2 数列の極限

項がどこまでも限りなく続く数列を無限数列という．今後単に数列といえば無限数列を意味するものとする．無限数列においては，n が増大するに従って，その第 n 項がどのようになっていくかを知ることが重要である．∞ は無限大を表す記号であり，その意味するところとしては「どんな数よりも大きい」という概念であって，数としては扱わない点に注意．

2.1 収束・発散

次の数列を考える．

$$
\begin{array}{lllllll}
\text{(a)} & 1, & \frac{1}{2}, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{4}, & \ldots, & \frac{1}{n}, & \ldots \\
\text{(b)} & 1, & 4, & 9, & 16, & \ldots, & n^2, & \ldots \\
\text{(c)} & 4, & 1, & -4, & -11, & \ldots, & 5-n^2, & \ldots \\
\text{(d)} & 1, & -1, & 1, & -1, & \ldots, & (-1)^{n-1}, & \ldots
\end{array}
$$

(a) について． 数列 $a_n = \dfrac{1}{n}$ は，n が大きくなるに従って，一定の値 $A=0$ に近づいていく．このことを a_n は $A=0$ に**収束する**といい，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad \text{または} \quad n\to\infty \text{ のとき } a_n \to 0$$

と書く．数列が収束しないとき，**発散する**という．

(b) について． 数列 $b_n = n^2$ は，n が大きくなるに従って，限りなく大きくなっていく．このことを b_n は**正の無限大に発散する**といい，次のように書く．

$$\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty \text{ または } n\to\infty \text{ のとき } b_n \to +\infty.$$

(c) について． 数列 $c_n = 5-n^2$ は，あるところから先の項は負の数であり，n が大きくなるに従って，その絶対値 $|c_n|$ は限りなく大きくなっていく．このことを，c_n は**負の無限大に発散する**といい，次のように書く．

$$\lim_{n\to\infty} c_n = -\infty \text{ または } n\to\infty \text{ のとき } c_n \to -\infty.$$

(d) について． 数列 $d_n = (-1)^{n-1}$ は，$1, -1$ が交互に現れ，項が一定の値に近づかないので発散する．しかし，正・負の無限大に発散するわけでもない．このようなとき，数列 d_n に**極限はない**，あるいは**振動する**という．

定理 2.1

2 つの収束する数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ に対して，次が成り立つ．

1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} ka_n = k\lim_{n\to\infty} a_n$ （k は定数）
2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$
3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_nb_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n)(\lim_{n\to\infty} b_n)$
4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$ （$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$ のとき）

例．$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n-2} = \lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{3-\frac{2}{n}} = \frac{2}{3}.$

2.2 極限の不定形

正の無限大に発散する 2 つの数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ が与えられたとき，すなわち $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ かつ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$ のとき，明らかに

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = +\infty, \quad \lim_{n\to\infty}(a_nb_n) = +\infty$$

が成り立つ[*1]．しかし，

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n), \quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$$

についてはいろいろな場合がある．このような場合を**不定形**という．以下の例題で見るように，若干の工夫によってその極限を求めることが可能であることも多い．

例題 2.2

次の極限を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(4n^2-n^3)$ (2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

この例題でもわかるように，不定形の極限では「次数が一番大きい項」の影響が最も大きく，極限はその項に支配される．基本的な数列（n^k や a^n など）の「大きさ」を理解しておくことは重要である．

定理 2.3

収束する数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ について，その極限値を $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = A$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = B$ とするとき，

1) すべての n について $a_n \leqq b_n$ ならば，$A \leqq B$,
2) 数列 $\{c_n\}$ がすべての n に対して $a_n \leqq c_n \leqq b_n$ を満たしていて，さらに $A = B$ ならば，数列 $\{c_n\}$ も収束して $\displaystyle\lim_{n\to\infty} c_n = A$.

