線形代数学・同演習 B

1 月 31 日分　演習問題[*1]

1. (1) $P = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ により $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(2) $P = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ により $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

(3) $P = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ により $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(4) $P = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ により $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(5) $P = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ により $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

2.† (1) $P = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ により $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(2) $P = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -2 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ により $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(3) $P = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{2} & -2 & 0 \\ \sqrt{2} & 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$ により $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(4) $P = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \\ -2 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ により $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

(5) $P = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -2 & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & -\sqrt{2} & \sqrt{3} \\ 1 & \sqrt{2} & \sqrt{3} \end{pmatrix}$ により $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(6) $P = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{2} & 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{2} & 2 & 0 \end{pmatrix}$ により $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(7) $P = \dfrac{1}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -\sqrt{5} & 6 & -2 \\ -2\sqrt{5} & 0 & 5 \\ 2\sqrt{5} & 3 & 4 \end{pmatrix}$ により $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

[*1] 凡例：無印は基本問題，† は特に解いてほしい問題，$*$ は応用問題.

(8) $P = \dfrac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} -2\sqrt{5} & \sqrt{6} & 2 \\ \sqrt{5} & 0 & 5 \\ \sqrt{5} & 2\sqrt{6} & -1 \end{pmatrix}$ により $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(9) $P = \dfrac{1}{\sqrt{42}} \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & -3\sqrt{3} & \sqrt{7} \\ 4\sqrt{2} & \sqrt{3} & -\sqrt{7} \\ \sqrt{2} & 2\sqrt{3} & 2\sqrt{7} \end{pmatrix}$ により $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. (1) $\det A = (a-1)(b-a)$

(2) (i) $a = 1$ かつ $b \neq 1$ (ii) $a \neq 1$ かつ $a = b$

(3) $0 < a < b$ (問題 4 の同値性を使うとよい)

4.* (1) $A = (a'_{ij})$, $a'_{jj} = a_{jj}$ $(j = 1, \ldots, n)$, $a'_{ij} = (a_{ij} + a_{ji})/2$ $(i \neq j)$ とすれば A は対称行列であって $f(\boldsymbol{x}) = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ となる．(2) $f(\boldsymbol{x}) = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ において $\boldsymbol{y} = S\boldsymbol{x}$ を代入すれば $f(\boldsymbol{y}) = {}^t(S\boldsymbol{y})AS\boldsymbol{y} = {}^t\boldsymbol{y}\,{}^tSAS\boldsymbol{y}$ となることより．(3) 対称行列は直交行列により対角化できることと (2) より．

5.* $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & c \end{smallmatrix}\right)$ とおく．

(1) A は対称行列なのである直交行列 P により $A = P\left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{smallmatrix}\right){}^tP$ とかける．ここで λ, μ は A の固有値である．ここで $\lambda, \mu > 0$ であることと $\det A = \lambda\mu$ であることに注意．さて

$$ax^2 + 2by + cy^2 = (x,\, y)A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = {}^t[{}^tP\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}]\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}[{}^tP\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}]$$

なので $\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) = {}^tP\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ という変数変換を考える．${}^tP$ は正則な行列であり (x, y) に関する積分領域は $\mathbb{R}^2$ 全体なので，(u, v) に関する積分領域も $\mathbb{R}^2$ 全体である．また変数変換に伴う Jacobian は 1 月 24 日の演習問題 8 により 1 であることがわかっている．よって

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)}\,dx\,dy &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\lambda u^2+\mu v^2)}\,du\,dv \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda u^2}\,du \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu v^2}\,dv \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{\mu}} = \frac{\pi}{\sqrt{\det A}}\end{aligned}$$

(2) $A = L\,{}^tL$ とおけば，1 月 24 日の演習問題 5 より $L = \begin{pmatrix} \sqrt{a} & 0 \\ b/\sqrt{a} & \sqrt{(\det A)/a} \end{pmatrix}$ である．さて

$$ax^2 + 2by + cy^2 = (x,\, y)A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = {}^t[{}^tL\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}]\,{}^tL\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

なので $\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) = {}^tL\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ という変数変換を考える．${}^tL$ は正則な行列であり (x, y) に関する積分領域は $\mathbb{R}^2$ 全体なので，(u, v) に関する積分領域も $\mathbb{R}^2$ 全体である．また変数変換に伴う Jacobian は 1 月 24 化の演習問題 8 により $\det L^{-1} = 1/\sqrt{\det A}$ であることがわかっている．よって

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)}\,dx\,dy = \frac{1}{\sqrt{\det A}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(u^2+v^2)}\,du\,dv = \frac{\pi}{\sqrt{\det A}}.$$