線形代数学・同演習 B

10 月 25 日分　演習問題[*1]

1. $r=2$ である．例えば $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ が線形独立で，$\boldsymbol{a}_3=-3\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_4=3\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_5=-3\boldsymbol{a}_1$ となる．与えられた行列の簡約化は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. 右辺の行列が正則かどうかを調べればよい．方法は簡約化なり行列式なりやりやすい方でやれば良い．
(1) ◯ (2) ×

3. (1) 略．(2) $\dim V=3$ (自由に動けるパラメータは 3 つなので)．自然な基底は $x, y, 1$．(3) $f_1(x,y)=-x-y+1$, $f_2(x,y)=x$, $f_3(x,y)=y$ とすればよい．

4.† (1) $r=3$ である．例えば $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_4(x)$ が線形独立で，$p_3(x)=-p_1(x)+p_2(x)$, $p_5(x)=3p_1(x)+p_4(x)$ である．
(2) $r=3$ である．例えば $q_1(x)$, $q_2(x)$, $q_5(x)$ が線形独立で，$q_3(x)=q_1(x)+q_2(x)$, $q_4(x)=-q_1(x)+2q_2(x)$ である．

5.† (1) $\mathrm{Sym}(n,\mathbb{R})$ は n 次正方行列のなすベクトル空間の部分集合であるため，$O\in\mathrm{Sym}(n,\mathbb{R})$ (O は零行列) および $X, Y\in\mathrm{Sym}(n,\mathbb{R})$ のとき $\lambda X+\mu Y\in\mathrm{Sym}(n,\mathbb{R})$ となることを示すだけでよい．(2) $\dim\mathrm{Sym}(n,\mathbb{R})=\frac{n(n+1)}{2}$.

6.† (1) $\begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} a-b \\ b-c \\ c \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 41a-14b+6c \\ -14a+5b-2c \\ 6a-2b+c \end{pmatrix}$

7.* (1) ベクトル空間になるための条件 (教科書 p.63 の脚注) は，考えている空間が複素数なので当然全て成り立つ．ただし，(4)-(6) の a, b は実数だけを考えていることに注意．任意の複素数は $x+yi$ (i は虚数単位) と書けるので $\dim\mathbb{C}=2$.
(2) $\mathbb{R}$ が $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間になることも (1) と同様である．その次元が無限次元になることは，背理法によって示せる．仮に有限次元になると仮定すると，ある自然数 n に対して $1, \pi, \pi^2, \ldots, \pi^n$ が線形従属になってしまうが，それはある多項式に関して

$$a_0+a_1\pi+a_2\pi^2+\cdots+a_n\pi^n=0 \quad (a_j\in\mathbb{Q})$$

となることを意味する．これは π の超越性に反する．よって，$\mathbb{R}$ は “$\mathbb{Q}$ 上の” ベクトル空間としては無限次元でなければならない．

[*1] 凡例：無印は基本問題，† は特に解いてほしい問題，$*$ は応用問題.