微分積分学・同演習 A

演習問題 4

1. 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を次の漸化式によって定める．このとき以下の設問に答えよ．

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{\sqrt{a_n^2+1}-1}{a_n}.$$

(1)† $\{a_n\}$ は単調減少となることを示し，0 に収束することを示せ．

(2)* 数列 $\{2^{n+1}a_n\}$ も単調減少し，0 でない実数に収束することを示せ．

(3)* (2) の数列の極限値を予測せよ*1．なぜその数に収束するか，理由を考えよ．

2. 次の漸化式が収束することを示し，その極限を求めよ*2．

(1) $a_1 = \sqrt{2},\ a_{n+1} = \sqrt{a_n}$　　(2) $a_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{(n+1)!}$

(3)† $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \dfrac{1}{a_n+1}$　　(4)† $a_1 = 1,\ a_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{a_n}$

3. $a_1 > 0,\ A > 0,\ a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{A}{a_n}\right)$ のとき，$\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ*3．

4. 次の集合の上限を求めよ*4．

(1) $S_1 = \left\{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}\right\}$　　(2) $S_2 = \left\{1 - \frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}\right\}$

(3) $S_3 = \left\{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2};\ n \in \mathbb{N}\right\}$　　(4) $S_4 = \{\log x;\ x > 0\}$

(5) $S_5 = \{1 - x^x;\ 0 < x < 1\}$　　(6) $s_6 = \left\{\frac{e^x+e^{-x}}{2};\ -1 < x < 1\right\}$

5.† 「連続関数は有界閉区間上で最大値および最小値をとる」という定理において，

(i) 区間が有界であること，

(ii) 閉区間であること，

(iii) 関数が連続であること，

はすべて必要である．これらのうち一つが成り立たないとして，定理が成立しないような関数 $f(x)$ をそれぞれ構成せよ*5．

6.* 上記の問題 5 において，有界**開**集合の場合は教科書の (有界閉集合に対する) 証明がなぜうまくいかないのか，その理由を答えよ．

---

5 月 9 日分 (凡例：無印は基本問題，† は特に解いてほしい問題，∗ は応用問題)

講義用 HP: http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~h-nakashima/lecture/2017C.html

*1 必要ならば計算機を用いてもよい．

*2 ヒント：(3) と (4) は偶数の部分列 $\{a_{2k}\}$ と奇数の部分列 $\{a_{2k+1}\}$ に分けて考える．

*3 ヒント：先に極限値を推測して，ε-δ 論法に持ち込む．

*4 (3) の級数はバーゼル問題として有名．1735 年に Euler（オイラー）によって初めて求められた．

*5 たとえば (i),(ii) は成立するが (iii) は成立しない場合など．3 パターンある．