2020 年度　名古屋大学
理系基礎科目（文系） 数学入門

第９回

講義担当者：中島秀斗

2020 年 6 月 18 日

はじめに

- 授業形態：学習資料 (スライド・ノート) 配布
  - はじめはスライドに目を通してください.
  - ノートはスライドの要約になります．復習にご活用ください.
  - スライド内にある赤い枠で囲った演習問題は，実際に解いてもらうことを想定しています.
- 小テストについて
  - 小テストは NUCT で行われます.
  - 講義日の午前８時から日付が変わるまでの間に完了してください.
- レポートについて
  - 講義 3,4 回毎にレポートを課します.
  - 各回に出題する演習問題を解いたものを，pdf ファイルとして提出してもらいます.
  - 学習資料配布時のお知らせの中で通知します.

凡例

公式や定理など，講義において重要な情報は青の枠で囲む．

演習問題は赤の枠で囲む．実際に手を動かして解いてほしい．

コメントや注意すべき点などは緑の枠で囲む．

例題は黄色の枠で囲む．解答も用意されているが，計算量の多いものは実際に手を動かして一緒に解いてほしい．

§9 これまでの復習

- 今回は演習に 1 コマすべてを使います．本来は中間試験を行う予定でしたが，現状難しいので，このような形（演習＋レポート）を取ることにしました．
- 赤い枠で囲った演習問題は，今週の小テスト欄で解答してもらいます．

今回の目標

- これまでの講義の復習を行う．

§1 関数の復習

問題. 関数 $y = x^2 + 2x + 2$ の逆関数を求めよ．

逆関数が定義される区間を意識する．グラフは次ページ．

解. $y = (x+1)^2 + 1 \geqq 1$ である．ここでグラフを描いて見ると，$x = -1$ で極小になっており，この点を超えて逆関数は定義できない点に注意しておく．さて，与えられた式を x について解くと

$$x = -1 \pm \sqrt{y-1} \quad (y \geqq 1)$$

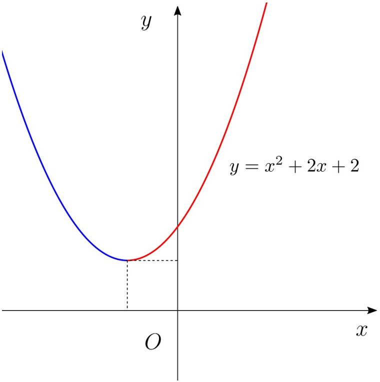
なので，x と y を入れ替えて

$$y = -1 \pm \sqrt{x-1} \quad (x \geqq 1)$$

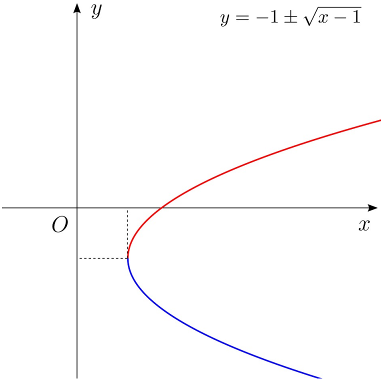
となる．元の関数において，

- $x \geqq -1$ の部分に対応するものが $y = -1 + \sqrt{x-1}$ であり，
- $x \leqq -1$ の部分に対応するものが $y = -1 - \sqrt{x-1}$ である．

$$y = x^2 + 2x + 2$$



$$y = -1 \pm \sqrt{x - 1}$$



演習問題 1. 次の問いに答えよ.

(1) 関数 $y = -x^2 + 3x$ の逆関数で,「左側」の部分に対応するものを求めよ.

(2) a, b, c, d は $ad - bc \neq 0$ を満たす数とする. このとき, 関数

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}$$

の逆関数を求めよ.

（行列を知っている人は逆行列と比較してみよ）.

§2,3 極限

問題. 次の極限を求めよ.

$$(1) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\bigl(1+2+3+\cdots+n\bigr) \qquad (2) \quad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{Arcsin} x}{x}$$

(1) は級数の公式 $1+2+\cdots+n = \frac{1}{2}n(n+1)$ を用いる.
(2) は変数を変換することにより既知の極限に帰着させる.

