# 線形代数学・同演習 B

## 演習問題 2

1.$^\dagger$ $W_1, W_2$ は $V=\mathbb{R}^2$ の，$W_3, W_4$ は $C(\mathbb{R})$ の部分空間となるか.

(1) $W_1=\{(y,\,ay);\ y\in\mathbb{R}\}$ （$a$ は定数） (2) $W_2=\{(x,x^2);\ x\in\mathbb{R}\}$

(3) $W_3=\{f\in C(\mathbb{R});\ f(x)\geq 0\}$

(4) $W_4=\left\{g\in C(\mathbb{R});\ \int_{-\infty}^{\infty}|g(x)|\,dx<\infty\right\}$

2. 次の $\mathbb{R}^3$ のベクトルの組は線形独立か.

(1) $\boldsymbol{u}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{u}_2=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix},\ \boldsymbol{u}_3=\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}$

(2) $\boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_3=\begin{pmatrix}-2\\-3\\1\end{pmatrix}$

3.$^\dagger$ 次の $\mathbb{R}^4$ のベクトルの組は線形独立か.

(1) $\boldsymbol{u}_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\4\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{u}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\\5\end{pmatrix},\ \boldsymbol{u}_3=\begin{pmatrix}-2\\2\\-1\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{u}_4=\begin{pmatrix}2\\1\\1\\1\end{pmatrix}.$

(2) $\boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix}0\\-1\\-4\\4\end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_3=\begin{pmatrix}-1\\-2\\-5\\4\end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_4=\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\-5\end{pmatrix}.$

4.$^\dagger$ 次の多項式の組は線形独立になるか調べよ.

(1) $f_1(x)=x^2+4x+3,\quad f_2(x)=4x^2-3x+2,\quad f_3(x)=4x^2-4x-1.$

(2) $g_1(x)=x^2-1,\quad g_2(x)=2x^2+x-1,\quad g_3(x)=x^2-2x-3.$

(3) $h_1(x)=x^2-4,\quad h_2(x)=x^2+x-4,\quad h_3(x)=5x^2-2x+1.$

(4) $k_1(x)=x^2+4x+1,\quad k_2(x)=2x^2+x-3,\quad k_3(x)=3x^2-2x-7.$

5. $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3,\boldsymbol{u}_4$ は線形独立とする．このとき，次のベクトルは線形独立となるか?

$$(1)\ \begin{cases}\boldsymbol{v}_1=2\boldsymbol{u}_1-\boldsymbol{u}_2\\ \boldsymbol{v}_2=-\boldsymbol{u}_1+2\boldsymbol{u}_2-\boldsymbol{u}_3\\ \boldsymbol{v}_3=-\boldsymbol{u}_2+2\boldsymbol{u}_3-\boldsymbol{u}_4\\ \boldsymbol{v}_4=-\boldsymbol{u}_3+2\boldsymbol{u}_4\end{cases}\qquad (2)\ \begin{cases}\boldsymbol{w}_1=\boldsymbol{u}_1-\boldsymbol{u}_2+2\boldsymbol{u}_3+\boldsymbol{u}_4\\ \boldsymbol{w}_2=\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2+\boldsymbol{u}_3+2\boldsymbol{u}_4\\ \boldsymbol{w}_3=3\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2+4\boldsymbol{u}_3+12\boldsymbol{u}_4\\ \boldsymbol{w}_4=2\boldsymbol{u}_1+3\boldsymbol{u}_3+10\boldsymbol{u}_4\end{cases}$$

6. $V=\mathbb{R}[x]_3$ を 3 次以下の多項式全体のなすベクトル空間とする.

(1) 多項式の組 $(x+1)^3$, $(1+x)^2$, $1+x$, $1$ は線形独立であることを示せ.

(2) 多項式 $p(x)=x^3$ を (1) の多項式の線形結合で表わせ.

7.$^\dagger$ 次の命題が正しいならば証明し，間違っているならば反例を示せ.

(1) $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3$ が線形独立ならば，$\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_1-3\boldsymbol{v}_2+2\boldsymbol{v}_3$ も線形独立.

(2) $n\geq 3$ を自然数とする．$n$ 本のベクトルの組 $\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_n$ が線形独立ならば，$\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_{n-1}+\boldsymbol{v}_n$ および $\boldsymbol{v}_n+\boldsymbol{v}_1$ も線形独立.

---

10 月 17 日分 (凡例：無印は基本問題，† は特に解いてほしい問題，$*$ は応用問題)

講義用 HP: http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~h-nakashima/lecture/2017LA.html