2016年度・線形代数学A

中島秀斗

2016年4月12日

1　行列の導入

1.1　行列とベクトル

定義 1.1. m, n を自然数とする．$m \times n$ 個の数を縦 m，横 n の長方形に並べ，括弧で括ったものを n 行 m 列の行列という．また，(m, n) 型の行列あるいは $m \times n$ 行列などともいう．

例 1.2. 例えば以下のようなものが行列である．

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \sqrt{2} & -1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$$

用語 1.3. 行列に関して，次の用語を用いる．

成分……………行列を構成する数のこと．i 行 j 列にある成分を (i, j) 成分という．
ゼロ行列O……すべての成分が 0 である行列．
正方行列………行と列の数が等しい行列．$n \times n$ 行列を n 次の正方行列ともいう．
対角行列………$(1, 1)$ 成分，$(2, 2)$ 成分のように行と列が等しい成分を対角成分という．
そして，対角成分以外は 0 となっている正方行列を，対角行列という．
単位行列E_n … n 次の正方行列の中で，対角成分がすべて 1 である対角行列．単に E と書くこともある．[*1]
ベクトル………$m \times n$ 行列のうち，m または n の片方が 1 のとき，ベクトルという．特に

- $m = 1$ のとき，行ベクトルあるいは横ベクトルという，
- $n = 1$ のとき，列ベクトルあるいは縦ベクトルという．

一般に，$m \times n$ 行列 A は次のように表される (行列の一般形):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

この表記はスペースを取るので，次のように省略して書くことも多い：

$$A = (a_{ij}).$$

[*1] 文脈からサイズが明らかなときは．

つまり，(i,j) 成分には a_{ij} という数がある，という書き方をするのである．この i,j はダミー変数で場合に応じて，例えば jk や pq といったものに書き換える．また (i,j) 成分であることを強調する意味で，$A=(a_{ij})_{ij}$ と書くこともある．これは，後に出てくる “行列の転置” を表す際に便利である．

用語 1.4. 本講義では以下のように記号を使い分ける．

数……………小文字で $a,b,x,y,\ldots$ 等,
行列…………大文字で $A,B,X,Y,\ldots$ 等,
ベクトル……太文字で $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\ldots$ 等.

1.2 行列の演算

ここでは行列同士の足し算，掛け算を定義する．足し算は直感的であるので特に問題はないが，積は少し特殊であるため注意が必要である．まず，行列の等号について確認しておく．

二つの行列 A,B が同じ型で，さらに対応する成分がすべて等しいとき，$A=B$ と表す．

まず，行列の足し算 $+$ とスカラー倍を定義しよう．二つの (同じ型の) 行列 $A=(a_{ij}), B=(b_{ij})$ と，実数 c に対して，その足し算 $A+B$ およびスカラー倍 cA を次のように定義する．

$$\text{足し算}\quad A+B := \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}+b_{ij})_{ij}$$

$$\text{スカラー倍}\quad cA := \begin{pmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \cdots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \cdots & ca_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ca_{m1} & ca_{m2} & \cdots & ca_{mn} \end{pmatrix} = (ca_{ij})_{ij}$$

例 1.5. 例えば，次のように計算を行う．

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & 2+3 \\ 3+2 & 4+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}, \quad -2\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\times 1 & -2\times(-2) \\ -2\times 2 & -2\times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -4 & -6 \end{pmatrix}.$$

次に行列の掛け算を定義しよう．2 つの行列 A,B について，“A の列の数” と “B の行の数” が等しいときに行列の掛け算 AB が定義される．さて，

$$A=(a_{ij})_{ij}\text{を } (m,n)\text{ 型},\quad B=(b_{jk})_{jk}\text{を } (n,r)\text{ 型}$$

としよう．このとき，

$$c_{ik} := c_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{i2} + \cdots + a_{in}b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$$

とおきたとき，行列 A と B の積 AB は次のように定義される:

$$AB = (c_{ik})_{ik} \quad (\text{つまり } (i,k) \text{ 成分が } c_{ik}\text{であるような行列}).$$

定義から明らかなように，AB は (m,r) 型の行列となる．この積は次のようなイメージで考えると良い．

$$\begin{pmatrix} & & \\ \boxed{a_{i1}\ a_{i2}\ \cdots\ a_{in}} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & \boxed{\begin{matrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \\ b_{nk}\end{matrix}} & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \boxed{c_{ik}} & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