(1) $S_n = 1 + 2 + \cdots + n$ とする．天下りではあるが S_n を n を用いて表すために

$$\begin{array}{rcccccccccccc}
 & S_n & = & 1 & + & 2 & + & 3 & + \cdots + & n-1 & + & n & \\
+) & S_n & = & n & + & n-1 & + & n-2 & + \cdots + & 2 & + & 1 & \\
\hline
 & 2S_n & = & n+1 & + & n+1 & + & n+1 & + \cdots + & n+1 & + & n+1 & = n \times (n+1)
\end{array}$$

であるので

$$S_n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

となる．したがって，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\big(1+2+3+\cdots+n\big) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{2} \quad \square$$

もちろん，公式を覚えているのならばわざわざ導出する必要はない．

(2) 扱いが難しいのは $\mathrm{Arcsin}\, x$ であるので，これを $y = \mathrm{Arcsin}\, x$ と変数変換する．このとき，$x \to 0$ のとき $y \to 0$ となることに注意．すると，$x = \sin y$ であるので，

$$\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{Arcsin}\, x}{x} = \lim_{y \to 0} \frac{y}{\sin y} = 1 \quad \square$$

演習問題 2. 次の極限を求めよ.

$$(1)\quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}(1^2+2^2+\cdots+n^2) \qquad (2)\quad \lim_{x\to+0} x\log x$$

§4,5 関数の微分

問題. (1) 関数 $y = (x^4 + 2x + 1)^3$ を微分せよ．
(2) 関数 $y = \log|2x|$ を微分せよ．

この節では，以前にレポートとして出題した問題の解説を行う．

(1) 解. 合成関数の微分を用いる．$u = x^4 + 2x + 1$ とすれば

$$u' = (x^4 + 2x + 1)' = 4x^3 + 2$$

であるので，

$$y' = (u^3)' = 3u^2 \cdot u' = 3(x^4 + 2x + 1)^2(4x^3 + 2) \quad \square$$

(2) 解. $u = 2x$ とすれば，合成関数の微分より

$$y' = \frac{1}{u} \cdot u' = \frac{1}{2x} \cdot (2x)' = \frac{1}{2x} \cdot 2 = \frac{1}{x} \quad \square$$

あるいは「$\log|2x| = \log(|2| \cdot |x|) = \log|x| + \log 2$ なので，定数を微分すると 0 になることより $y' = \frac{1}{x}$」としてもよい．

問題. 次の問いに答えよ.
(1) 関数 $y = \mathrm{Arcsin}\sqrt{x}$ を微分せよ.
(2) 関数 $y = \mathrm{Arctan}\sqrt{x^2-1}$ を微分せよ.
(3) 関数 $y = e^x \sin x$ の n 階微分を求めよ.

(1) 公式 $(\mathrm{Arcsin}\, x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ を思い出そう．合成関数の微分を用いる.
(2) まず公式 $(\mathrm{Arctan}\, x)' = \dfrac{1}{x^2+1}$ を思い出そう．この問題は合成関数の微分を複数回使う例になる.
(3) n 階微分の計算においては Leibniz の公式が定石ではあるが，この場合はもっと簡単に求めることができる．数ページ後に解答があるが，まずは計算してみてほしい.

(1) 解. $y = \mathrm{Arcsin}\sqrt{x}$ と合成関数の形をしているので，まず $u = x$ として合成関数の微分の公式を用いる．すると

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{d}{du}(\mathrm{Arcsin}\, u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{du}{dx} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}} \quad \square
\end{aligned}$$

(2) **解.** まず $u=\sqrt{x^2-1}$ とおけば，合成関数の微分より

$$\left(\operatorname{Arctan}\sqrt{x^2-1}\right)' = \frac{1}{1+u^2}\cdot\frac{du}{dx} = \frac{1}{1+(x^2-1)}\cdot(\sqrt{x^2-1})' = \frac{(\sqrt{x^2-1})'}{x^2}$$

次に $\sqrt{x^2-1}$ を x に関して微分するのであるが，今度は $v=x^2-1$ とすれば

$$(\sqrt{x^2-1})' = \frac{1}{2}v^{\frac{1}{2}-1}\cdot\frac{dv}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{v}}\cdot(x^2-1)' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

なので，2 つの計算を合わせれば

$$\left(\operatorname{Arctan}\sqrt{x^2-1}\right)' = \frac{(\sqrt{x^2-1})'}{x^2} = \frac{1}{x^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}. \quad \square$$

