演習問題 13

問題 1. (1) まず極座標変換を施す．$D' = \{(r,\theta,\varphi);\ 0 \le r \le 1,\ 0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi\}$ を (r,θ,φ) の動く範囲とすると，

$$I = \int_{D'} \frac{r^2 \sin\theta}{r^2 \sin^2\theta + (r\cos\theta - 2)^2}\, dr\, d\theta\, d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \times \int_{D''} \frac{r^2 \sin\theta}{r^2 - 4r\cos\theta + 4}\, dr\, d\theta.$$

ここで $D'' = \{(r,\theta);\ 0 \le r \le 1,\ 0 \le \theta \le \pi\}$ である．二つ目の等式は，被積分関数が φ に依存しない関数なので，φ に関する積分は他の変数での積分と独立に計算できることによる．次に D'' において，θ, r の順に計算することにする．$u = -r\cos\theta$ とすれば，$du = r\sin\theta\, d\theta$, $u\colon -r \to r$ $(\theta\colon 0 \to \pi)$ なので

$$\begin{aligned}
\int_{D''} \frac{r^2 \sin\theta}{r^2 - 4r\cos\theta + 4}\, dr\, d\theta &= \int_0^1 \left(\int_0^{\pi} \frac{r^2 \sin\theta}{r^2 - 4r\cos\theta + 4}\, d\theta \right) dr \\
&= \int_0^1 \left(\int_{-r}^{r} \frac{r}{r^2 + 4u + 4}\, du \right) dr \\
&= \frac{1}{4} \int_0^1 \Big[r \log(r^2 + 4u + 4) \Big]_{u=-r}^{r} dr \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 r \log \frac{2+r}{2-r}\, dr.
\end{aligned}$$

ここで，$r = (r^2/2)'$ と思って部分積分することにより，

$$\begin{aligned}
\int_0^1 r \log \frac{2+r}{2-r}\, dr &= \left[\frac{r^2}{2} \log \frac{2+r}{2-r} \right]_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 (-r^2) \left(\frac{1}{2+r} - \frac{1}{2-r} \right) dr \\
&= \frac{1}{2} \log 3 + \frac{1}{2} \int_0^1 \left(4 - \frac{4}{2+r} - \frac{4}{2-r} \right) dr \\
&= \frac{1}{2} \log 3 + 2 - \left[\log \frac{2+r}{2-r} \right]_0^1 = 2 - \frac{3}{2} \log 3.
\end{aligned}$$

以上をまとめると，

$$I = 2\pi \times \frac{1}{2} \left(2 - \frac{3}{2} \log 3 \right) = 2\pi \left(1 - \frac{3}{4} \log 3 \right).$$

(2) (1) と同じ要領で計算すると，

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{2\pi} d\varphi \times \int_0^1 \left(\int_0^{\pi} \frac{r^2 \sin\theta}{\sqrt{r^2 - 4r\cos\theta + 4}}\, d\theta \right) dr \\
&= 2\pi \int_0^1 \left(\int_{-r}^{r} \frac{r}{\sqrt{r^2 + 4u + 4}}\, du \right) dr \\
&= 2\pi \int_0^1 \left[r \cdot \frac{2}{4} \sqrt{r^2 + 4u + 4} \right]_{u\ -r}^{r} dr \\
&= \pi \int_0^1 r\Big(|2 + r| - |2 - r| \Big)\, dr = \pi \int_0^1 2r^2\, dr = \frac{2\pi}{3}.
\end{aligned}
$$

問題 2.　D の定義に誤植があり，正しくは

$$
D = \left\{ (x, y, z);\quad \begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \\ x^2 + y^2 \leq 2x,\ z \geq 0 \end{array} \right\}
$$

とすべき問題でした．前のままでも一応計算できて (1) は $\dfrac{3\sqrt{3}}{16}$ です．(2) は非常に複雑になります．

さて，訂正した方のもので計算を行うことにする．円柱座標における Jacobian は

$$
\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \varphi, z)} = \det \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \rho.
$$

変数変換したときの動く範囲を考える．

$$
\rho^2 + z^2 \leq 4, \quad z \geq 0, \quad \rho^2 \leq 2\rho\cos\varphi \ \Leftrightarrow \rho \leq 2\cos\varphi.
$$

三番目の条件から，φ を止めておいて ρ を計算したほうが楽そうだと予測できる (先に ρ を止めると逆三角関数が出てくる)．ρ よりも先に z を止めると，ρ に関して上から z の関数で抑えることになって，φ によるものとぶつかってしまう．この議論から，計算する順番は $z \to \rho \to \varphi$ がよいと思われる．$x^2 + y^2 \leq 2x$ の図 (教科書 p.194 の図) より，各変数の動く範囲は次のようになる．

$$
-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \rho \leq 2\cos\varphi, \quad 0 \leq z \leq \sqrt{4 - \rho^2}.
$$