なぜ行列の積をこのように定義するかについては，第 3 章で説明する．

例 1.6. 例えば，$(2,3)$ 型の行列と $(3,2)$ 型の行列の積は，次のように $(2,2)$ 型の行列となる．

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 1 & 1\cdot(-1)+2\cdot 1+3\cdot 0 \\ 2\cdot 2+(-1)\cdot 3+5\cdot 1 & 2\cdot(-1)+(-1)\cdot 1+5\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 1 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}.$$

注意 1.7. これも定義から明らかではあるが，たとえ積 AB が定義されたとしても，掛ける順番を入れ替えた "BA" は必ずしも定義されない．さらに，A, B が共に <u>正方行列</u> ならば，AB，BA いずれも定義できるが，一般には

$$AB \neq BA$$

である（もちろん，$AB = BA$ となる可能性もある）．たとえば，

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+4 & 0+4 \\ 0+4 & 0+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \quad \neq \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 2+0 \\ 2+0 & 4+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

補題 1.8. 以上の行列の演算に関して，次のような性質がある．

1. $(AB)C = A(BC)$,
2. $A(B+C) = AB + AC, \quad (A+B)C = AC + BC$,
3. $(cA)B = A(cB) = c(AB)$,
4. 一般には $AB \neq BA$,
5. $m \times n$ 行列 A に対して, $E_m A = A E_n = A$.

もちろん，行列の積が定義できる範囲で考えている．

1.3 行列を考える理由について

行列は様々な分野において基本的な役割を果たしている．ここでは，その中でも特に基本的な連立一次方程式との関係を紹介しよう．次の連立方程式を考える:

$$\begin{cases} ax + by = p, \\ cx + dy = q. \end{cases}$$

この方程式は，行列を用いると

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \quad \text{（この式を } A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} \text{ とかく）}$$

のように表せることに注意する．もし $BA = E_2$ となる行列 B が存在するならば，この方程式の解 $\boldsymbol{x}$ は，上式の両辺に左から B を掛けることにより

$$BA\boldsymbol{x} = B\boldsymbol{p} \quad \text{つまり} \quad \boldsymbol{x} = B\boldsymbol{p}$$

によって与えられる事がわかる．つまり，

行列は連立一次方程式を解くための簡単な方法を与える．

ちなみに，この場合においては，$ad - bc \neq 0$ のとき，

$$B = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

とおけば，$BA = E_2$ となる．$\det A = ad - bc$ を行列 A の行列式といい，本講義において一般の n 次正方行列に対して計算する方法を紹介する．

この講義では，

- 連立一次方程式の解法
- 正方行列が，逆行列を持つための条件

について学ぶ．行列に関するキーワードを以下に列挙しておく．

線形写像，行列式，固有値，固有ベクトル，基本変形，簡約化，逆行列，線形独立・従属．

次回は平面と空間の幾何について扱う．

2 平面と空間の幾何

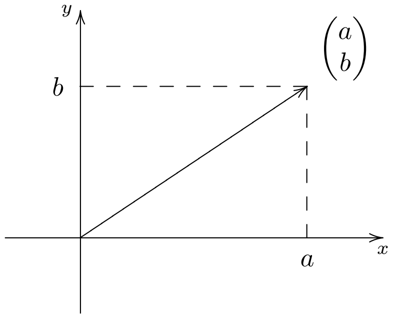
行列について扱う前に，行列が作用する空間 (数ベクトル空間) に関する幾何について学ぶ．

用語 2.1. 実数全体の集合を $\mathbb{R}$ で表し，$x \in \mathbb{R}$ と書けば x は実数であることを意味する．また，以下のように定義する．それぞれ，平面・空間を表している．

$$\mathbb{R}^2 = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} ;\ x, y \in \mathbb{R} \right\}, \qquad \mathbb{R}^3 = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} ;\ x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

2.1 平面の幾何

平面 $\mathbb{R}^2$ において，直線がどのように記述できたのかを復習する．



$\left(\begin{array}{l} \text{行列との兼ね合いから，} \\ \text{平面の点を縦ベクトルで表す．} \end{array} \right)$