[*1] これは片方が $+\infty$ に発散し，もう片方は正の極限値に収束する場合でも成り立つ．しかし，もう片方が負の極限値に収束する場合は $-\infty$ となるので，注意が必要である．

この定理の 2) は「**はさみうちの定理**」と呼ばれ，直接計算しづらい極限を求める際に役に立つ定理である．図 2.1 は，$a_n = 1 - \frac{1}{n^2}$, $b_n = 1 + \frac{1}{n}$ としたものを図示している．数列 a_n および b_n はそれぞれ関数 $y = 1 - \frac{1}{x^2}$, $y = 1 + \frac{1}{x}$ の曲線上に乗っている．数列 c_n はこの 2 つの曲線に間にある以上，この図が示しているように，その極限値は a_n, b_n の同一の極限値にならざるを得ない．

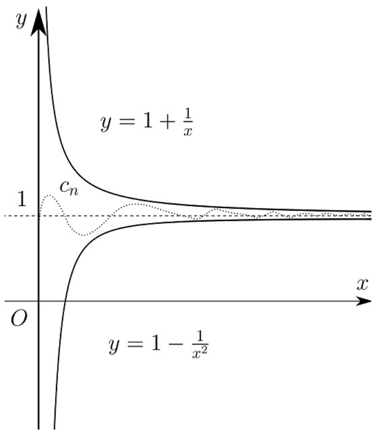

図 2.1　はさみうちの定理

例題 2.4

極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{6}$ を求めよ．

2.3　等比数列 $a_n = ar^{n-1}$ の極限について

定理 2.5

$a > 0$ のとき，等比数列 $a_n = ar^{n-1}$ の極限は，

1)　$r > 1$ ならば $\displaystyle\lim_{n\to\infty} ar^{n-1} = +\infty$,

2)　$r = 1$ ならば $\displaystyle\lim_{n\to\infty} ar^{n-1} = 1$,

3)　$-1 < r < 1$ ならば $\displaystyle\lim_{n\to\infty} ar^{n-1} = 0$,

4)　$r \leqq -1$ ならば $\displaystyle\lim_{n\to\infty} ar^{n-1}$ は極限を持たない．

$a < 0$ のときは 1) の極限が $-\infty$ になる．また，$r = 0$ のときは場合分けが不要で，すべての場合の極限値が 0 になる．

雑な説明をすれば，正の数 r が 1 よりも大きかったら，r を掛ける毎にどんどん大きくなっていくし，逆に 1 よりも小さかったら，r を掛ける毎にどんどん小さくなっていく，ということ．1 は当然ずっと変わらないが，大きくなるか小さくなるかの分水嶺となっている．r が負の数のときは，§2.1 の d_n のように振動していて，絶対値が 1 よりも小さければ振動しつつ 0 に収束していくが，1 以上だったら収束できないことは想像しやすい．

例題 2.6

次の極限を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n + 2^{n+1}}{2^{2n} - 3^n}$$

例題 2.7

$a_1 = 0,\ a_{n+1} = \dfrac{1}{2}a_n + 1$ によって定義される数列 $\{a_n\}$ の極限値を求めよ．

2.4　まとめ

- 数列の極限 (収束・発散)
- 数列の極限の計算・はさみうちの定理

2.5　演習問題

(1) 一般項が次の式で表される数列の極限を調べよ．

$$(a)\ \frac{2n-1}{5n+1} \quad (b)\ \frac{2n^2+n}{n^2-6} \quad (c)\ \frac{7n-3}{3n^2+4n}$$

(2) 一般項が次の式で表される数列の極限を調べよ．

$$(a)\ 2n^3 - 4n \quad (b)\ \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$$

(3) すべての n に対して $a_n < b_n$ であるが，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$ となる数列の組を一例挙げよ．

(4) 次の無限等比数列の極限を調べよ．

(a) $3, 9, 27, 81, \ldots$　(b) $-\dfrac{2}{3}, \dfrac{4}{9}, -\dfrac{8}{27}, \ldots$

(c) $8, -12, 18, -27, \ldots$

(5) 一般項が次の式で表される数列の極限を調べよ．

$$(a)\ \frac{5^n - 2^n}{3^n} \quad (b)\ \frac{2^{n+1}}{3^n + 2^n} \quad (c)\ \frac{(-2)^n + 3^n}{3^n - (-2)^n}$$

(6) $r \neq -1$ のとき，数列 $\dfrac{r^n}{1 + r^n}$ の極限を調べよ．

2.5.1　ヒント

(1) 分子分母を，n の次数が一番高いもので割ってから，$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ を使う．(2) 例題 2.2 を真似る．(3) このノートの中にもその一例の組が現れている．(4) 公比 r は (第 2 項) ÷ (第 1 項) で求まる．(5) 例題 2.6 を真似る．(6) 定理 2.5 を利用し，場合分けする．