線形代数学・同演習 B

演習問題 6

1. (1) $\begin{pmatrix} -1 & -10 & -10 \\ -4 & -23 & -25 \end{pmatrix}$ (2) $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 15 & 0 & -7 \\ 23 & 4 & -11 \end{pmatrix}$

(考え方) 与えられた $\mathbb{R}^3$ の基底をなすベクトルを並べた行列を P, $\mathbb{R}^2$ の基底をなすベクトルを並べた行列を Q とすれば，求める表現行列は，講義中の定理により $Q^{-1}AP$ により計算できる．

2.[†] (1) $\begin{pmatrix} 21 & -8 & 12 \\ 10 & -3 & 6 \\ -25 & 10 & -14 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(考え方) 問題 1 と同様の問題であるが，本問の場合は行った先の空間が元の空間と同じものを指定しているので，$Q = P$ として考えることに注意が必要．したがって，P を基底ベクトルを並べた行列とすれば $P^{-1}AP$ を計算すればよい．

3. (1) $h(x) = \lambda p(x) + \mu q(x)$ (p, q は多項式) とおいて，$T(h(x)) = \lambda T(p(x)) + \mu T(q(x))$ を満たすことを確認する．(2) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(考え方) (2) は基底毎に調べる．(3) は定理を用いても良いが，この場合は直接調べるほうが楽である．

4.[†] (1) 下記参照．(2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ (3) $\operatorname{rank} T = 3$, $\operatorname{null} T = 0$.

(1) 多項式 $p(x), q(x)$ およびスカラー λ, μ に対して，

$$\begin{aligned} T(\lambda p(x) + \mu q(x)) &= (x+1)^2 \left(\lambda p\left(\tfrac{x-1}{x+1}\right) + \mu q\left(\tfrac{x-1}{x+1}\right)\right) \\ &= \lambda \cdot (x+1)^2 p\left(\tfrac{x-1}{x+1}\right) + \mu \cdot (x+1)^2 q\left(\tfrac{x-1}{x+1}\right) \\ &= \lambda T(p(x)) + \mu T(q(x)) \end{aligned}$$

より線形写像である．(2) $x^2 \longmapsto (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$; $x \longmapsto (x-1)(x+1) = x^2 - 1$; $1 \longmapsto (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ であるので，この線形変換の標準基底に関する表現行列は $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$．(3) この行列を簡約化すると $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ となるので階数は主成分の数であるので 3．退化次元は，次元公式より $3 - 3 = 0$ となる．

5.[*] (1)($\Rightarrow$) V の基底を $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ とすれば，T の全射性から，ある $\boldsymbol{u}_j$ が存在してそれ

---

11 月 14 日分 (凡例：無印は基本問題，† は特に解いてほしい問題，∗ は応用問題)

講義用 HP: http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~h-nakashima/lecture/2017LA.html

ぞれ $T(\boldsymbol{u}_j) = \boldsymbol{v}_j$ となるので $\dim \operatorname{Im} T \geq \dim V$．また $\operatorname{Im} T$ は V の部分空間なので $\dim \operatorname{Im} T \leq \dim V$ である．したがって $\dim \operatorname{Im} T = \dim V$．

($\Leftarrow$) 部分空間の次元が全空間と一致しているならば，その部分空間は全空間と一致する (10 月 31 日の問題 6 (2)) ので，$\operatorname{Im} T = V$．

(2)($\Rightarrow$) 単射性より明らか．($\Leftarrow$) U の二元 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}'$ を任意にとる．このとき $T(\boldsymbol{u}) = T(\boldsymbol{u}')$ とすると，T の線形性より

$$\mathbf{0}_V = T(\boldsymbol{u}) - T(\boldsymbol{u}') = T(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}').$$

ここで $\ker T = \{\mathbf{0}_U\}$ であることより，$\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}' = \mathbf{0}_U$，つまり $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}'$ であるので，T は単射となる．

(3) 基底を一つ選び，そのときに現れる列ベクトルを対応させる線形写像により，同型となる．