

微分積分学・同演習 A

5 月 9 日分 小テスト

学籍番号：

氏名：

k を正の整数とする．漸化式 $a_1 = 1, a_{n+1} = \sqrt{k + a_n}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $\{a_n\}$ は上に有界な単調増加数列になることを示せ．

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ．

(解答例) 前回の小テストの解答例．

関数 \sqrt{x} が単調増加であることより， $\{a_n\}$ が単調増加になることは明らか． λ を方程式 $x = \sqrt{k + x}$ の解とする．すなわち， $\lambda = (1 + \sqrt{4k + 1})/2$ である．このとき任意の自然数 n に対して $a_n \leq \lambda$ となる．実際，

$$a_{n+1} = \sqrt{k + a_n} \leq \sqrt{k + \lambda} = \lambda$$

である．以上より数列 $\{a_n\}$ は上に有界な単調増加数列であるので収束し，方程式 $x = \sqrt{k + x}$ の解 (で $1 \leq x \leq \lambda$ の範囲にあるもの) がその極限值になる．すなわち， $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lambda = (1 + \sqrt{4k + 1})/2$ ．

講義や講義内容に関して，意見・感想・質問等を自由に記述してください．