定義 2.2. 平面の 2 点 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \in \mathbb{R}$ に対して，それらの内積 $(\boldsymbol{x} \,|\, \boldsymbol{x}') \in \mathbb{R}$ を以下により定義する．

$$(\boldsymbol{x} \,|\, \boldsymbol{x}') := xx' + yy'.$$

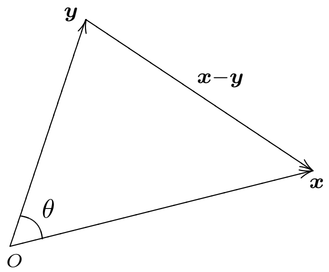
さらに，$||\boldsymbol{x}|| := \sqrt{(\boldsymbol{x} \,|\, \boldsymbol{x})} (= \sqrt{x^2 + y^2})$ とおき，これをベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ のノルム (長さ) という．

注意 2.3. 内積 $(\boldsymbol{x} \,|\, \boldsymbol{y})$ は (1) 対称であり，(2) 双線型である:

$$\begin{aligned} &(1) \quad (\boldsymbol{x} \,|\, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y} \,|\, \boldsymbol{x}), \\ &(2) \quad (a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y} \,|\, \boldsymbol{z}) = a(\boldsymbol{x} \,|\, \boldsymbol{z}) + b(\boldsymbol{y} \,|\, \boldsymbol{z}), \quad (\boldsymbol{x} \,|\, a\boldsymbol{y} + b\boldsymbol{z}) = a(\boldsymbol{x} \,|\, \boldsymbol{y}) + b(\boldsymbol{x} \,|\, \boldsymbol{z}). \end{aligned}$$

つまり，(1) 入れ替えても値は変わらない，(2)“展開” できる，ということである．

内積とノルムには，以下のような関係がある．



(余弦定理より，

$$||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}||^2 = ||\boldsymbol{x}||^2 + ||\boldsymbol{y}||^2 - 2||\boldsymbol{x}|| \cdot ||\boldsymbol{y}|| \cos\theta$$

であるが, $||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}||^2 = (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \,|\, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})$ であることを思い出すと，

$$(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \,|\, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x} \,|\, \boldsymbol{x}) - 2(\boldsymbol{x} \,|\, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{y} \,|\, \boldsymbol{y}).$$

これより，

$$(\boldsymbol{x} \,|\, \boldsymbol{y}) = ||\boldsymbol{x}|| \cdot ||\boldsymbol{y}|| \cos\theta$$

が分かる．)

これより特に，二つのベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ が直交していることと，$(\boldsymbol{x} \,|\, \boldsymbol{y}) = 0$ となることが同じであることが分かる．このように，

$$\boxed{\text{内積 } (\cdot|\cdot) \text{ は，平面に “角度” という概念を与えている．}}$$

2 次平面における直線の方程式について復習しよう．直線の方程式は

$$y = ax + b \qquad \text{または} \qquad x = c$$

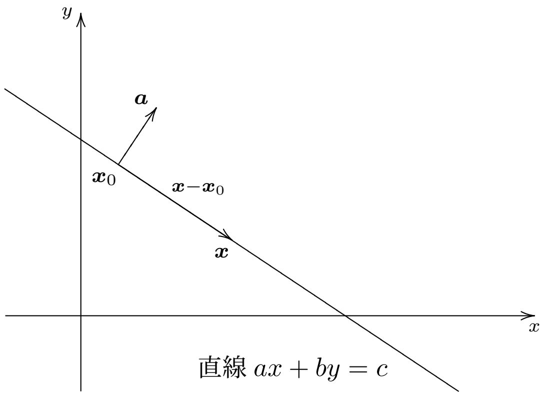
のように表せた．場合分けがあると何かと面倒なので，これらをまとめて

$$ax + by = c$$

のように表し，これを直線の方程式（標準形）と呼ぶ．もう少し見方を変えると，

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{とおきたとき，} \quad (\boldsymbol{a} \,|\, \boldsymbol{x}) = c.$$

つまり，直線上の点 $\boldsymbol{x}$ は，あるベクトル $\boldsymbol{a}$ との内積が一定であるような点として特徴づけられることが分かる．もう少し詳しく見てみよう．$\boldsymbol{x}_0 = \binom{x_0}{y_0}$ を直線上の一点とし，直線上の一般の点を $\boldsymbol{x} = \binom{x}{y}$ としよう．



