線形代数学・同演習 B

演習問題 3

1. 次のベクトルの組は，$\mathbb{R}^4$ の基底をなすか調べよ．

$$(1)\ \begin{pmatrix}1\\-4\\5\\7\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}2\\1\\-1\\-6\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-1\\6\\1\\5\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}3\\1\\-3\\1\end{pmatrix} \qquad (2)\ \begin{pmatrix}1\\-1\\-3\\-1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-3\\1\\-4\\-4\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\-2\\1\\2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}4\\-8\\4\\9\end{pmatrix}$$

2. V を 1 次以下の 2 変数多項式 $ax+by+c$ の全体がなす集合とする．

(1) V は自然な演算でベクトル空間となることを確認せよ．

(2) V の次元はいくつか? また V の自然な基底を 1 組求めよ．

(3) 平面の 3 点 $P_1=(0,0)$, $P_2=(1,0)$, $P_3=(0,1)$ において，それぞれ指定された値 c_1,c_2,c_3 をとるような V の元を表すのに最も適した V の基底を求めよ．*1

3.† 次の多項式の組は $\mathbb{R}[x]_3$ の基底になるか調べよ．

$$(1)\ \begin{cases} p_1(x)=x^3-3x \\ p_2(x)=x^2-5x-4 \\ p_3(x)=3x^3-x+2 \\ p_4(x)=2x^2+x+1 \end{cases} \qquad (2)\ \begin{cases} q_1(x)=x^3-x \\ q_2(x)=4x^3-x^2-3 \\ q_3(x)=-3x^3+6x^2+x+8 \\ q_4(x)=x^3+5x^2+x+5 \end{cases}$$

4.† n 次の対称行列全体の集合を $\mathrm{Sym}(n,\mathbb{R})$ で表す．

(1) $\mathrm{Sym}(n,\mathbb{R})$ はベクトル空間となることを確認せよ．

(2) $\mathrm{Sym}(n,\mathbb{R})$ の次元を求めよ．

(3) $\mathrm{Sym}(n,\mathbb{R})$ の基底を一組求めよ*2．

5.† $\mathbb{R}[x]_2$ において，多項式 ax^2+bx+c を次の基底 q_1,q_2,q_3 に関してベクトル表示せよ．

(1) $q_1(x)=1,\ q_2(x)=x,\ q_3(x)=x^2$.

(2) $q_1(x)=x^2+x+1,\ q_2(x)=x+1,\ q_3(x)=1$.

(3) $q_1(x)=x^2+x,\ q_2(x)=x^2+2x-1,\ q_3(x)=-x+2$.

6.* (1) 複素数 $\mathbb{C}$ は実数体 $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とみなせることを示しその次元を求めよ．

(2) 実数の集合 $\mathbb{R}$ は有理数の集合 $\mathbb{K}=\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間とみなせることを示せ．また，円周率 π が超越数*3であることを利用して，その次元は無限大となることを示せ．

---

10 月 24 日分 (凡例：無印は基本問題，† は特に解いてほしい問題，$*$ は応用問題)

講義用 HP: http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~h-nakashima/lecture/2017LA.html

*1 $f_i(P_j)=\delta_{ij}$ $(i,j=1,2,3)$ となる多項式 f_1,f_2,f_3 を求めればよい．

*2 行列単位 E_{ij} を用いるとよい．これは (i,j) 成分のみが 1 でそれ以外の成分はすべて 0 である正方行列である．サイズは文脈に応じて定める．

*3 どんな整数係数 (有理数係数) 多項式 $p(x)$ に対しても $p(x_0)\neq 0$ であるとき，実数 x_0 を超越数という．