

線形代数学・同演習 B

小テスト 12 (1 月 23 日分)

学籍番号：

氏名：

実対称行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ が正定値であることを，固有値を求めることによって直

接示せ．

(考え方) 実対称行列の固有値がすべて正であるとき，正定値であるという．よって，固有値を計算して全て正であることを確認する．実際の計算では，主小行列式がすべて正であることも同値なので，それを利用するとよい．

解． A の固有多項式は

$$g_A(t) = (t - 1)^2(t - 4)$$

なので，固有値は $1, 4$ である．これらはどちらも正なので， A は正定値である．

別解．与えられた行列の主小行列は

$$A_1 = (2), \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

である (左上から正方行列をとる) ので，

$$\det A_1 = 2, \quad \det A_2 = 4 - 1 = 3$$

および

$$\det A_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 4.$$

よって，主小行列式がすべて正なので， A は正定値である．

講義や講義内容に関して，意見・感想・質問等を自由に記述してください．