(3) 解.　積の微分より

$$(e^x \sin x)' = (e^x)' \sin x + e^x (\sin x)' = e^x \sin x + e^x \cos x = e^x(\sin x + \cos x).$$

ここで，三角関数の加法定理を思い出すと

$$\sin(x+a) = \sin x \cos a + \cos x \sin a$$

であるが，$a = 45° = \frac{\pi}{4}$ であれば $\cos a = \sin a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ なので，

$$\sin\left(x+\tfrac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin x + \cos x) \quad \Leftrightarrow \quad \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x+\tfrac{\pi}{4}\right).$$

これより

$$y' = \sqrt{2}e^x \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

となる．つまり，1 回微分すれば $\sqrt{2}$ が一つ出てきて，$\sin$ の中の x が $\frac{\pi}{4}$ だけずれる．よって n 回微分すれば $\sqrt{2}$ が n 個出てきて，$\sin$ の中の x が $\frac{\pi}{4} \times n$ だけずれるので，

$$y^{(n)} = (\sqrt{2})^n e^x \sin\left(x + \frac{n\pi}{4}\right). \quad \square$$

演習問題 3. 次の関数を微分せよ.

$$(1)\ \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} \quad (2)\ \log(x+\sqrt{x^2+1})$$

$$(3)\ \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2}+\operatorname{Arcsin} x\right)$$

以下の選択肢から選べ（NUCT の小テスト欄で解答する）

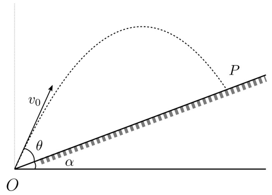
$$(A)\ \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \quad (B)\ \frac{1}{\sin x}\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} \quad (C)\ \sqrt{1-x^2}$$

§6,7 微分法の応用

問題. 水平面との角度が α の斜面において，初速度 v_0 をもって物体を投げるとき，その最大到達距離を求めよ．ここで $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ とする．ただし，物体をその斜面との角度が θ になるように投げるときの軌道の方程式は以下で与えられるものとする．

$$\begin{cases} x = v_0 t \cos(\theta + \alpha), \\ y = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 t \sin(\theta + \alpha) \end{cases}$$

ここで g は重力加速度 (定数) であり，θ は $0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2} - \alpha$ の範囲を動く．



解. まず与えられた軌道の方程式から t を消去し，

$$
\begin{aligned}
y &= -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0\cos(\theta+\alpha)}\right)^2 + v_0\sin(\theta+\alpha)\left(\frac{x}{v_0\cos(\theta+\alpha)}\right) \\
&= -\frac{g}{2v_0^2\cos^2(\theta+\alpha)}x^2 + \tan(\theta+\alpha)\,x
\end{aligned}
$$

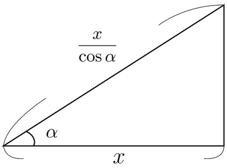
を得る．角度 θ で投げたときの到達点 P は，この放物線と直線 $y=(\tan\alpha)x$ との交点のうち原点 O でないほうである．

$$
\begin{aligned}
& (\tan\alpha)x = -\frac{g}{2v_0^2\cos^2(\theta+\alpha)}x^2 + \tan(\theta+\alpha)\,x \\
\Leftrightarrow\quad & x\left(\frac{g}{2v_0^2\cos^2(\theta+\alpha)}x + \tan\alpha - \tan(\theta+\alpha)\right) = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & x = 0 \quad \text{or} \quad x = \frac{2v_0^2\cos^2(\theta+\alpha)}{g}(\tan(\theta+\alpha) - \tan\alpha)
\end{aligned}
$$

よって点 P の x 座標は後者のほうである．

OP の長さ $|OP|$ は，下図にあるように，三角比の関係より

$$
\begin{aligned}
|OP| &= \frac{x}{\cos\alpha} = \frac{2v_0^2\cos^2(\theta+\alpha)}{g\cos\alpha}(\tan(\theta+\alpha)-\tan\alpha) \\
&= \frac{2v_0^2\cos^2(\theta+\alpha)}{g\cos\alpha}\left(\frac{\sin(\theta+\alpha)}{\cos(\theta+\alpha)}-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right) \\
&= \frac{2v_0^2\cos(\theta+\alpha)}{g\cos^2\alpha}\Big(\sin(\theta+\alpha)\cos\alpha-\cos(\theta+\alpha)\sin\alpha\Big) \\
&= \frac{2v_0^2\cos(\theta+\alpha)\sin\theta}{g\cos^2\alpha} \\
&= \frac{v_0^2(\sin(2\theta+\alpha)-\sin\alpha)}{g\cos^2\alpha}.
\end{aligned}
$$



