

線形代数学・同演習 B

1 月 23 日分 質問への回答

- 質問
- 「共役になる行列」がよくわかりません。
 - 「正規直交基底」という良い基底に関する表現行列＝直交行列ですよね？
 - 固有値が実数だったら直交行列で三角行列できるというのと対称行列は直交行列で対角行列にできるってのはなんとなくわかったんですが、必ずしも三角＝対角でないのにどのようにこれらが関係してくるのがよく分かりませんでした。
-
- 二つの行列 A, B が共役というのは、ある正則行列 P を用いて $B = P^{-1}AP$ のように書けるときをいいます。このとき、二つの行列は同じ線形変換の、異なる基底に関する表現行列になっています。
 - 『「正規直交基底」という良い基底に関する表現行列＝直交行列』確かに直交行列は正規直交基底を構成する列ベクトルが並んだ構造をしています。これは違います。一般に、表現行列というのは一般の写像に関するものであり、そこには直交性などの条件は全く含まれていません。
 - まず定義より、対角行列は三角行列に含まれています。よって、講義中の定理 12.7 より実対称行列は固有値が必ず実数になるので、直交行列により三角化できます。式で書けば、 $A = {}^tPTP$ (P は直交行列、 T は三角行列) です。さて、今 A は対称行列としているので ${}^tA = A$ です。これは

$$A = {}^tPTP = {}^tP{}^tTP = {}^tA \quad \Leftrightarrow \quad {}^tT = T$$

という条件に書き換えることができ、三角行列のうちで ${}^tT = T$ を満たすものは対角行列に限る、ということが実対称行列が対角化可能であるということが導かれるというカラクリです。ここで効いてきているのは直交行列ならば $P^{-1} = {}^tP$ であるということです。これがあるから対称行列の性質 ${}^tA = A$ の条件が活きてきます。