線形代数学・同演習 A

5 月 31 日分　演習問題

計算問題は解答のみ，証明問題は大雑把な道筋を説明するに留めています．

1. (1) ${}^t(A + {}^tA) = {}^tA + {}^t({}^tA) = {}^tA + A$ より．

   (2) (1) と同様

   (3) (1) のものと (2) のものの和が丁度 A になっている．

2. いずれも定義に従って計算するだけ．

3. $N = \begin{pmatrix} 0&0&0&0 \\ 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \end{pmatrix}$ である．あとはべき乗を計算するだけ．

4. (1) $\dfrac{1}{4}n^2(n+1)^2$　(2) $\dfrac{1}{6}n^2(n+1)(2n+1)$　(3) $\dfrac{1}{24}n(n+1)(n+2)(3n+1)$

   (4) $\dfrac{1}{12}n(n+1)(7n^2+13n+4)$

5. $\displaystyle\sum_{l=0}^{m+n-k} a_l b_{m+n-k-l}$

6. 右辺から計算していく．

$$e(x)e(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{y^m}{m!} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\frac{y^m}{m!}.$$

   ここで，$k = m+n$, $l = n$ と変数変換すると，$m = k - l$ なので，

$$e(x)e(y) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{k} \frac{x^l}{l!}\frac{y^{k-l}}{(k-l)!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\cdot\sum_{l=0}^{k}\frac{k!}{l!(k-l)!}x^l y^{k-l} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x+y)^k}{k!}.$$

   したがって，$e(x)e(y) = e(x+y)$ となる．[*1]

7. $\displaystyle\sum_{i=1}^{\min(l,m,n)} a_{ii}^2$

8. $(1+x)^n$

9. (1) 右辺の $\sum$ を展開すればよい．

   (2) (1) の右辺の $\sum$ の中を，問題 8 を使って展開して，和の順序を入れ替える．

   (3) (2) の式を，$C_k(n) = \cdots$ の形で書けばよい．

   (4) 以下のとおり．

$$C_4(n) = \frac{6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n}{30} = \frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1),$$
$$C_5(n) = \frac{2n^6 + 6n^5 + 5n^4 - n^2}{12} = \frac{1}{12}n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1).$$

[*1] お気づきかとは思いますが，$e(x) = e^x$ です．