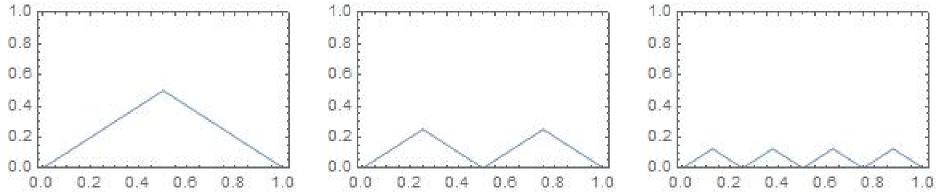
問題

区間 $[0,1]$ 上で連続であるが，その区間上のいかなる点においても微分ができないような関数を構成せよ．

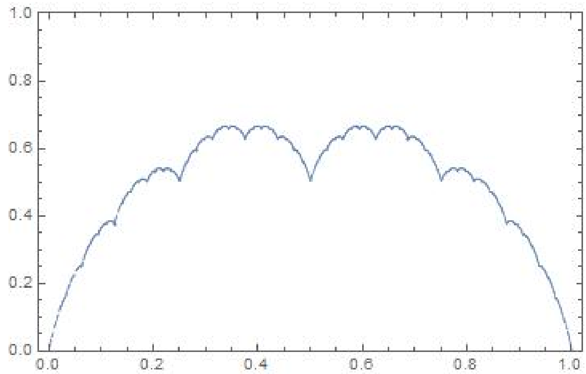
一見，そんな関数はなさそうに思えますが，実はそのような関数は存在します．

$$T(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s(2^n x)}{2^n} \quad (x \in [0,1];\ s(\alpha) = \min_{n \in \mathbb{N}} |n-\alpha|).$$

式だけだと少しわかりにくいですが，次のような関数たち



を次々に足していって関数を構成するのです[1]．特に $x = m/2^k$ $(m, k$ は整数$)$ の点は微分できないことがわかります．$x = m/2^k$ という形の点が区間 $[0,1]$ に稠密に存在することからいたるところで微分できないということになるわけです．因みにこの関数のグラフは次のような形になります[2]．



この関数は高木関数という名前が付いていて，前にコラムで紹介した近世数学史談の著者である高木貞治氏によって発見されました．驚くべきことに，連続関数の中において，このような関数が大多数を占めているのです．つまり，我々が普段扱っている関数は，連続関数の中では非常に特殊なものを扱っていることになります．

[1] 無限級数で定義されているので，収束することや連続性を確認しなければなりませんが．

[2] このような図形をフラクタルと呼びます．