そこで

$$f(\theta) = \frac{v_0^2(\sin(2\theta + \alpha) - \sin\alpha)}{g\cos^2\alpha}$$

とおき，f が最大となる θ を探す．これを微分すると

$$f'(\theta) = \frac{2v_0^2\cos(2\theta + \alpha)}{g\cos^2\alpha}$$

であるので，

$$f'(\theta) = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad 2\theta + \alpha = \frac{\pi}{2} \quad\Longleftrightarrow\quad \theta = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

増減表を書けば

x	0	$\cdots$	θ_*	$\cdots$	$\frac{\pi}{2} - \alpha$
f'		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$f(\theta_*)$	$\searrow$	0

ただし $\theta_* = \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} - \alpha)$.

よって $\theta = \theta_*$ のとき最大で，$2\theta_* + \alpha = \frac{\pi}{2}$ であることより

$$f(\theta_*) = \frac{v_0^2(\sin(2\theta_* + \alpha) - \sin\alpha)}{g\cos^2\alpha} = \frac{v_0^2(1 - \sin\alpha)}{g(1 - \sin^2\alpha)} = \frac{v_0^2}{g(1 + \sin\alpha)} \quad \square$$

ようするに，鉛直線と斜面とを二等分する角度で投げれば到達距離が最大となる，ということである．

§8 Taylor 級数展開

問題. 関数 $f(x)$ を以下で定める.

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1} \quad (x \neq 0)$$

(1) 関数 f が $x = 0$ でも連続になるように $f(0)$ の値を定めよ.
(2) 関数 f の $x = 0$ のまわりの Taylor 級数展開を第 5 次の項まで求めよ.

(1) は e^x の Taylor 級数展開を使うとすぐに分かる. (2) は導関数を計算して導出しようとすると大変な労力が必要となるが, e^x の Taylor 級数展開などを用いて工夫すると, ある程度までは計算できる.

(1) Taylor 展開より $e^x = 1 + x + o(x)$ なので

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{e^x - 1} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{1 + x + o(x) - 1} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{1 + o(1)} = 1.$$

よって $f(0) = 1$ と定めればよい． $\square$

(2) とりあえず微分を計算してみようとすると，

$$f'(x) = \frac{(1-x)e^x - 1}{(e^x - 1)^2},$$

$$f''(x) = \frac{((x-2)e^x + x + 2)e^x}{(e^x - 1)^3}$$

となって，なかなか大変そうである．そこで別の方法を考える．

$f(x)$ の逆数を考えてみると

$$\begin{aligned}\frac{1}{f(x)} &= \frac{e^x - 1}{x} \\ &= \frac{(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{720}x^6 + \cdots) - 1}{x} \\ &= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{24}x^3 + \frac{1}{120}x^4 + \frac{1}{720}x^5 + \cdots\end{aligned}$$

と展開できる．$f(x)$ はこれとの積を計算すれば 1 になるものであるので，

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + \cdots$$

と書けているとして，係数比較を考える．

$$\frac{1}{f(x)} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{24}x^3 + \frac{1}{120}x^4 + \frac{1}{720}x^5 + \cdots$$

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \cdots$$

これら 2 つの積を計算すれば，

$$\begin{aligned} 1 = \quad & 1 \cdot a_0 \\ & + (a_1 + \tfrac{1}{2}a_0)x \\ & + (a_2 + \tfrac{1}{2}a_1 + \tfrac{1}{6}a_0)x^2 \\ & + (a_3 + \tfrac{1}{2}a_2 + \tfrac{1}{6}a_1 + \tfrac{1}{24}a_0)x^3 \\ & + (a_4 + \tfrac{1}{2}a_3 + \tfrac{1}{6}a_2 + \tfrac{1}{24}a_1 + \tfrac{1}{120}a_0)x^4 \\ & + (a_5 + \tfrac{1}{2}a_4 + \tfrac{1}{6}a_3 + \tfrac{1}{24}a_2 + \tfrac{1}{120}a_1 + \tfrac{1}{720}a_5)x^5 + \cdots \end{aligned}$$

