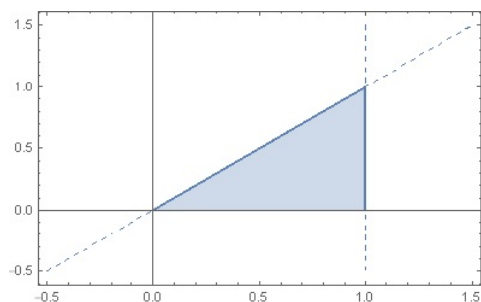


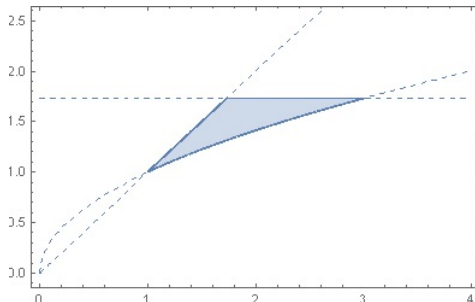
演習問題 8

問題 1. それぞれ以下の通り．なお，(5) は $x, y \geq 0$ とすべき問題でした．

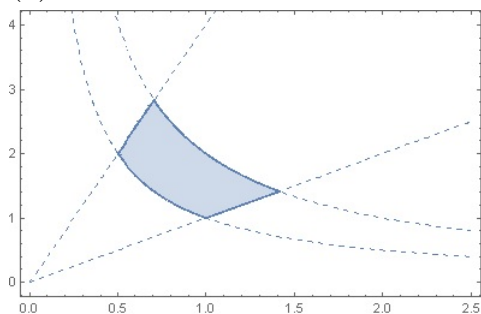
(1)



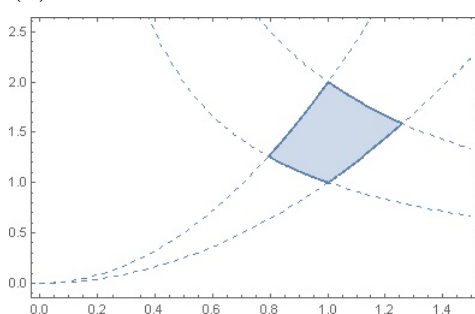
(2)



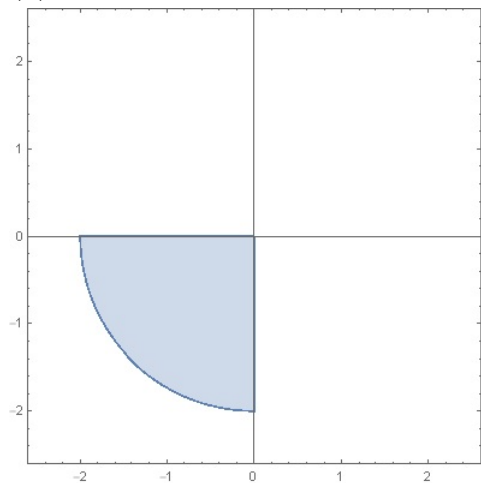
(3)



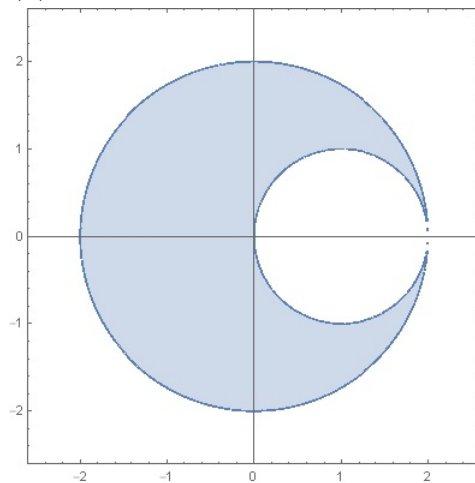
(4)



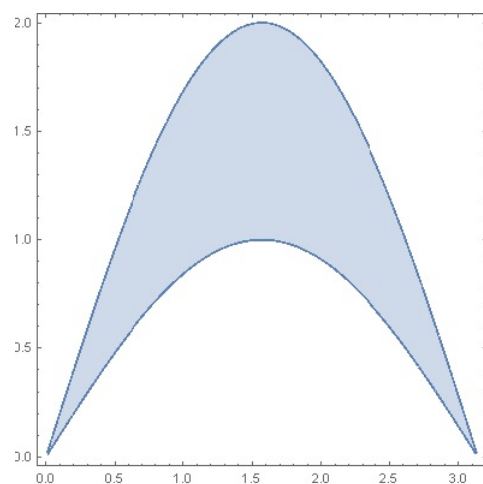
(5)



