線形代数学・同演習 B

10 月 18 日分　演習問題[*1]

1.† W_1, W_2 は $V=\mathbb{R}^2$ の部分空間となるか．また，W_3, W_4 は $C(\mathbb{R})$ の部分空間となるか．

(1) $W_1=\{(y,\,ay)\,;\,y\in\mathbb{R}\}$　(a は定数)　(2) $W_2=\{(x,x^2)\,;\,x\in\mathbb{R}\}$

(3) $W_3=\{f\in C(\mathbb{R})\,;\,f(x)+f(x)^2=0\}$　(4)* $W_4=\{g\in C(\mathbb{R})\,;\,\int_{-\infty}^{\infty}|g(x)|\,dx<\infty\}$.

2. 次の $\mathbb{R}^3$ のベクトルの組は線形独立か?

$$(1)\ (\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3)=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&-1\\-1&3&2\end{pmatrix}\quad(2)\ (\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3,\boldsymbol{v}_4)=\begin{pmatrix}1&-1&1&-2\\3&-3&-1&-3\\-2&-2&2&1\end{pmatrix}$$

3. $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3,\boldsymbol{u}_4$ は線形独立とする．このとき，次のベクトルは線形独立となるか?

$$(1)\ \begin{cases}\boldsymbol{v}_1=2\boldsymbol{u}_1-\boldsymbol{u}_2\\\boldsymbol{v}_2=-\boldsymbol{u}_1+2\boldsymbol{u}_2-\boldsymbol{u}_3\\\boldsymbol{v}_3=-\boldsymbol{u}_2+2\boldsymbol{u}_3-\boldsymbol{u}_4\\\boldsymbol{v}_4=-\boldsymbol{u}_3+2\boldsymbol{u}_4\end{cases}\quad(2)\ \begin{cases}\boldsymbol{w}_1=\boldsymbol{u}_1-\boldsymbol{u}_2+2\boldsymbol{u}_3+\boldsymbol{u}_4\\\boldsymbol{w}_2=\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2+\boldsymbol{u}_3+2\boldsymbol{u}_4\\\boldsymbol{w}_3=3\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2+4\boldsymbol{u}_3+12\boldsymbol{u}_4\\\boldsymbol{w}_4=2\boldsymbol{u}_1+3\boldsymbol{u}_3+10\boldsymbol{u}_4\end{cases}$$

4. $V=\mathbb{R}[x]_3$ を 3 次以下の多項式全体のなすベクトル空間とする．

(1) 多項式の組 1, $1+x$, $(1+x)^2$, $(1+x)^3$ は線形独立であることを示せ．

(2) 多項式 $p(x)=x^3$ を (1) の多項式の線形結合で表わせ．

5.† 次のベクトル（多項式）の組において，線形独立なベクトル（多項式）の最大個数 r と[*2]，その r 個のベクトル（多項式）の組を一組求めよ．

$$(1)\quad(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3,\boldsymbol{u}_4)=\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\-1&1&0&-1\\0&2&1&3\\1&-1&0&1\end{pmatrix}$$

$$(2)\quad(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3,\boldsymbol{v}_4,\boldsymbol{v}_5)=\begin{pmatrix}1&-3&-3&5&6\\-2&1&1&-5&-7\\3&5&5&1&4\end{pmatrix}$$

(3) $p_1(x)=1+2x-x^2,\ p_2(x)=1+x-x^2,\ p_3(x)=-2-5x+2x^2,$
$p_4(x)=4+6x-2x^2,\ p_5(x)=3x-2x^2$

6.† V をベクトル空間とする．次の命題が正しいならば証明し，間違っているならば反例を示せ．

(1) $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ が線形独立ならば，$\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_1-3\boldsymbol{v}_3+2\boldsymbol{v}_3$ も線形独立．

(2) $\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_n$ が線形独立ならば，$\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_{n-1}+\boldsymbol{v}_n$ および $\boldsymbol{v}_n+\boldsymbol{v}_1$ も線形独立．

7.* $P_n(x):=\dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right]$ [*3]とおく．次の問に答えよ．

(1) $n=0,1,2$ に対して，各 $P_n(x)$ を求めよ．

(2) $P_0(x),P_1(x),P_2(x)$ は線形独立となることを示せ．

[*1] 凡例：無印は基本問題，† は特に解いてほしい問題，$*$ は応用問題．
[*2] 線形独立な r 本のベクトルの組が存在するが，どの $r+1$ 本のベクトルの組も線形従属となるような数 r のこと．
[*3] このようにして定義される多項式を Legendre 多項式と呼ぶ．