

微分積分学・同演習 A

演習問題 12

1. 次の広義積分は収束するか．

$$(1) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^5} \quad (2) \int_0^{+\infty} \frac{e^x}{\cosh 2x} dx \quad (3) \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

2.[†] 次の広義積分が収束するような $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ を決定せよ．

$$(1) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^\alpha} \quad (2) \int_0^{+\infty} \frac{e^{\alpha x}}{(\cosh x)^\beta} dx \quad (3) \int_0^1 \frac{x^\alpha}{\sqrt{1-x}^\beta} dx$$

3.[†] 次の広義積分の値を求めよ．

$$(1) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} \quad (2) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} \quad (3) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$$

4. 次の定積分を計算せよ．ただし a, b は実数で $ab \neq 0$ とする．

$$(1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a \sin^2 x + b \cos^2 x} \quad (2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos^4 x + \sin^4 x} \quad (3) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(a \sin^2 x + b \cos^2 x)^2}$$

5. 次の広義積分の計算は正しいか調べよ．

$$(1) \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1 \quad (2)^{\dagger} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1-x^2} = 0 \quad (3)^* \int_0^{+\infty} \frac{\log x}{x^2+1} dx = 0$$

6.[†] 次の定積分，もしくは広義積分を計算せよ．ただし n は自然数である．

$$(1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \quad (2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx \quad (3) \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad (4) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^n}$$

7. 次の広義積分が収束することを示せ．

$$(1) \int_0^{+\infty} \frac{\log x}{(1+x)^2} dx \quad (2) \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx \quad (3) \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{3/2}} dx$$

$$8.^* \int_0^{+\infty} |\sin x| e^{-x} dx = \frac{e^\pi + 1}{2(e^\pi - 1)} \text{ を示せ.}$$