線形代数学・同演習 A

演習問題 12

1.† (1) $(-1)^{n(n-1)/2}$ (2) $1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n} = \frac{1-x^{2n+2}}{1-x^2}$ (3) $\lambda c_1 \cdots c_{n-1} - \sum_{i=1} a_i b_i \frac{c_1 \cdots c_{n-1}}{c_i}$ (4) $x_1 \cdots x_n \left(1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{x_i}\right)$

(1) 帰納法を用いると楽．与えられた n 次の行列を J_n と書けば，第 1 行に関する余因子展開より $\det J_n = (-1)^{n+1} \det J_{n-1} = (-1)^{n-1} \det J_{n-1}$ これと $\det J_1 = 1$ より分かる．(2) 与えられた n 次正方行列を A_n とおく．まず $\det A_1 = x^2 + 1$, $\det A_2 = x^4 + x^2 + 1$ であることが分かる．さて，$n \geq 3$ のとき A_n の第 1 行に関して余因子展開をすれば，$\det A_n = (x^2+1) \det A_{n-1} + x \det a_{n-2}$ となることが分かる．あとは $n = 1, 2$ のときの場合から $\det A_n = \sum_{k=0}^{n} x^{2k}$ と推測して帰納法を用いるか，あるいはこの漸化式を直接解く．(3) 第 n 行に関して余因子展開し，帰納法を用いる．或いは演習問題 11 の 3 (b) を使ってもできる．(4) まず第 1 行をピボットとして，他の行を掃き出す．すると，ちょうど問題 (3) の形になっているので，あとは問題 (3) の結果を利用すればよい．

2.† (1) $(x, y, z) = \frac{1}{2}(-13, -14, 1)$ (2) $(x, y, z) = \frac{1}{4}(-7, 9, -7)$

3. (1) $3x + 3y + z = -4$ (2) $4x - 3y + 3z = -11$

4. (1) 与えられた方程式は $a(x^2 + y^2) + bx + cy + d = 0$ の形であり，三点が同一直線上にないという仮定から $a \neq 0$ となるため，この方程式は円を表すことが分かる．また，$(x, y) = (x_i, y_i)$ $(i = 1, 2, 3)$ とすれば行列式の性質から左辺は 0 になるので，この円は三点 (x_i, y_i) $(i = 1, 2, 3)$ を通っていることが分かる．

(2) (a) $x^2 + y^2 = 1$ (b) $(x-7)^2 + y^2 = 5^2$ (c) $(x-4)^2 + (y+2)^2 = (\sqrt{5})^2$ (d) $(x + \frac{11}{2})^2 + (y + \frac{9}{2})^2 = (\frac{5\sqrt{10}}{2})^2$

(3) 三点が同一直線上にあるとき，(1) の記号を用いれば $a = 0$ ということになる．このときには方程式は $bx + cy + d = 0$ となり，これは直線になる (或いは，もっと退化して情報を何も持たなくなってしまう可能性もある)．

---

7 月 18 日分 (凡例：無印は基本問題，† は特に解いてほしい問題，$*$ は応用問題)

講義用 HP: http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~h-nakashima/lecture/2017LA.html