となる．これが x の値によらずに成立しているので，まず

$$a_0 = 1$$

でなければならないし，各 x^k $(k \geqq 1)$ の係数は 0 でなければならない．

$$
\begin{aligned}
1 = \quad & 1 \cdot a_0 \\
& + (a_1 + \tfrac{1}{2} a_0) x \\
& + (a_2 + \tfrac{1}{2} a_1 + \tfrac{1}{6} a_0) x^2 \\
& + (a_3 + \tfrac{1}{2} a_2 + \tfrac{1}{6} a_1 + \tfrac{1}{24} a_0) x^3 \\
& + (a_4 + \tfrac{1}{2} a_3 + \tfrac{1}{6} a_2 + \tfrac{1}{24} a_1 + \tfrac{1}{120} a_0) x^4 \\
& + (a_5 + \tfrac{1}{2} a_4 + \tfrac{1}{6} a_3 + \tfrac{1}{24} a_2 + \tfrac{1}{120} a_1 + \tfrac{1}{720} a_5) x^5 + \cdots
\end{aligned}
$$

次に

$$
0 = a_1 + \frac{1}{2} a_0 = a_1 + \frac{1}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad a_1 = -\frac{1}{2}.
$$

次に

$$
0 = a_2 + \frac{1}{2} a_1 + \frac{1}{6} a_0 = a_2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \quad \Longleftrightarrow \quad a_2 = \frac{1}{12}.
$$

次に

$$
0 = a_3 + \frac{1}{2} a_2 + \frac{1}{6} a_1 + \frac{1}{24} a_0 = a_3 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12} - \frac{1}{12} + \frac{1}{24} = a_3
$$

より

$$
a_3 = 0.
$$

$$a_0 = 1, \quad a_1 = -\frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{1}{12}, \quad a_3 = 0.$$

次に

$$\begin{aligned} 0 = \quad & a_4 + \frac{1}{2}a_3 + \frac{1}{6}a_2 + \frac{1}{24}a_1 + \frac{1}{120}a_0 \\ = \quad & a_4 + 0 + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{12} - \frac{1}{24} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{120} \\ = \quad & a_4 + \frac{1}{2 \cdot 12 \cdot 30} = \frac{1}{720} \end{aligned}$$

より

$$a_4 = -\frac{1}{720}.$$

$$a_0 = 1, \quad a_1 = -\frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{1}{12}, \quad a_3 = 0, \quad a_4 = -\frac{1}{720}.$$

最後に

$$\begin{aligned}
0 = \quad & a_5 + \frac{1}{2}a_4 + \frac{1}{6}a_3 + \frac{1}{24}a_2 + \frac{1}{120}a_1 + \frac{1}{720}a_5 \\
= \quad & a_5 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{720} + 0 + \frac{1}{24} \cdot \frac{1}{12} - \frac{1}{120} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{720} \\
= \quad & a_5 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5 \cdot 12^2} + \frac{1}{2 \cdot 12^2} - \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 12} \\
= \quad & a_5 + \frac{1}{2 \cdot 12^2}\left(\frac{1}{5} + 1\right) - \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 12} \\
= \quad & a_5 + \frac{1}{2 \cdot 12^2} \cdot \frac{6}{5} - \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 12} \\
= \quad & a_5
\end{aligned}$$

となるので，結局

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 + -\frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{720}x^4 + o(x^5). \quad \square$$

この関数に現れる係数はBernoulli（ベルヌーイ）数と関係しており，とても興味深い数である．例えば，正接関数 $y = \tan x$ の Taylor 展開は，この Bernoulli 数を用いて表現される．

この例題は Taylor 級数展開を求めるのに，必ずしも微分が必要であるわけではないことの例として挙げた．計算自体はやはり結構大変ではあったが，何を計算したかといえば簡単な方程式を解いて $a_0, a_1, a_2, \ldots$ を順に決定していっただけであり，微分よりも遥かに簡単な計算しか行っていないのである．

