線形代数学・同演習 B

11 月 15 日分　演習問題[*1]

1.　(1) $\begin{pmatrix} -1 & -10 & -10 \\ -4 & -23 & -25 \end{pmatrix}$ (2) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 15 & 0 & -7 \\ 23 & 4 & -11 \end{pmatrix}$

2.†　(1) $\begin{pmatrix} 21 & -8 & 12 \\ 10 & -3 & 6 \\ -25 & 10 & -14 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$；$P$ を基底ベクトルを並べた行列として，$P^{-1}AP$ を計算.

3.†　(1) 略 ($h(x) = \lambda p(x) + \mu q(x)$ (p, q は多項式) とおいて，$T(h(x)) = \lambda T(p(x)) + \mu T(q(x))$ を満たすことを確認すればよい)．(2) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

4.*　(1)($\Rightarrow$) V の基底を $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ とすれば，T の全射性からある $\boldsymbol{u}_j$ が存在してそれぞれ $T(\boldsymbol{u}_j) = \boldsymbol{v}_j$ となるので $\dim \mathrm{Im}\, T \geq \dim V$．$\mathrm{Im}\, T$ は V の部分空間なので $\dim \mathrm{Im}\, T \leq \dim V$ であるので $\dim \mathrm{Im}\, T = \dim V$.

($\Leftarrow$) 部分空間の次元が全空間と一致しているならば，その部分空間は全空間と一致する (11 月 1 日の問題 7 (2)) ので，$\mathrm{Im}\, T = V$.

(2)($\Rightarrow$) 単射性より明らか.

($\Leftarrow$) U の二元 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}'$ を任意にとる．このとき $T(\boldsymbol{u}) = T(\boldsymbol{u}')$ とすると，T の線形性より

$$\boldsymbol{0}_V = T(\boldsymbol{u}) - T(\boldsymbol{u}') = T(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}').$$

ここで $\ker T = \{\boldsymbol{0}_U\}$ であることより，$\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}' = \boldsymbol{0}_U$，つまり $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}'$ であるので，T は単射となる.

(3) 基底を一つ選び，そのときに現れる列ベクトルを対応させる線形写像により，同型となる.

・以下は旧課程における大学入試問題です．講義の記号に合わせて文章を変えています.

5.*　$\det A = 1$ より (1)$ad - bc = 1$ であり，$||\, \boldsymbol{x}_1 \,|| = ||\, \boldsymbol{x}_2 \,|| = 1$ より

$$(2)\ a^2 + c^2 = 1, \quad (3)\ (a^2 + bc)^2 + c^2(a + d)^2 = 1$$

が成り立つ．ここで (3) に式 (1),(2) を代入し，式を整理すれば $(a + d)(a - d) = 0$ を得る.

(i) $a + d = 0$ のとき．このとき Cayley-Hamilton の定理より $A^2 = -E$ であるので，

$$\boldsymbol{x}_{2k+1} = (-1)^k \boldsymbol{x}_1, \quad \boldsymbol{x}_{2k} = (-1)^k \boldsymbol{e}_1$$

となるため，いずれの場合も $||\, \boldsymbol{x}_n \,|| = 1$.

(ii) $a - d = 0$ のとき．(1) より $a^2 - bc = 1$ であり，これを (2) に代入すれば $c(b + c) = 0$ を得る．$c = 0$ ならば $\boldsymbol{x}_n = {}^t(a^n, 0)$ であり，$||\, \boldsymbol{x}_1 \,|| = |a| = 1$ なので $||\, \boldsymbol{x}_n \,|| = |a|^n = 1$. $c \neq 0$ ならば $b + c = 0$ なので，このとき $A = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}$ $(a^2 + c^2 = 1)$ という形をしているので，これは回転行列

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad (0 \leq \theta < 2\pi)$$

である．よって $\boldsymbol{x}_n = A^n \boldsymbol{e}_1 = {}^t(\cos n\theta, \sin n\theta)$ となり，$||\, \boldsymbol{x}_n \,|| = \cos^2 n\theta + \sin^2 n\theta = 1$.

6.*　(1) $A_n(E - C) = B(E - C^n)$. (2) $A_{3n} = \dfrac{1 - (-2)^{3n}}{3} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

[*1] 凡例：無印は基本問題，† は特に解いてほしい問題，$*$ は応用問題.