演習問題 12

問題 1. (1) 直線 $y = x$ 上で被積分関数が発散するので，そこを避けて積分する．$D_n = \{\frac{1}{n} \le x \le 1,\ 0 \le y \le x - \frac{1}{n}\}$ とおく．

$$I_n = \int_{D_n} \frac{d\boldsymbol{x}}{\sqrt{x^2 - y^2}} = \int_{\frac{1}{n}}^{1} \left(\int_0^{x-\frac{1}{n}} \frac{dy}{\sqrt{x^2 - y^2}} \right) dx = \int_{\frac{1}{n}}^{1} \mathrm{Arcsin} \left(1 - \frac{1}{nx} \right) dx.$$

ここで $u = 1 - \frac{1}{nx}$ と変数変換すれば

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{1}{n} \cdot \int_0^{1-\frac{1}{n}} \frac{\mathrm{Arcsin}\, u}{(1-u)^2}\, du = \frac{1}{n} \cdot \int_0^{1-\frac{1}{n}} \left(\frac{1}{1-u} \right)' \mathrm{Arcsin}\, u\, du \\ &= \left[\frac{\mathrm{Arcsin}\, u}{1-u} \right]_0^{1-\frac{1}{n}} - \int_0^{1-\frac{1}{n}} \frac{1}{1-u} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du. \end{aligned}$$

次に $u = \sin\theta$ と変数変換する．簡単のため $\alpha_n = \mathrm{Arcsin}(1 - \frac{1}{n})$ とおけば,

$$I_n = \alpha_n - \frac{1}{n} \cdot \int_0^{\alpha_n} \frac{d\theta}{1 - \sin\theta}.$$

三角関数による有理関数の積分なので，$t = \tan\frac{\theta}{2}$ と変数変換することにより計算することができる (詳しくは教科書 p.99 参照)．$\beta_n = \tan\frac{\alpha_n}{2}$ とおく．

$$I_n = \alpha_n - \frac{1}{n} \int_0^{\beta_n} \frac{2\,dt}{(1-t)^2} = \alpha_n - \frac{1}{n} \cdot \left[\frac{2}{1-t} \right]_0^{\beta_n} = \alpha_n - \frac{2}{n(1-\beta_n)} + \frac{2}{n}.$$

$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = \frac{\pi}{2}$ であるので，あとは第 2 項の収束発散を調べればよい．$\tan x$ の半角公式より

$$\beta_n = \tan\frac{\alpha_n}{2} = \frac{-1 + \sqrt{1 + \tan^2\alpha_n}}{\tan\alpha_n} = \frac{1 - \cos\alpha_n}{\sin\alpha_n}$$

なので，$\alpha_n = \mathrm{Arcsin}(1 - \frac{1}{n})$ を思い出して,

$$n(1 - \beta_n) = \frac{n(1 - \frac{1}{n} + \sqrt{1 - (1 - \frac{1}{n})^2} - 1)}{1 - \frac{1}{n}} = \frac{-1 + \sqrt{2n - \frac{1}{n}}}{1 - \frac{1}{n}} \to +\infty.$$

よって $\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n(1-\beta_n)} = 0$ となるので，この広義積分は収束し，その値は

$$\int_D \frac{d\boldsymbol{x}}{\sqrt{x^2 - y^2}} = \lim_{n\to+\infty} \int_{D_n} \frac{d\boldsymbol{x}}{\sqrt{x^2 - y^2}} = \lim_{n\to+\infty} \left(\alpha_n - \frac{2}{n(1-\beta_n)} + \frac{2}{n} \right) = \frac{\pi}{2}.$$

(2) 発散する．解説は教科書 p.206 を参照のこと．

(3) 被積分関数は領域 D (有界閉集合から一点 $(0,0)$ を除いた領域) で有界な連続関数なので, 絶対積分可能であり, 特に広義積分可能である. $D_n = \{\frac{1}{n^2} \leq x^2+y^2 \leq 1\}$ とすれば,

$$\int_{D_n} \frac{xy}{x^2+y^2}\,d\boldsymbol{x} = \int_{D_n} \cos\theta\sin\theta\cdot r dr d\theta = \int_{\frac{1}{n}}^{1} r\,dr \times \int_0^{2\pi} \sin\theta(\sin\theta)' d\theta$$
$$= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\cdot\left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_0^{2\pi} = 0.$$

問題 2. 絶対積分可能でない. 実際, $D_n = \{x^2+y^2 \leq n\pi\}$ という円で近似することを考える (後の議論を簡単にするためにこの範囲にしている). このとき, 極座標変換, および $u = r^2$ という変数変換により,

$$\int_{D_n} |\sin(x^2+y^2)|\,d\boldsymbol{x} = \int_0^{2\pi} d\theta \times \int_0^{\sqrt{n\pi}} |\sin r^2|\,rdr = \pi\int_0^{n\pi} |\sin u|\,du n\pi$$

となる. よって絶対値を付けた積分が収束しないので, 絶対積分可能でない.

問題 3. 与えられた等式を $f(x,y)=1$ と書いたとき, $\{f(x,y)\leq 1\}$ という領域の面積を求める問題である (一般には, どちらが内側かをちゃんと考えねばならない).

(1) $D=\{x^2+y^2\leq 1\}$ は半径 1 の円なので, π. 計算は省略しても良いだろう.

