Taylor（テイラー）展開 (あるいはMaclaurin（マクローリン）展開) は微分積分の講義で習ったと思います．それは，解析的な関数 $f(x)$ は，x が 0 に十分近いときに

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

のように表せるというものです．これはベクトル空間の理論の言葉を用いると，“$1, x, x^2, x^3, \ldots$ は解析的な関数全体のなす空間の基底である” と言い換えることができます．また，この例は無限次元のベクトル空間であっても “基底” が存在することがあるということを教えてくれます．

高年次になると Fourier 級数展開・Fourier 変換というものを学びます．Fourier 級数展開は，区間 $[-\pi, \pi]$ 上のなめらかな関数を

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

のように，$\sin x$ と $\cos x$ で表すというものです．ベクトル空間の視点から見れば，これは，関数の無限個の組 1，$\sin x, \sin 2x, \ldots, \cos x$，$\cos 2x, \ldots$ が区間 $[-\pi, \pi]$ 上の滑らかな関数の空間の基底になっていると思うことが出来ます．しかも，この基底は標準的な内積に関して互いに直交しており，非常に性質の良い基底になっています．ちなみに Euler の公式を用いて $\sin x$, $\cos x$ を指数写像 $e^{\pm ix}$ に書き換えると次のようになります:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}. \tag{1}$$

さて，Fourier 変換 $\hat{f}(\xi)$ も似たようなことをするわけですが:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi}\, d\xi \quad (\text{ただし } \hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\xi}\, dx), \tag{2}$$

この場合は残念ながら空間が大きすぎて，もはや ‘基底’ というものが存在しません．しかし，式 (2) の右辺は式 (1) と非常に似ています．これより，式 (1) における Fourier 係数 c_n は e^{inx} の係数であることの類似として，式 (2) の Fourier 変換 $\hat{f}(\xi)$ は $e^{ix\xi}$ の ‘係数’ と思うことが出来ます．つまり，Fourier 変換とは “ある種の基底変換を行うことと対応している” と思うこともできるのです．