線形代数学・同演習 A

演習問題 3

1. 次の連立一次方程式を解け.

(1) $\begin{cases} 3x \quad\quad\;\; - z = \;\;\,1 \\ -2x + 2y \quad\;\; = \;\;\,3 \\ -5x + \;\; y + z = -2 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x + 2y \quad\;\; = \;\;\,3 \\ 2x + 2y + z = -2 \\ x + \;\; y + z = \;\;\,1 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x + 2y + 3z = -1 \\ 4x + 5y + 8z = \;\;\,5 \\ -4x + 8y + 9z = \;\;\,0 \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x - 4y + z = -6 \\ 5x + \;\; y + z = \;\;\,0 \\ 2x + 2y + z = \;\;\,5 \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x - \;\; y - 4z = -17 \\ 3x + \;\; y - \;\; z = \;\;\;\;0 \\ \quad\;\; 2y + \;\; z = \;\;\;\;3 \end{cases}$

(6) $\begin{cases} 2x - 3y + 4z = \;\;\,3 \\ x - 2y + 3z = \;\;\,2 \\ x - 2y - 4z = -5 \end{cases}$

(7)† $\begin{cases} x \quad\quad\quad\;\; + \;\; w = -1 \\ x + y + z \quad\quad\; = -2 \\ 2x \quad\quad\quad\; + 4w = \;\;\,0 \\ \quad\; y \quad\quad\; + \;\; w = \;\;\,3 \end{cases}$

(8)† $\begin{cases} x + 2y + 3z + 4w = \;\;\,1 \\ 5x + 5y + 6z + 7w = -1 \\ 8x + 5y + 6z + 5w = \;\;\,0 \\ 4x + 3y + 2z + 2w = \;\;\,5 \end{cases}$

(9)* $\begin{cases} x + 2y \quad\;\; - 4w + 7u = -1 \\ 3x - 2y + z - 2w + 4u = \;\;\,2 \\ 2x - 2y + z \quad\quad\;\; + 4u = -4 \\ 2x - 6y + z + 5w + 7u = -2 \\ x + \;\; y \quad\;\; - 3w + 3u = \;\;\,0 \end{cases}$

(10)* $\begin{cases} x + 2y - 2z - 2w \quad\quad\; = \;\;\,3 \\ 3x + \;\; y + \;\; z + 4w + 2u = \;\;\,4 \\ \quad\;\; y + \;\; z + 3w + 5u = \;\;\,4 \\ 5x \quad\quad\; + 5z - \;\; w - 2u = -2 \\ x - \;\; y + \;\; z + \;\; w - \;\; u = -1 \end{cases}$

2. 基本変形を与える 3 次行列 $Q_3(i;\lambda)$, $P_3(i,j)$, $R_3(i,j;\lambda)$ の逆行列を求めよ.

3. 次の行列は逆行列を持つか. 持てばそれを求めよ. *1

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} -1 & -5 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

4.* 次の連立一次方程式はいつ唯一の解を持つか. またそのときの解を求めよ. *2

$$\begin{cases} x + \;\; y + \;\; z = 1 \\ ax + \;\; by + \;\; cz = d \\ a^2x + b^2y + c^2z = d^2 \end{cases}$$

---

4 月 25 日分 (凡例：無印は基本問題, † は特に解いてほしい問題, $*$ は応用問題)

講義用 HP: http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~h-nakashima/lecture/2017LA.html

*1 拡大行列 $(A|E_3)$ に基本変形を施す. もし $(E_3|B)$ の形になれば A は逆行列 $A^{-1} = B$ を持つが, その形にならなければ逆行列を持たない.

*2 この連立一次方程式の係数行列は, Vandermonde(ヴァンデルモンド) 行列という名前がついている.