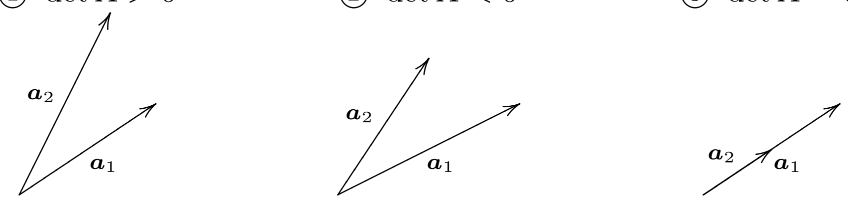
2 次正方行列 $A = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$ の行列式の符号と，行列を構成するベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ の位置関係について，次のようになると説明しました．

① $\det A > 0$　　② $\det A < 0$　　③ $\det A = 0$



これについてもう少し詳しく説明します．③のときは明らかなので，$\det A \neq 0$ としておきます．例えば複素数 $z = x + yi$ を $z = re^{i\theta}$ のように分解すると複素数の積の意味が明白になったように，行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$$

のように‘分解’します (**岩澤分解**という分解の応用です)．ただし，θ は適当な角度，ε は $+1$ か -1 のいずれか，α は実数で d_1, d_2 は正の実数です．このように分解できることは，後期に紹介する Gram–Schmidt の正規直交化法から分かります．また，この分解に現れる行列のうち $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{smallmatrix}\right)$ 以外の行列は行列式は常に正であり，したがって (行列式の積公式より) ε は $\det A$ の符号と一致することが分かります．さて，A を図形 (単位正方形としましょう) に作用させることは，右辺にある各行列を右から順に作用させていくことと対応しています．まず $\left(\begin{smallmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{smallmatrix}\right)$ は単位正方形を拡大 (又は縮小) して長方形に変形させます．次に $\left(\begin{smallmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ は長方形の上の辺を横にスライドさせ平行四辺形に変形させます (ウェブページのアプリケーションを参照)．次に $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{smallmatrix}\right)$ は $\varepsilon = -1$ ならば，平行四辺形を x 軸に関して反転させます．最後に $\left(\begin{smallmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{smallmatrix}\right)$ で回転させると，A によって得られる平行四辺形とちょうど一致します．単位ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ はそれぞれ $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ に移ることに注意してください．分解して行った操作のうち，$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ (が移っていくベクトル) の位置関係を変える操作は，$\varepsilon = -1$ のときの反転 $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{smallmatrix}\right)$ のときだけです．ε は $\det A$ の符号と一致していたことを思い出すと，$\det A$ の符号が負のときに限って反転が起こり，それに伴って $\boldsymbol{a}_1$ と $\boldsymbol{a}_2$ の位置関係が変わるのです．