(5) で条件 $x, y \leq 0$ を落としたもの



問題 2. 色々構成できるが，例えば次のような形にすればよい．



問題 3.* 講義で紹介した有理数点からなる集合や， \mathbb{R}^2 全体 (面積が ∞ になるため) など．

小レポート 9

(1) まず，被積分関数の分子にある多項式の次数を，分母のものよりも小さくする．

$$\frac{x^5 + 1}{x^3 + x} = \frac{(x^2 - 1)(x^3 + x) + (x + 1)}{x^3 + x} = x^2 - 1 + \frac{x + 1}{x^3 + x}.$$

次に有理関数 (右の分数になっているもの) を部分分数分解する． $x^3 + x = x(x^2 + 1)$ なので，

$$\frac{x + 1}{x^3 + x} = \frac{a}{x} + \frac{bx + c}{x^2 + 1}$$

のように分解できる．両辺に $x^3 + x$ を掛けて

$$x + 1 = a(x^2 + 1) + (bx + c)x = (a + b)x^2 + cx + a.$$

これが x に関する恒等式なので， $c = 1$, $a = 1$, $b = -a = -1$ を得る．よって，

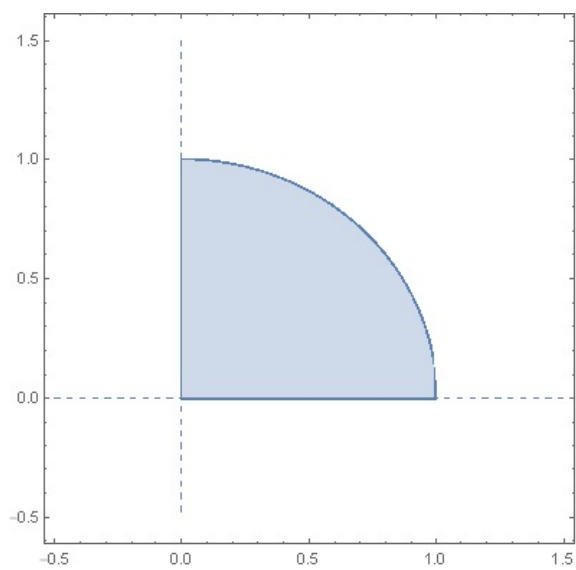
$$\frac{x + 1}{x^3 + x} = \frac{1}{x} + \frac{-x + 1}{x^2 + 1} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{x^2 + 1} + \frac{1}{x^2 + 1}.$$

2 番目の等式は，積分を実行しやすくするための式変形である．以上より，積分が実行できる．

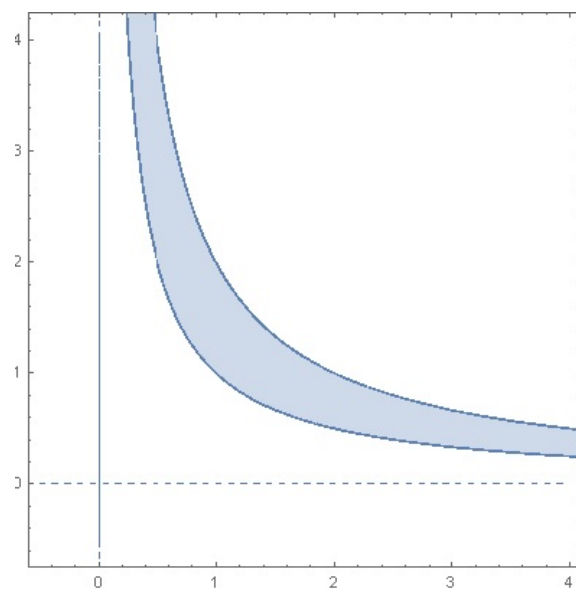
$$\begin{aligned} \int \frac{x^5 + 1}{x^3 + x} dx &= \int \left\{ (x^2 - 1) + \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{x^2 + 1} + \frac{1}{x^2 + 1} \right) \right\} dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 - x + \log|x| - \frac{1}{2} \log(x^2 + 1) + \text{Arctan } x \\ &= \frac{1}{3}x^3 - x + \frac{1}{2} \log \frac{x^2}{x^2 + 1} + \text{Arctan } x. \end{aligned}$$

(2) それぞれ次のような図形になる．

(i)



(ii)



(iii)

