線形代数学・同演習 B

1 月 10 日分　演習問題[*1]

数ベクトル $\mathbb{R}^n$ の内積は標準内積により与えられているとする．また，多項式空間の内積は，特に断らない限り $(\,p\,|\,q\,) = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,dx$ により与えられているとする．

1. 次の R^3 の 2 本のベクトルと直交するベクトルをそれぞれ一つずつ求めよ[*2]．

$$(1)\ \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2)\ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (3)\ \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2.† 次の $\mathbb{R}[x]_2$ の 2 本の多項式と直交する多項式を，それぞれ一つずつ求めよ．

$$\begin{array}{llll} (1) & p(x) = 4x^2+1, \quad q(x) = x^2 & (2) & p(x) = x-1, \quad q(x) = x \\ (3) & p(x) = 2x-1, \quad q(x) = x^2 & (4) & p(x) = 2x+3, \quad q(x) = x^2+x+1 \end{array}$$

3. $M(n,\mathbb{R})$ を n 次正方行列全体のなすベクトル空間とする．$A, B \in M(n,\mathbb{R})$ に対して $(\,A\,|\,B\,) := \mathrm{tr}({}^t\!AB)$ により定義するとき，$(\cdot|\cdot)$ は内積の性質を満たすことを確認せよ．

4. $V = \mathbb{R}[x]_2$ とし，内積の定義において積分範囲を $[0,1]$ に変更したものを考える：

$$(\,p\,|\,q\,)_0 := \int_0^1 p(x)q(x)\,dx \quad (p, q \in V).$$

このとき，$(\cdot|\cdot)_0$ も内積の性質を満たすことを確認せよ．また多項式 p, q に対して，通常の内積での値 $(\,p\,|\,q\,)$ と，この内積での値 $(\,p\,|\,q\,)_0$ が異なることを確認せよ．

5.† 区間 $[-1,1]$ 上の (連続とは限らない) 実数値関数全体のなす空間 V はベクトル空間となる．このとき，次で定義される $(\cdot|\cdot)$ は V の内積となるか：

$$(\,f\,|\,g\,) := \int_{-1}^1 f(x)g(x)\,dx \quad (f, g \in V).$$

6.† 内積空間 V の部分空間 W に対して，V の部分集合 $W^\perp$ を次のように定義する：

$$W^\perp := \{\boldsymbol{v} \in V\,;\ \text{すべての}\ \boldsymbol{w} \in W\ \text{に対して}\ (\,\boldsymbol{v}\,|\,\boldsymbol{w}\,) = 0\}.$$

(1) $W^\perp$ は V の部分空間となることを示せ[*3]．　(2) $W \cap W^\perp = \{\mathbf{0}_V\}$ を示せ．

7.† 区間 $[-\pi,\pi]$ 上の滑らかな関数全体のなす集合を V とすると，これはベクトル空間となる．さて，V の内積を $(\,f\,|\,g\,) := \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx$ により定める．また，整数 $n, m \geq 1$ に対して，$s_n(x) := \sin nx$, $c_m(x) := \cos mx$ とおく．このとき，次の内積を計算せよ[*4]．

$$(1)\ (\,s_n\,|\,c_m\,) \qquad (2)\ (\,s_n\,|\,s_m\,) \qquad (3)\ (\,c_n\,|\,c_m\,)$$

8.* $V = \mathbb{R}^2$ とし，2 次正方行列 A に対して $(\,\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{y}\,)_A := {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{y}$ とおく．このとき，$(\cdot|\cdot)_A$ が内積となるための A の条件を求めよ．

[*1] 凡例：無印は基本問題，† は特に解いてほしい問題，$*$ は応用問題．

[*2] 数ベクトルの場合は外積 (クロス積) で求めることができる．

[*3] この $W^\perp$ を，W の V における直交補空間という．

[*4] (2),(3) は $n = m$ かどうかで場合分けが必要．