簡約化で連立一次方程式が解けることのカラクリを説明します．

簡約化 (基本変形) は，拡大係数行列に左から正則行列を掛けることと対応していることを思い出してください．例えば連立一次方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ に対して，拡大係数行列が $(A\,|\,\boldsymbol{b}) \longrightarrow (\widetilde{A}\,|\,\boldsymbol{b}')$ のように簡約化されたとします．これは，ある正則行列 X を用いて

$$X(A\,|\,\boldsymbol{b}) = (\widetilde{A}\,|\,\boldsymbol{b}')$$

となることを意味しています[1)]．さて，$X(A\,|\,\boldsymbol{b}) = (XA\,|\,X\boldsymbol{b})$ であったことを思い出すと (行列のブロック分割)，$XA=\widetilde{A}$, $X\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}'$ ですが，この簡約化の操作というのは，元の方程式の世界においては

$$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b} \quad \Leftrightarrow \quad XA\,\boldsymbol{x}=X\boldsymbol{b} \quad \Leftrightarrow \quad \widetilde{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}'$$

という式変形と対応しています．ここで特に X は正則であるので，元の連立一次方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の解と簡約化して得られた連立一次方程式 $\widetilde{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}'$ の解が一致することがわかります．これは，X が正則ゆえ逆行列を持つので，それを掛ければ元の方程式に戻ることができるということが効いています[2)]．

---

1) 例えば小テスト (5 月 9 日分) で扱った方程式で考えてみると良いでしょう．その場合は，正則行列 X は $X=\dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 \\ 0 & 5 & -5 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$ という行列になります．

2) 小テストの問題において X の逆行列も計算してみて，ここで述べたことが確かに成り立っていることを確認してみましょう．