線形代数学・同演習 B

10 月 18 日分　小テスト

学籍番号：　　　　　　　　　　　　　氏名：

ベクトル空間 $V = \mathbb{R}[x]_2$ において，次の多項式の組は線形独立かどうか判定せよ．

(1)　$p_1(x) = 1,\ p_2(x) = 1 + x,\ p_3(x) = 1 + x + x^2.$

(2)　$q_1(x) = 1 - x + 2x^2,\ q_2(x) = 1 + x + 3x^2,\ q_3(x) = -1 + 7x + x^2.$

ただし，$1, x, x^2$ が線形独立であることは既知とする．

(考え方) ‘方程式’$ap_1(x) + bp_2(x) + cp_3(x) = 0$ の解 (a, b, c) について調べ，その解が $(0, 0, 0)$ のみならば線形独立，それ以外の解を持つならば線形従属である．

(1) $ap_1(x) + bp_2(x) + cp_3(x) = (a + b + c) \cdot 1 + (b + c)x + cx^2$ なので，上記の方程式は次の連立一次方程式

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ \quad\ \ b + c = 0 \\ \qquad\quad c = 0 \end{cases}$$

の解と一致するが，これを解けば $(a, b, c) = (0, 0, 0)$ であるので，p_1, p_2, p_3 は線形独立である．

(2) $aq_1(x) + bq_2(x) + cq_3(x) = (a + b - c) \cdot 1 + (-a + b + 7c)x + (2a + 3b + c)x^2 = 0$ なので，上記の方程式は次の連立一次方程式

$$\begin{cases} a + b - c = 0 \\ -a + b + 7c = 0 \\ 2a + 3b + c = 0 \end{cases}$$

の解と一致するが，この係数行列を簡約化すると，

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となり，この連立方程式はパラメータを持つ．つまり $(a, b, c) = (0, 0, 0)$ 以外の解を持つので，q_1, q_2, q_3 は線形従属となる．

※講義や講義内容に関して，意見・感想・質問等を自由に記述してください．