線形代数学・同演習 B

演習問題 11

1. 次の $\mathbb{R}^2$ の基底 $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$ を Gram–Schmidt の直交化法により直交化せよ．

$$(1)\ \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \quad (2)\ \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad (3)\ \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (4)\ \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

2.† 次の $\mathbb{R}^3$ の基底 $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)$ を Gram–Schmidt の直交化法により直交化せよ．

$$(1)\ \begin{pmatrix} 1 & -6 & 3 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad (2)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4)\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.† 次の $\mathbb{R}[x]_2$ の基底を Gram–Schmidt の直交化法により直交化せよ．ただし内積は $\langle f \,|\, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$ とする．

(1) $p_1(x) = 1,\ p_2(x) = x,\ p_3(x) = x^2.$

(2) $q_1(x) = x^2,\ q_2(x) = x,\ q_3(x) = 1.$

(3) $r_1(x) = -x,\ r_2(x) = -x^2 + x,\ r_3(x) = -x^2 + x - 1.$

4. $\mathbb{R}^2$ の正規直交基底は次の形のもので尽くされることを示せ．

$$(1)\ \boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix},\ \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \qquad (2)\ \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \end{pmatrix}$$

5. 2 次の直交行列をすべて求めよ．

6.† 任意の 3 次正則行列 A は，ある直交行列 P と上三角行列 U を用いて $A = PU$ という積でかけることを示せ[*1]．

7.* 整数 $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ に対して $H_n(x) := (-1)^n e^{x^2}\left(\frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}\right)$ とおく[*2]．また，二つの多項式 f, g に対して $\langle f \,|\, g \rangle_H := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)e^{-x^2}\,dx$ とする[*3]．

(1) $n = 0, 1, 2, 3, 4$ に対して $H_n(x)$ を求めよ．

(2) 各 $H_n(x)$ は n 次の多項式となることを示せ．

(3) $\langle \cdot | \cdot \rangle_H$ は $\mathbb{R}[x]_n$（n は任意の自然数）の内積を定めることを示せ．

(4) この内積 $\langle \cdot | \cdot \rangle_H$ に関して，多項式 $H_n(x)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ は互いに直交していることを示せ．

---

1 月 16 日分 (凡例：無印は基本問題，† は特に解いてほしい問題，$*$ は応用問題)

講義用 HP: http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~h-nakashima/lecture/2017LA.html

[*1] ヒント：Gram–Schmidt の直交化法．これは任意の n 次正則行列で成り立つ．

[*2] この多項式を Hermite 多項式という．

[*3] 重み e^{-x^2} を持つ積分である．