これより計算できる．

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^{2\cos\varphi} \left(\int_0^{\sqrt{4-\rho^2}} z \cdot \rho\, dz \right) d\rho \right\} d\varphi \\
&= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2\cos\varphi} \rho(4 - \rho^2)\, d\rho \right) d\varphi = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{4\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4} \right]_{\rho=0}^{2\cos\varphi} d\varphi \\
&= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{4 \cdot 4\cos^2\varphi}{2} - \frac{16\cos^4\varphi}{4} \right) d\varphi = \frac{1}{2} \left(8 \cdot \frac{\pi}{2} - 4 \cdot \frac{3\pi}{8} \right) = \frac{5\pi}{4}.
\end{aligned}
$$

ここで次の事実を用いた (教科書 p.116 の問題 5.109 参照).

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi\, d\varphi = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi\, d\varphi = 2\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2},$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi\, d\varphi = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi\, d\varphi = 2\cdot\frac{3\cdot 1\cdot\pi}{4\cdot 2\cdot 2} = \frac{3\pi}{8}.$$

(2) (1) と同じ要領で計算する.

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left\{\int_0^{2\cos\varphi}\left(\int_0^{\sqrt{4-\rho^2}} z^2\cdot\rho\, dz\right) d\rho\right\} d\varphi \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2\cos\varphi}\left[\frac{z^3}{3}\right]_{z=0}^{\sqrt{4-\rho^2}} d\rho\right) d\varphi \\
&= \frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2\cos\varphi} \rho(4-\rho^2)^{\frac{3}{2}}\right) d\varphi = \frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[-\frac{2}{5}\cdot(4-r^2)^{\frac{5}{2}}\right]_{\rho=0}^{2\cos\varphi} d\varphi \\
&= \frac{32}{15}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\left(\sqrt{\sin^2\varphi}\right)^{\frac{5}{2}}\right) d\varphi = \frac{32}{15}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1-|\sin\varphi|^5\right) d\varphi \\
&= \frac{2\cdot 32}{15}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\sin^5\varphi\right) d\varphi = \frac{64}{15}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{4\cdot 2}{5\cdot 3\cdot 1}\right) = \frac{32}{225}(15\pi-16).
\end{aligned}$$

(コメント) ここで扱った 3 変数の積分は計算に工夫が必要であり，少し難易度は高めです．まずは講義中に解いてもらった問題 (1) と (2) を解けるようになってください.

小レポート 13

(1) 積分する区間は例題 13.3 と同じなので，これと同じ累次積分として計算する．この問題における計算のコツは $x+y$ を展開せずにそのまま扱うこと．

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-x} \left(\int_0^{1-x-y} (x+y+z)\,dz \right) dy \right\} dx \\
&= \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-x} \left[(x+y)z + \frac{z^2}{2} \right]_{z=0}^{1-x-y} dy \right\} dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-x} \left(1-(x+y)^2\right) dy \right\} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[y - \frac{1}{3}(x+y)^3 \right]_{y=0}^{1-x} dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\frac{x^3}{3} - x + \frac{2}{3} \right]_{x=0}^{1} dx = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \right) = \frac{1}{8}.
\end{aligned}
$$

(2) 3 次元の極座標変換を用いる．Jacobian は例題 13.4 で触れたように $r^2 \sin\theta$ になる．

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{D'} (r \sin\theta \cos\varphi)^2 \cdot r^2 \sin\theta dr\, d\theta\, d\varphi \\
&= \int_0^1 r^4\, dr \times \int_0^{\pi} \sin^3\theta\, d\theta \times \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\, d\varphi \\
&= \frac{1}{5} \times \frac{4}{3} \times \pi = \frac{4\pi}{15}.
\end{aligned}
$$

ただし，$D' = \{(r,\theta,\varphi);\ 0 \le r \le 1,\ 0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi\}$ は (r,θ,φ) の動く範囲である．ここで，$u = -\cos\theta$ という変数変換による

$$
\int_0^{\pi} \sin^3\theta\, d\theta = \int_0^{\pi} (1-\cos^2\theta)\sin\theta\, d\theta = \int_{-1}^{1} (1-u^2)\, du = 2\left[u - \frac{u^3}{3} \right]_0^1 = \frac{4}{3},
$$

および $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin^2\varphi\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\, d\varphi$ より

$$
\int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\, d\varphi = \frac{1}{2}\left(\int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\, d\varphi + \int_0^{2\pi} \sin^2\varphi\, d\varphi \right) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 1\, d\varphi = \pi
$$

であることを用いた．