線形代数学・同演習 A

4 月 26 日分　演習問題

計算問題は解答のみ，証明問題は大雑把な道筋を説明するに留めています．

1. 講義中の 2×2 のときと同様．$\boldsymbol{e}_j$ を j 行目のみ 1 でそれ以外は 0 であるベクトルとすれば，$\boldsymbol{x} = {}^t(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ は
$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n$$
と書けることに注意．f の線形性より $f(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^n x_j f(\boldsymbol{e}_j)$ なので，$f(\boldsymbol{e}_j) = {}^t(a_{1j},\dots,a_{mj})$ とおけば $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ である．ただし，$A=(a_{ij})$．
2. 2 点 $(0,1)$ と $(0,1)$ が移動する点を考えればよい．この 2 点は原点の隣にあるので，移ることができる点は $(1,2)$ と $(-1,2)$．よって $f_1(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $f_2(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
3. (固有値，固有ベクトル) の順．
(1) $(1, \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right))$
(2) $(5, \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right))$, $(-3, \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -7 \end{smallmatrix}\right))$
(3) $(2+2\sqrt{3}i, \left(\begin{smallmatrix} \sqrt{3} \\ -2i \end{smallmatrix}\right))$, $(2-2\sqrt{3}i, \left(\begin{smallmatrix} \sqrt{3} \\ 2i \end{smallmatrix}\right))$
(4) $(\cos\theta + i\sin\theta, \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -i \end{smallmatrix}\right))$, $(\cos\theta - i\sin\theta, \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ i \end{smallmatrix}\right))$
4. 直線と平面の一般の点 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2$ との距離を d とすれば，この鏡映写像 f は $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} \pm 2d\cdot \frac{\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|}$ のように書ける (直線と点の位置に応じて符号を付ける)．
(1) $f_1(\boldsymbol{x}) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\boldsymbol{x} + \left(\begin{smallmatrix} 8 \\ 8 \end{smallmatrix}\right)$, (2) $f_2 = \frac{1}{a^2+1}\left(\begin{smallmatrix} 1-a^2 & 2a \\ 2a & a^2-1 \end{smallmatrix}\right)\boldsymbol{x} + \frac{2b}{a^2+1}\left(\begin{smallmatrix} a \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$. *1
5. 解法は 4 と同様．
(1) $f_1(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{3}\left(\begin{smallmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{smallmatrix}\right)\boldsymbol{x} + \frac{16}{3}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$
(2) $f_2(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{21}\left(\begin{smallmatrix} 13 & 16 & -4 \\ 16 & -11 & 8 \\ -4 & 8 & 19 \end{smallmatrix}\right)\boldsymbol{x} + \frac{10}{21}\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$
(3) $f_3(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{a^2+2}\left(\begin{smallmatrix} a^2 & -2 & -2a \\ -2 & a^2 & -2a \\ -2a & -2a & 2-a^2 \end{smallmatrix}\right)\boldsymbol{x} + \frac{2a}{a^2+2}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{smallmatrix}\right)$. *2
6. (1) 平面のパラメータ表示 $\boldsymbol{x} = s\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}$ $(s,t\in\mathbb{R})$ を標準型にもどせばよい．各成分ごとに見ると $x = a_1s + b_1t$, $y = x_2s + b_2t$, $z = a_3s + b_3t$ なので，x, y に関する式を解いて*3
$$s = \frac{b_2x - b_1y}{a_1b_2 - a_2b_1}, \quad t = \frac{-a_2x + a_1y}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$
これを z の式に代入して式を整理すれば，求める式を得る．
(2) 定義に従って計算するのみ．(3) $(\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}) = \|\boldsymbol{a}\|\cdot\|\boldsymbol{b}\|\cos\theta$ より．(4) (3) で求めた外積の表示より明らか．(5) 同じく (3) で求めた外積の表示を用いて地道に計算するだけ．

---

*1 このような写像 $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ をアファイン写像と呼ぶ．ちなみに，直線 $ax+by=c$ に関する鏡映写像 f は $f(\boldsymbol{x}) = (E_2 - \frac{2}{\|\boldsymbol{a}\|^2}\boldsymbol{a}\,{}^t\boldsymbol{a})\boldsymbol{x} + \frac{2c}{\|\boldsymbol{a}\|^2}\boldsymbol{a} = \frac{1}{a^2+b^2}\left(\begin{smallmatrix} b^2-a^2 & -2ab \\ -2ab & a^2-b^2 \end{smallmatrix}\right)\boldsymbol{x} + \frac{2c}{a^2+b^2}\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$ となる．

*2 平面 $ax+by+cz=d$ に関する鏡映は $f(\boldsymbol{x}) = (E_3 - \frac{2}{\|\boldsymbol{a}\|^2}\boldsymbol{a}\,{}^t\boldsymbol{a})\boldsymbol{x} + \frac{2d}{\|\boldsymbol{a}\|^2}\boldsymbol{a}$ とかける．

*3 講義初回に紹介した逆行列を用いる方法が簡単．もちろん掃き出し法でも計算できる．