はじめに

・微分積分学・同演習 B （九州大学，2017 年後期）
・講義担当者　中島秀斗

予習用の講義ノートを作成しました．1 コマ 1 ページに収まるように定理等の証明や例題の解答は適宜省略しています．講義の進行に合わせて範囲などが変更になる場合がありますので，その点はご留意ください．

この講義の目標は，多変数関数の微分および積分を扱えるようになることです．いずれも計算ができてなんぼのものですから，例題や小レポートで出題する問題は必ず解けるようになってください．

第 13 回（最後の講義）については準備中です．

目次

参考文献

[1] 野村隆昭,「微分積分学講義」, 共立出版
[2] 斎藤正彦.「微分積分教科書」, 東京図書
[3] 高木貞治,「解析概論」, 岩波書店
[4] 福田安蔵，鈴木七緒，安岡善則，黒崎千代子共著，「詳解微積分演習 II」, 共立出版

1　多変数関数における微分

後期は多変数関数の微分と積分を扱う．講義では主に2,3 変数関数のみを扱うことになるが，基本的にはそのまま n 変数関数に拡張できる．

キーワードは，偏微分・全微分，連鎖律，条件付き極値問題，重積分，多変数における変数変換公式．

前半は微分を扱う．1 変数のとき，微分は次の極限 $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ により定義された．さらに極限 $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$ は，次のように ε-δ 論法によって定義されていた．

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0 \text{ s.t. } 0<|x-a|<\delta\ \Rightarrow\ |f(x)-\alpha|<\varepsilon.$$

よって，まずはこれを多変数に拡張する必要がある．

1.1　数ベクトル

$\mathbb{R}^2=\{\boldsymbol{x}=(x,y);\ x,y\in\mathbb{R}\}$ は 2 次元の数ベクトル空間, $\mathbb{R}^3=\{\boldsymbol{x}=(x,y,z);\ x,y,z\in\mathbb{R}\}$ は 3 次元の数ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ を表す．また, 零ベクトルは $\mathbf{0}=(0,0,0)$ と表す．

定義 1.1. $\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}'\in\mathbb{R}^3$ に対して, $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}':=xx'+yy'+zz'$ を内積, $\|\boldsymbol{x}\|:=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ をノルムという．

$\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}}$ が成り立っていることに注意.

命題 1.2. (1) $\|\boldsymbol{x}\|\geq 0$. 特に $\|\boldsymbol{x}\|=0\Leftrightarrow\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$, (2) $\|\alpha\boldsymbol{x}\|=|\alpha|\,\|\boldsymbol{x}\|$, (3) $|\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}|\leq\|\boldsymbol{x}\|\cdot\|\boldsymbol{y}\|$ (Schwartz の不等式), (4) $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|\leq\|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{y}\|$ (三角不等式).

(証明略)

1.2　多変数関数の極限

定義 1.3. 2 変数関数 $f(x,y)$ に対し，$\displaystyle\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x})=\alpha$ を,

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0 \text{ s.t. } 0<\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|<\delta\ \Rightarrow\ |f(\boldsymbol{x})-\alpha|<\varepsilon$$

により定義する．

定義自体は 1 変数のときと大差がないが，その振る舞いは大きく異なる．それは $\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}$ に至る道筋が無数にあり，そのすべてで同一の極限になっていることが要請されているためである．

例題 1.4. 次の極限を求めよ．

$$(1)\ \lim_{\boldsymbol{x}\to\mathbf{0}}\frac{x^2y}{x^2+y^2}\qquad(2)\ \lim_{\boldsymbol{x}\to\mathbf{0}}\frac{x^2+2xy-3y^2}{x^2+y^2}$$

10 月 10 日.

(考え方) 一般には極座標変換 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ を用いる．分子，分母ともに同次式ならば予想を立てやすい．（解答略）

(コメント) 分子，分母ともに同次式のときは $\Delta=$ (分子の次数) $-$ (分母の次数) を考えればよい．一般には $\Delta>0$ ならば 0 に収束，$\Delta\leq 0$ ならば収束しない.

注意 1.5. 極座標変換において，例えば $\theta=\mathrm{Arcsin}\,r$ のように，θ は r の関数になっている可能性がある[*1].

定義 1.6. (1) $\displaystyle\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{a})$ のとき，$f(\boldsymbol{x})$ が点 $\boldsymbol{a}$ で連続という．(2) また，$f(\boldsymbol{x})$ が集合 A の各点で連続であるとき，$f(\boldsymbol{x})$ は A で連続という．

1.3　偏微分

定義 1.7. 2 変数関数 $f(x,y)$ において，y を定数と思って x で微分することを，x に関して偏微分するといい，

$$f_x(x,y),\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y),\quad \frac{\partial}{\partial x}f(x,y)$$

などと書く．y に関する偏微分も同様に定義される．

例題 1.8. $f(x,y)=x^3+xy^2-3y^2$ を，x,y に関して偏微分せよ．

(解) $f_x(x,y)=3x^2+y^2$, $f_y(x,y)=2xy-6y$.

(コメント) 偏微分は，実際には 1 変数の微分と何ら変わりない.

注意 1.9. 1 変数の場合だと「微分可能ならば連続」であったが，多変数だと**偏微分可能であっても連続であるとは限らない**．例えば $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ $(\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0})$, $f(0,0)=0$ がその例を与える．実際，原点での偏微分は簡単な計算から $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$ であるので[*2], $f(x,y)$ は原点において偏微分可能である．しかしながら，$f(x,y)$ において極座標変換を考えると，

$$\frac{xy}{x^2+y^2}=\frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}=\cos\theta\sin\theta$$

となり，$f(x,y)$ は原点で連続でない.

まとめ (1) 多変数の極限は 1 変数と場合と振る舞いが大きく異なる．(2)「**偏微分**」の導入．(3) 偏微分は 1 変数における微分の多変数化とは言えない (注意 1.9 より).

[*1] もちろん，必ずそうなっているわけではない．重要なのは，θ は固定されているわけではないということである．

[*2] 実際に計算してみること．

2　多変数関数の全微分

前回は偏微分 $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ を導入した．これらは 1 変数関数の微分の多変数化とはいえなかった．今回はその多変数化を紹介する．偏微分でうまくいかない理由は x 軸，y 軸のところしか見ていないからである．

1 変数の場合 $x = a$ における Taylor 展開は $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a)$ であった．少し言い換えると「f が微分可能ならば，$y = f(x)$ は $x = a$ の近くで直線により近似できる」となる．式で書けば，

$$\lim_{x \to a} \left| \frac{f(x) - \{f(a) + f'(a)(x-a)\}}{x-a} \right| = 0.$$

逆に $\displaystyle\lim_{x \to a} \left| \frac{f(x) - \{f(a) + A(x-a)\}}{x-a} \right| = 0$ となる定数 A が存在するならば $f(x)$ は $x = a$ で微分可能で $A = f'(a)$ となる．これを多変数に拡張する．