(2 点 $\boldsymbol{x}_0$ と $\boldsymbol{x}$ は直線 $ax + by = c$ 上にあるので，

$$ax + by = c$$
$$ax_0 + by_0 = c$$

が成り立つが，これらの式を辺々引けば，

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

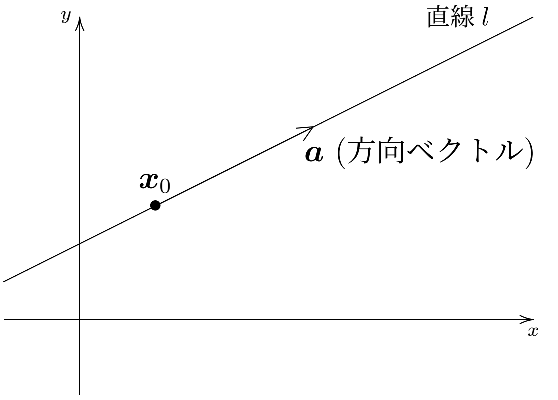
となる．内積を使って書けば

$$(\boldsymbol{a} \,|\, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = 0,$$

つまり，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0$ は直交している．)

ベクトル $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0$ は直線の方向を表していることより，$\boldsymbol{a}$ は直線と直交していることが分かる．$\boldsymbol{a}$ をこの直線の法線ベクトルという．特に $||\boldsymbol{a}||=1$ のとき，単位法線ベクトルという．

直線には，今述べた標準形の他にも別の表示の仕方もある．それは以下のようなものである．



$$\left(\begin{array}{l}\text{左図のようなときに，この直線 } l \text{ を，}\\ \qquad\qquad l\colon \boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0+t\boldsymbol{b}\\ \text{と表記する．ただし，} t \text{ は実数のパラメータである．}\\ \text{つまり点 } \boldsymbol{x}_0 \text{ を通り，ベクトル } \boldsymbol{a} \text{ の方向を}\\ \text{持つ直線というような書き方をするわけである．}\end{array}\right)$$

この記述は非常に直感的なものであり，点 $\boldsymbol{x}_0$ を通るということがひと目で分かる利点がある一方で，一意に定まらないという欠点もある．その一方で標準形は (簡単な定数倍を除いて) 一意に定まる一方で，どの点を通るかということはひと目ではわからないので，どちらの表記も一長一短がある．もちろん，片方が与えられたらもう片方の記述に変換することもできる．

2.2 空間の幾何

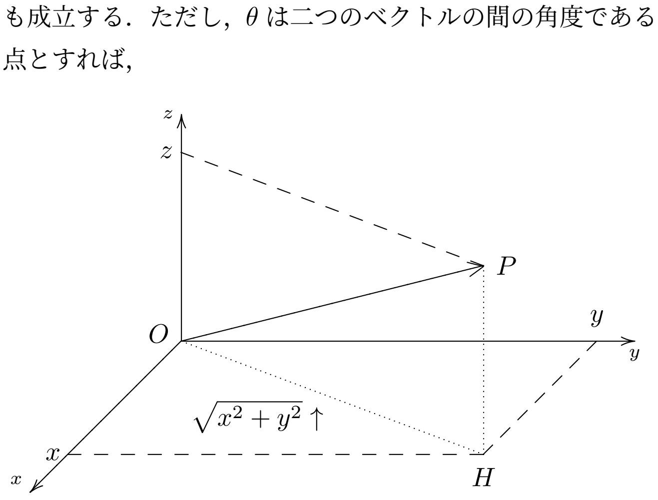
次に空間 $\mathbb{R}^3$ において同様の考察を行う．平面のときと同様に内積 $(\cdot\,|\,\cdot)$ およびノルム (長さ)$||\cdot||$ を，

$$(\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{x}') := xx'+yy'+zz', \quad ||\boldsymbol{x}|| := \sqrt{(\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{x})}\ \left(=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right), \qquad \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

により定義する．平面のときと同様に，内積は対称・双線形である．また，内積とノルムの関係

$$(\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{y}) = ||\boldsymbol{x}||\cdot||\boldsymbol{y}||\cos\theta$$

