線形代数学・同演習 B

12 月 13 日分　小テスト

学籍番号：　　　　　　　　　　　　　　氏名：

$V=\mathbb{R}[x]_2$ 上の線形変換 T を，$T(p(x)):=p(-x+1)$ により定める．

(1) 線形変換 T の固有多項式 $g_T(t)$ を求めよ．

(2) 線形変換 T の固有値と，対応する固有ベクトル (固有空間) を求めよ．

解) まずは表現行列を求める．基底は標準基底 $[x^2,x,1]$ を選ぶ．

$$\begin{aligned} T(x^2) &= (-x+1)^2 = x^2-2x+1 = [x^2,x,1]\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}, \\ T(x) &= -x+1 \qquad\qquad\qquad\quad\; = [x^2,x,1]\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}, \\ T(1) &= 1 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\; = [x^2,x,1]\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}. \end{aligned}$$

よって，標準基底に関する表現行列は $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&-1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$ となる．

(1) $g_T(t)=g_A(t)$ であったので，

$$g_T(t)=g_A(t)=\det(tE_3-A)=\begin{vmatrix}t-1&0&0\\2&t+1&0\\-1&-1&t-1\end{vmatrix}=(t-1)^2(t+1).$$

よって，$g_T(t)=(t-1)^2(t+1)$ である．　□

(2) T の固有値は $g_T(t)=0$ の解なので，$\lambda=1,-1$ である．

(i) $\lambda=1$ のとき．まずは表現行列 A の固有ベクトルを求める．それは斉次の連立一次方程式 $(E_3-A)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\mathbf{0}$ の解なので，これを解く：

$$E_3-A=\begin{pmatrix}0&0&0\\2&2&0\\-1&-1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{簡約化}}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

方程式に戻せば $x+y=0$, z: 任意，なので，この方程式の解は $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ となる．これより，表現行列 A の固有ベクトルは $\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ である．今求めたいのは線形変換 T の固有ベクトルであるので，基底 $[x^2,x,1]$ を付けて V の元に戻す必要がある．よって，T の固有値 $\lambda=1$ に対する固有ベクトルは $[x^2,x,1]\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=x-x^2$, $[x^2,x,1]\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=1$ であり，固有空間は $W(1;T)=\mathrm{Span}(x-x^2,1)$ となる．

※講義や講義内容に関して，意見・感想・質問等を自由に記述してください．

(ii) $\lambda = -1$ のとき．同じく A の固有ベクトルから求める．

$$-E_3 - A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

方程式に戻せば，$x = 0$, $y + 2z = 0$, なので，方程式の解は $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ となる．これより，表現行列 A の $\lambda = -1$ に対する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ である．これを V の元に戻せばよいので，T の $\lambda = -1$ に対する固有ベクトルは $[x^2, x, 1] \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = -2x + 1$ であり，固有空間は $W(-1;\, T) = \mathrm{Span}(-2x+1)$ となる．

以上より，線形変換 T の固有値は $\lambda = 1, -1$ であり，その固有空間は

$$W(1;\, T) = \mathrm{Span}(x - x^2, 1), \quad W(-1;\, T) = \mathrm{Span}(-2x+1)$$

である．$\square$