10　重積分の計算

前回は縦線 (横線) 領域においては重積分は累次積分により計算できることを見た．今回は，1 変数関数における置換積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a'}^{b'} f(g(u))\,g'(u)du$ を一般化する．ただし，$a = g(a')$, $b = g(b')$ である．ここで $D = [a, b]$, $D' = [a', b']$ とすれば $g\colon D' \to D$ であり，

$$\int_D f(x)\,dx = \int_{D'} f(g(u))\,g'(u)\,du$$

のように書くことができる．

10.1　変数変換の理論

D 上の重積分 $\displaystyle\int_D f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}$ を D' 上の重積分に変換することを考える．なめらかな写像

$$\begin{array}{ccc} \Phi : D' & \longrightarrow & D \\ \cup & & \cup \\ \boldsymbol{u} & \longmapsto & \boldsymbol{x} = \Phi(\boldsymbol{u}) \end{array}$$

を考える．ただし，Φ は 1 対 1 とする．このとき，Φ の Jacobi 行列を $J_\Phi(\boldsymbol{u})$ とすれば，十分小さい $\boldsymbol{h}$ に対して

$$\Phi(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{h}) = \Phi(\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{h}\,{}^t J_\Phi(\boldsymbol{u}) + o(\|\,\boldsymbol{h}\,\|)$$

と，Φ は各点の十分近くでは線形写像[*1]で近似できる．このように，Jacobi 行列 J_Φ は写像 Φ の微分と思える．

定義 10.1. なめらかな 1 対 1 の写像 Φ に対して，次の行列式を Φ の **Jacobian** という．

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \det\begin{pmatrix} \varphi_u(\boldsymbol{u}) & \varphi_v(\boldsymbol{u}) \\ \psi_u(\boldsymbol{u}) & \psi_v(\boldsymbol{u}) \end{pmatrix} = \det J_\Phi(\boldsymbol{u}).$$

行列の復習 (1) 行列 A の変換により，平面上の四角形は四角形にうつる．(2) 面積は $|\det A|$ 倍になる．

命題 10.2. D' 上で $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0$ とする．このとき

$$\mu(D) = \int_{D'} \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| d\boldsymbol{u}.$$

説明. (0) D を四角形によるメッシュで分割し, それを Φ で引き戻したものにより D' を分割する．(1) メッシュを細かくすると，D' の各分割はほぼ四角形と思える．(2) このとき, 考える四角形が小さいので Φ の作用は行列 J_Φ とみなせる．(3) よって，$\mu(I_{ij}) = |\det J_\Phi(\boldsymbol{u})| \cdot \mu(K_{ij})$ であり, 面積はこれらを撚り集めたものであるので, 命題が成立することがわかる．ただし，$I_{ij} \subset D$, $K_{ij} \subset D'$.

1 月 9 日.

[*1] 正確にはアファイン変換=平行移動 + 線形写像である．

定理 10.3. なめらかな写像 $\Phi\colon D' \to D$ は 1 対 1 であるとし，さらに D' 上で $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0$ とする．このとき，

$$\int_D f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} = \int_{D'} f(\Phi(\boldsymbol{u})) \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| d\boldsymbol{u}.$$

右辺の $\left|\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right|$ は Jacobian $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ の**絶対値**である．

10.2　変数変換での計算

変数変換が $(x, y) = \cdots$ という形で与えられているときは, Jacobian $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ の計算は楽である．その逆, つまり $(u, v) = \cdots$ という形で変数変換が与えられた場合を考える．変換 $\Phi\colon D' \to D$ は 1 対 1 なので, $\boldsymbol{u} = \Phi^{-1}(\boldsymbol{x})$ と逆に解くことができる．この Φ^{-1} に関する Jacobian を $\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$ とかけば，次が成り立つ．

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right)^{-1}.$$

例題 10.4. 変数変換 $u = xy$, $v = \dfrac{y}{x}$ により，次の重積分を計算せよ．

$$I = \int_D x^2 y^2\,d\boldsymbol{x}, \quad D = \left\{(x, y);\ \begin{array}{l} 0 < x \leq y \leq 4x \\ 1 \leq xy \leq 2 \end{array}\right\}.$$

(考え方) (1) u, v の動く範囲 D' を求める．(2) この変換の Jacobian $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ を求める．今は $(u, v) = \cdots$ の形なので，$\left(\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}\right)^{-1}$ を計算するのが楽である．

命題 10.5. 極座標変換 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ において

$$dx\,dy = r\ dr\,d\theta.$$

例題 10.6. 次の重積分を計算せよ．

$$J = \int_D \sqrt{x^2 + y^2}\,d\boldsymbol{x}.$$

ただし，$D = \left\{(x, y);\ x, y \geq 0,\ 2x \leq x^2 + y^2 \leq 4\right\}$.