も成立する．ただし，θ は二つのベクトルの間の角度である．ノルムについて，点 P を座標 (x,y,z) [*2]を持つ点とすれば，



$$\left(\begin{array}{l}\text{左図において，線分 } OH \text{ の長さは}\\ \qquad\qquad |OH|=\sqrt{x^2+y^2}\\ \text{である．ここで三角形 } \triangle OHP \text{ に着目する．}\\ \angle OHP \text{ は直角であるため，}\\ \text{三平方の定理より線分 } OP \text{ の長さは}\\ |OP|=\sqrt{(\sqrt{x^2+y^2})^2+z^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\\ \text{となる．}\end{array}\right)$$

[*2] 行列との兼ね合いから縦ベクトルで書くといいつつ，横ベクトルで書くことも多い．縦ベクトルで書くとスペースをとるため．

3 次元空間における平面の方程式は，(2 次元平面における直線と同じような形で)

$$ax + by + cz = d$$

で与えられる．この方程式を (3 次元空間における) 平面の方程式の標準形という．あるいは，

$$z = ax + by + c$$

といった形で書くことも多い (2 変数関数の接平面など)．$\boldsymbol{a} = {}^t(a, b, c)$, $\boldsymbol{x} = {}^t(x, y, z)$ とおけば[*3]，この平面の方程式は

$$(\boldsymbol{a} \,|\, \boldsymbol{x}) = d$$

という形でかける．よって，2 次元平面のときと同様に，この平面上にある点 $\boldsymbol{x}_0$ を一つ固定したとき，平面上の点 $\boldsymbol{x}$ は次を満たすものとして特徴付けされる:

$$(\boldsymbol{a} \,|\, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = 0.$$

$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0$ は平面に沿ったベクトルであるので，つまり，この平面は点 $\boldsymbol{x}_0$ を通り，ベクトル $\boldsymbol{a}$ と直交する平面ということになる．ベクトル $\boldsymbol{a} = {}^t(a, b, c)$ を法線ベクトルという．

2 次元平面における直線のように，3 次元空間内の平面もパラメータ表示ができる．つまり，平面に沿ったベクトル 2 本 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ (もちろん，平行でないように選ぶ) と，平面上の一点 $\boldsymbol{x}_0$ を選んだとき，平面上の点 $\boldsymbol{x}$ は，2 つのパラメータ s, t を用いて

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + s\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b} \quad (s, t \in \mathbb{R})$$

と表せる．この式を平面の方程式のパラメータ表示という．この表記は一意的でないことに注意.

さて，次に空間内における直線の方程式を考えよう．直線の方程式は，パラメータ表示が基本的である[*4]．つまり，点 $\boldsymbol{x}_0$ を通り，$\boldsymbol{a} = (a, b, c)$ という方向を向いている直線を，パラメータ t を用いて

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{a} \quad (t \in \mathbb{R})$$

と表すのである．成分で書けば,

$$\begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \\ z = z_0 + tc \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

である．もちろん，この表記は一意的でないことに注意しなければならない.

2.3　外積

3 次元空間においては，“外積” と呼ばれる演算が存在する．

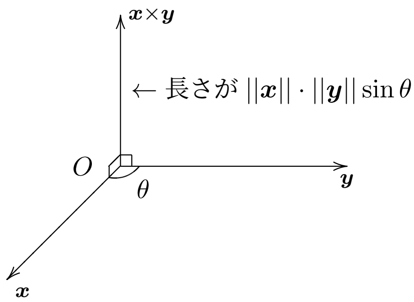
定義 2.4. $\mathbb{R}^3$ の 2 つのベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対して，それらの外積 $\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^3$ とは，2 つのベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に垂直で，下図の向きを持ち，その長さが $||\boldsymbol{x}|| \cdot ||\boldsymbol{y}|| \sin\theta$ [*5]で与えられるベクトルである．ただし，θ はベクトル

[*3] ${}^t(a, b, c) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ である．縦ベクトルで書くとスペースを取るため，このように表記する．この操作を “転置を取る” という．

[*4] パラメータを用いない表記法もあるが，少し分かりにくいので本講義では省略する．ちなみに，それは $\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$ という形のものである．これで点 (x_0, y_0, z_0) を通り，方向 (a, b, c) を持つ直線ということになる．

[*5] 実はこの量は二つのベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ を 2 辺とするような平行四辺形の面積に等しい．

$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ のなす角度である．つまり，$\cos\theta = (\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{y})/(||\boldsymbol{x}|| \cdot ||\boldsymbol{y}||)$.



