微分積分学・同演習 A

演習問題 6

1. 次の関数の極値を求めよ.

$$(1)\ x^3-x+1 \quad (2)\ (x-1)^2(x-2)^2 \quad (3)\ \frac{x+1}{x^2+1} \quad (4)\ \frac{x^2-x+2}{x^2+x+2}$$

2.† 次の関数の極値を求めよ.

$$(1)\ x-2\sin x \quad (2)\ 3\sin x+\sin 3x \quad (3)\ xe^{-x} \quad (4)\ \cosh x+\cos x$$

3.† $y=x^{1/x}$ の極値を求め，その結果を使って，e^π と π^e のどちらが大きいかを判定せよ.

4. 関数 $y=x+a+\frac{b}{x}$ の極大値が 0 になるための条件を求め，そのときのグラフを描け.

5. 2つの関数 $f(x),g(x)$ が，ある区間において $f'(x)g(x)=f(x)g'(x)$ を満たすならば，$f(x)=cg(x)$ (c は定数) となることを示せ．ただし，f,g の少なくとも一方は零関数でないとする.

6.† Cauchy の平均値の定理を証明せよ．すなわち，閉区間 $I=[a,b]$ で連続で，開区間 $I^\circ=(a,b)$ で微分可能な関数 $f(x),g(x)$ で，$g'(x)\neq 0$ ならば,

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

となる $c\in I^\circ$ が存在することを示せ[*1].

7.† 双曲線関数に関する次の等式を示せ[*2].

(1) $\cosh(x+y)=\cosh x\cosh y+\sinh x\sinh y$,

(2) $\sinh(x+y)=\sinh x\cosh y+\cosh x\sinh y$,

(3) $\sinh^{-1}x=\log(x+\sqrt{x^2+1}),\quad \cosh^{-1}x=\log(x+\sqrt{x^2-1})$,

(4) $\tanh^{-1}x=\dfrac{1}{2}\log\dfrac{1+x}{1-x}$,

(5) $(\sinh x)'=\cosh x,\quad (\cosh x)'=\sinh x,\quad (\tanh x)'=(\cosh x)^{-2}$.

8. 教科書の問題 4.28 を解け.

9. 教科書の問題 4.29 を解け.

10.* $f(x)=x^3$ とするとき，$f(a+h)=f(a)+hf'(a+\theta h)$ なる等式中の $\theta\in(0,1)$ は $a+h/3=2a\theta+\theta^2h$ を満足することを示し，それにより $\lim_{h\to 0}\theta$ を求めよ[*3].

---

5 月 23 日分 (凡例：無印は基本問題，$\dagger$ は特に解いてほしい問題，$*$ は応用問題)

講義用 HP: http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~h-nakashima/lecture/2017C.html

[*1] ヒント:$F(x):=\lambda f(x)+\mu g(x)$ とおいて $F(a)=F(b)$ となる λ, μ を見つけ，Rolle の定理を適用する.

[*2] $\sinh^{-1}x$ は $\sinh x$ の逆関数．他も同様．一方で $(\cosh x)^{-2}$ は $\frac{1}{\cosh^2 x}$ のこと.

[*3] $a=0$ かどうかで場合分けが必要.