微分積分学・同演習 A

7 月 4 日分　小テスト

学籍番号：　　　　　　　　　　　　　　氏名：

次の関数の原始関数を一つ求めよ．また，区間 $(0, \frac{\pi}{2}]$ における広義積分が収束するかどうかを調べ，収束するならばその値を求めよ．

$$(1) \quad \frac{1-\cos x}{\sin x} \qquad (2) \quad \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}$$

解) 求める不定積分をそれぞれ I, J と書く．(1) $t = \tan\frac{x}{2}$ と変数変換をすれば,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1-\frac{1-t^2}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{2t}{1+t^2} dt \\ &= \log(1+t^2) = \log\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right) \quad \left(= -2\log\left|\cos\frac{x}{2}\right|\right). \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos x}{\sin x}\, dx &= \lim_{\varepsilon\to+0}\left[\log\left(1+\tan\frac{x}{2}\right)\right]_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\log\left(1+\tan\frac{\pi}{4}\right) - \log\left(1+\tan\frac{\varepsilon}{2}\right)\right) = \log 2. \end{aligned}$$

(2) $t = \tan x$ と変数変換すれば,

$$\begin{aligned} J &= \int \frac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{t^2}{1+t^2}} \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{t^2(1+t^2)} = \int \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{1+t^2}\right) dt \\ &= -\frac{1}{t} - \operatorname{Arctan} t = -\frac{1}{\tan x} - x. \end{aligned}$$

よって,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\left[-\frac{1}{\tan x} - x\right]_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}} = \infty$$

となるので，この広義積分は発散する．

※講義や講義内容に関して，意見・感想・質問等を自由に記述してください．