3 行列と線形写像

この節では，行列はどういう文脈で生まれたのかを簡単に説明する．

3.1 線形写像

まず言葉の定義から始める．**集合**とは，物の集まりであり，特にその集まりを規定する明確な基準のあるもののことを言う．例えば，自然数全体の集合 ($\mathbb{N}$ と表す) や実数全体の集合 ($\mathbb{R}$ と表す) などが集合の典型例である．また，実数 $\mathbb{R}$ を並べて得られる集合を $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \ldots, \mathbb{R}^n, \ldots$ のように表す:

$$\mathbb{R}^n := \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} ;\ x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \right\}.$$

$\mathbb{R}^n$ を (n 次元) 数ベクトル空間と呼ぶ．集合 X があったとき，X を構成している物を X の**元**または**要素**と呼ぶ[*6]．x が集合 X の元であることを $x \in X$ と書き，逆に y が集合 X の元ではないときには $y \notin X$ のように表す．さて，二つの集合 X, Y があったとき，X の各元 x に対して，Y に属する元 y を一つ対応させる規則 f が与えられているとき，その規則 f のことを，X から Y への**写像**という．特に $Y = \mathbb{R}$ のとき，f を関数という．

例 3.1. 写像の例として，以下の二つを挙げておく:

1. $f(x) = x^2$ や $f(x) = \sin(x)$ といった関数は，$X = \mathbb{R}$ から $Y = \mathbb{R}$ への写像である．
2. $X = \mathbb{R}^2$, $Y = \mathbb{R}^2$ とする．このとき，$f(x, y) := (y, x)$ とすれば，f は $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^2$ への写像である．

数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ において，**線形結合**とは実数 $x_1, \ldots, x_s$ とベクトル $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_s \in \mathbb{R}^n$ を用いて，

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_s\boldsymbol{a}_s = \sum_{i=1}^{s} x_i\boldsymbol{a}_i$$

のように表される和のことである．ここで現れる $s \in \mathbb{N}$ はなんでもよい．

定義 3.2. **線形写像**とは，$\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への写像 f で，次の二つの条件をみたすもの:

$$(1)\ f(a\boldsymbol{x}) = af(\boldsymbol{x}) \qquad (2)\ f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y}) \quad (a \in \mathbb{R},\ \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n).$$

[*6] 板書では元という言葉を使う．主に画数が少ないという理由から．

この二つの式は，次のように一つの式にまとめることもできる:

$$(1)' \ f(a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{y}) = af(\boldsymbol{x}) + bf(\boldsymbol{y}) \quad (a,b\in\mathbb{R}\ \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n).$$

つまり,「線形結合をとる」という操作と「f で写す」という操作の順番を入れ替えることができる写像である.[*7]あるいは写像 f を "分配できる" と言ってもいいかもしれない.

$n=m=2$ のとき，線形写像とはどのようなものになるか調べてみよう．まず，$\mathbb{R}^2$ の元 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ は,

$$\boldsymbol{x} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2; \quad \text{ただし,} \quad \boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

のように，$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ の線形結合で書けることに注意しよう．さて線形写像 $f\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ に対して，$\boldsymbol{x}'=f(\boldsymbol{x})$ とおく．このとき，f の線形性より

$$\boldsymbol{x}' = f(\boldsymbol{x}) = f(x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2) = xf(\boldsymbol{e}_1) + yf(\boldsymbol{e}_2)$$

となる．ここで，$f(\boldsymbol{e}_1), f(\boldsymbol{e}_2)$ は当然ながら x, y とは関係ないベクトル (値域が $\mathbb{R}^2$ なのでベクトルになる) であるので，それを (恣意的にではあるが)

$$f(\boldsymbol{e}_1) = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \quad f(\boldsymbol{e}_2) = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

とおけば,

$$\boldsymbol{x}' = x\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

となり，行列の積が現れる．このように，線形写像は行列を用いて表される.

