線形代数学・同演習 A

4 月 26 日分　演習問題

1. 一般の線形写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ が与えられたとき，ある $m \times n$ 行列 A が存在して，$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ となることを示せ.
2. $D = \{(x, y)\,;\, 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$ を単位正方形，K を 4 点 $(0,0)$, $(1,2)$, $(0,4)$, $(-1,2)$ を頂点とする菱形とする．このとき，D を K に写すような平面の線形写像をすべて決定せよ.
3. 次の 2 次正方行列の固有値および固有ベクトルを求めよ.

$$(1)\ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (2)\ \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & -2 \end{pmatrix} \qquad (3)\ \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad (4)\ P(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

定義．直線 (もしくは平面) に関する**鏡映写像**とは，その直線 (平面) に関する折り返しを与える写像のこと．例えば，直線 $y = 0$ (つまり x 軸) に関する鏡映写像は，$(x, y) \mapsto (x, -y)$ である．

4. 次の直線に関する鏡映写像を行列を用いて表せ.

$$(1)\quad l_1\colon x + y = 8 \qquad (2)\quad l_2\colon ax - y = b \quad (a > 0)$$

5. 次の平面に関する鏡映写像を行列を用いて表せ.

$$(1)\ \pi_1\colon x + y + z = 8 \qquad (2)\ \pi_2\colon 2x - 4y + z = 5 \qquad (3)\ \pi_3\colon x + y + az = a \quad (a > 0)$$

6. 二つの空間ベクトル $\boldsymbol{a} = {}^t(a_1, a_2, a_3)$, $\boldsymbol{b} = {}^t(b_1, b_2, b_3)$ の外積 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ を考える．ただし，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ は平行ではなく，どちらも $\boldsymbol{0}$ ではないとする.

   (1) 原点 O を通り，方向 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を持つ平面は次に表わされることを示せ:

$$(a_2b_3 - a_3b_2)x + (a_3b_1 - a_1b_3)y + (a_1b_2 - a_2b_1)z = 0.$$

   (2) $(a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 = ||\,\boldsymbol{a}\,||^2||\,\boldsymbol{b}\,||^2 - (\boldsymbol{a}\,|\,\boldsymbol{b})^2$ を示せ.

   (3) $||\,\boldsymbol{a}\,||^2||\,\boldsymbol{b}\,||^2 - (\boldsymbol{a}\,|\,\boldsymbol{b})^2 = ||\,\boldsymbol{a}\,||^2||\,\boldsymbol{b}\,||^2 \sin^2\theta$ を示せ．この問題 (1)–(3) より，次を得る[*1]:

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}.$$

   この結果を用いると，(2) の等式は $||\,\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\,||^2 = ||\,\boldsymbol{a}\,||^2||\,\boldsymbol{b}\,||^2 - (\boldsymbol{a}\,|\,\boldsymbol{b})^2$ と書ける.

   (4) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ を示せ.

   (5) $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} + (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) \times \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = 0$ を示せ[*2] (Jacobi の恒等式).

[*1] 法線ベクトルは平面と垂直なベクトルであるが，この平面は 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ を含むので，これら 2 つのベクトルと垂直になっている．よって $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ はこの法線ベクトルのスカラー倍であるが，(2) よりそのスカラーは 1 で良いことが分かる．(実はまだ不十分で，符号を確認しないといけない．これには “行列式” の概念が必要なので，ここでは深入りしない．ここに簡単に書いておくと，外積 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ の方向は $\det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) > 0$ となるように取っている．)

[*2] 上の結果を用いて良い.