線形代数学・同演習 B

演習問題 5

1.† $T\colon U \to V$ をベクトル空間 U, V 間の線形写像とするとき，$\mathrm{rank}(T) + \mathrm{null}(T) = \dim(U)$ が成り立つことを次の方針に従って示せ．ここで $r = \mathrm{rank}(T)$, $s = \mathrm{null}(T)$ とおき，$\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_r$ を $\mathrm{Ker}(T)$ の基底，$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_s$ を $\mathrm{Im}(T)$ の基底とする．

(1) U の要素 $\boldsymbol{u}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{u}_{r+s}$ で，$T(\boldsymbol{u}_{r+j}) = \boldsymbol{v}_j$ かつ $\boldsymbol{u}_{r+j} \notin \mathrm{Ker}(T)$ $(j = 1, \ldots, s)$ をみたすものが存在することを示せ．

(2) U の任意の元 $\boldsymbol{u}$ は, $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_r, \boldsymbol{u}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{u}_{r+s}$ の線形結合で書けることを示せ[*1]．

(3) $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_{r+s}$ は線形独立であることを示せ．

2.† U, V を一般のベクトル空間とし, $T\colon U \to V$ はその間の線形写像とするとき, $\mathrm{Im}(T)$ は V の部分空間，$\mathrm{Ker}(T)$ は U の部分空間となることを示せ．

3. 次の行列 A に対して, (a) T_A の退化次元と $\mathrm{Ker}(T_A)$ の基底, (b) T_A の階数と $\mathrm{Im}(T_A)$ の基底，をそれぞれ求めよ．

$$(1)\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ -5 & 5 & -5 \end{pmatrix} \quad (2)\ \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & -4 \\ 5 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & -4 & -4 & -1 \end{pmatrix} \quad (3)\ \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 & -6 \\ -5 & 1 & -3 & 2 \\ -2 & -1 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

4. 次の写像は線形となるか調べよ．

(1) $T_2\colon \mathbb{R}^2 \ni \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) \mapsto x_1 x_2 \in \mathbb{R}$　(2) $T_3\colon \mathbb{R}^2 \ni \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) \mapsto \left(\begin{smallmatrix} x_1+x_2 \\ x_2 \\ x_1-x_2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3$

(3) $T_4\colon \mathbb{R}[x]_3 \ni p \mapsto \int_{-1}^{1} p(t)\,dt \in \mathbb{R}$　(4) $T_5\colon \mathbb{R}[x]_3 \ni p \mapsto p(0) \in \mathbb{R}$

5. $V = \mathbb{R}[x]_3$ とし，写像 $T\colon V \to V$ を $T\colon p(x) \longmapsto xp'(x) - 3p(x-1)$ により定義する．このとき，(i) T は線形写像となることを示せ．(ii) T の退化次元と階数をそれぞれ求めよ．(iii) $\mathrm{Im}(T)$ の基底を一組求めよ．

6.† $V = M(2, \mathbb{C})$ を複素数を成分に持つ 2 次正方行列全体の空間とし，V 上の写像 σ を

$$\sigma(X) := {}^t\overline{X} \quad \text{(各成分の複素共役をとって行列として転置)}$$

により定義する．さらに $W := \{X \in V;\ \sigma(X) = X\}$ とおく．

(i) σ は $\mathbb{R}$ 上では線形写像になるが， $\mathbb{C}$ 上では線形写像にならないことを示せ．

(ii) W は V の ($\mathbb{R}$ 上のベクトル空間としての) 部分空間になることを示せ．

(iii) W の次元と基底を求めよ．

---

11 月 7 日分 (凡例：無印は基本問題，† は特に解いてほしい問題，$*$ は応用問題)

講義用 HP: http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~h-nakashima/lecture/2017LA.html

[*1] まず $T(\boldsymbol{u})$ を考える．