

# 線形代数学・同演習 B

10 月 4 日分 演習問題<sup>\*1</sup>

1. (1)  $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  (2) 解なし .

2. (1)  $-1$  (2)  $-12$  (3)  $223$

3. 略 .

4. (1)  $\times$  (2)  $\circ$  (3)  $\circ$  (4)  $\times$

5. (1)  $\times$  (2)  $\circ$

6.<sup>†</sup>  $\Rightarrow$  は明らか ( $W$  はベクトル空間であり, 条件 (i) ~ (iii) はベクトル空間になるための条件に含まれるので) .

( $\Leftarrow$ ) 確認することは教科書 p.63 の脚注にある条件であるが, 今考えている和とスカラー倍はベクトル空間  $V$  のものなので, それらは  $V$  の元として成り立つことは明らか . よってそれらの演算が  $W$  からはみ出ないことを示せばよいが, 条件 (i) ~ (iii) より, それらはすべて  $W$  の元として成立することが分かる . よって,  $W$  は  $V$  の和とスカラー倍によりベクトル空間となるため,  $V$  の部分空間である .

7.<sup>†</sup> (1) 命題 1.9 の三条件を確認すれば良い .  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ ,  $u, v \in W_1 \cap W_2$  とする . このとき  $u, v \in W_1$  かつ  $u, v \in W_2$  である .  $i = 1, 2$  に対して  $W_i$  は  $V$  の部分空間なので,  $0 \in W_i$  かつ  $\lambda u + \mu v \in W_i$  である . したがって,  $0 \in W_1 \cap W_2$  かつ  $\lambda u + \mu v \in W_1 \cap W_2$  なのでこれは部分空間 .

(2) (1) と同様に  $0 = 0 + 0 \in W_1 + W_2$  である . また,  $u_1 + u_2, v_1 + v_2 \in W_1 + W_2$  ( $u_i, v_i \in W_i$ ) とすれば,

$$\lambda(u_1 + u_2) + \mu(v_1 + v_2) = (\lambda u_1 + \mu v_1) + (\lambda u_2 + \mu v_2)$$

であり,  $W_1, W_2$  は部分空間なので,  $W_1 + W_2$  も部分空間となる .

(3) 部分空間にならない . 例えば,  $V = \mathbb{R}^2$  とし,  $W_1 = \{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} ; x \in \mathbb{R} \}$ ,  $W_2 = \{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} ; y \in \mathbb{R} \}$  とすれば明らかに  $W_1, W_2$  は部分空間であり,  $W_1 \cup W_2 = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} ; x = 0 \text{ 又は } y = 0 \}$  となる . しかしながら,  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in W_1$ ,  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in W_2$  であるが,  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \notin W_1 \cup W_2$  である .

8.\* 部分空間になるのは (1), (2) で, ならないのは (3), (4) である .

9.\* (1)  $O \in \mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$  は明らかで,  $X, Y \in \mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$  のとき,

$${}^t(\lambda X + \mu Y)J + J(\lambda X + \mu Y) = \lambda({}^tXJ + JX) + \mu({}^tYJ + JY) = O$$

であることより .

(2)  $X = \begin{pmatrix} X_1 & Y_1 \\ Y_2 & -{}^tX_1 \end{pmatrix}$ , ただし  $X_1$  は任意の  $n$  次正方行列であり,  $Y_1, Y_2$  は任意の  $n$  次対称行列 .

(求め方は,  $X = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}$  と置いて,  ${}^tXJ + JX = O$  をブロック行列として計算する .)

<sup>\*1</sup> 凡例 : 無印は基本問題, <sup>†</sup> は特に解いてほしい問題, \* は応用問題 .