線形代数学・同演習 B

1 月 31 日分　演習問題[*1]

1. 次の 2 次対称行列を直交行列により対角化せよ.

$$(1)\ \begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}\quad(2)\ \begin{pmatrix}2&2\\2&-1\end{pmatrix}\quad(3)\ \begin{pmatrix}4&-2\\-2&1\end{pmatrix}\quad(4)\ \begin{pmatrix}2&-3\\-3&2\end{pmatrix}\quad(5)\ \begin{pmatrix}1&2\\2&-2\end{pmatrix}$$

2.† 次の 3 次対称行列を直交行列により対角化せよ[*2].

$$(1)\ \begin{pmatrix}1&2&0\\2&2&2\\0&2&3\end{pmatrix}\qquad(2)\ \begin{pmatrix}-1&1&1\\1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}\qquad(3)\ \begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$$

$$(4)\ \begin{pmatrix}2&2&-1\\2&-1&2\\-1&2&2\end{pmatrix}\qquad(5)\ \begin{pmatrix}4&3&-3\\3&1&0\\-3&0&1\end{pmatrix}\qquad(6)\ \begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\-1&-1&0\end{pmatrix}$$

$$(7)\ \begin{pmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{pmatrix}\qquad(8)\ \begin{pmatrix}3&-2&-2\\-2&0&1\\-2&1&0\end{pmatrix}\qquad(9)\ \begin{pmatrix}-1&2&2\\2&3&0\\2&0&0\end{pmatrix}$$

3. 次の行列について以下の問いに答えよ.

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&a&a\\1&a&b\end{pmatrix}.$$

(1) $\det A$ を因数分解した形で求めよ.

(2) $\operatorname{rank} A=2$ となる条件を a,b を用いて表せ.

(3) 行列 A が正定値となる条件を a,b を用いて表せ.

4.* n 変数 2 次同次多項式 $f(\boldsymbol{x})=\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$ を 2 次形式という.

(1) 任意の 2 次形式 f は，ある対称行列 A を用いて $f(\boldsymbol{x})={}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ と表せることを示せ.

(2) (1) の行列 A を 2 次系式 f の表現行列という．基底変換 $\boldsymbol{y}=S\boldsymbol{x}$ により f を $\boldsymbol{y}$ の 2 次形式と思うと，その表現行列は ${}^tSAS$ となることを示せ.

(3) 任意の 2 次系式は，直交座標変換で $\lambda_1y_1^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$ という形に変換できることを示せ.

5.* 次の積分を以下の二通りの方法で計算せよ.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)}\,dx\,dy\quad(a>0,\ ac-b^2>0)^{*3}.$$

(1) 対称行列の直交行列による対角化を用いる.

(2) 正定値対称行列 A は下三角行列 L により $A=L\,{}^tL$ と書けることを用いる.

[*1] 凡例：無印は基本問題，† は特に解いてほしい問題，$*$ は応用問題.

[*2] 少なくとも (6) までは確実に計算できるようになっておくこと.

[*3] ヒント:$ax^2+2bxy+cy^2=(A\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x})$ と考える．また (2) のような分解を Gauss 分解あるいは Cholesky 分解という (分野で呼び方が違う).