7　高次の導関数

我々がよく用いる関数は，その導関数もまた微分ができることが多い．関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ をさらに微分した関数は第 2 次導関数と呼ばれ，$f''(x)$ のように表す．これをさらに微分したものは第 3 次導関数 $f'''(x)$ である．一般に，関数 $y = f(x)$ を n 回微分してられる関数を $f(x)$ の第 n 次導関数といい，

$$y^{(n)}, \quad f^{(n)}(x), \quad \frac{d^n y}{dx^n}, \quad \frac{d^n}{dx^n} f(x)$$

などで表す．$n = 3$ くらいまでは $f''(x)$ や $f'''(x)$ などのように，$'$ を用いて表すことが多い．また $f^{(0)}(x) = f(x)$ と考える．2 次以上の導関数を高次導関数という．なお，第 n 次導関数のことを n 階導関数ということもある．

ここでいくつか記号を用意する．

(1) **階乗** $n!$：1 から n までの整数の積．つまり，

$$n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$$

(2) **一般二項係数** $\binom{p}{r}$：実数 p から r 個の下降階乗冪を階乗 $r!$ で割ったもの，つまり

$$\binom{p}{r} := \frac{p(p-1)(p-2)\cdots(p-r+1)}{r!}$$

p が正の整数 $p = n$ ならば，これは通常の二項係数 ${}_nC_r$ と一致する．

例題 7.1

$n = 1, 2, 3, 4$ に対して $\binom{\frac{1}{2}}{n}$ を計算せよ．

定理 7.2

初等関数の第 n 次導関数は以下の通り．

(1) $\left(e^x\right)^{(n)} = e^x$

(2) $\left(x^p\right)^{(n)} = p(p-1)(p-2)\cdots(p-n+1)x^{p-n}$

(3) $\left(\sin x\right)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$

(4) $\left(\cos x\right)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$

(5) $\left(\log x\right)^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}$

定理 7.3 (Leibniz の公式)

$$\Big(f(x)g(x)\Big)^{(n)} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} f^{(n-j)}(x) g^{(j)}(x).$$

7.1　グラフの概形 2

関数が増加するといっても，のように増加するか，あるいはのように増加するかでその形は大きく変わってくる．数学の言葉でいえば，その区間で**上に凸**か**下に凸**かということであるが，これは関数の第 2 次導関数を調べることにより調べることができる．

定義． 関数 $y = f(x)$ のグラフにおいて，$x = a$ に対する点で曲線の接線を引くとき，その近くでグラフがその接線の上側にあれば「**上に凸**」，下側にあれば「**下に凸**」という．その接点の前後でグラフの凹凸が変わるとき，その点を「**変曲点**」という．

下に凸な関数の代表例は $y = x^2$ であり，上に凸な関数の代表例は $y = -x^2$ である (下図参照)．

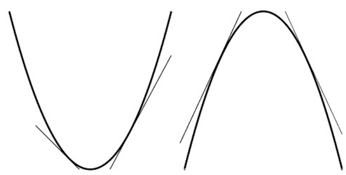

図 7.1　下に凸（左）と上に凸（右）

定理 7.4

関数 $f(x)$ はある区間で 2 回微分可能であり，$f''(x)$ が連続であるとする．このとき，

(1) 常に $f''(x) > 0$ ならば $y = f(x)$ は下に凸，

(2) 常に $f''(x) < 0$ ならば $y = f(x)$ は上に凸，

(3) 変曲点においては，$f''(x) = 0$

また，$f''(a)$ の正負によって極大・極小も判定できる．なお $f''(a) = 0$ であっても，$x = a$ が変曲点になるとは限らない．例えば $f(x) = x^4$ の $x = 0$ がその例になる．$x = a$ の前後で $f''(x)$ の符号が変わるならば，そのときは変曲点になる．

例題 7.5

関数 $y = -x^3 + 6x^2 - 9x + 1$ の増減，極値，凹凸，変曲点を調べてグラフを描け．

解． 極値や凹凸，変曲点を調べるので，与えられた関数の第 2 次導関数まで計算する．

$$y' = -3x^2 + 12x - 9 = -3(x-1)(x-3)$$
$$y'' = -6x + 12 = -6(x-2)$$

極値の候補は $y'=0$ となる点であるので，$x=1, x=3$ の 2 点である．これらの点における第 2 次導関数の正負を調べると $f''(1)=6>0,\ f''(3)-6<0$ なので，$x=1$ で極小，$x=3$ で極大となる．変曲点の候補は $y''=0$ となる点なので $x=2$ である．この点の前後で y'' の符号が異なっているので，$x=2$ は変曲点になる．