このような計算は形式的冪級数での計算として正当化できる．また，組み合わせの個数を調べるのにも利用できたりする．例えば正の数 N に対して

$$1 \cdot k_1 + 2 \cdot k_2 + \cdots + n \cdot k_n = N$$

を満たす非負整数の組 $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ の個数は

$$\begin{aligned}
&(1 + x + x^2 + \cdots + x^m + \cdots) \\
&\quad \times (1 + x^2 + x^4 + \cdots + (x^2)^m + \cdots) \\
&\qquad \times \cdots \times \cdots \\
&\qquad\quad \times (1 + x^n + x^{2n} + \cdots + (x^n)^m + \cdots)
\end{aligned}$$

を展開して，x^N の係数を見れば，それがちょうど求める個数になっている．$n = 3$, $N = 1, 2, \ldots, 6$ あたりまで計算してみれば，なぜこの方法で計算できるのかがわかる．

さらに

$$1 + x^n + x^{2n} + x^{3n} + \cdots + x^{nk} + \cdots = \frac{1}{1 - x^n}$$

となることを利用すれば，

$$\begin{aligned}
&(1 + x + x^2 + \cdots + x^m + \cdots) \\
&\quad \times (1 + x^2 + x^4 + \cdots + (x^2)^m + \cdots) \\
&\qquad \times \cdots \times \cdots \\
&\qquad\quad \times (1 + x^n + x^{2n} + \cdots + (x^n)^m + \cdots) \\
&= \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots(1-x^n)}
\end{aligned}$$

となって，x^N の係数は，この関数を N 回微分したものに $N!$ を掛けた数になる．

参考書：大島利雄著「個数を数える」（数学書房）

§ 双曲線関数

定義. 指数関数を用いて以下のように定義する.

$$\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x}.$$

これらは双曲線関数と呼ばれている．なお，この記号の h は双曲線 hyperbolic の頭文字から来ている．三角関数と似た性質を持つため，三角関数と同様の記号が用いられる.

演習問題 4. 次の問いに答えよ/次を示せ.

(1) $\cosh^2 x - \sinh^2 = 1$

(2) $\cosh x$ は偶関数，$\sinh x$ は奇関数

(3) $(\cosh x)' = \sinh x$, $(\sinh x)' = \cosh x$

(4) $\cosh x$, $\sinh x$ および $\tanh x$ のグラフを描け.

(5) $\sinh x$ の逆関数 $\sinh^{-1} x$ を求めよ.

(6) $(\sinh^{-1} x)'$ を計算せよ.

(7) $\cosh x$ の逆関数についてはどうか.

(8) $\tanh x$ の逆関数についてはどうか.

双曲線関数の逆関数を以下から選べ（NUCT の小テスト欄で解答する）.

$$(A)\ \log(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad (B)\ \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$(C)\ \log(x - \sqrt{x^2 - 1}) \quad (D)\ \frac{1}{2} \log \frac{1 + x}{1 - x}$$

演習問題

第 6 回分の演習問題

(1) 次の関数の極値を調べよ.

$$\text{(a)}\ (1+\cos x)\sin x \quad \text{(b)}\ \sqrt{4-9x^2} \quad \text{(c)}\ e^{-x^2}$$

$$\text{(d)}\ \frac{xe^x}{x-1} \quad \text{(e)}\ x^2\log x \quad \text{(f)}\ 3x^4+4x^3+1$$

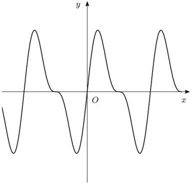
(2) スペースの関係で次ページへ

(3) 次の媒介変数表示を，陰関数表示に書き換えよ.

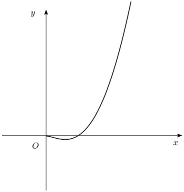
$$\text{(a)}\quad (\cos^3 t,\ \sin^3 t) \qquad \text{(b)}\quad \left(\frac{3t}{t^3+1}, \frac{3t^2}{t^3+1}\right)$$

第６回分の演習問題

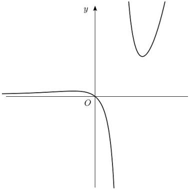
(2) (1) の関数について，グラフの概形を以下のものから選べ.



