線形代数学・同演習 B

演習問題 12

1. 2 次の回転行列 $P(\theta) = \left(\begin{smallmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{smallmatrix}\right)$ が，任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ に対して $\| P(\theta)\boldsymbol{x} \| = \| \boldsymbol{x} \|$ を満たすことを直接確かめよ．

2.† 次の 3 次実対称行列は正定値かどうか調べよ．

$$(1)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2)\ \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad (3)\ \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -4 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

3. X を n 次の実交代行列，すなわち ${}^tX = -X$ を満たす n 次正方行列とする．
   (1) X の固有値は常に純虚数もしくは 0 になることを示せ．
   (2) λi が X の固有値とすると，その複素共役 $-\lambda i$ も X の固有値となることを示せ．
   (3) n が奇数のとき，$\det X = 0$ となることを示せ．

4.† 2 次対称行列 $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & c \end{smallmatrix}\right)$ に対して，(1) A が正定値であることと，(2) $a > 0$ かつ $ac - b^2 > 0$ を満たすことが同値であることを示せ．

5.† 任意の 2 次正定値対称行列 A は，適当な下三角行列 L を用いて $A = L\,{}^tL$ とかけることを示せ．対角成分を正に取ることにすれば，この下三角行列 L は一意に定まる[*1]．

6. A を n 次対称行列とし，X を n 次交代行列とする．このとき，常に $\mathrm{tr}(AX) = 0$ となることを示せ[*2]．

7.* $\lambda, \mu > 0$ とし，$\mathbb{R}^2$ において $\langle \boldsymbol{x} | \boldsymbol{y} \rangle_0 := \lambda x_1 y_1 + \mu x_2 y_2$ により $\langle \cdot | \cdot \rangle_0$ を定義する．
   (1) $\langle \cdot | \cdot \rangle_0$ は $\mathbb{R}^2$ の内積を定めることを示せ．
   (2) この内積に関する転置行列 $\widetilde{X}$ を[*3]，通常の転置行列を用いて表せ．
   (3) この内積に関する直交行列 (以下を満たす行列 P) はどのような条件を満たすか．

$$\text{任意の } \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \text{ に対して} \quad \langle P\boldsymbol{x} | P\boldsymbol{y} \rangle_0 = \langle \boldsymbol{x} | \boldsymbol{y} \rangle_0 .$$

8.* 2 次正則行列 A に対して $\mathbb{R}^2$ の有界な領域における変数変換 $\boldsymbol{u} \mapsto \boldsymbol{x} = A\boldsymbol{u}$ を考える．この変換の Jacobian を求めよ．また，A が直交行列ならば Jacobian は常に 1 となることを確認せよ．

---

1 月 24 日分 (凡例：無印は基本問題，† は特に解いてほしい問題，∗ は応用問題)
講義用 HP: http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~h-nakashima/lecture/2017LA.html

[*1] このような分解を Gauss 分解もしくは Cholesky 分解という (分野によって呼び方が異なる)．なお，この分解は任意の次数の正定値な実対称行列に対して成立する．

[*2] 任意の行列 M に対して $\mathrm{tr}(M) = \mathrm{tr}({}^tM)$ が成り立つことを用いる．

[*3] 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^2$ に対して $\langle X\boldsymbol{x} | \boldsymbol{y} \rangle_0 = (\boldsymbol{x} | \widetilde{X}\boldsymbol{y})_0$ を満たす 2 次正方行列 $\widetilde{X}$ のこと．