線形代数学・同演習 B

11 月 1 日分　演習問題[*1]

1. 略.
2. (1) 次元は 3，基底は例えば $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4$. (2) 次元は 2，基底は例えば $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_3$.
3.[†] (1) 次元は 2，基底は例えば $f_1(x)$ と $f_2(x)$ (2) 次元は 3，基底は例えば $g_1(x)$, $g_2(x)$ と $g_4(x)$ (3) 次元は 4(よって問題 7 より $\mathbb{R}[x]_3$ と一致する)，基底は例えば $H_0(x), \dots, H_3(x)$，あるいは $1, x, x^2, x^3$ でもよい.
   多項式の標準基底 $[1, x, x^2, x^3]$（あるいは $[x^3, x^2, x, 1]$）に関してベクトル表示をして，そのベクトルの組に対して問題 2 と同様の計算を行う．基底も主成分に対応する列を持ってくればよいが，考えている空間が多項式の空間なので，基底も多項式に戻すことを忘れずに.
4.[†] (1) 次元は 1，基底は例えば $\begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. (2) 次元は 2，基底は例えば $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.
5. (1) $\begin{pmatrix} 56 & -17 \\ -23 & 7 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 76 & -29 \\ -55 & 21 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 13 & -4 & 16 \\ 6 & -1 & 8 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; 行列として $(\boldsymbol{u})^{-1}(\widetilde{\boldsymbol{u}})$ を計算すればよい.
6. U の二つの基底をそれぞれ $[\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n]$ と $[\widetilde{\boldsymbol{u}}_1, \dots, \widetilde{\boldsymbol{u}}_n]$ とし，基底の変換行列を $P = (\boldsymbol{p}_1, \dots, \boldsymbol{p}_n)$ とおく．このとき $[\widetilde{\boldsymbol{u}}_1, \dots, \widetilde{\boldsymbol{u}}_n] = [\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n]P$ である．さて，$\boldsymbol{p}_1, \dots, \boldsymbol{p}_n$ の線形独立性を調べるので，$a_1\boldsymbol{p}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{p}_n = \boldsymbol{0}$ とおく．このとき，
$$\boldsymbol{0} = [\boldsymbol{u}]\sum_{i=1}^{n} a_i\boldsymbol{p}_i = [\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n]P\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = [\widetilde{\boldsymbol{u}}_1, \dots, \widetilde{\boldsymbol{u}}_n]\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_1\widetilde{\boldsymbol{u}}_1 + \cdots + a_n\widetilde{\boldsymbol{u}}_n.$$
   ここで $\widetilde{\boldsymbol{u}}_1, \dots, \widetilde{\boldsymbol{u}}_n$ は線形独立なので，$a_1 = \cdots = a_n = 0$ でなければならない．よって，$\boldsymbol{p}_1, \dots, \boldsymbol{p}_n$ は線形独立となる.
7.[†] (1) $m = \dim W$ とおき，$\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m$ をその基底とする．すると，これらは V においても線形独立である．$\dim V$ は V から取り出せる線形独立なベクトルの最大個数だったので，$\dim V \geq m = \dim W$ となる.
   (2) $\Leftarrow$ は明らかなので，$\Rightarrow$ を示す．まず明らかに $W \subset V$ である．(1) と同様に $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m$ を W の基底とする．$\dim V = m$ であるので，V の元は m 個の線形独立なベクトルの線形結合で表すことができるが，そのベクトルとして $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m$ を選べば，V の任意の元は W の元 $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m$ の線形結合で書けることになる．つまり $V \subset W$ となるので，$W = V$ である.
8.[*] (1) $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty} \in V$ のとき，
$$a_{k+3} + b_{k+3} = (7a_{k+1} + 6a_k) + (7b_{k+1} + 6b_k) = 7(a_{k+1} + b_{k+1}) + 6(a_k + b_k)$$
   などより，ベクトル空間となる．また，次元は 3 となる (自由に動けるパラメータは x_0, x_1, x_2 の 3 つだけなので)．(2) (1) より, 条件となっている漸化式を満たすものを 3 つ持ってくればよいが, この漸化式の特性方程式 $x^3 = 7x + 6x$ の解である $\lambda = 3, -1, -2$ は $\lambda^{k+3} = 7\lambda^{k+1} + 6\lambda^k$ を満たすので，$\{3^n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{(-1)^n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{(-2)^n\}_{n=0}^{\infty}$ はこのベクトル空間の基底となる.[*2]

[*1] 凡例：無印は基本問題，† は特に解いてほしい問題，$*$ は応用問題.

[*2] 特に一般項が $x_n = 3^n a + (-1)^n b + (-2)^n c$ の形なので，x_0, x_1, x_2 が与えられれば，簡単な連立一次方程式を解い

1. コラムの問題の解答.

$$
\begin{aligned}
q_1(x) &= \tfrac{1}{720}(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)\\
q_2(x) &= -\tfrac{1}{120}(x-1)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)\\
q_3(x) &= \tfrac{1}{48}(x-1)(x-2)(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)\\
q_4(x) &= -\tfrac{1}{36}(x-1)(x-2)(x-3)(x-5)(x-6)(x-7)\\
q_5(x) &= \tfrac{1}{48}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-6)(x-7)\\
q_6(x) &= -\tfrac{1}{120}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-7)\\
q_7(x) &= \tfrac{1}{720}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)
\end{aligned}
$$

$$
\alpha+\frac{105-49\alpha}{20}n-\frac{2881-812\alpha}{360}n^2+\frac{242-49\alpha}{48}n^3-\frac{214-35\alpha}{144}n^4+\frac{50-7\alpha}{240}n^5-\frac{8-\alpha}{720}n^6.
$$

て係数である a,b,c を求めることにより一般項を得ることができるようになっている．これは一般の (線形な) 漸化式でも，重解がなければ使える手法である．