直交行列というものが出てきました．2 次のものを見てもらえば分かるように，これは「回転 + 反転」に対応する行列で，CG といった応用の場面において非常に重要な役割を果たします．例えば，平面のある図形を連続的に回転させることを考えます．図形は点の集合として表されているので，その各点 $\boldsymbol{x}$ に回転行列 $P(\theta) = \left(\begin{smallmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{smallmatrix}\right)$ を掛けることと対応していて，$P(\theta)\boldsymbol{x}$ において θ を動かせば，連続的な回転が得られるのです．

では 3 次元の場合はどうでしょうか．たとえば z 軸を軸にした回転行列は

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ですが，特定の方向を軸にした回転，たとえば直線 $s\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ を軸にした回転はどのように表せばよいのでしょうか．また，どのようにすれば “自然な” 回転で連続的に動かすことができるでしょうか．

この問題に対する解答の一つを与えるものが “Lie 群と Lie 環” というものになります．大雑把に言えば，「回転を表す行列の群 (**直交行列**)」と「あるベクトル空間 (**交代行列**)」とがうまく対応しているというもので，大雑把なイメージとしては

$$\text{交代行列 } X = \begin{pmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{pmatrix} \longmapsto \exp X \colon \det = 1 \text{ の直交行列}^{1)}$$

のように対応しています．特にベクトル空間はまっすぐな空間なので，一度ベクトル空間に移して，そこで線形補間をしたあとで回転行列に戻してやれば “自然な” 回転を実現することができる，という仕組みです．

工学系では四元数を用いて回転を記述する手法がよく使われていますが，原理は交代行列を用いたものと同様です．四元数を用いる方が省スペースで積も簡単，しかも例外処理も少ないので重宝されているようです．興味を持たれた方は，参考文献に挙げた本を読んでみては如何でしょうか．

1) exp は行列の指数写像．

参考文献

[1] 矢野忠，「四元数の発見」，海鳴社．