $(j = 1, 2)$ が $\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{w}_1' + \boldsymbol{w}_2'$ を満たすならば，$\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{w}_1', \boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{w}_2'$.

[*1] 凡例：無印は基本問題，† は特に解いてほしい問題，$*$ は応用問題.
[*2] 対角化できるとすると，ある対角行列 $D = \left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{smallmatrix}\right)$ と <u>正則</u> 行列 P を用いて $D = P^{-1}AP \Leftrightarrow PD = AP$ を満たすはずだが，そのような P, D が存在しないことを示す.