7　最大値・最小値の問題

前回，連続関数は有界閉集合上で必ず最大値および最小値をとるということを紹介した．ここで問題になるのは，その最大値・最小値をどこでとるかということである．1 変数関数の場合は，極値か区間の端点かのいずれかであった．実は 2 変数関数のときも，次の定理にあるように，1 変数のときと同様である．

定理 7.1. 連続関数 $f(x,y)$ が点 $\boldsymbol{a}$ において有界閉集合 C 上における最大値 (最小値) をとるならば，$\boldsymbol{a}$ は，① f の停留点，② C の境界点，のいずれかである．

つまり，有界閉集合上の最大・最小を調べる際には，例えば $C = \big\{(x,y);\ x^2+y^2 \leq 1\big\}$ の場合にはその境界 $x^2+y^2=1$ 上での f の振る舞いも調べる必要がある．

7.1　条件付き極値問題

平面曲線 $g(x,y)=0$ 上での 2 変数関数 $f(x,y)$ の極値について考える．

定理 7.2. 条件 $g(x,y)=0$ のもとで関数 $f(x,y)$ が点 $\boldsymbol{a}$ で広義の極値をとるとする．もし $\boldsymbol{a}$ が曲線 N_g の非特異点ならば，ある実数 α が存在して，$f_x(\boldsymbol{a}) = \alpha g_x(\boldsymbol{a})$ かつ $f_y(\boldsymbol{a}) = \alpha g_y(\boldsymbol{a})$ をみたす[*1]．

(コメント) 証明には陰関数定理を用いる．

注意 7.3. この定理は次の形で使われる．
▶ 条件 $g(x,y)=0$ のもとでの関数 $f(x,y)$ の広義の極値の候補は，次の ① および ② で尽くされる:
① 平面曲線 $g(x,y)=0$ の特異点，
② 3 つの未知数 x,y,λ に関する次の連立方程式の解

$$f_x(x,y) = \lambda g_x(x,y),\ f_y(x,y) = \lambda g_y(x,y),\ g(x,y)=0.$$

注意 7.4. 注意 7.3 の② は，新しい変数 λ を導入して $F(x,y,\lambda) := f(x,y) - \lambda g(x,y)$ とすれば

$$F_x = F_y = F_\lambda = 0$$

のように書ける．このようにして極値の候補点を探す方法を**Lagrange**(ラグランジュ)**の未定乗数法**と呼ぶ．

例題 7.5. 条件 $x^2+y^2=6$ のもとでの関数 $f(x,y) = x^2y^2 - 2xy$ の極値を求めよ．

(考え方) まず条件を与える曲線 $g(x,y)=0$ の特異点を求める．次に Lagrange の未定乗数法を利用し，極値の候補点を探す．最後に曲線上に極値候補とそこでの f の値を書き込み，目視によって極大・極小を判断する．

(略解) (i) N_g は特異点を持たない．(ii) Lagrange の未定乗数法により，候補点は $A^\pm = \pm(\sqrt{3},\sqrt{3})$, $B^\pm = \pm(\sqrt{3},-\sqrt{3})$ および $C^\pm = \pm(\sqrt{2}+1,\sqrt{2}-1)$, $D^\pm = \pm(\sqrt{2}-1,\sqrt{2}+1)$ を得る．図にそれぞれでの値を書き込めば，点 $A^\pm$ で極大値 3，点 $B^\pm$ で極大値 15，点 $C^\pm$ および点 $D^\pm$ で極小値 -1 をとることがわかる．

7.2　最大・最小問題

例題 7.6. 有界閉集合 $\big\{(x,y);\ x^2+y^2 \leq 6\big\}$ 上における関数 $f(x,y) = x^2y^2 - 2xy$ の最大値と最小値を求めよ．

(考え方) 内部と境界とで場合を分ける．① 内部では f の停留点での値を求める．② 境界上については例題 7.5 を参照のこと．

(略解) f の停留点は $(x,y) = (0,0)$, $(a,1/a)$ $(a \in \mathbb{R}^\times)$ であり，$f(0,0)=0$, $f(a,1/a) = -1$ である．よって例題 7.5 と合わせれば，f は $(x,y) = \pm(\sqrt{3},-\sqrt{3})$ で最大値 15，領域内の曲線 $xy=1$ 上で最小値 -1 をとる．

