微分積分学・同演習 A

7 月 4 日分 質問への回答

質問 例題 11.1 で $y = t(x+1)$ がどこからきたのかわかりません

また例題 11.2 の前の②の説明 $\begin{pmatrix} \cos^2 x \\ \sin^2 x \end{pmatrix} = \dfrac{1 \pm \cos 2x}{2}$ がよくわかりません

— まず一つ目から．確かになぜこの直線を考えるとうまくいくのかについては全く触れませんでした．これは少し難しい (というよりも全く別の動機から現れる) のですが，この直線はピタゴラス数を探す際に現れてくるものです．ピタゴラス数とは自然数の三つ組 (a, b, c) で $a^2 + b^2 = c^2$ を満たすもののことですが，この両辺を c で割ってやれば $\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$ となるので，半径 1 の円 $x^2 + y^2 = 1$ 上にある点のうち x, y がともに有理数になっている点 (このような点を有理点という) を見つけることができれば，ピタゴラス数を見つけることができます．そこで，この円 $x^2 + y^2 = 1$ 上にある有理点 Q を探すわけですが，この円上には 4 つの自明な有理点 $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$ および $(0, -1)$ があります．ここで，その中の一つの点 $P = (-1, 0)$ をとる[*1]と，P と Q を通る直線は有理数 t を使って $y = t(x + 1)$ と書けるし，逆に $y = t(x + 1)$ (t は有理数) という直線とこの円との交点は必ず有理点になります．円の方程式が 2 次の多項式であって係数が有理数であること，およびこの直線が必ず有理点 $(-1, 0)$ を通ることから，もう一つの交点の座標は t に関する有理関数で書けるということが導かれます．これが直線 $x = t(x + 1)$ が出てきた理由です．

二つ目．これは三角関数の半角の公式

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

をまとめて書いたものです．このように $\sin^2 x$, $\cos^2 x$ は $\cos 2x$ で書けるので，$t = \tan \frac{2x}{2} = \tan x$ と変数変換してもうまくいくということです．因みに，

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin x \cos x}{\cos^2} = \frac{\sin 2x}{4(1 + \cos 2x)}$$

と $\tan x$ も $\sin 2x$, $\cos 2x$ で書けます．

質問 今回はわかりやすかったです。

— 計算を素早く正確にできるよう演習を忘れずに．

質問 分かりません。

質問 わかりませんでした。

— 広義積分は，問題が生じている箇所を避けて積分したあと，極限を取るという二段階のステップに分けられます．慣れるまで戸惑うかもしれませんが，がんばってください．

質問 5 限は授業なので，できれば，もう少しだけ軽い小テストでお願いします。私は頭が良くないものですから……。

質問 5 限があることを考慮されていらっしゃらないように思えたので，そこを改善して小テストの時間をもっと長くとってほしいです。まに合いません。

— 今回の小テストは少し欲張りすぎました．講義の最初の方で時間を掛けすぎたのが失敗でした．

[*1] 別の点でも可能だが，慣習に従った．