2.1　全微分

前述のように 1 変数の場合は直線で近似した．同様に考えると 2 変数の場合は平面で近似することになる．

定義 2.1. 3 次元空間において，点 (a, b, c) で x 方向に A_x，y 方向に A_y の傾きを持つ平面の方程式は $z = c + A_x(x-a) + A_y(y-b)$ で表される．$\boldsymbol{a} = (a, b)$, $\boldsymbol{A} = (A_x, A_y)$ とすれば $z = c + \boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})$ とかける．

定義 2.2. f が点 $\boldsymbol{a}$ において全微分可能とは，

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} \frac{|f(\boldsymbol{x}) - \{f(\boldsymbol{a}) + A_x(x-a) + A_y(y-b)\}|}{\| \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a} \|} = 0$$

となる $\boldsymbol{A} = (A_x, A_y)$ が存在すること．

注意 2.3. つまり，f が全微分可能であるとは，$\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{a}$ に近いときに f が平面 $z = f(\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})$ で近似できることをいう．この平面を**接平面**という．

命題 2.4. f が点 $\boldsymbol{a}$ で全微分可能ならば，f は点 $\boldsymbol{a}$ で (1) 連続であり，さらに (2) 偏微分可能で $A_x = f_x(\boldsymbol{a})$, $A_y = f_y(\boldsymbol{a})$ となる．

注意 2.5. 全微分が，1 変数関数の微分の多変数版というべきものである．

定義 2.6. $\nabla f(\boldsymbol{a}) := (f_x(\boldsymbol{a}), f_y(\boldsymbol{a}))$ を f の点 $\boldsymbol{a}$ における勾配 (gradient) という[*1]．

勾配 ∇f はベクトルであり，これを使えば接平面は $z = f(\boldsymbol{a}) + \nabla f \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})$ とかける．このように，勾配は微分係数の多変数版である．

定義 2.7. f が x, y について偏微分可能であり f_x, f_y がともに連続であるとき，f は C^1 級という．

定理 2.8. f が C^1 級ならば，f は全微分可能である．

例題 2.9. $f(x, y) = \log(1 + x^2 + y^2)$ が $\mathbb{R}^2$ の各点で全微分可能であることを示せ．

(考え方) f_x, f_y を計算し，そのどちらも連続であることを確認すればよい (定理 2.8)．

(証) $f_x(x, y) = \frac{2x}{1+x^2+y^2}$, $f_y(x, y) = \frac{2y}{1+x^2+y^2}$ より．

例題 2.10. $f(x, y) = \log(1 + x^2 + y^2)$ の点 $(1, 1, \log 3)$ における接平面を求めよ．

(考え方) f_x, f_y を計算し，接平面の定義式 $z = f(1,1) + f_x(1,1)(x-1) + f_y(1,1)(y-1)$ に必要な値を代入する．

2.2　高階偏微分

偏微分についても高階のものを考えられる．例えば，

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (f_x)_x = f_{xx},$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = (f_x)_y = f_{xy}.$$

定義 2.11. (1) f の k 階までの偏導関数がすべて存在して連続であるとき f を C^k 級，(2) 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して C^k 級となるときは C^∞ 級の関数，(3) 文脈に応じて必要なだけ偏微分可能のときにはなめらかという．

定理 2.12. f が C^2 級[*2]ならば，$\boxed{f_{xy} = f_{yx}}$.

つまり，偏微分の順番に依らずに，どの変数で何回微分したかということで決まる．

注意 2.13. 一般には $f_{xy} \neq f_{yx}$ であることに注意．

例題 2.14. $f(x, y) = x^3 + xy^2 - 3y^2$ の 2 階偏導関数をすべて求めよ．

まとめ (1) 1 変数関数の微分の多変数化は「全微分」．(2) 接平面と高階偏微分の定義．(3) 関数がなめらかならば，偏微分の順番は自由に入れ替えられる．

10 月 17 日.

[*1] ∇ はギリシャ文字でナブラと読む．

[*2] またはなめらかでもよい．

3　合成関数の微分

1 変数関数による合成関数の微分は

$$\frac{d}{dx}\{f(g(x))\} = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

によって与えられた．この節では，これを多変数の場合へ一般化する．

3.1　2 変数 +1 変数

$f(t)$ を微分可能な 1 変数関数とし，$g(x,y)$ を偏微分可能な 2 変数関数とする．このとき，合成関数 $F(x,y) := f(g(x,y))$ について考える．

命題 3.1. $F(x,y)$ は x,y に関して偏微分可能で，

$$F_x(x,y) = f'(g(x,y)) \cdot g_x(x,y),$$
$$F_y(x,y) = f'(g(x,y)) \cdot g_y(x,y).$$

ベクトル表記すれば $\nabla F(x,y) = f'(g(x,y))\,\nabla g(x,y)$.

3.2　1 変数 +2 変数

$f(x,y)$ を C^1 級の 2 変数関数とし，x,y がそれぞれ t に関する関数 $x = x(t)$, $y = y(t)$ になっているとする．このとき，合成関数 $F(t) := f(x(t),y(t))$ について考える．みやすくするために，$\boldsymbol{x}(t) = (x(t),y(t))$ とおく．

命題 3.2. $F(t)$ は t に関する 1 変数関数であり，

$$\frac{dF}{dt}(t) = f_x(\boldsymbol{x}(t))\frac{dx}{dt}(t) + f_y(\boldsymbol{x}(t))\frac{dy}{dt}(t).$$

ベクトル表記すれば，$\nabla f(\boldsymbol{x}(t)) \cdot \dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt}(t)$．ただし，

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}(t) = \left(\frac{dx}{dt}(t),\ \frac{dy}{dt}(t)\right).$$

3.3　連鎖律

$f(x,y)$ を C^1 級の 2 変数関数とする．x,y がそれぞれ u,v に関する 2 変数関数 $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ になっているとする．このとき，合成関数 $F(u,v) := f\big(x(u,v),y(u,v)\big)$ について考える．みやすくするために，$\boldsymbol{x}(u,v) = (x(u,v),y(u,v))$ とおく．

定理 3.3. $F(u,v)$ は u,v に関して偏微分可能で，

$$F_u(u,v) = f_x(\boldsymbol{x}(u,v))x_u(u,v) + f_x(\boldsymbol{x}(u,v))x_u(u,v),$$
$$F_v(u,v) = f_x(\boldsymbol{x}(u,v))x_v(u,v) + f_x(\boldsymbol{x}(u,v))x_v(u,v).$$

ベクトル表記すれば $\nabla_{\boldsymbol{u}}F(\boldsymbol{u}) = \nabla_{\boldsymbol{x}}f(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{u})) \cdot \nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{u})$ となる．ただし，$\boldsymbol{u} = (u,v)$ であり，$\nabla_{\boldsymbol{u}}$ は変数 u,v に関する勾配である．

10 月 24 日.