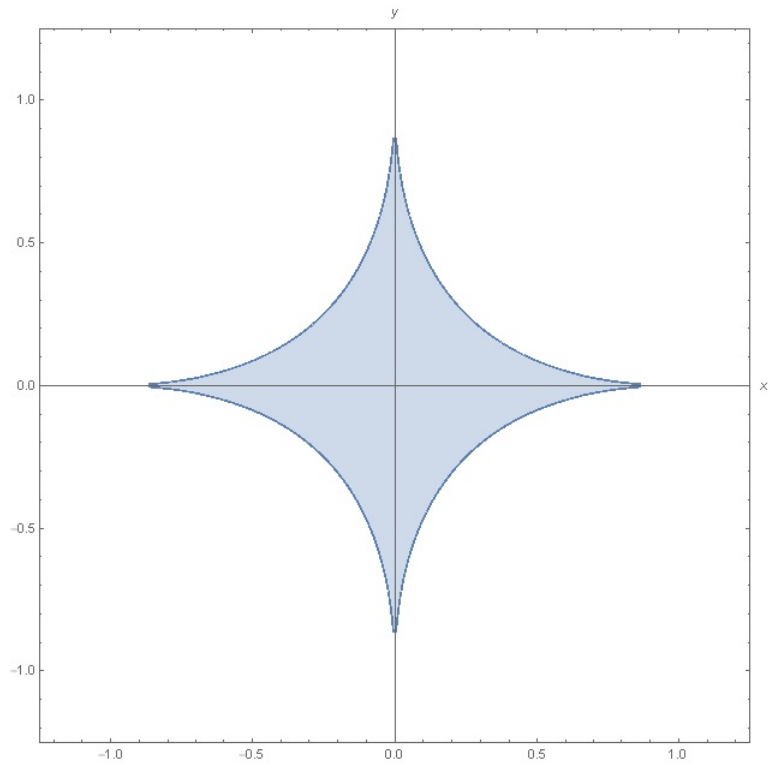
(2) $D=\{ax^2+by^2\leq 1\}$. 少し歪ませた極座標変換を用いる : $x=\frac{r\cos\theta}{\sqrt{a}}$, $y=\frac{r\sin\theta}{\sqrt{b}}$. すると, $D'=\{(r,\theta);\ 0\leq r\leq 1,\ 0\leq\theta\leq 2\pi\}$ でちょうど求める領域と一致する. この場合, Jacobian は $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| = \frac{r}{ab}$ であるので,

$$\int_D 1\cdot d\boldsymbol{x} = \int_{D'} \frac{r}{ab} dr d\theta = \frac{1}{ab}\int_0^{2\pi} d\theta \times \int_0^1 r\,dr = \frac{\pi}{ab}.$$

(3) まず $x\geq 0$, $y\geq 0$ の領域の面積を求め, それを 4 倍する. $D'=\big\{(x,y);\ \sqrt{x}+\sqrt{y}\leq 1,\ x,y\geq 0\big\}$ とおく. $u=\sqrt{x}$, $v=\sqrt{y}$ と変数変換する. Jacobian は $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = 4uv$ であるので,

$$\int_{\sqrt{x}+\sqrt{y}\leq 1} 1\cdot d\boldsymbol{x} = \int_{u+v\leq 1} 4uv\,d\boldsymbol{u} = 4\int_0^1\left(\int_0^{1-u} uv\,dv\right)du$$
$$= 2\int_0^1 u(1-u)^2\,du = \left[\frac{u^2}{2}-\frac{2u^3}{3}+\frac{u^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{6}.$$

よって, 求める面積は $\frac{2}{3}$.



y
x
1.0
0.5
0.0
-0.5
-1.0
-1.0
-0.5
0.0
0.5
1.0

小レポート 12

(1), (2) ともに $D_n = \{1 \leq x, y \leq n\}$ という近似列を取る．

(1) $\displaystyle \int_{D_n} \frac{d\boldsymbol{x}}{x^2y^2} = \int_1^n \frac{dx}{x^2} \times \int_1^n \frac{dy}{y^2} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 \to 1 \quad (n \to +\infty).$

(2) $\displaystyle \int_{D_n} \frac{d\boldsymbol{x}}{\sqrt{xy}} = \int_1^n \frac{dx}{\sqrt{x}} \times \int_0^n \frac{dy}{\sqrt{y}} = 4\left(\sqrt{n} - 1\right)^2 \to +\infty \quad (n \to +\infty).$

よって，(1) は収束し，その値は 1，(2) は発散する．

(3) $D' = \{0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x\}$ である．問題が生じるのは直線 $y = x$ 上であるので，そこを避けた領域

$$D'_n = \left\{(x, y);\ \frac{1}{n} \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x - \frac{1}{n}\right\}$$

で積分を計算する．

$$\begin{aligned}
\int_{D'_n} \frac{d\boldsymbol{x}}{x - y} &= \int_{\frac{1}{n}}^1 \left(\int_0^{x - \frac{1}{n}} \frac{dy}{x - y}\right) dx = \int_{\frac{1}{n}}^1 \Big[-\log(x - y)\Big]_0^{x - \frac{1}{n}} dx \\
&= \int_{\frac{1}{n}}^1 \left(\log x - \log \frac{1}{n}\right) dx = \Big[x \log x - x\Big]_{\frac{1}{n}}^1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right) \log \frac{1}{n} \\
&= \log n + \frac{1}{n} - 1.
\end{aligned}$$

よって，

$$\int_{D'} \frac{d\boldsymbol{x}}{x - y} = \lim_{n \to +\infty} \int_{D'_n} \frac{d\boldsymbol{x}}{x - y} = \lim_{n \to +\infty} \left(\log n + \frac{1}{n} - 1\right) = +\infty$$

より，この積分は発散する．