(コメント) 「$x^2 + y^2$」がある場合は極座標変換をするとうまくいくことが多い．

まとめ (1) 重積分における置換積分に相当するものは，**変数変換**である．(2) 重積分において，1 変数の場合の $dx = g'(u)\,du$ に対応するものは，**Jacobian** を用いて

$$d\boldsymbol{x} = \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| d\boldsymbol{u} = \Bigl|\det J_\Phi(\boldsymbol{u})\Bigr|\,d\boldsymbol{u}$$

と書ける．

演習問題 10

問題 1. 次の重積分を，極座標変換を用いて計算せよ．ここで $D = \{(x, y);\ x^2 + y^2 \le R^2\}$ とする．

$$(1) \quad \int_D (x^2 + y^2) e^{-x^2 - y^2}\, d\boldsymbol{x}$$

$$(2) \quad \int_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\, d\boldsymbol{x}$$

$$(3) \quad \int_D \frac{d\boldsymbol{x}}{(1 + x^2 + y^2)^2}$$

問題 2. $D = \{(x, y);\ 1 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 1\}$ とする．次の重積分を，変数変換 $x = u^2$, $y = \dfrac{v}{u}$ をすることにより求めよ．

$$\int_D \frac{d\boldsymbol{x}}{(1 + x)(1 + xy^2)}.$$

問題 3. $D = \{(x, y);\ 1 \le x^2 + y^2 \le 4\}$ のとき，次の重積分を計算せよ．

$$\int_D \frac{d\boldsymbol{x}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

小レポート

次の重積分を，変数変換を用いて計算せよ．

(1) $D_1 = \{(x, y);\ x^2 + y^2 \le R^2\}$ $(R > 0)$

$$\int_{D_1} e^{-x^2 - y^2}\, d\boldsymbol{x}$$

(2) $D_2 = \{(x, y);\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x\}$

$$\int_{D_2} \frac{x + y}{1 + (x - y)^2}\, d\boldsymbol{x}$$

ヒント． (1) 極座標変換 (2) 次の変換 $x = u + v$, $y = u - v$.

小レポートについて． 次回の講義の際に提出すること．原則として期限を過ぎての提出は認めないが，やむを得ない事情がある際は，必ずその旨を**期限日までにメールにより**連絡すること．

---

x が 0 に十分近いとき，解析的な関数 $f(x)$ は

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

と表せます (Taylor（テイラー）展開)．これはベクトル空間の理論の言葉を用いると，“$1, x, x^2, x^3, \ldots$ は解析的な関数全体のなすベクトル空間の基底である” と言い換えることができます．また，この例は無限次元のベクトル空間であっても “基底” が存在することがあるということを教えてくれます．

高年次になると Fourier 級数展開・Fourier 変換というものを学びます．Fourier 級数展開は，区間 $[-\pi, \pi]$ 上のなめらかな関数を

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

のように，$\sin x$ と $\cos x$ で表すというものです．ベクトル空間の視点から見れば，これは “関数の無限個の組 1，$\sin x, \sin 2x, \ldots, \cos x$，$\cos 2x, \ldots$ が区間 $[-\pi, \pi]$ 上の滑らかな関数の空間の基底になっている” となります．しかも，この基底は標準的な内積に関して互いに直交しており，非常に性質の良い基底になっています．ちなみに Euler の公式を用いて $\sin x, \cos x$ を指数写像 $e^{\pm ix}$ に書き換えると，

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \tag{1}$$

となります．さて，適当なクラスに属する関数 $f(x)$ に対してはその Fourier 変換 $\hat{f}(\xi)$ というものが定義され，次を満たします．

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi}\, d\xi. \tag{2}$$

この場合は残念ながら考える空間が大きすぎて，もはや ‘基底’ というものが存在しません．しかし，式 (2) の右辺は式 (1) と非常に似ています．これより，式 (1) における Fourier 係数 c_n は e^{inx} の係数であることの類似として，式 (2) の Fourier 変換 $\hat{f}(\xi)$ は $e^{ix\xi}$ の ‘係数’ と思うことが出来ます．つまり，Fourier 変換とは “ある種の基底変換を行うことと対応している” と思うこともできるのです．