注意 3.4. この性質は**連鎖律**と呼ばれる．次のように書けば印象的である．引数は適切に補うこと．

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial F}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}.$$

3.4　座標変換

連鎖律は座標変換を行うときに必要になる．

定義 3.5. 2 次元のとき，変換 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ $(r \geq 0,\ \theta \in [0,2\pi))$ を極座標変換という．

例題 3.6. $f(x,y)$ を C^1 級の 2 変数関数とし，$F(r,\theta) := f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ とする．このとき，次を示せ．

$$F_r(r,\theta) = f_x \cdot \cos\theta + f_y \cdot \sin\theta,$$
$$F_\theta(r,\theta) = -f_x \cdot r\sin\theta + f_y \cdot r\cos\theta.$$

ここで f_x, f_y は引数 $(r\cos\theta, r\sin\theta)$ を省略している[*1]．

(考え方) 連鎖律を用いる．

極座標変換において，r,θ を x,y の関数と見ることも多い．簡単な計算から $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\tan\theta = \frac{y}{x}$ であるので，r_x, r_y や θ_x, θ_y も計算できる．

$$r_x = \cos\theta,\ r_y = \sin\theta,\ \theta_x = -\frac{\sin\theta}{r},\ \theta_y = \frac{\cos\theta}{r}.$$

例題 3.7. 例題 3.6 と同様の仮定の下で次を示せ．

$$(f_x)^2 + (f_y)^2 = (F_r)^2 + \frac{1}{r^2}(F_\theta)^2.$$

(考え方) 連鎖律を利用する．

(略解) $z = f(x,y) = F(r,\theta)$ とおけば，$f_x = z_x$, $F_r = z_r$ などのように書ける．連鎖律と上述の計算から

$$z_x = z_r r_x + z_\theta\theta_x = z_r\cos\theta - z_\theta\tfrac{\sin\theta}{r},$$
$$z_y = z_r r_y + z_\theta\theta_y = z_r\sin\theta + z_\theta\tfrac{\cos\theta}{r}$$

なので，次を得る．

$$(z_x)^2 + (z_y)^2 = 1\cdot(z_r)^2 + 0\cdot z_r z_\theta + \frac{1}{r^2}\cdot(z_\theta)^2.$$

定義 3.8. 3 次元空間の極座標変換は次で与えられる．

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta.$$

ここで，$r \geq 0$, $\theta \in [0,\pi]$, $\varphi \in [0,2\pi)$ である．幾何学的意味は教科書 p.138 の図を参照のこと．

まとめ (1) 多変数関数の合成関数の微分は**「連鎖律」**を用いて計算する．(2) 2 次元，3 次元空間の**極座標変換**.

[*1] 引数を書くとはみ出してしまうため．

4　多変数関数の Taylor 展開と極値

なめらかな 1 変数関数は，例えば $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$ や $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$ などのように，「多項式で近似」することができた．本節では，これを多変数の場合へ一般化する．

4.1　Taylor 展開

定義 4.1. $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2$ $(\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0})$ に対して，

$$(D_{\boldsymbol{v}} f)(\boldsymbol{a}) := \lim_{t \to 0} \frac{f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{a})}{t}$$

が存在するとき，これを点 $\boldsymbol{a}$ における f の $\boldsymbol{v}$ 方向の微分という．$D_{\boldsymbol{v}}$ は作用素の一種である．

注意 4.2. $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$ とすると，$D_{\boldsymbol{v}} = v_1 \frac{\partial}{\partial x} + v_2 \frac{\partial}{\partial y}$ となる．たとえば，$D_{\boldsymbol{v}} f = v_1 \frac{\partial f}{\partial x} + v_2 \frac{\partial f}{\partial y} = \nabla f \cdot \boldsymbol{v}$ や

$$D_{\boldsymbol{v}}^2 f = v_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 v_1 v_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + v_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

定理 4.3 (Taylor の定理)**.** $n \in \mathbb{N}$ とする．なめらかな 2 変数関数 $f(x, y)$ に対して，次が成り立つ．

$$f(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} (D_{\boldsymbol{h}}^k f)(\boldsymbol{a}) + o(\|\, \boldsymbol{h} \,\|^n)$$

これを $f(\boldsymbol{x})$ の点 $\boldsymbol{a}$ における n 次の Taylor 展開という．

つまり，多変数関数もなめらかならば，(多変数の) 多項式によって近似することができる．$f(\boldsymbol{x})$ の点 $\boldsymbol{a}$ における 2 次の Taylor 展開は，$\boldsymbol{h} = (h_1, h_2)$ とすれば，$f + (f_x h_1 + f_y h_2) + \frac{1}{2}(f_{xx} h_1^2 + 2 f_{xy} h_1 h_2 + f_{yy} h_2^2) + o$ となる[*1]．ここで $D_{\boldsymbol{h}} f$ の項は h_1, h_2 に関して 1 次同次，$D_{\boldsymbol{h}}^2 f$ の項は h_1, h_2 に関して 2 次同次であることに注意．この式はまた次のようにも書ける:

$$f + \nabla f \cdot \boldsymbol{h} + \frac{1}{2} (h_1,\ h_2) \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + o.$$

定義 4.4. $H_f(\boldsymbol{x}) := \begin{pmatrix} f_{xx}(\boldsymbol{x}) & f_{xy}(\boldsymbol{x}) \\ f_{xy}(\boldsymbol{x}) & f_{yy}(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}$ を，関数 $f(\boldsymbol{x})$ の **Hesse 行列**という．f がなめらかならば，$H_f(\boldsymbol{x})$ は対称行列になる．

例題 4.5. $f(x, y) = \sin(x + y)$ の，原点 $(0, 0)$ における 3 次の Taylor 展開を求めよ．

(考え方) 1 変数関数の Taylor 展開を利用する．解答略．

10 月 31 日.

[*1] スペースの関係で引数 $(\boldsymbol{a})$ を省略している．また o は $o(\|\, \boldsymbol{h}^2 \,\|)$ の略である．

4.2　多変数関数の極値

定義 4.6. 2 変数関数 $f(x, y)$ はなめらかであるとする．f が点 $\boldsymbol{a}$ に十分近いところでは常に $f(\boldsymbol{a}) > f(\boldsymbol{x})$ をみたすとき極大，常に $f(\boldsymbol{a}) < f(\boldsymbol{x})$ をみたすとき極小という．2 つを合わせて極値といい，また等号を許すときは広義の極値という．

1 変数のとき $x = a$ が極値ならば $f'(a) = 0$ であり，さらに極大 $\Leftrightarrow$ $f''(a) < 0$, 極小 $\Leftrightarrow$ $f''(a) > 0$ であった．ここで $f(a + h) = f(a) + f'(a) h + \frac{1}{2} f''(a) h^2 + o(h^2)$ であることを思い出そう．極値であることの必要条件は Taylor 展開の 1 次の項の係数が関係しており，極大極小の情報は 2 次の項が関係している．

定義 4.7. $\nabla f(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$ となる $\boldsymbol{a}$ を f の停留点という[*2]．

命題 4.8. $f(\boldsymbol{x})$ が点 $\boldsymbol{a}$ で広義の極値ならば，$\boldsymbol{a}$ は f の停留点である．

停留点は極値の候補を与えるが，必ずしも極値であるとは限らない．例えば，$f(x, y) = x^2 - y^2$ は $f_x = 2x$, $f_y = -2y$ なので停留点は原点のみ．この関数は x 軸上では原点は極小であるが，y 軸上では原点は極大である (このような点を**鞍点**という) ので，$f(\boldsymbol{x})$ は極値を持たない．実は Hesse 行列を調べることで極値を判定できる．

