演習問題 2

問題 1. (1) 全微分可能 (2) 全微分可能でない

(考え方) 偏微分を計算してそのすべてが連続ならば全微分可能である．また，元の関数が連続でなければ全微分ではない (「全微分ならば連続」の対偶).

問題 2. まず定義に従って $f_x(0,0)$ および $f_y(0,0)$ を計算する．

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} h \sin \frac{1}{h^2} = 0.$$

同様に $f_y(0,0) = 0$．よって関数 f の接平面 (の候補) は xy 平面以外にはありえないが $(z = f(0,0) + f_x(0,0)(x-0) + f_y(0,0)(y-0) = 0)$，このとき

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|f(x,y) - 0|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2} \sin \frac{1}{x^2+y^2} = 0$$

であるので，関数 $f(x,y)$ は全微分可能である．一方で $(x,y) \neq (0,0)$ のとき

$$f_x(x,y) = 2x \left(\sin \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{1}{x^2+y^2} \cos \frac{1}{x^2+y^2} \right)$$

であり，x 軸に沿った極限を考えると

$$\lim_{x\to 0} f_x(x,0) = \lim_{x\to 0} \left(2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2x}{x^2} \cos \frac{1}{x^2} \right)$$

であるが，第 2 項が発散するので，f_x は $x = 0$ で連続でない．f_y についても同様.

問題 3.† (1) $z = -3x - 3y$ (2) $z = 1$ (3) $z = 1$

(考え方) 偏微分を計算し，連続であることを確認する．分母にある関数が考える点において零にならなければよい．接平間は公式を適用する．

(1) $f_x = 3x^2 - 3$, $f_y = 3y^2 - 3$ より連続なので全微分可能．またこれより接平面は $z = 0 - 3x - 3y$ となる．(2) $g_x = -x(1-x^2-y^2)^{-1/2}$, $g_y = -y(1-x^2-y^2)^{-1/2}$ より，これらの関数は原点で連続ゆえ全微分可能である．またこれより接平面は $z = 1 + 0\cdot x + 0 \cdot y$ となる．(2) $h_x = x(1-x^2-y^2)^{-3/2}$, $h_y = y(1-x^2-y^2)^{-3/2}$ より，これらの関数は原点で連続ゆえ全微分可能である．またこれより接平面は $z = 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot y$ となる．

問題 4.† (1) $\nabla f(\boldsymbol{x}) = (3x^2 - 3, 3y^3 - 3)$, $f_{xx} = 6x$, $f_{xy} = f_{yx} = 0$, $f_{yy} = 6y$.

(2) $\nabla g(\boldsymbol{x}) = (-\dfrac{y}{x^2+y^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2})$,

$g_{xx} = \dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$, $g_{xy} = g_{yx} = \dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$, $g_{yy} = \dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$.

(3) $\nabla h(\boldsymbol{x}) = (\dfrac{-y^3}{(x^2-y^2)^{3/2}}, \dfrac{x^3}{(x^2-y^2)^{3/2}})$,
$h_{xx} = \dfrac{3xy^3}{(x^2-y^2)^{5/2}}$, $h_{xy} = \dfrac{-3x^2y^2}{(x^2-y^2)^{5/2}}$, $h_{yy} = \dfrac{3x^3y}{(x^2-y^2)^{5/2}}$
(考え方) 定義に従って計算するだけ．

問題 5.* $f_{xy}(0,0) = -1$, $f_{yx}(0,0) = 1$．これより特に，一般には $f_{xy} \neq f_{yx}$ がわかる．
まず $(x,y) \neq (0,0)$ のとき

$$f_x(x,y) = \frac{x^4y - y^5 + 4x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}, \quad f_y(x,y) = \frac{x^5 - 4x^3y^2 - xy^4}{(x^2+y^2)^2}$$

である．$(x,y) = (0,0)$ のときは場合分けが必要で，この場合は定義より

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0, \quad f_y(0,0) = 0.$$

これらを用いて $f_{xy}(0,0)$, $f_{yx}(0,0)$ を計算する．

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_x(0,h) - f_x(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{0 - h^5 + 0}{h^4} = -1,$$
$$f_{yx}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_y(h,0) - f_y(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{h^5 - 0 - 0}{h^4} = 1.$$

小レポート 2

(1) 与えられた関数の n 階導関数は次の通り．

$$(\sin x)^{(n)} = \sin(n + \tfrac{n\pi}{2}), \qquad \left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}, \qquad (e^{2x})^{(n)} = 2^n e^{2x},$$

$$(e^x \sin x)^{(n)} = (\sqrt{2})^n e^x \sin(x + \tfrac{n\pi}{4}), \qquad (\sin^3 x)^{(n)} = \frac{3}{4}\sin(x + \tfrac{n\pi}{2}) - \frac{3^n}{4}\sin(3x + \tfrac{n\pi}{2}).$$

コメント． n 階導関数の計算に対する一般の公式はありません．基本的なもの $((x^m)^{(n)} = n(n-1)\cdots(n-m+1)x^{m-n}$ や $(e^x)^{(n)} = e^x$，そして $\sin x$ や $\cos x$ など) と合成関数の微分，Leibniz の公式で分かる場合はよいですが，そうでないならば $n = 3$ くらいまで計算して当たりをつけ，帰納法に持ち込むとうまくいくことも多いです．

(2) (i) 偏導関数が連続であることを確認する．$f_x(x, y) = \dfrac{-x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$，$f_y(x, y) = \dfrac{-y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$ であるが，これらの関数の分母は考えている領域 $x^2 + y^2 < 1$ では決して 0 にならないので，(連続関数同士の合成はまた連続関数になることより) 連続になる．したがって $f(x, y)$ は全微分可能である．(ii) $\dfrac{y^2 - 1}{(1 - x^2 - y^2)^{3/2}}$，$\dfrac{x^2 - 1}{(1 - x^2 - y^2)^{3/2}}$．(iii) 公式 $z = f(\boldsymbol{a}) + f_x(\boldsymbol{a})(x - a) + f_y(\boldsymbol{a})(y - b)$ を用いると

$$z = \sqrt{1 - a^2 - b^2} - \frac{a(x - a)}{\sqrt{1 - a^2 - b^2}} - \frac{b(y - b)}{\sqrt{1 - a^2 - b^2}} = \frac{1 - ax - by}{\sqrt{1 - a^2 - b^2}}$$

コメント． 高階偏微分は，各ステップでの計算はただの 1 変数の微分なので，丁寧に計算すれば間違えることはありません．ただし 2 変数関数の n 階偏導関数は，なめらかならば $f_{xy} = f_{yx}$ によって $n + 1$ 個存在しますが，一般には 2^n 個だけ存在することには注意が必要です．