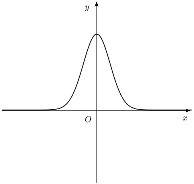
A



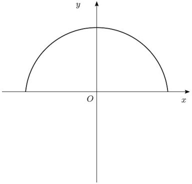
B



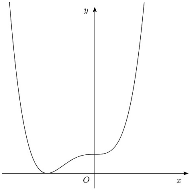
C



D



E



F

第 7 回分の演習問題

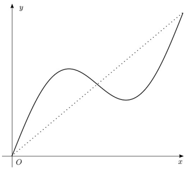
(1) 次の関数について，第 4 次導関数まで計算せよ．

$$\text{(a)}\ \ \tan x \qquad \text{(b)}\ \ \mathrm{Arcsin}\, x \qquad \text{(c)}\ \sqrt{1+x}$$

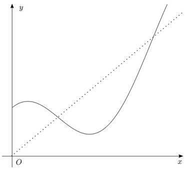
(2) 関数 $y = e^x \sin x$ について第 2 次導関数まで計算せよ．

(3) 次の関数について，与えられた区間における極値，凹凸および変曲点を調べよ．さらにそのグラフの概形を，以下の選択肢から選べ．

(a) $\quad y = x + 2\sin x \quad (0 \leqq x \leqq 2\pi)$ (b) $\quad y = x^2 e^{-x} \quad (x \geqq 0)$

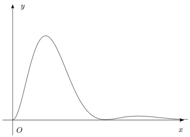


A



B

C



D

第 8 回分の演習問題

1. 次の等比数列からなる無限級数の収束・発散を調べ，収束する場合はその和を求めよ．

$$\text{(a)}\quad \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \qquad \text{(b)}\quad \left(-\frac{2}{3}\right)^{n} \qquad \text{(c)}\quad \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

2. 次の数列を第 n 項に持つ無限級数の収束・発散を調べ，収束する場合はその和を求めよ．

$$\text{(a)}\quad \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \qquad\qquad \text{(b)}\quad \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

3. $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ の $x=0$ の周りにおける Taylor 級数展開を第 4 次の項まで求めよ．

中間レポートの問題１

(1) 以下の関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を計算せよ．$f'(x)$ は連続関数か．

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

(2) $3\,\mathrm{Arctan}\,\frac{1}{4} + \mathrm{Arctan}\,\frac{5}{99}$ を逆三角関数を用いずに表せ．

(3) 3 次方程式 $x^3 + px + q = 0$ が，異なる 3 つの実数解を持つための p, q の条件を求めよ．

(4) $y = x^{1/x}$ の極値を求め，その結果を使って e^π と π^e のどちらが大きいかを判定せよ．

(5) Leibniz の公式を用いて，$f(x) = x^2 \sin x$ の第 n 次導関数を，以下の形で求めよ．

$$f^{(n)}(x) = A_n(x)\bigl(\sin x\bigr)^{(n)} + B_n(x)\bigl(\cos x\bigr)^{(n)}$$

(6) $f(x) = \tan x$ の $x = 0$ の周りにおける Taylor 級数展開を，第 5 次の項まで求めよ．

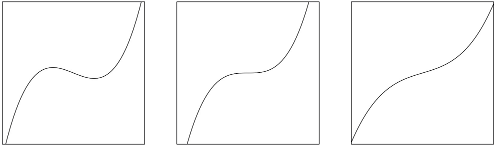
中間レポートの問題 2

次の設問では a, b, c および ε は学籍番号により定まる定数とする．すなわち，学籍番号の数字において，0 をすべて消して得られる数字の下三桁を abc とし，0 の個数が偶数個ならば $\varepsilon = 1$, 奇数個ならば $\varepsilon = -1$ とする．例えば 0420001234 なら，0 を消した数字は 421234 で，その下三桁は 234 なので，$a = 2$, $b = 3$, $c = 4$ となる．また，0 が 4 個であるので $\varepsilon = 1$ となる．

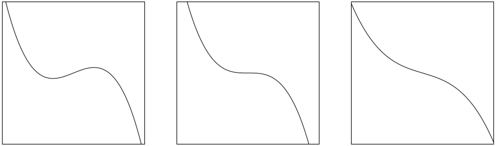
中間レポートの問題２

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n}$ を求めよ．

(2) 3 次関数 $y = \varepsilon x^3 + ax^2 + bx + c$ の極値を調べよ．さらに，そのグラフの概形を以下の図から選べ．



A　　B　　C



D　　E　　F

(3) 関数 $f(x) = \dfrac{\varepsilon x + b}{x^2 + a}$ の区間 $-c \leqq x \leqq c$ における最大値および最小値を求めよ．