定義 4.9. 対称行列 $T = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & c \end{smallmatrix}\right)$ に対して，

(1) 正定値 $\Leftrightarrow$ 固有値がすべて正 $\Leftrightarrow$ $a > 0, \det T > 0$
(2) 負定値 $\Leftrightarrow$ 固有値がすべて負 $\Leftrightarrow$ $a < 0, \det T > 0$
(3) 不定符号 $\Leftrightarrow$ 正負の固有値を持つ $\Leftrightarrow$ $\det T < 0$

定理 4.10. f の停留点 $\boldsymbol{a}$ に対して，(1) $H_f(\boldsymbol{a})$ が正定値 $\Leftrightarrow$ $f(\boldsymbol{a})$ は極小値，(2) $H_f(\boldsymbol{a})$ が負定値 $\Leftrightarrow$ $f(\boldsymbol{a})$ は極大値，(3) $H_f(\boldsymbol{a})$ が不定符号 $\Leftrightarrow$ 点 $\boldsymbol{a}$ は鞍点となる．ただし，$\det H_f(\boldsymbol{a}) = 0$ のときは何もわからない．

例題 4.11. $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ の極値を求めよ．

(考え方) まず $\nabla f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ $(f_x = f_y = 0)$ を解き，極値の候補 (停留点) を求める．そして，それらの各点に対して $H_f(\boldsymbol{a})$ を調べ，判定する．解答略．

まとめ (1) なめらかな多変数関数は Taylor 展開ができる．(2) 多変数関数の極値問題では，1 変数では起こらなかった現象 (**鞍点**) が起こる．(3) 極値判定には **Hesse 行列**を調べる．

[*2] つまり $f_x(\boldsymbol{a}) = f_y(\boldsymbol{a}) = 0$ となる点.

5　陰関数定理と逆関数定理

5.1　陰関数定理

2 変数関数 $f(x,y)$ に対して，$f(x,y)=0$ を考える．これは一般には xy 平面上の曲線を表す．x を一つ決めると y も決まる．ただし，一般には一つの x に対して決まる y は複数個存在することもあれば，1 つもないときもある．このように，$f(x,y)=0$ から定まる関数を陰関数という．逆に $y=f(x)$ とかけるものを陽関数という．

例． $f(x,y)=x^2+y^2-1$ とすると，$f(x,y)=0$ は $x^2+y^2=1$，すなわち xy 平面上の円を表す．さらに $y=\pm\sqrt{1-x^2}$ のように陰関数として表せる．しかし，点 $(1,0)$ のまわりでは陽関数の形で表すことはできない．

定理 5.1. $f(x,y)$ はなめらかとし，$f(a,b)=0$ を満たすとする．もし $f_y(a,b)\neq 0$ ならば，ある関数 $y=\varphi(x)$ が一意的に存在して，(1) $\varphi(a)=b$, (2) $x=a$ の近くで $f(x,\varphi(x))=0$, (3) $x=a$ の近くで φ はなめらかで

$$\varphi'(x)=-\frac{f_x(x,\varphi(x))}{f_y(x,\varphi(x))}.$$

5.2　逆関数定理

1 変数関数 $y=f(x)$ に対して，$f'(a)\neq 0$ ならば f は $x=a$ の近くで逆関数 $x=f^{-1}(y)$ を持つ．これを多変数化する．

2 つの 2 変数関数 $f_1(x,y)$，$f_2(x,y)$ を並べたものを $\boldsymbol{F}(x,y)=(f_1(x,y),f_2(x,y))$ とかく．$\boldsymbol{F}$ は $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^2$ への写像とする．

定義 5.2. 写像 $\boldsymbol{F}$ に対して，次の行列 $J_{\boldsymbol{F}}(x,y)$ を $\boldsymbol{F}$ の Jacobi 行列という．

$$J_{\boldsymbol{F}}(x,y)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial f_1}{\partial y}(x,y)\\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial f_2}{\partial y}(x,y)\end{pmatrix}.$$

例題 5.3. 極座標変換 $\boldsymbol{F}(r,\theta)=(x(r,\theta),y(r,\theta))=(r\cos\theta,r\sin\theta)$ の Jacobi 行列，およびその行列式を求めよ．

注意 5.4. Jacobi 行列の行列式 $\det J_{\boldsymbol{F}}(x,y)$ は Jacobian と呼ばれ，多変数関数の積分において重要な役割を果たす．

11 月 7 日.

写像の合成と Jacobi 行列の関係を調べる．$\boldsymbol{G}(u,v)=(g_1(u,v),g_2(u,v))$ とおく．

$$\begin{aligned}h_1(x,y)&:=g_1(f_1(x,y),f_2(x,y)),\\ h_2(x,y)&:=g_2(f_1(x,y),f_2(x,y))\end{aligned}$$

とおけば，$\boldsymbol{F}(x,y)$ との合成関数 $\boldsymbol{G}\circ\boldsymbol{F}(x,y)$ は

$$\boldsymbol{G}\circ\boldsymbol{F}(x,y)=(h_1(x,y),h_2(x,y))$$

となる．連鎖律を使えば

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial h_1}{\partial x} & \dfrac{\partial h_1}{\partial y}\\ \dfrac{\partial h_2}{\partial x} & \dfrac{\partial h_2}{\partial y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial g_1}{\partial u} & \dfrac{\partial g_1}{\partial v}\\ \dfrac{\partial g_2}{\partial u} & \dfrac{\partial g_2}{\partial v}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y}\\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y}\end{pmatrix}$$

となる．つまり，

$$J_{\boldsymbol{G}\circ\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{x})=J_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}))J_{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{x}).$$

定理 5.5. $\boldsymbol{F}\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ とし，f_1,f_2 はなめらかとする．点 $\boldsymbol{a}$ において $\det J_{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{a})\neq 0$ ならば，点 $\boldsymbol{a}$ の近くで $\boldsymbol{F}$ の逆写像 $\boldsymbol{F}^{-1}$，つまり

$$\boldsymbol{F}^{-1}(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}))=\boldsymbol{x},\quad \boldsymbol{F}(\boldsymbol{F}^{-1}(\boldsymbol{u}))=\boldsymbol{u}$$

をみたすものが存在する．

まとめ (1) **陰関数定理**は，陰関数 $f(x,y)=0$ を局所的に陽関数 $y=\varphi(x)$ と表せることを保証してくれる．(2) **逆関数定理**は，Jacobi 行列式の行列式が 0 でなければ，局所的に逆写像を持つことが保証される．

6　条件付き極値問題

6.1　平面曲線

定義 6.1. なめらかな 2 変数関数 $f(x, y)$ の零点全体の集合 $N_f := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ f(x, y) = 0\}$ は xy 平面上の曲線を描く．これを f が定める平面曲線という．

例． (1) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ ならば，$f(x, y) = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$ なので，N_f は円になる．
(2) $g(x, y) = x^2+y^2+1$ ならば, $g(x, y) = 0 \Leftrightarrow x^2+y^2 = -1$ なので，$N_g = \emptyset$ (空集合).

