

線形代数学・同演習 B

10月24日分 質問への回答

質問 今回の(2)の問題はとても難しかったです。(1)は高校の復習のような感じで思い出しながら解き楽しかったです。ただ、原始関数の場合、積分定数は必要なのでしょうか？教えて頂けると幸いです。

- 連鎖律は何を計算しているのかが見えにくいので、始めのうちは戸惑うかと思います。これは、たとえば積分や微分方程式などで座標変換を行う際に、元の座標系での変化量を、変換後の座標系での変化量で書き直すというものです。また、この講義では積分定数を書く必要はありません。しかし微分方程式などでは、初期値の決定において積分定数がないと困ることになるので気をつけておきましょう。

質問 (2)と(1)の f_2 が全くわからず、友達に教えてもらいました。今もよくわかっていないのでくわしい解説お願いします。

- (2)は、実は演習問題3にある問題1の(2)と全く同じ問題です。解答は結構詳しく書いたつもりなので、そちらを参照ください。(1)の f_2 は、分子が分母を微分したものであることに気がつけばすぐに終わります。もちろん、いつでもそのように出来るとは限らないので、前期の講義(教科書 p.99)の方法の解説をします。 $\sin x$, $\cos x$ で表される有理関数は、 $t = \tan \frac{x}{2}$ と変数変換すれば、(原理的には)必ず計算できる形になります。このように変数変換すれば、

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

なので、

$$I = \int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} dx = \int \frac{\frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = -2 \int \frac{t^2 + 2t - 1}{(t^2 - 2t - 1)(t^2 + 1)} dt.$$

ここで、最後の式の被積分関数を部分分数分解すれば、

$$\frac{-2(t^2 + 2t - 1)}{(t^2 - 2t - 1)(t^2 + 1)} = \frac{2t}{1+t^2} - \frac{2t-2}{t^2-2t-1} = \frac{(1+t^2)'}{1+t^2} - \frac{(t^2-2t-1)'}{t^2-2t-1}$$

となるので、

$$I = \int \left\{ \frac{(1+t^2)'}{1+t^2} - \frac{(t^2-2t-1)'}{t^2-2t-1} \right\} dt = \log(1+t^2) - \log|t^2-2t-1|$$

よって $t = \tan \frac{x}{2}$ と変数を戻してやれば、 $1 + \tan^2 \frac{x}{2} = (\cos^2 \frac{x}{2})^{-1}$ であることと

$$\cos^2 \frac{x}{2} \left| \tan^2 \frac{x}{2} - 2 \tan \frac{x}{2} - 1 \right| = \left| \sin^2 \frac{x}{2} - 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2} \right| = |-\cos x - \sin x|$$

に注意して、次のように計算できる。

$$I = \log \frac{1+t^2}{|t^2-2t-1|} = -\log |\sin x + \cos x|.$$

このように、計算の途中で部分分数分解が必要になります。積分の変数変換は、後期後半でも必要となってくるものなので、計算に自信がないようならば今のうちから復習しておきましょう。

質問 先生のコスプレクオリティ高すぎです。

- 私はコスプレをした記憶が無いのですが...

質問 連鎖律の考え方がまだあいまいでうまく理解できていない。

- 連鎖律の使い方が難しかったです。
 - 連鎖律が理解しづらい
- 上述のように連鎖律は、たとえば積分や微分方程式などで座標変換を行う際に、元の座標系での変化量を、変換後の座標系での変化量で書き直すというものです。計算に慣れるまでが大変ですが、演習問題3の解答は結構丁寧に書いたつもりなので、それを見て習得してください。

質問 なんとか理解できた気がします。

— それはよかったです。

質問 連鎖律

大変です！

— 連鎖律の計算は慣れるまでが大変です。絵をここに載せるのはいろいろな事情により躊躇われたのでやめておきます。