線形代数学・同演習 B

11 月 14 日分 質問への回答

質問 – n 次元は $n-1$ 次元で表せないのに表現行列はより小さい基底の本数で表せることが少しわかりにくかったです

– P，Q が何なのかがいまいちわからなかったです．

—「n 次元は $n-1$ 次元で表せない」のは確かにそうですが，写像はある空間を別の空間に写すものなので，元の空間と行った先の空間のどちらで考えているのかをしっかりと把握しておくことが重要です．今の場合は，写像で送った後のものを考えるので行った先の基底で考える必要があります．ちなみに「表現行列はより小さい基底の本数で表せる」というのは少し変な表現です．

► P, Q は後期の 3 回目の講義で扱った基底の変換行列です．ベクトル空間 U の要素は基底を指定すれば数ベクトルと思うことができるわけですが，その基底のとり方によって，一般には対応する数ベクトルが変わってきます．例えば U の要素 $\boldsymbol{u}$ は基底 $[\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n]$ のときは $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ というベクトルと対応していて，別の基底 $[\widetilde{\boldsymbol{u}}, \ldots, \widetilde{\boldsymbol{u}}_n]$ のときは $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ というベクトルと対応しているとします．数式で書けば

$$\boldsymbol{u} = [\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n] \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = [\widetilde{\boldsymbol{u}}, \ldots, \widetilde{\boldsymbol{u}}_n] \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

です．このとき，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ は，適当な正則行列 P を用いて

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

のように書くことができます．この P が基底の変換行列です．