定義 6.2. (1) $\nabla f(\boldsymbol{a}) = \mathbf{0}$，つまり $f_x(\boldsymbol{a}) = f_y(\boldsymbol{a}) = 0$ をみたす N_f 上の点を，N_f の**特異点**という．これは f の停留点のうち，$f(\boldsymbol{a}) = 0$ をみたすものである．(2) 特異点でない N_f 上の点は，非特異点という．

$\boldsymbol{a}$ を N_f の特異点とすると, $f(\boldsymbol{a}) = 0$ かつ $\nabla f(\boldsymbol{a}) = \mathbf{0}$ である．このとき，f の Taylor 展開を考えれば

$$f(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}) = (h_1, h_2)\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + o(\|\boldsymbol{h}\|^2)$$

となる．これより特異点の近くでの曲線 N_f の振る舞いは $H_f(\boldsymbol{a})$ を調べることでわかる．

定理 6.3. $\boldsymbol{a}$ を N_f の特異点とする．(1) $\det H_f(\boldsymbol{a}) > 0$ ならば点 $\boldsymbol{a}$ は N_f の中で孤立している．これを**孤立点**という．(2) $\det H_f(\boldsymbol{a}) < 0$ ならば，点 $\boldsymbol{a}$ の近くで N_f は 2 本の曲線であって，点 $\boldsymbol{a}$ で交わる．これを**結節点**という．(3) $\det H_f(\boldsymbol{a}) = 0$ のときは何もわからない．

例題 6.4. 次の関数が定める平面曲線の特異点を求め，その特異点の種類を答えよ．

$$\begin{array}{ll} (1) & f(x, y) = y^2 - x^3 + x^2 \\ (2) & g(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy \end{array}$$

(考え方) 特異点は f の停留点であって $f0$ の零点であるような点であるので，まず $f_x = f_y = 0$ かつ $f = 0$ となる点を探し，次に $H_f(\boldsymbol{a})$ の正負を調べる．解答略.
(コメント) (1) は楕円曲線と呼ばれるものの一種である．(2) は Descartes の正葉線と呼ばれる．それぞれ図にあるような曲線になる．

6.2　条件付き極値問題

定理 6.5. (i) 条件 $g(x, y) = 0$ のもとで関数 $f(x, y)$ が点 $\boldsymbol{a}$ で広義の極値をとる (ii) $\boldsymbol{a}$ は曲線 N_g の非特異点ならば，ある実数 α が存在して，$f_x(\boldsymbol{a}) = \alpha g_x(\boldsymbol{a})$ かつ $f_y(\boldsymbol{a}) = \alpha g_y(\boldsymbol{a})$ をみたす.

(コメント) **Lagrange の未定乗数法**という方法を用いる．新しい変数 λ を導入して $F(x, y, \lambda) := f(x, y) - \lambda g(x, y)$ を考え，$F_x = F_y = F_\lambda = 0$ とする．証明略.

注意 6.6. この定理は次の形で使われる: 条件 $g(x, y) = 0$ のもとでの関数 $f(x, y)$ の広義の極値の候補は,
① 曲線 $g(x, y) = 0$ の特異点
② 3 つの未知数 x, y, λ に関する次の連立方程式の解

$$f_x(x, y) = \lambda g_x(x, y),\ f_y(x, y) = \lambda g_y(x, y),\ g(x, y) = 0$$

で尽くされる．

例題 6.7. 円周 $x^2+y^2 = 6$ 上での関数 $f(x, y) = x^2y^2 - 2xy$ の極値を求めよ．

例題 6.8. $g(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2)$ とおく．(1) 曲線 N_g の特異点を求めよ．(2) 曲線 N_g 上での関数 $f(x, y) = xy$ の極値を求めよ．

(考え方) まず条件を与える曲線 $g(x, y) = 0$ の特異点を求める (求め方は例題 6.4 参照)．次に Lagrange の未定乗数法を利用して極値の候補を探す．最後に曲線上に極値候補とそこでの関数 f の値を書き込み，目視によって極大値・極小値を判断する．
(コメント) 例題 6.8 の曲線 N_g をレムニスケートという．
まとめ (1) 平面曲線の**特異点**について．(2) 条件付き極値問題を解く方法の一つとして，**Lagrange の未定乗数法**がある．

11 月 14 日.

7　最大値・最小値の問題

前節は曲線上での極値問題を扱った．本節では集合上での最大値・最小値問題について考察する．

7.1　$\mathbb{R}^2$ の集合について

定義 7.1. (1) $B(\boldsymbol{a};r) := \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2;\ \|\,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\,\| < r\right\}$ を開円板という (境界を含まない)．(2) $\overline{B}(\boldsymbol{a};r) := \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2;\ \|\,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\,\| \le r\right\}$ を閉円板という (境界を含む)．

定義 7.2. $A^c := \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2;\ \boldsymbol{x} \notin A\right\}$ を A の補集合という．

定義 7.3. 集合 $A \subset \mathbb{R}^2$ に対して，(1) $B(\boldsymbol{x};\delta) \subset A$ となる正数 δ が存在するような点 $\boldsymbol{x} \in A$ を A の内点といい，(2) A の補集合 A^c の内点を A の外点という．

定義 7.4. (1) 集合 $A \subset \mathbb{R}^2$ の任意の点が内点であるとき A を開集合という．(2) A の補集合 A^c が開集合であるとき，A を閉集合という．

例 1． (1) 開円板 $B(\boldsymbol{a};r)$ は開集合．(2) 閉円版 $\overline{B}(\boldsymbol{a};r)$ は閉集合．

例 2． $f(x,y)$ を連続関数とする．

(1) $A := \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2;\ f(\boldsymbol{x}) \neq 0\right\}$ は開集合．

(2) $B := \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2;\ f(\boldsymbol{x}) = 0\right\}$ は閉集合．

定義 7.5. A の内点でも外点でもない点を境界点という．また境界点全体の集合を ∂A と書き，境界という．

命題 7.6. (1) 開集合 O に対して，$O \cap \partial O = \emptyset$．(2) 閉集合 C に対して，$\partial C \subset C$．

定義 7.7. 集合 A に対して，ある正数 R が存在して $A \subset B(\boldsymbol{0};R)$ となるとき，A は有界であるという．

7.2　最大・最小値問題

定理 7.8. 連続関数 $f(x,y)$ は，有界閉集合上で必ず最大値と最小値をとる．

この定理の証明に次の閉集合の性質を用いる．

命題 7.9. C を閉集合とし，$\{\boldsymbol{a}_n\}$ を C 内の点列とする．もし $\boldsymbol{a} = \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{a}_n$ が存在するならば，$\boldsymbol{a} \in C$ である．

命題 7.10. C を有界閉集合とする．連続関数 $f(x,y)$ が点 $\boldsymbol{a} \in C$ で最大値もしくは最小値をとるとすると，① $\boldsymbol{a}$ は f の停留点，② $\boldsymbol{a}$ は C の境界点，のいずれかである．

例題 7.11. $x^2+y^2 \le 1$ のときの関数 $f(x,y) = x^3+y^3$ の最大値と最小値を求めよ．

(考え方) 内部と境界とで場合を分ける．① 内部では停留点での f の値を求める．② 境界上では Lagrange の未定乗数法を用いる．

例題 7.12. $D = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2;\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ x+y \le 1\right\}$ とおく．$f(x,y) = 3x^2+2y^2+2xy-2x-2y+1$ の，D 上における最大値と最小値を求めよ．

(考え方) 境界が三角形や四角形のときは，線分に分割して考える．

まとめ (1) 集合の内点・外点・境界の定義．(2) **連続関数は有界閉集合において必ず最大値と最小値を持つ．**(3) 有界閉集合上の最大値と最小値を求める際は，内部と境界とに場合を分けて考える．

11 月 21 日.

