線形代数学・同演習 B

演習問題 13

1. (1) $P=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ により $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$.

(2) $P=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ により $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$.

(3) $P=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ により $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

(4) $P=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ により $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$.

(5) $P=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ により $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-3 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$.

2.† (1) $P=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ 2 & -1 & -2\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}$ により $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$.

(2) $P=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-2 & 0 & \sqrt{2}\\ 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2}\\ 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2}\end{pmatrix}$ により $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

(3) $P=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2}\\ -2 & 0 & \sqrt{2}\\ 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2}\end{pmatrix}$ により $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$.

(4) $P=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-2 & \sqrt{2} & 0\\ -1 & -\sqrt{2} & \sqrt{3}\\ 1 & \sqrt{2} & \sqrt{3}\end{pmatrix}$ により $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}7 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

(5) $P=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-\sqrt{2} & 1 & -\sqrt{3}\\ -\sqrt{2} & 1 & \sqrt{3}\\ \sqrt{2} & 2 & 0\end{pmatrix}$ により $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

(6) $P=\dfrac{1}{\sqrt{30}}\begin{pmatrix}-2\sqrt{5} & \sqrt{6} & 2\\ \sqrt{5} & 0 & 5\\ \sqrt{5} & 2\sqrt{6} & -1\end{pmatrix}$ により $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$.

---

1 月 30 日分 (凡例：無印は基本問題，† は特に解いてほしい問題，$*$ は応用問題)

講義用 HP: http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~h-nakashima/lecture/2017LA.html

3.* (1) $A=(a'_{ij})$, $a'_{jj}=a_{jj}$ $(j=1,\dots,n)$, $a'_{ij}=(a_{ij}+a_{ji})/2$ $(i\neq j)$ とすれば A は対称行列であって $f(\boldsymbol{x})={}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ となる．(2) $f(\boldsymbol{x})={}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ において $\boldsymbol{y}=S\boldsymbol{x}$ を代入すれば $f(\boldsymbol{y})={}^t(S\boldsymbol{y})AS\boldsymbol{y}={}^t\boldsymbol{y}{}^tSAS\boldsymbol{y}$ となることより．(3) 対称行列は直交行列により対角化できることと (2) より．

4.* $A=\begin{pmatrix} a & b\\ b & c\end{pmatrix}$ とおく．(1) A は対称行列なのである直交行列 P により $A=P\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{pmatrix}{}^tP$ とかける．ここで λ,μ は A の固有値である．ここで $\lambda,\mu>0$ であることと $\det A=\lambda\mu$ であることに注意．さて

$$ax^2+2by+cy^2=(x,\,y)A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}={}^t[{}^tP\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}]\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{pmatrix}[{}^tP\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}]$$

なので $\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}={}^tP\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ という変数変換を考える．${}^tP$ は正則な行列であり (x,y) に関する積分領域は $\mathbb{R}^2$ 全体なので，(u,v) に関する積分領域も $\mathbb{R}^2$ 全体である．また変数変換に伴う Jacobian は 1 であるので，

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)}\,dx\,dy&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(\lambda u^2+\mu v^2)}\,du\,dv\\ &=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\lambda u^2}\,du\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\mu v^2}\,dv\\ &=\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{\mu}}=\frac{\pi}{\sqrt{\det A}}\end{aligned}$$

(2) $A=L{}^tL$ とおけば，1 月 24 日の演習問題 5 より $L=\begin{pmatrix}\sqrt{a} & 0\\ b/\sqrt{a} & \sqrt{(\det A)/a}\end{pmatrix}$ である．さて

$$ax^2+2by+cy^2=(x,\,y)A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}={}^t\left[{}^tL\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\right]{}^tL\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

なので $\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}={}^tL\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ という変数変換を考える．${}^tL$ は正則な行列であり (x,y) に関する積分領域は $\mathbb{R}^2$ 全体なので，(u,v) に関する積分領域も $\mathbb{R}^2$ 全体である．また変数変換に伴う Jacobian は 1 月 24 化の演習問題 8 により $\det L^{-1}=1/\sqrt{\det A}$ であることがわかっている．よって

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)}\,dx\,dy=\frac{1}{\sqrt{\det A}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(u^2+v^2)}\,du\,dv=\frac{\pi}{\sqrt{\det A}}.$$

5.* (1) $\begin{pmatrix}e^a & 0\\ 0 & e^b\end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix}\cosh x & \sinh x\\ \sinh x & \cosh x\end{pmatrix}$