線形代数学・同演習 A

演習問題 6

1. 平面 $P: ax+by+cz=d$ の法線ベクトルを $\boldsymbol{a}$ とし，平面 P 上の 1 点 $\boldsymbol{x}_0$ をとる．このとき，平面 P 上の任意の点 $\boldsymbol{x}$ に対して，$\langle \boldsymbol{a} | \boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0 \rangle = 0$ が成り立つことを示せ．[*1]
2. 次の 2 本のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ のなす角度 θ を求めよ ($\cos\theta$ を計算するだけでよい).

   (1) $\boldsymbol{x}=(1,2),\ \boldsymbol{y}=(2,1)$　(2) $\boldsymbol{x}=(1,-2,3),\ \boldsymbol{y}=(2,-3,1)$
   (3) $\boldsymbol{x}=(1,1,1),\ \boldsymbol{y}=(-1,-2,1)$　(4) $\boldsymbol{x}=(1,-1,1),\ \boldsymbol{y}=(-1,2,3)$

3. 空間の点 $(1,2,3)$ を通り，方向 $(0,2,1)$ を持つ直線の方程式を求めよ．
4. 空間の点 $(1,0,3)$ を通り，法線ベクトル $(0,2,1)$ を持つ平面の方程式を求めよ．
5. 次の空間の三点を通る平面の方程式を求めよ．

   (1)　$(1,1,1),\ (1,2,3),\ (3,2,1)$　(2)　$(1,1,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)$
   (3)　$(2,-1,3),\ (-1,2,1),\ (3,1,-1)$　(4)　$(a,0,0),\ (0,b,0),\ (0,0,c)$

6. l_1, l_2 を以下で与えられるような直線とするとき，次の平面の方程式を求めよ．

$$l_1\colon \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad l_2\colon \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

   (a) 点 $(1,-5,4)$ を通り，直線 l_1, l_2 に平行な平面[*2],
   (b) 直線 l_1 を含み，直線 l_2 に平行な平面.

7. 原点と平面 $2x+y-2z=1$ との距離を求めよ．[*3]
8. 3 次元空間において，原点 O と直線 $l\colon \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ との距離を求めよ．[*4]
9. 次の空間内の 2 本のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対して，その外積 $\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}$ を求めよ．[*5]

   (1) $\boldsymbol{x} = {}^t(2,0,0),\ \boldsymbol{y} = {}^t(0,0,4)$.　(2) $\boldsymbol{x} = {}^t(1,1,1),\ \boldsymbol{y} = {}^t(1,-1,0)$.

10. (1) 交代行列 X, Y に対して $[X,Y] := XY - YX$ とするとき，$[X,Y]$ もまた交代行列となることを示せ.

    (2)* 3 次元空間の外積と 3 次交代行列との関係について考察せよ.

---

5 月 23 日分 (凡例：無印は基本問題，† は特に解いてほしい問題，$*$ は応用問題)
講義用 HP: http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~h-nakashima/lecture/2017LA.html

[*1] $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0$ は平面 P に沿ったベクトルなので，これより平面 P の法線ベクトルとは “平面 P と直交しているベクトル” であることが分かる．$\mathbb{R}^2$ における直線の法線ベクトルも同様である．

[*2] 直線がある平面の法線ベクトルと直交する方向を持つとき，その平面と平行であるという．

[*3] 原点と平面上の点との距離の最小値を求めよ，という問題．実は，法線ベクトル $\boldsymbol{a}$ が関わってくる．

[*4] 問題 8 と同様，原点と直線上の点との距離の最小値を求めよ，という問題.

[*5] 外積は行列式を用いて分かりやすく計算できることを後ほど紹介する．