線形代数学・同演習 B

演習問題 5

1.[†] (1) 各 j に対して，$\boldsymbol{v}_j \in \operatorname{Im} T$ であるので，その定義より U のある要素 $\boldsymbol{u}_{r+j}$ で $T(\boldsymbol{u}_{r+j}) = \boldsymbol{v}_j$ となるものが存在する．ここで，$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_s$ は基底であるので，どれも $\mathbf{0}_V$ にはならない．つまり，$T(\boldsymbol{u}_{r+j}) \neq \mathbf{0}_V$ であるので，$\boldsymbol{u}_{r+j} \notin \operatorname{Ker} T$ である．(2) $\boldsymbol{u}$ を U の任意の要素とする．まず，$T(\boldsymbol{u})$ を考えると，これは $\operatorname{Im} T$ に属しているので，$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_s$ の線形結合で表すことができる．つまり $\boldsymbol{u} = b_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + b_s\boldsymbol{v}_s$ と表すことができる．さて，ここで $\widetilde{\boldsymbol{u}} := \boldsymbol{u} - b_1\boldsymbol{u}_{r+1} - \cdots - b_s\boldsymbol{u}_{r+s}$ という U の要素を考える．これを T でうつすと，

$$T(\widetilde{\boldsymbol{u}}) = T(\boldsymbol{u}) - (b_1 T(\boldsymbol{u}_{r+1}) + \cdots + b_s T(\boldsymbol{u}_{r+s})) = \mathbf{0}_V$$

であるので，$\widetilde{\boldsymbol{u}} \in \operatorname{Ker} T$ となる．つまり，$\widetilde{\boldsymbol{u}} = a_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + a_r\boldsymbol{u}_r$ と書くことができる．以上より，

$$\boldsymbol{u} = a_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + a_r\boldsymbol{u}_r + b_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + b_s\boldsymbol{v}_s$$

となるので，U の任意の要素はこれらの線形結合で書ける．(3) $\boldsymbol{u}' = a_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + a_r\boldsymbol{u}_r + b_1\boldsymbol{u}_{r+1} + \cdots + b_s\boldsymbol{u}_{r+s}$ とし，方程式 $\boldsymbol{u}' = \mathbf{0}_U$ を考える．$\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_r$ は $\operatorname{Ker} T$ の基底であること，および線形写像は零元を零元にうつすことより，

$$\mathbf{0}_V = T(\boldsymbol{u}') = b_1 T(\boldsymbol{u}_{r+1}) + \cdots + b_s T(\boldsymbol{u}_{r+s}) = b_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + b_s\boldsymbol{v}_s$$

であるが，$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_s$ は $\operatorname{Im} T$ の基底なので，これを満たす $(b_1, \ldots, b_s)$ は $(0, \ldots, 0)$ しかありえない．よって $\boldsymbol{u}' = a_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + a_r\boldsymbol{u}_r$ であり特に $\boldsymbol{u}' \in \operatorname{Ker} T$ であるが，今度は $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_r$ が $\operatorname{Ker} T$ の基底であるため，$a_1 = \cdots = a_r = 0$ を得る．よって，$\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_{r+s}$ は線形独立となる．

2.[†] いずれの場合も $T(\mathbf{0}_U) = \mathbf{0}_V$ より，零元を持つことが分かる．また，$\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ としておく．(1) $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2} \in \operatorname{Im} T$ とする．このとき，U のある要素 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ を用いて $\boldsymbol{v}_1 = T(\boldsymbol{u}_1), \boldsymbol{v}_2 = T(\boldsymbol{u}_2)$ とかけるが，$T(\lambda\boldsymbol{u}_1 + \mu\boldsymbol{u}_2) = \lambda\boldsymbol{v}_1 + \mu\boldsymbol{v}_2$ であるので，$\lambda\boldsymbol{v}_1 + \mu\boldsymbol{v}_2 \in \operatorname{Im} T$ となる．よって部分空間となる．(2) $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}' \in \operatorname{Ker} T$ とすると，$T(\lambda\boldsymbol{u} + \mu\boldsymbol{u}') = \lambda T(\boldsymbol{u}) + \mu T(\boldsymbol{u}') = \mathbf{0}_V$ であるので，$\lambda\boldsymbol{u} + \mu\boldsymbol{u}' \in \operatorname{Ker} T$，つまり部分空間となる．