8　多変数関数における積分

積分の多次元への一般化には，「重積分」と「線積分」の 2 通りの可能性がある．いずれの場合においても積分する範囲 (積分区域) が，1 次元のときと比べて遥かに複雑である．本講義では重積分のみを扱う．

8.1　長方形領域上の重積分

定義 8.1. $I = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$ を長方形領域と呼び，その面積を $\mu(I) = (b-a)(d-c)$ とかく．

I 上の有界関数 $f(x, y)$ に対して，「I 上の積分」を考える．1 変数に場合を踏まえ，「上面が曲がっている四角柱の体積 V」を考察する．

長方形 I を分割し，その分割を Δ とかく．

$$I = \bigcup_{j=1}^{q} \bigcup_{i=1}^{p} I_{ij}.$$

1 変数の時と同様に，

$$m_{ij}(f; \Delta) := \inf_{\boldsymbol{x} \in I_{ij}} f(\boldsymbol{x}), \quad M_{ij}(f; \Delta) := \sup_{\boldsymbol{x} \in I_{ij}} f(\boldsymbol{x})$$

とおき，さらに $\sum_{i,j} = \sum_{j=1}^{q} \sum_{i=1}^{p}$ として

$$s(f; \Delta) := \sum_{i,j} m_{ij}(f; \Delta) \cdot \mu(I_{ij}),$$
$$S(f; \Delta) := \sum_{i,j} M_{ij}(f; \Delta) \cdot \mu(I_{ij})$$

とする．このとき，明らかに $s(f; \Delta) \le V \le S(f; \Delta)$ なので，$|\Delta| \to 0$ とすれば

$$s(f) \le V \le S(f).$$

定義 8.2. 長方形領域 I 上の有界関数 $f(x, y)$ が $s(f) = S(f)$ をみたすとき，f は I 上で積分可能という．この値を $\int_I f(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}$ とかき，I 上の重積分という．

補題 8.3. 長方形領域 I が二つの長方形領域 I_1, I_2 に分割されているとする．このとき，

$$\int_I f(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} = \int_{I_1} f(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} + \int_{I_2} f(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}.$$

8.2　面積確定領域

$\mathbb{R}^2$ の集合は様々な形をしている．重積分は「底面積」×「高さ」を撚り集めたものでった．そこで，まずは「図形の面積」について，もっと詳しく考察する必要がある．

教科書 p.179 の図を参照のこと．与えられた集合 D に対し，x 軸および y 軸に平行な直線により D にメッシュを入れる (Δ で表す)．ここで，

$$\begin{aligned} \mu_*(D; \Delta) &:= (\text{内面積}) \\ &= (D\ \text{の中にある長方形の面積の総和}), \\ \mu^*(D; \Delta) &:= (\text{外面積}) \\ &= (D\ \text{と接触する長方形の面積の総和}) \end{aligned}$$

とおく．明らかに $\mu_*(D; \Delta) \le \mu^*(D; \Delta)$ である．$|\Delta| \to 0$ のときの極限をそれぞれ $\mu_*(D)$, $\mu^*(D)$ とする．

定義 8.4. $\mu_*(D) = \mu^*(D)$ のとき，D は面積確定といい，この値 $\mu_*(D)$ を D の面積と呼ぶ．

定理 8.5. D を面積確定かつ有界閉集合とする．このとき，関数 $f(x, y)$ が D 上で連続ならば，f は D 上で積分可能である．

注意 8.6. 具体的な計算方法は次回以降から扱う．

$\Omega(D) := \mu^*(D) - \mu_*(D)$ を境界と交わる長方形の面積の総和とすれば，

$$D\ \text{が面積確定} \Leftrightarrow \Omega(D) = 0.$$

例． $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \le x, y \le 1,\ x, y \in \mathbb{Q}\}$ とすると，$\mu_*(Q) = 0$, $\mu^*(Q) = 1$, $\Omega(Q) = 1$ となり，Q は面積確定でないことがわかる．
※積分を使って面積確定の条件を書くことができる．

定義 8.7. 集合 $D \subset \mathbb{R}^2$ に対して D の定義関数 $\chi_D(\boldsymbol{x})$ とは，

$$\chi_D(\boldsymbol{x}) := \begin{cases} 1 & (\boldsymbol{x} \in D), \\ 0 & (\boldsymbol{x} \notin D). \end{cases}$$

命題 8.8. D が面積確定 $\Leftrightarrow$ D を含む長方形領域 I において χ_D が積分可能．

<u>**まとめ**</u> (1) 重積分は「底面積」×「高さ」を撚り集めたもの．(2) **面積確定**な集合．

---

12 月 12 日.

9 重積分の計算

定理 9.1. D を面積確定な有界閉集合とする．このとき，D 上連続な関数 f, g に対して次が成立.

$$\begin{aligned}
&(1)\ \int_D (f(\boldsymbol{x})+g(\boldsymbol{x}))d\boldsymbol{x} = \int_D f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} + \int_D g(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x},\\
&(2)\ \int_D (\alpha f(\boldsymbol{x}))\,d\boldsymbol{x} = \alpha \int_D f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x},\\
&(3)\ f(\boldsymbol{x}) \geq g(\boldsymbol{x}) \text{ ならば，} \int_D f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} \geq \int_D g(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}.
\end{aligned}$$

定理 9.2. $D = D_1 \cap D_2$ かつ $\mu(D_1 \cap D_2) = 0$ のとき，

$$\begin{aligned}
&(1)\ \int_D f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} = \int_{D_1} f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} + \int_{D_2} f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x},\\
&(2)\ f(\boldsymbol{x}) \geq 0 \text{ ならば，} \int_D f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} \geq \int_{D_1} f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}.
\end{aligned}$$

9.1 累次積分

定義 9.3. (1) ある閉区間 $[a, b]$ 上で，2 つの連続関数 $\varphi(x), \psi(x)$ を用いて表される次の集合 D を**縦線領域**, (2) ある閉区間 $[c, d]$ 上で，2 つの連続関数 $\widetilde{\varphi}(y), \widetilde{\psi}(y)$ を用いて表される次の集合 $\widetilde{D}$ を**横線領域**という．

$$\begin{aligned}
D &= \{(x, y);\ a \leq x \leq b,\ \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\},\\
\widetilde{D} &= \left\{(x, y);\ c \leq y \leq d,\ \widetilde{\varphi}(y) \leq x \leq \widetilde{\psi}(y)\right\}.
\end{aligned}$$

注意 9.4. 縦線領域，横線領域ともに面積が計算できるので面積確定である．

定理 9.5. $f(x, y)$ を連続関数とする．

(1) 縦線領域 D に対して

$$\int_D f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\,dy\right) dx.$$

(2) 横線領域 $\widetilde{D}$ に対して

$$\int_D f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} = \int_c^d \left(\int_{\widetilde{\varphi}(y)}^{\widetilde{\psi}(y)} f(x, y)\,dx\right) dy.$$

注意 9.6. 内側から順に計算する．次のように書いてもよい．

$$\begin{aligned}
\int_D f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} &= \int_a^b \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\,dy\,dx\\
&= \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\,dy.
\end{aligned}$$

二つ目では dx と dy の順番に注意．また三つ目は後ろから順に計算することに注意.

