9　多変数関数の積分

1 変数の場合は，積分区間を分割して，関数のグラフと x 軸とで囲まれる図形を長方形の集まりで近似し，その極限をとることにより定積分を定義した．2 変数の場合は，積分領域を長方形で分割し，関数のグラフ (曲面) と xy 平面とで囲まれる図形を四角柱の集まりで近似し，その極限をとることにより定義するのが自然であろう．

9.1　重積分

$D \subset \mathbb{R}^2$ を有界な集合とし，$f(x,y)$ を D 上の関数とする．1 変数に場合を踏まえ，「底面が D であるような上面が曲がっている柱の体積 V」を考察する．D をメッシュ分割し，その分割に現れる各長方形を D_{ij} のように表す．1 変数の時と同様に，

$$m_{ij}(f;\Delta) := \inf_{\boldsymbol{x}\in D_{ij}} f(\boldsymbol{x}), \quad M_{ij}(f;\Delta) := \sup_{\boldsymbol{x}\in D_{ij}} f(\boldsymbol{x})$$

とおき，さらに

$$s(f;\Delta) := \sum_{i,j} m_{ij}(f;\Delta)\cdot\mu(D_{ij}),$$
$$S(f;\Delta) := \sum_{i,j} M_{ij}(f;\Delta)\cdot\mu(D_{ij})$$

とする．このとき，明らかに $s(f;\Delta) \le V \le S(f;\Delta)$ なので，$|\Delta| \to 0$ とすれば

$$s(f) \le V \le S(f).$$

定義 9.1. D 上の関数 $f(x,y)$ が $s(f) = S(f)$ をみたすとき，f は D 上で積分可能という．この値を $\int_D f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}$ とかき，D 上の**重積分**という．

定理 9.2. 連続関数 $f(x,y)$ は面積確定な有界閉集合 D 上で積分可能である．

9.2　重積分の計算

定理 9.3. $f(x,y)$ を連続関数とする[*1]．

(1) 縦線領域 D に対して

$$\int_D f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy\right)dx.$$

(2) 横線領域 $\widetilde{D}$ に対して

$$\int_D f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} = \int_c^d \left(\int_{\widetilde{\varphi}(y)}^{\widetilde{\psi}(y)} f(x,y)\,dx\right)dy.$$

12 月 19 日．

*1 このような積分を**累次積分**という．

例題 9.4. $D = \{(x,y);\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x\}$ のとき

$$I = \int_D \sqrt{4x^2 - y^2}\,d\boldsymbol{x}.$$

(考え方) まず積分区域を描く．$f(x,y)$ の形を見て，x, y のうちでどちらを先に計算するほうが楽かを考える．今回は y を先に計算するほうが楽．答えは $\dfrac{\pi}{9} + \dfrac{\sqrt{3}}{6}$．

例題 9.5. $\widetilde{D} = \left\{(x,y);\ 1 \le y \le \sqrt{3},\ y \le x \le y^2\right\}$ で

$$J = \int_{\widetilde{D}} \frac{y}{x^2+y^2}\,d\boldsymbol{x}.$$

9.3　重積分の基本性質

定理 9.6. 面積確定な D 上連続な関数 f, g に対して，

(1) $\displaystyle\int_D \big(f(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{x})\big)d\boldsymbol{x} = \int_D f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} + \int_D g(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}$,

(2) $\displaystyle\int_D \big(\alpha f(\boldsymbol{x})\big)\,d\boldsymbol{x} = \alpha\int_D f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}$,

(3) $f(\boldsymbol{x}) \ge g(\boldsymbol{x})$ ならば，$\displaystyle\int_D f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} \ge \int_D g(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}$.

定理 9.7. $D = D_1 \cap D_2$ かつ $\mu(D_1 \cap D_2) = 0$ のとき，

(1) $\displaystyle\int_D f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} = \int_{D_1} f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} + \int_{D_2} f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}$,

(2) $f(\boldsymbol{x}) \ge 0$ ならば，$\displaystyle\int_D f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} \ge \int_{D_1} f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}$.

定理 9.8. $\mu(D) = \displaystyle\int_D 1\,d\boldsymbol{x}$.