---

11 月 7 日分 (凡例：無印は基本問題，† は特に解いてほしい問題，∗ は応用問題)
講義用 HP: http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~h-nakashima/lecture/2017LA.html

3. 与えられた行列を簡約化すればよい．それぞれを簡約化したもの，T_A の退化次元と $\mathrm{Ker}(T_A)$ の基底および T_A の階数と $\mathrm{Im}(T_A)$ の基底は下記の表のようになる．

$$(1)\quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (2)\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (3)\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

	(a)		(b)	
(1)	1	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	2	$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$
(2)	1	$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	3	$\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$
(3)	2	$\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	2	$\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

4. (1) × (2) ○ (3) ○ (4) ○
(考え方) 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して $T_k(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})$ と $T_k(\boldsymbol{x})+T_k(\boldsymbol{y})$ を考え，この 2 つが一致するかどうかを確認する．同様のことを $T_k(\lambda\boldsymbol{x})$ と $\lambda T_k(\boldsymbol{x})$ についても確認する．

5. (1) $h(x) = \lambda p(x) + \mu q(x)$ (p, q は多項式) とおいて，$T(h(x)) = \lambda T(p(x)) + \mu T(q(x))$ を満たすことを確認すればよい．(2) 退化次元は 1，階数は 3 (3) $x^2, x, 1$ (または $-3, -2x+3, -x^2+6x-3$ でもよい)
(考え方) (1) は全問と同様．(2)，(3) は基底を一つ決め，その基底に関する数ベクトル表示に対して問題 3 と同様に考える．

6.† (i) 和に関しては問題は生じていない．実際，$X, Y \in M(2, \mathbb{C})$ とすれば，複素共役および転置の性質より

$$\sigma(X+Y) = {}^t\overline{(X+Y)} = {}^t(\overline{X}+\overline{Y}) = {}^t(\overline{X}) + {}^t(\overline{Y}) = \sigma(X) + \sigma(Y).$$

一方，複素数 λ に対して，スカラー倍を考えると

$$\sigma(\lambda X) = {}^t\overline{(\lambda X)} = {}^t(\overline{\lambda}\,\overline{X}) = \overline{\lambda}\,{}^t(\overline{X}) = \overline{\lambda}\sigma(X).$$

よって $\lambda \in \mathbb{R}$ ならば $\sigma(\lambda X) = \lambda\sigma(X)$ を満たすので $\mathbb{R}$ 上線形になるが，複素数のときは $\sigma(\lambda X) \neq \lambda\sigma(X)$ であるので $\mathbb{C}$ 上では線形にならない．
(ii) $X, Y \in W$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ のとき $\lambda X + \mu Y \in W$ を示せばよい (零行列を含むことは明らか)．(i) で計算したように $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ より

$$\sigma(\lambda X + \mu Y) = \sigma(\lambda X) + \sigma(\mu Y) = \lambda\sigma(X) + \mu\sigma(Y) = \lambda X + \mu Y$$

となるので，$\lambda X + \mu Y \in W$ である．

(iii) $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in W$ とする．$x, y, z, w \in \mathbb{C}$ である．$\sigma(X) = {}^t\overline{X} = \begin{pmatrix} \overline{x} & \overline{z} \\ \overline{y} & \overline{w} \end{pmatrix}$ なので，$\sigma(X) = X$ とすれば

$$x = \overline{x}, \quad y = \overline{z}, \quad z = \overline{y}, \quad w = \overline{w}$$

を満たさなければならない．よって $x, w \in \mathbb{R}$ および $z = \overline{y}$ なので，$y = a + bi$ とすれば $X \in W$ は

$$X = \begin{pmatrix} x & a+b \\ a-bi & w \end{pmatrix} \quad (a, b, x, w \in \mathbb{R})$$

とかける．よって次元 (=パラメータの数) は 4 で，基底として

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

がとれる．