注意 3.3. 行列の積の定義が複雑になってしまった理由がここにある．つまり, 二つの線形写像 $f, g\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ がそれぞれ

$$f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}, \quad g(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} a'x+b'y \\ c'x+d'y \end{pmatrix}$$

と書けているとき，その "合成写像"$(f\circ g)(\boldsymbol{x})$ を計算してみる[*8]と,

$$(f\circ g)(\boldsymbol{x}) = f(g(\boldsymbol{x})) = f\begin{pmatrix} a'x+b'y \\ c'x+d'y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(a'x+b'y)+b(c'x+d'y) \\ c(a'x+b'y)+d(c'x+d'y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (aa'+bc')x+(ab'+bd')y \\ (ca'+dc')x+(cb'+dd')y \end{pmatrix}.$$

ここで，写像 f と行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, 写像 g と行列 $B=\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ が対応しており，その合成写像 $f\circ g$ は

$$C = \begin{pmatrix} aa'+bc' & ab'+bd' \\ ca'+dc' & cb'+dd' \end{pmatrix}$$

という行列と対応しているということが分かる．こういう事情があって，行列 C を行列 A と行列 B の "積" として定義したわけである.

[*7] このように二つの操作を入れ替えることができるとき，compatible である，という．少しくだけた数学の文章においては，コンパチになる，といった表記もときどき見かける.

[*8] 合成写像とは，二つの写像 $f, g\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ が与えられたとき，$(f\circ g)(x) := f(g(x))$ と定義することによって得られる写像のことである.

3.2　線形写像の性質

ここでは，線形写像の簡単な性質をみよう．線形写像 f に対して，対応する行列を A と書こう．考えている空間は $\mathbb{R}^2$ もしくは $\mathbb{R}^3$ のいずれかである．

補題 3.4. 線形写像に関して，次が成り立つ:

1. 線形写像は原点 O を動かさない．
2. 直線を直線，または点に写す．
3. 平面を平面，または直線・点に写す．

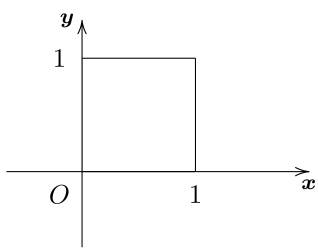
証明.
1. 原点の座標は ${}^t(0,0)$ なので，$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cdot 0 + b\cdot 0 \\ c\cdot 0 + d\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
2. 直線はパラメータ表示をすれば，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{a}$ (t はパラメータ) という形で書ける．よって，この直線を線形写像 f で写したものは
$$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} = A(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{a}) = A\boldsymbol{x}_0 + t(A\boldsymbol{a})$$
という形に変わる．ここで $A\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ ならば，この式は直線のパラメータ表示そのものであり，$A\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ ならば，この式は平面 (もしくは空間) 上の一点である．
3. 平面のパラメータ表示は $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + s\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}$ (s, t はパラメータ) であったが，これを線形写像 f で写したものは
$$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} = A(\boldsymbol{x}_0 + s\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}) = A\boldsymbol{x}_0 + s(A\boldsymbol{a}) + t(A\boldsymbol{b})$$

という形に変わる．ここで $A\boldsymbol{a}, A\boldsymbol{b}$ が共に $\boldsymbol{0}$ ならば一点に，$A\boldsymbol{a}, A\boldsymbol{b}$ が平行なベクトルならば直線に，それ以外ならばこの式は平面のパラメータ表示そのものである． □

つまり，“まっすぐなものをまっすぐなものに写す” ということである．[*9]

3.3　線形写像の例 ($n = 2$ のとき)

ここでは線形写像 $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ のいくつかの例を，具体例を通して見てみよう．高校で扱った関数が，グラフを通して図形的にみたように，ここでも図形的に見ていく．しかしながら，扱う次元が $2 + 2 = 4$ なので，関数のときのようにグラフに書くわけにはいかないので，次の単位正方形がどのような形に変わるかということを見ることによってその雰囲気を味わうに留める．



[*9] もちろん一点に縮約されるときは除く．

以下，行列 A は線形写像 f と対応する行列とする．線形性 (“分配できる”) があるので，この正方形の頂点 $(0,0),(1,0),(0,1),(1,1)$ がどこに写っているのかを調べればよいが，原点は原点に写すので改めて調べる必要はないし，点 $(1,1)$ も線形性から $(1,0)$ と $(0,1)$ を写したものの和になっていることがわかっているので，$(1,0)$ と $(0,1)$ がどこに写るかを調べるだけでよい．

1. 拡大・縮小 $A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \quad (a,b>0)$.