9.4　積分の順序交換

重積分 $\displaystyle\int_D f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}$ において x, y のどちらを先に計算しても，結果は変わらない．片方で計算できなくても，もう片方では計算できることがある．x を先に計算する累次積分が与えられたとき，それを y を先に計算する累次積分に書き換えて計算すること (あるいはその逆) を**積分の順序交換**という．

例題 9.9. $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_x^{\sqrt[3]{x}} e^{y^2}\,dy\right)dx$

(考え方) $\displaystyle\int e^{y^2}\,dy$ は計算できない．そこで，先に x で積分することを考える．そのためにまずは与えられた累次積分がどのような積分区域での重積分を書き換えたものであるかを調べる．

<u>**まとめ**</u> (1) 重積分の定義．(2) **縦線領域**と**横線領域**上の重積分は，**累次積分**として計算できる．(3) 一見計算できない累次積分であっても，**積分の順序交換**することにより，計算が可能になる場合がある．

演習問題 9

問題 1. 次の積分を計算せよ.

(1) $D=\{(x,y);\ 0\le x,y\le 1\}$

$$\text{(i)}\quad \int_D xy\,d\boldsymbol{x} \qquad \text{(ii)}\quad \int_D \frac{d\boldsymbol{x}}{(x+y+1)^2}$$

$$\text{(iii)}\quad \int_D e^{x+y}\,d\boldsymbol{x} \qquad \text{(iv)}\quad \int_D \frac{y^2}{x^2y^2+1}\,d\boldsymbol{x}$$

(2) $D=\bigl\{(x,y);\ x^2+y^2\le 1,\ x,y\ge 0\bigr\}$

$$\text{(i)}\quad \int_D xy\,d\boldsymbol{x} \qquad \text{(ii)}\quad \int_D (1-x^2-y^2)\,d\boldsymbol{x}$$

(3) $D=\{(x,y);\ 0\le x\le 3,\ 0\le 3y\le 6-2x\}$

$$\int_D \left(1-\frac{x}{3}-\frac{y}{2}\right)d\boldsymbol{x}$$

問題 2. 次の累次積分の順序を変更せよ.

$$\text{(i)}\quad \int_0^1\left(\int_{\sqrt{1-x^2}}^{x+2} f(x,y)\,dy\right)dx$$

$$\text{(ii)}\quad \int_0^1\left(\int_0^{\frac{1}{x+1}} f(x,y)\,dy\right)dx$$

(ヒント: 積分の順序を変更する場合，積分領域を分割する必要が生じる可能性がある点に注意)

小レポート

例題 9.5 の重積分を，縦線領域に分割することにより計算せよ.

注意. 横線領域の場合と比べて計算が大変であるが，計算可能である．積分領域は 2 つに分割して考える．ヒントとしては，$\int \frac{y}{x^2+y^2}\,dy=\frac{1}{2}\log(x^2+y^2)$ や $\log(x^2+x)=\log x+\log(x+1)$ など．log の積分は，部分積分を用いる.

小レポートについて. 次回の講義の際に提出すること．原則として期限を過ぎての提出は認めないが，やむを得ない事情がある際は，必ずその旨を**期限日までにメールにより**連絡すること.

固有値・固有ベクトルについて. 行列 A の固有値 λ および (λ に対応する) 固有ベクトル $\boldsymbol{x}\ne\boldsymbol{0}$ とは,

$$A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$$

を満たすもののことでした．λ が固有値であれば，$(\lambda E-A)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ を満たすので，連立一次方程式

$$\det(tE-A)=0$$

の解が固有値となります．そして固有ベクトルは，連立一次方程式 $(\lambda E-A)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の解です.

▶ 具体例として $A=\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$ で考えてみます．固有値は $\det(tE_2-A)=t^2-1=0$ の解，つまり $\lambda=\pm1$ になります．固有ベクトルは，$\lambda=1$ のときは連立一次方程式 $\left(\begin{smallmatrix}1&-1\\-1&1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\boldsymbol{0}$ の解，つまり $\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)$ であり，$\lambda=-1$ のときは，連立一次方程式 $\left(\begin{smallmatrix}1&1\\1&1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\boldsymbol{0}$ の解，つまり $\left(\begin{smallmatrix}1\\-1\end{smallmatrix}\right)$ となります.

▶ 図形的にみると，行列 A の作用は直線 $y=x$ に関する折り返しであって，固有ベクトル $\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)$ (太線のベクトル) はこの折り返しで変化しません．また固有ベクトル $\left(\begin{smallmatrix}1\\-1\end{smallmatrix}\right)$ (単線のベクトル) は折り返しによって点線のベクトルに移りますが，これら二本のベクトルはいずれも同じ直線 ($y=-x$) 上にあります．つまり，“固有ベクトルはその行列の作用によって方向を変えないベクトルである” ということになります．ベクトル空間の言葉を用いると，“固有ベクトルとは行列の作用によって不変な部分空間の基底である” と明快に表現できます.