例題 9.7. 次の重積分を計算せよ．

$$\begin{aligned}
&(1)\ \int_D \sqrt{4x^2 - y^2}\,d\boldsymbol{x},\ D = \left\{\boldsymbol{x};\ \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq x \end{array}\right\},\\
&(2)\ \int_{\widetilde{D}} \frac{y}{x^2 + y^2}\,d\boldsymbol{x},\ \widetilde{D} = \left\{\boldsymbol{x};\ \begin{array}{l} 1 \leq y \leq \sqrt{3} \\ y \leq x \leq y^2 \end{array}\right\}.
\end{aligned}$$

(考え方) まず積分区域を図示して，x, y どちらを先に計算するかを考える．

注意 9.8. 例題 9.7 (2) において，y を先に計算することも考えられる．その場合は，$D = D_1 \cup D_2$ のように複数の積分区域に分割してから計算する．

9.2 積分の順序交換

重積分 $\displaystyle\int_D f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}$ を縦に分割しても横に分割しても計算結果は変わらない．縦に分割したものが計算できなくても，横に分割したものは計算できることがある．縦に分割したものが与えられたときにそれを横線領域と見なして計算すること (あるいはその逆) を**積分の順序交換**という．

例題 9.9. $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_x^{\sqrt[3]{x}} e^{y^2}\,dy\right) dx$

(考え方) $\displaystyle\int e^{y^2}\,dy$ は計算できない．そこで，先に x で積分することを考える．そのためにまずは与えられた累次積分がどのような積分区域での重積分を書き換えたものであるかを調べる．

<u>**まとめ**</u> (1) 重積分を計算しやすい領域に，**縦線領域**と**横線領域**がある．(2) これらの場合は累次積分として計算できる．(3) 一見計算できない累次積分であっても，**積分の順序交換**することにより，計算が可能になる場合がある．

---

12 月 19 日.

10 重積分の計算 II

前回は縦線領域および横線領域においては重積分は累次積分により計算できることを見た．今回は，1 変数関数における置換積分に相当するものを考える．$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f\left(g(u)\right) g'(u)du$ であるが，$g\colon D' = [a,b] \to D = [g(a), g(b)]$ とすれば

$$\int_D f(x)\,dx = \int_{D'} f\left(g(u)\right) g'(u)du$$

のように書くことができる．

10.1 変数変換

重積分 $\displaystyle\int_D f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}$ について考える．なめらかな写像

$$\begin{array}{cccc} \Phi: D' & \longrightarrow & D \\ \Cup & & \Cup \\ \boldsymbol{u} & \longmapsto & \boldsymbol{x} = \Phi(\boldsymbol{x}) \end{array}$$

を考える．ただし，Φ は 1 対 1 とする．このとき，Φ の Jacobi 行列を $J_\Phi(\boldsymbol{u})$ とすれば，

$$\Phi(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{u}) = \Phi(\boldsymbol{a}) + J_\Phi(\boldsymbol{u})\boldsymbol{u} + o(\|\,\boldsymbol{u}\,\|)$$

のように，Φ は各点の十分近くでは線形写像*1で近似できる．

定義 10.1. なめらかな 1 対 1 写像 Φ の Jacobian $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ とは，次の行列式のこと．

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(\boldsymbol{u}) = \det J_\Phi(\boldsymbol{u}) = \det \begin{pmatrix} \varphi_u(\boldsymbol{u}) & \varphi_v(\boldsymbol{u}) \\ \psi_u(\boldsymbol{u}) & \psi_v(\boldsymbol{u}) \end{pmatrix}.$$

Φ は 1 対 1 なので，$\boldsymbol{u} = \Phi^{-1}(\boldsymbol{x}) = (\widetilde{\varphi}(\boldsymbol{x}), \widetilde{\psi}(\boldsymbol{x}))$ と逆に解くことができる．この Φ^{-1} に関する Jacobian を $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ とかけば，

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^{-1}.$$

行列の復習 (1) 平面上の四角形は行列 A の変換により，四角形にうつされる．(2) そのとき，面積は $|\det A|$ 倍される．

命題 10.2. D' 上で $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$ とする．このとき

$$\mu(D) = \int_{D'} \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| d\boldsymbol{u}.$$

説明． (0) D を四角形によるメッシュで分割し，それを引き戻したものにより D' を分割する．(1) メッシュを細かくすると，D' の分割はほぼ四角形になる．(2) このとき考える四角形が小さいので, Φ はほぼ行列 J_Φ と思うことができる．(3) よって，$\mu(I_{ij}) = |\det J_\Phi(\boldsymbol{u})| \cdot \mu(K_{ij})$ であり，面積はこれらを撚り集めたものであるので，命題が成立することがわかる．

定理 10.3. D' 上で $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$ とする．$\Phi\colon D' \to D$, $\boldsymbol{u} \mapsto \boldsymbol{x} = \Phi(\boldsymbol{u})$ をなめらかかつ 1 対 1 とするとき，

$$\int_D f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} = \int_{D'} f\left(\Phi(\boldsymbol{u})\right) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| d\boldsymbol{u}.$$

例題 10.4. 変数変換 $u = xy$, $v = \frac{y}{x}$ により，次の重積分を計算せよ．

$$I = \int_D x^2y^2\,d\boldsymbol{x}, \quad D = \left\{(x,y);\ \begin{array}{c} 0 \le x \le y \le 4x \\ 1 \le xy \le 2 \end{array}\right\}.$$

(考え方) (1) u, v の動く範囲 ($= D'$) を求める．(2) この変換の Jacobian $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ を求める．今は $(u,v) = \cdots$ の形なので，$\left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right)^{-1}$ を計算するのが楽である．

命題 10.5. 極座標変換 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ において

$$dx\,dy = r\ dr\,d\theta.$$

例題 10.6. 次の重積分を計算せよ．

$$J = \int_D \sqrt{x^2+y^2}\,d\boldsymbol{x},$$
$$\text{ただし，}\quad D = \left\{(x,y);\ \begin{array}{c} 2x \le x^2+y^2 \le 4 \\ x \le 0,\ y \le 0 \end{array}\right\}.$$

(コメント) 「x^2+y^2」がある場合は極座標変換をするとうまくいくことが多い．

まとめ (1) 重積分においても**変数変換**によって計算できるようになる場合がある．(2) 重積分において，1 変数の場合の $g'(u)du$ に対応するものは，**Jacobian** $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det J_\Phi(\boldsymbol{u})$ である．