   このとき，$A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\b\end{pmatrix}$ なので，次の 4 点を頂点とする長方形に写る:

   $$(0,0), \quad (a,0), \quad (0,b), \quad (a,b).$$

2. 回転 $P(\theta)=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad (-\pi \le \theta < \pi)$.

   このとき $P(\theta)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$, $P(\theta)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}$ なので，次の 4 点を頂点とする正方形に写る:

   $$(0,0), \quad (\cos\theta,\sin\theta), \quad (-\sin\theta,\cos\theta), \quad (\cos\theta-\sin\theta,\sin\theta+\cos\theta).$$

3. 反転 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ など.

   このとき $A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$ なので，次の 4 点を頂点とする長方形に写る:

   $$(0,0), \quad (1,0), \quad (0,-1), \quad (1,-1).$$

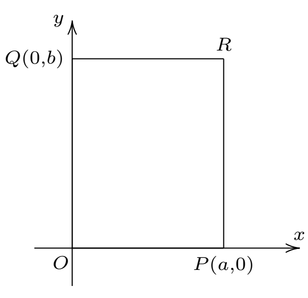
4. 射影 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ など.

   このとき $A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ なので，元の正方形は潰れて次の区間の線分になる：

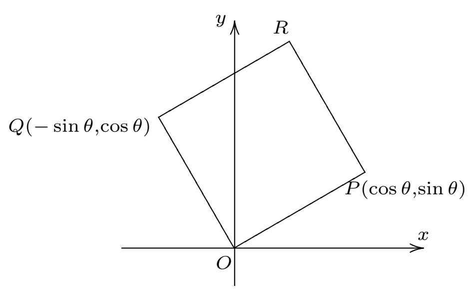
   $$(0,0), \quad (1,0).$$

図形で描くと以下のようになる.

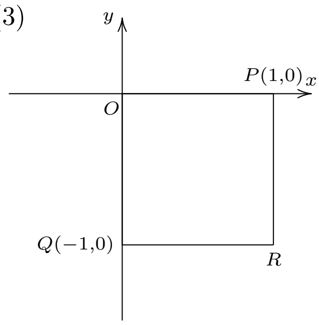
(1)



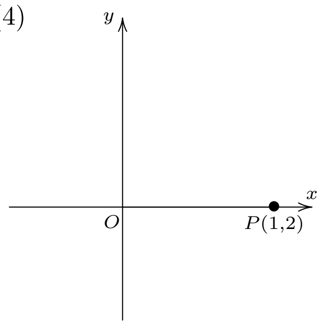
(2)



(3)



(4)



3.4　行列式の意味 ($n = 2$ のとき)

$n=2$ のとき，行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ には，行列式 $\det(A) = ad - bc$ というものが重要な役割を果たした (逆行列の存在判定)．この量は，どのようなものになるのだろうか．

前節で考えたように，単位正方形はこの行列で (一般には) 次の 4 点

$$O(0,0), \quad A(a,c), \quad B(b,d), \quad C(a+b, c+d)$$

を頂点とする平行四辺形に写る．この平行四辺形の面積を求めてみよう．まず，$|\square OABC| = 2|\triangle OAC|$ および $|\triangle OAC| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OC}| \sin\theta$ (θ は $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OC}$ のなす角度) が成り立つ．また，二つのベクトルのなす角度と内積との関係より，

$$\cos\theta = \frac{(\overrightarrow{OA} \mid \overrightarrow{OC})}{|\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OC}|}$$

が成り立つことに注意しよう．これらを合わせると，

$$|\square OABC| = 2|\triangle OAC| = |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OC}|\sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OC}|^2 - (\overrightarrow{OA} \mid \overrightarrow{OC})^2} = \sqrt{(ad-bc)^2},$$

つまり $|\square OABC| = |ad - bc| = \det(A)$ となっていることが分かる．これより，

行列式は二つのベクトル $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ からなる平行四辺形の (符号付き) 面積に等しい

となる．行列 A の行列式が 0 になるということは，行列 A で写したら図形が潰れてしまい，元の情報を引き出せなくなる．だから逆行列を持てない．大雑把に言ってしまうとそのような感じとなる．この行列式という概念は一般の (正方) 行列に対しても定義されるが，その意味合いは $n=2$ のものとほとんど同じである．