線形代数学・同演習 B

1 月 31 日分　小テスト

学籍番号：　　　　　　　　　　　　　　氏名：

実対称行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ を直交行列により対角化せよ．ただし，A の固有値が 4，1 (重複度 2) であることは既知としてよい．また，裏面を使用してもよい．

解) 講義中に説明した手順に従って計算していく．

① 固有多項式を計算し，固有値を求める．今の場合は固有値は 4，1 (重複度 2)．求め方は 1 月 24 日分の小テストの解答を参照ください．

② 固有ベクトルを求める．

$\lambda = 1$ のとき．

$$1 \cdot E_3 - A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

方程式に戻せば $x + y = z = 0$．パラメータの数は $3 - 1 = 2$ 個．それを s, t とし，$y = s$，$z = t$ とすれば

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s - t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

よって $\lambda = 1$ に対応する固有ベクトルは $\boldsymbol{v}_1 = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$，$\boldsymbol{v}_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.

$\lambda = 4$ のとき．

$$4 \cdot E_3 - A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

方程式に戻せば $\begin{cases} x - z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$ であり，パラメータの数は $3 - 2 = 1$ 個．それを u とし，$z = u$ とすれば

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ u \\ u \end{pmatrix} = u \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

よって固有値 $\lambda = 4$ に対応する固有ベクトルは $\boldsymbol{v}_3 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.

※講義や講義内容に関して，意見・感想・質問等を自由に記述してください．

③ $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ を直交化する．(異なる固有空間に入っているベクトルは必ず直交しているので，実質的には $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ を正規直交化すればよい．)

(i) $\boldsymbol{u}_1 = \dfrac{1}{\|\,\boldsymbol{v}_1\,\|}\boldsymbol{v}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix}-1\\0\\1\end{smallmatrix}\right)$.

(ii) まず $\boldsymbol{v}_2' = \boldsymbol{v}_2 - (\,\boldsymbol{v}_2\,|\,\boldsymbol{u}_1\,)\,\boldsymbol{u}_1$ を計算する．

$$\boldsymbol{v}_2' = \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{2}(0\cdot(-1) - 1\cdot 0 + 1\cdot 1)\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$$

なので，$\boldsymbol{u}_2 = \dfrac{1}{\|\,\boldsymbol{v}_2'\,\|}\boldsymbol{v}_2' = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\left(\begin{smallmatrix}1\\-2\\1\end{smallmatrix}\right)$.

(iii) $\boldsymbol{v}_3' = \boldsymbol{v}_3 - (\,\boldsymbol{v}_3\,|\,\boldsymbol{u}_1\,)\,\boldsymbol{u}_1 - (\,\boldsymbol{v}_3\,|\,\boldsymbol{u}_2\,)\,\boldsymbol{u}_2$ であるが，今 $\boldsymbol{v}_3$ と $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ は異なる固有空間に属するベクトルであるので，直交している．よって $\boldsymbol{v}_3' = \boldsymbol{v}_3$ である．これより

$$\boldsymbol{u}_3 = \frac{1}{\|\,\boldsymbol{v}_3'\,\|}\boldsymbol{v}_3' = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

以上より次の $\boldsymbol{u}frm[o]--, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ が正規直交基底となることが分かる．

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}.$$

したがって，対称行列 A は直交行列

$$P = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3) = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}\sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1\\ \sqrt{2} & 0 & -2\\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1\end{pmatrix}$$

により

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

と対角化できる．