次にグラフを描くための情報を調べる．凹凸・変曲点以外は前回と変わらない．まずは $\pm\infty$ における挙動．最高次の項の係数は -1 と負なので，

$$\lim_{n\to+\infty} f(x)=-\infty, \quad \lim_{n\to-\infty} f(x)=+\infty.$$

次に軸との交点．y 軸との交点は $f(0)=1$．一方 x 軸との交点は計算が難しいので省略する (無理に求めなくてもよい)．極値・変曲点での値はそれぞれ

$$\begin{aligned} f(1)&=-1+6-9+1=-3,\\ f(3)&=-27+6\times 9-9\times 3+1=1,\\ f(2)&=-8+6\times 4-9\times 2+1=-1 \end{aligned}$$

また，この関数は特異点を持たない．これより増減表は

x	$-\infty$	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$	3	$\cdots$	$+\infty$
y'		$-$	0		$+$		0	$-$	
y''			$+$		0		$-$		
y	$+\infty$	↘	極小	↗	変曲点	↗	極大	↘	$-\infty$

となり，これより関数 $y=f(x)$ のグラフの概形は以下のようになる (赤い箇所は次の例題で用いる)．

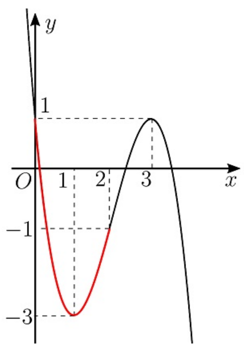

図 7.2　$y=-x^3+6x^2-9x+1$ のグラフ

7.2　最大値・最小値

限られた区間で関数の最大値・最小値を考える場合がある．考える区間が「**閉区間**」ならば，連続関数は必ず最大値・最小値を持つ．グラフを描いてみればわかるが，最大 (最小) になりうる点というのは

1. $f'(x)=0$ である点（極値）
2. 区間の端点
3. 微分不可能な点

のいずれかになる．よって，これらを調べてそこでの関数の値を比較して，最も大きい (小さい) ものをとればよい．なお，開区間では必ずしも存在するとは限らないということに注意してほしい[*1]．

例題 7.6

関数 $f(x)=-x^3+6x^2-9x+1$ の $0\leqq x\leqq 2$ という区間における最大値と最小値を求めよ．

解． 増減表・グラフをかいて，どこが一番大きい/小さいかを判断する．今の場合は図 7.2 が利用できる．図 7.2 のように，赤い箇所が区間 $0\leqq x\leqq 2$ で関数 $y=f(x)$ が取りうる値の範囲である．よって，$f(x)$ は $x=0$ で最大値 1，$x=1$ で最小値 -3 を取る．　□

7.3　まとめ

- 高次の導関数
- 初等関数の第 n 次導関数の公式
- 上に凸，下に凸，変曲点について
- グラフの描き方（その２）

7.4　演習問題

(1) 次の関数について，第 4 次導関数まで計算せよ．

(a) $\tan x$　(b) $\operatorname{Arcsin} x$　(c) $\sqrt{1+x}$　(d) $e^x\cos x$

(2) 関数 $y=e^x\sin x$ について第 2 次導関数までを計算し，$y''+2y'+2y=0$ を満たすことを確認せよ．

(3) 次の関数について，与えられた区間における極値，凹凸および変曲点を調べ，そのグラフの概形を描け．

(a)　$y=x+2\sin x \quad (0\leqq x\leqq 2\pi)$

(b)　$y=x^2e^{-x} \quad (x\geqq 0)$

7.4.1　ヒント等

(1) (a) は $\tan x$ の微分を $\tan x$ を用いて表示すれば幾分か計算が楽になる．(d) は Leibniz の公式を使うのが楽．(2) このような微分が入った方程式を微分方程式という．(3) (a) $y=x$ のグラフも描いて比較するとよいだろう．(b) 変曲点は 2 つ．

[*1] $f(x)=\frac{1}{x}$ の区間 $(0,1)$ での最大・最小を考えるとよい．