例題 7.7. $D = \big\{(x,y);\ x \geq 0,\ x^2+y^2 \leq 4\big\}$ における $f(x,y) = x^3+y^3-3x-3y$ の最大値と最小値を求めよ．

(コメント) 境界が三角形や四角形のときは，線分に分割して考える．

(略解) (1) f の停留点は $(x,y) = \pm(1,1)$, $\pm(1,-1)$ の 4 点で，このうち D 内にあるのは $A^\pm = (1,\pm1)$ の 2 つ．(2) ∂D の極値を考える．(i) まず $x^2+y^2=4$ で考える．Lagrange の未定乗数法より極値の候補点は $B^\pm = \pm(\sqrt{2},\sqrt{2})$, $C^\pm = \pm(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2})$, $D^\pm = \pm(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2})$ を得るが，この内 ∂D 上にあるのは B^+, C^+, D^+ の 3 点である．(ii) 次に y 軸上の線分について．$h(y) := f(0,y) = y^3-3y$ $(-2 \leq y \leq 2)$ の最大最小を考えると，$y = 1,-2$ で最小，$y=-1,2$ で最大．(3) 以上をまとめ，図に書き込んで調べると，点 $(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2})$ で最大値 $2\sqrt{2}$，点 $(1,1)$ で最小値 -4 をとることがわかる．

<u>**まとめ**</u> (1) **連続関数は有界閉集合において必ず最大値と最小値を持つ．** (2) 曲線上における極値問題を解くための方法の一つに，**Lagrange の未定乗数法**がある．(3) 有界閉集合上の最大値と最小値を求める際は，内部と境界とに場合を分けて考える．

---

11 月 21 日．

[*1] $\nabla f(\boldsymbol{a}) = \alpha \nabla g(\boldsymbol{a})$ とも書ける．

演習問題 7

問題 1. 次の関数の，指定された条件下における極大・極小を論ぜよ．

(1) $x^2+y^2=6$ で $x^4+y^4-4xy-2x^2-2y^2$

(2) $x^3+y^3-3xy=0$ で $f(x,y)=xy$

(3) $(x^2+y^2)^2=2(x^2-y^2)$ で $f(x,y)=xy$

問題 2. 最大最小を論ぜよ．

(1) $x^2+y^2\leq 6, x\geq 0$ で $x^4+y^4+4xy-2x^2-2y^2$

(2) $y^4-y^2+x^2\leq 0$ で x^3+y^3

(3) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}\leq 1$ で xy

2 変数関数のグラフは 3 次元的になるので，1 変数関数のグラフよりもイメージし辛くなります．そのようなときは数式処理ソフトの力を借りるのがよいです．有名なものとして，Mathematica，Maple，Risa/Asir，Maxima といったものがあります．有料のものがおおいですが，後半 2 つはフリーソフトです．2 変数関数のグラフを描画するのであれば，Maxima がおすすめです．使い方はインターネット検索で調べると色々出てきますので，興味があれば是非やってみてください．先週扱った平面曲線も綺麗に描画してくれます．

小レポート

(1) 次の広義積分は収束するか．収束するならばその値を求めよ．

(i) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{|x|}}$ (ii) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}$ (iii) $\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^3+1}}$

(2) $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x\geq 0,\ x^2+y^2\leq 4\right\}$ における関数 $f(x,y)=x^3+y^3-3x-3y$ の最大値と最小値を求めよ．

注意．(1) 被積分関数の不連続点で分割して広義積分を考える．(2) 条件 $x^2+y^2=4$ のもとで考えて，その後で $x\geq 0$ の部分だけを抜き出す．y 軸上の線分についても考察を忘れないように．

小レポートについて．今回に限り，学務部事務室内 (センター 1 号館 2 階) にある**レポートボックスに提出**すること．レポート受付期間は 11 月 27 日 (月) から 11 月 29 日 (水) の 17:00 までの予定です．

► **中間試験について** 12 月 5 日に中間試験を行います．部屋は講義を行っている教室です．

試験範囲：前期の内容 (主に小レポートから出題)，多変数関数の全微分・接平面，合成関数の微分 (連鎖律)，平面曲線，2 変数関数の条件付き極値問題・最大最小問題．

講義中の例題・小レポートで出題した問題を中心に出題する．若干の係数変更や演習問題から出題する可能性もある．