

微分積分学・同演習 A

演習問題 7

1. 次の関数の第 4 階導関数を計算せよ .

$$(1) \frac{x^3}{1-x} \quad (2) \frac{1}{\cos x} \quad (3) \operatorname{Arctan} x \quad (4) \operatorname{Arcsin} x$$

2.[†] 次の関数の n 階導関数を計算せよ .

$$(1) \frac{x}{x^2-1} \quad (2) \frac{x^4}{1-x} \quad (3) x \log x \quad (4) \sin^3 x \quad (5) e^x \sin x$$

3. 次の関数の n 階導関数を計算せよ .

$$(1) x^{n-1} \log x \quad (2) x^{n-1} e^{1/x} \quad (3) (1-x^2)^n$$

4.[†] 次の関数の n 階導関数を計算せよ . ただし , $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ は任意の実数で , $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ は $ad - bc \neq 0$ をみたす実数とする .

$$(1) \cos \alpha x \sin \beta x \quad (2) x^2 \sin \alpha x \quad (3) \frac{ax+b}{cx+d} \quad (4) \frac{1}{(ax+b)(cx+d)}$$

5.[†] C^2 級の関数 f が点 $x = a$ で $f'(a) = 0$ を満たすとする . このとき , $f''(a) > 0$ ならば $f(a)$ は極小値 , $f''(a) < 0$ ならば $f(a)$ は極大値となることを示せ .

6. 自然数 k に対して $f_k(x)$ を , $f_k(x) = x^{2k} \sin \frac{1}{x}$ ($x \neq 0$) , $f_k(0) = 0$ により定義する .

(1) $f_2(x)$ は 2 階微分可能であるが , C^2 -級関数でないことを示せ .

(2)* $f_k(x)$ は k 階微分可能であるが , C^k -級関数でないことを示せ .

7.[†] 次の関数の $x = 0$ の近くにおける 3 次の Taylor 多項式を求めよ .

$$(1) \frac{1}{\cos x} \quad (2) \frac{e^x}{\cos x} \quad (3) \operatorname{Arctan} x \quad (4) e^x \sin x \quad (5) x \log(1+x)$$

8. 一般二項係数 $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$ について , 次の等式を示せ .

$$(1) \text{ 自然数 } n \text{ に対して , } \binom{-n}{k} = (-1)^k \binom{n+k-1}{n-1} \quad (2) \binom{-1}{k} = (-1)^k$$

$$(3) \binom{-1/2}{k+1} = (-1)^{k+1} \frac{(2k+1)!}{2^{2k+1}(k+1)(k!)^2}$$

5 月 30 日分 (凡例 : 無印は基本問題 , [†] は特に解いてほしい問題 , * は応用問題)

講義用 HP: <http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~h-nakashima/lecture/2017C.html>