

微分積分学・同演習 A

演習問題 3

1.† ε - δ 論法により次が成り立つことを示せ.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 2} x^3 = 8 \quad (2) \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + x) = 6 \quad (3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

2. 次の極限值を求めよ.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - x - 6}{3x^2 - 2x - 8} \quad (2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 5x - 6}{x^2 - 1} \quad (3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - 6x^2 + x^3}{2 - 5x^3}$$

3. 次の極限值を求めよ.

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x - 3} - x + 1) \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} - 1}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} \quad (3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

4.† 次の関数は区間 $[0, 1]$ で連続となるか. なるのならばそれを ε - δ 論法で示し, ならなければその理由を述べよ.

$$(1) f(x) = \left| x - \frac{1}{2} \right| \quad (2) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(2x-1)^2} & (x \neq \frac{1}{2}) \\ 0 & (x = \frac{1}{2}) \end{cases}$$
$$(3) f(x) = \begin{cases} \frac{16x^2-9}{4x-3} & (x \neq \frac{3}{4}) \\ 6 & (x = \frac{3}{4}) \end{cases} \quad (4) f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

5. 次の関数は区間 $(0, 1)$ で有界かどうか調べよ.

$$(1) \frac{1}{x^2} \quad (2) \sin \frac{1}{x} \quad (3) \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} \quad (4) \frac{(1-x) \sin x}{x(1-x^2)}$$

6. 次の右極限, もしくは左極限を求めよ*1.

$$(1) \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x} \quad (2) \lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{x} \quad (3) \lim_{x \rightarrow +0} \frac{e^{1/x}}{e^{1/x} + e^{-1/x}} \quad (4) \lim_{x \rightarrow -0} \frac{e^{1/x}}{e^{1/x} + e^{-1/x}}$$

7. 各自然数 n に対して $\lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n$ を ε - δ 論法を用いて証明し, よって任意の多項式 $p(x)$ に対して $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ が成り立つことを示せ.

8.* 関数 $f(x)$ が点 $x = a$ において連続でないことを ε, δ を用いて表現せよ.

4月25日分 (凡例: 無印は基本問題, † は特に解いてほしい問題, * は応用問題)

講義用 HP: <http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~h-nakashima/lecture/2017C.html>

*1 $\lim_{x \rightarrow a+0}$ において, $a = 0$ のときは単に $\lim_{x \rightarrow +0}$ と表す.