---

1 月 9 日．

*1 正確にはアファイン変換=平行移動 + 線形写像である．

11　高次元における重積分

3 次元以上になっても，同様の手法で重積分を定義できる．2 次元では長方形 $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ が基本となったが，n 次元においては n 次元の直方体 $I = [a_1, b_1] \times [a_n, b_n]$ が基本となる．この直方体の体積は $\mu(I) = (b_1 - a_1) \times (b_n - a_n)$ により定義する．そして，$\mathbb{R}^n$ の部分集合 D についても，n 次元直方体でメッシュを入れて，「内体積」と「外体積」を通して D の体積を定義する．

11.1　3 次元以上での累次積分

例題 11.1. $D = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3;\ x, y, z \geq 0,\ x + y; z \leq 1\}$ のとき，次の重積分の値 I を求めよ．

$$I = \int_D \frac{d\boldsymbol{x}}{(x + y + z + 1)^2}.$$

11.2　3 次元以上での変数変換

Φ を，$\mathbb{R}^n$ の部分集合 D' から D へのなめらかで 1 対 1 の写像とする．

$$\boldsymbol{x} = \Phi(\boldsymbol{u}) = (\varphi_1(\boldsymbol{u}), \ldots, \varphi_n(\boldsymbol{u})) \quad (\boldsymbol{u} \in D')$$

とする．

定義 11.2. Φ の Jacobi 行列 $J_\Phi(\boldsymbol{u})$ を

$$J_\Phi(\boldsymbol{u}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial u_n} \end{pmatrix}$$

により定義する．また，Φ の Jacobian $\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{u}}$ は

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{u}} = \frac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(u_1, \ldots, u_n)} := \det J_\Phi(\boldsymbol{u})$$

と定義する．

定理 11.3. $\Phi \colon D' \to D$ をなめらかかつ 1 対 1 の写像とするとき，

$$\int_D f(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} = \int_{D'} f(\Phi(\boldsymbol{u})) \left| \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{u}} \right| d\boldsymbol{u}.$$

命題 11.4. 空間の極座標変換

$$x = r \sin\theta \cos\varphi,\ y = r \sin\theta \sin\varphi,\ z = r \cos\theta$$

に対して，

$$dx\, dy\, dz = r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi.$$

1 月 16 日.

例題 11.5. $D = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ x, y, z \geq 0\}$ のとき，次の重積分の値 I を求めよ．

$$I = \int_D \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}\, d\boldsymbol{x}.$$

例題 11.6 (n 次元の球の体積). n 次元空間における，原点を中心とする半径 $r > 0$ の球 $B_n(r) := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n;\ \|\boldsymbol{x}\| \leq r\}$ の体積を $V_n(r) = \int_{B_n(r)} d\boldsymbol{x}$ で表すとき，次が成立することを示せ．

$$V_n(r) = \frac{(\pi r^2)^{n/2}}{\Gamma(n/2 + 1)}.$$

まとめ (1) 3 次元以上になっても，2 次元で用いてきた重積分の計算手法がほぼそのままの形で適用できる．(2) 空間の極座標変換と，その Jacobian の公式 $dx\, dy\, dz = r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$.

12　多変数における広義積分

1 変数のとき，広義積分には次の 2 パターンあった．① 有界区間上での非有界関数の積分，② 非有界区間上の関数の積分．

$$
\begin{aligned}
&① \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \left[2\sqrt{x}\right]_0^1 = 2,\\
&② \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right] = 1.
\end{aligned}
$$

12.1　有界集合上での非有界関数の積分

復習 面積確定集合 D が**有界**かつ**閉**集合 $\Leftrightarrow$ 連続関数 $f(x,y)$ は D で有界で積分可能．

注意 12.1. D が有界でも閉集合でなければ連続関数 $f(x,y)$ は必ずしも有界とは限らない．例．$D = \left\{\boldsymbol{x};\ x^2+y^2<1\right\}$ のとき $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$.

さて，D を有界とし，$f(x,y)$ を D 上連続とする．また，簡単のため $f(x,y) \geq 0$ とする．D に含まれる 閉集合 K 上では $f(x,y)$ は有界で，積分可能である．したがって

$$
I(K) = \int_K f(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}
$$

が定まる．今 $f(\boldsymbol{x}) \geq 0$ としているので，D 内の どんな閉集合 K に対しても $I(K) \leq \displaystyle\int_D f(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}$ である[*1]．

定義 12.2. D 内の**任意の**面積確定な閉集合 K に対して $\displaystyle\int_K f(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}$ が有界であるとき，連続関数 $f(x,y)$ は D で広義積分可能といい，

$$
\int_D f(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} := \sup_K \int_K f(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}
$$

と定義する．ただし，右辺の sup は D 内の閉集合全体を動く．

例題 12.3. 次の広義積分を計算せよ．

$$
I = \int_D \frac{d\boldsymbol{x}}{\sqrt{xy}}, \quad D = \{(x,y);\ 0<x\leq 1,\ 0<y\leq 1\}.
$$

(考え方) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} K_n = D$ となる「閉集合列」K_n を上手く構成すれば，$I = \displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_{K_n} f(x,y)\, d\boldsymbol{x}$ となる．

1 月 23 日．

*1 D 上の積分を定義していないので，このように書くのは実際には不適切である．

12.2　非有界集合上の関数の積分

非有界集合の例 (1) $\mathbb{R}^2$ の点全体，(2) 第 1 象限の点全体，(3) $D = \{(x,y);\ x\geq 1,\ 0\leq xy\leq 1\}$.

定義 12.4. D を非有界な集合とする．D 内の**任意の**面積確定な有界閉集合 K に対して $\displaystyle\int_K f(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}$ が有界であるとき，連続関数 $f(x,y)$ は D で広義積分可能といい，

$$
\int_D f(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} := \sup_K \int_K f(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}
$$

と定義する[*2]．ただし，右辺の sup は D 内の有界閉集合全体を動く．

例題 12.5. 次の重積分を計算せよ．

$$
\int_D e^{-x-y}\, d\boldsymbol{x}, \quad D = \{(x,y);\ x,y\geq 0\}.
$$

(考え方) 例題 12.3 と同じである．

重要な定積分 次の定積分は 2 変数関数の広義積分を用いることで計算できる．

$$
\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}.
$$

(略証) $I = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\, d\boldsymbol{x}$ を 2 通りの方法で計算する．

① $K_n = [-n,n]\times[-n,n]$ とすれば $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} K_n = \mathbb{R}^2$ で，

$$
\lim_{n\to+\infty} I(K_n) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx\right)^2.
$$

② $R_n = \left\{(x,y);\ x^2+y^2<n\right\}$ とすれば $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} R_n = \mathbb{R}^2$ で，

$$
\lim_{n\to+\infty} I(R_n) = \pi.
$$

③ 上の二つを合わせると，$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$ となる．

まとめ (1) 多変数の場合においても広義積分を考えることができる．(2) D に含まれる閉集合の列 K_n で $\lim K_n = D$ となるものを構成し，$\lim I(K_n)$ を計算する．(3) うまく利用すれば，普通には計算できない 1 変数の定積分も計算できる．

*2 定義 12.2 とほぼ同じである．