微分積分学・同演習 A

4 月 11 日分　小テスト

学籍番号：　　　　　　　　　　　　氏名：

$a_n := \dfrac{1}{n^2}$ とおく．このとき，ε-N 論法を用いて $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ を証明せよ．

証明のための準備から始める．

$$\text{(準備)}\quad \left|\frac{1}{n^2} - 0\right| = \frac{1}{n^2} < \varepsilon \ \Leftrightarrow\ n^2 > \frac{1}{\varepsilon} \ \Leftrightarrow\ n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$$

(証明) ε を任意にとる．このとき，$N := \left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right] + 1$ ($\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ よりも真に大きい最小の整数) とすれば，$n \geq N$ のとき，

$$\left|\frac{1}{n^2} - 0\right| = \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{N^2} < \varepsilon$$

より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ である．

(補足) もちろん，この N の取り方はこれでなくてもよい．例えば $n \geq N$ のとき $n^2 \geq n \geq N$ なので，$N_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ としたとき $\frac{1}{N_0} < \varepsilon$ に注意すれば，$n \geq N_0$ のとき

$$\left|\frac{1}{n^2} - 0\right| = \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{N_0} < \varepsilon$$

なので，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ が示される．

※講義や講義内容に関して，意見・感想・質問等を自由に記述してください．