線形代数学・同演習 A

演習問題 7

1. 講義中の 2×2 のときと同様．$\boldsymbol{e}_j$ を j 行目のみ 1 でそれ以外は 0 であるベクトルとすれば，$\boldsymbol{x} = {}^t(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ は

$$\boldsymbol{x} = x_1 \boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n \boldsymbol{e}_n$$

と書けることに注意．f の線形性より $f(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^n x_j f(\boldsymbol{e}_j)$ なので，$f(\boldsymbol{e}_j) = {}^t(a_{1j}, \ldots, a_{mj})$ とおけば $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ である．ただし，$A = (a_{ij})$.

2. 図形は次ページ．面積は (1) 1 (2) 15 (3) 16 (4) 0

3. 2 点 $(0,1)$ と $(0,1)$ が移動する点を考えればよい．この 2 点は原点の隣にあるので，移ることができる点は $(1,2)$ と $(-1,2)$．よって $f_1(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $f_2(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

4. (1) 平面のパラメータ表示 $\boldsymbol{x} = s\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}$ $(s, t \in \mathbb{R})$ を標準型にもどせばよい．各成分ごとに見ると $x = a_1 s + b_1 t$, $y = x_2 s + b_2 t$, $z = a_3 s + b_3 t$ なので，x, y に関する式を解いて[*1]

$$s = \frac{b_2 x - b_1 y}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, \quad t = \frac{-a_2 x + a_1 y}{a_1 b_2 - a_2 b_1}.$$

これを z の式に代入して式を整理すれば，求める式を得る．

(2) 定義に従って計算するのみ．(3) $\langle \boldsymbol{a} | \boldsymbol{b} \rangle = \| \boldsymbol{a} \| \cdot \| \boldsymbol{b} \| \cos\theta$ より．(4) 外積の成分表示より明らか．(5) 外積の成分表示を用いて地道に計算するだけ．

---

5 月 30 日分 (凡例：無印は基本問題，† は特に解いてほしい問題，$*$ は応用問題)

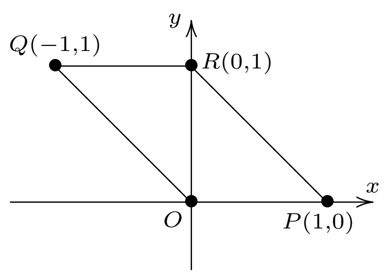
講義用 HP: http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~h-nakashima/lecture/2017LA.html

[*1] 講義初回に紹介した逆行列を用いる方法が簡単．もちろん掃き出し法でも計算できる．

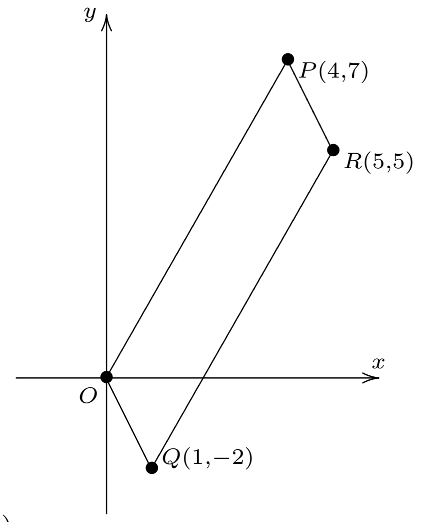
問題 3 の解答図．図中の P, Q, R はそれぞれ以下を表している：

$$(1,0) \mapsto P, \quad (0,1) \mapsto Q, \quad (1,1) \mapsto R.$$

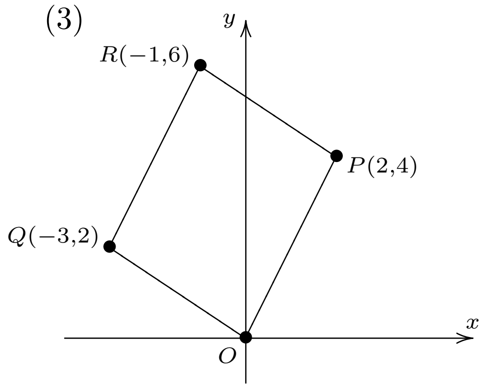
(1)



(2)



(3)



(4)