2020 年度　名古屋大学
理系基礎科目（文系） 数学入門

第 5 回

講義担当者：中島秀斗

2020 年 5 月 21 日

はじめに

- 授業形態：学習資料 (スライド・ノート) 配布
  - はじめはスライドに目を通してください．
  - ノートはスライドの要約になります．復習にご活用ください．
  - スライド内にある赤い枠で囲った演習問題は，実際に解いてもらうことを想定しています．
- 小テストについて
  - 小テストは NUCT で行われます．
  - 講義日の午前８時から日付が変わるまでの間に完了してください．
- レポートについて
  - 講義 3,4 回毎にレポートを課します．
  - 各回に出題する演習問題を解いたものを，pdf ファイルとして提出してもらいます．
  - 学習資料配布時のお知らせの中で通知します．

凡例

公式や定理など，講義において重要な情報は青の枠で囲む．

演習問題は赤の枠で囲む．実際に手を動かして解いてほしい．

コメントや注意すべき点などは緑の枠で囲む．

例題は黄色の枠で囲む．解答も用意されているが，計算量の多いものは実際に手を動かして一緒に解いてほしい．

前回の訂正

前回の定理 4.6 を以下のように訂正します．記号が重複して混乱が生じています．その証明も，定理の記述をそのまま流用していたのでおかしな事になっています．どこがおかしいか，各自調べてみてください．

定理 4.6. 関数 f の逆関数 $y = f^{-1}(x)$ の微分は

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{f'\bigl(f^{-1}(x)\bigr)}$$

で与えられる．記号的に書けば以下のようになる．

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

第１回レポートについて

- 気になった箇所について解説します.
- 第 2 回 (5-a) この場合は一番大きいもので割るよりも, $\frac{5^n-2^n}{3^n}=(\frac{5}{3})^2-(\frac{2}{3})^n$ とするほうがわかりやすい.
- 第 2 回 (6) $r=0$ の場合は明らかなので，$r\neq 0$ のとして $\frac{r^n}{1+r^n}=\frac{1}{1+(\frac{1}{r})^n}$ のように変形して考える．$-1<r<0$ のとき，$(\frac{1}{r})^n$ は振動するが，全体としては，定数を絶対値が大きいもので割っている形 ($\frac{0}{\pm\infty}$) なので，符号によらずに 0 に収束している.
- $h\to +0$ とすると $\frac{1}{h}\to +\infty$ である.
- 第 3 回 (5) 「$x=0$ 以外の点すべて」なので，負の数のときに大小が逆転する $f(x)=x$, $f(x)=2x$ という組は例にならない点に注意．絶対をとるか，$f(x)=x^2$, $g(x)=2x^2$ などのように y 軸対称な関数 (偶関数) を考えるとわかりやすい.

§5　初等関数の微分

§5　初等関数の微分

- 前回は積・商の微分と合成関数の微分を扱った．
- 今回は基本的な関数である初等関数の微分を扱う．
- 初等関数とは，多項式・指数関数・対数関数や三角関数あるいはその逆関数を用いて表される関数のことである．

今回の目標

- 三角関数・対数関数・指数関数の微分
- 逆三角関数の定義
- 対数微分法
- 自然対数の底 e

§5.1 三角関数の微分

初回に少しだけ紹介したが，次が成り立つ．

定理 5.1. 角度の単位を弧度法とするとき，

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x,$$
$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.$$

まず $y=\sin x$ の微分について考える．計算すべきは

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

である．このままでは計算がしづらいが，三角関数には和積の公式があるので，それを用いる．

$$\begin{aligned}\sin(x+h)-\sin x &= \sin(x+h)+\sin(-x)\\ &= 2\sin\frac{x+h+(-x)}{2}\cos\frac{x+h-(-x)}{2}\\ &= 2\left(\sin\frac{h}{2}\right)\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\end{aligned}$$

これより

$$\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\frac{2\left(\sin\frac{h}{2}\right)\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h}=\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cdot\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)$$

最後の式は三角関数の中に $\frac{h}{2}$ が現れるので，それに揃えるために分母も $\frac{h}{2}$ としている．

(続く)

$$\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cdot \cos\left(x+\frac{h}{2}\right) \quad \text{(再掲)}$$

この式で $h \to 0$ とするわけであるが，それを計算するためには次の定理が必要である．

定理 5.2.

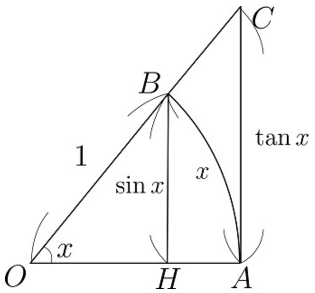
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = 1$$

これを認めれば，

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$
$$= \lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = (\cos x)\cdot 1 = \cos x$$

のようにして証明できる．定理 5.2 を証明しよう．

簡単のため $x > 0$ として考える．右図にあるように，$\sin x$ は線分 BH の長さであり，x は弧 $\overset{\frown}{AB}$ の長さである (今は弧度法を用いているので)．更に線分 OB を延長して直線 $x = 1$ と交わる点の y 座標，すなわち線分 AC の長さは $\tan x$ である．図からも分かるように，



$$\sin x \leqq x \leqq \tan x$$

となる (正確には面積を考える必要がある)．両辺を $\sin x$ で割ってみれば

$$1 \leqq \frac{x}{\sin x} \leqq \frac{\tan x}{\sin x} = \frac{1}{\cos x}$$

である．$\lim_{x \to 0} \cos x = 1$ なので，はさみうちの原理から定理 5.2 が成立することが分かる．

$\cos x$, $\tan x$ の微分は，$\sin x$ の微分を利用して計算できる．

例題. $\cos x$, $\tan x$ を微分せよ．

解. (1) $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ であるので，合成関数の微分を用いれば

$$(\cos x)' = \left(\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right)' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \cdot 1 = -\sin x.$$

最後の等式は三角関数の加法定理を用いた．

(2) $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ であるので，分数関数の微分と $\sin x$, $\cos x$ の微分を利用すれば

$$(\tan x)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{(\cos x)^2} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

また，$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ であることを用いて

$$\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)^2 = 1 + \tan^2 x$$

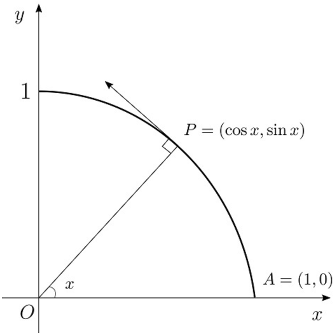
のようにもできる. □

三角関数の加法定理を思い出せば,

$$(\sin x)' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \quad (\cos x)' = -\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

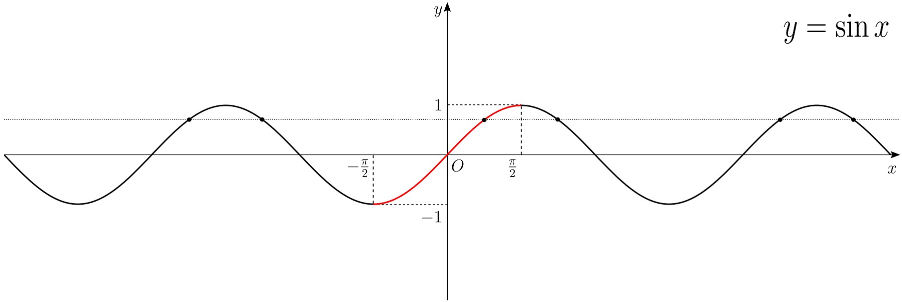
のように $\frac{\pi}{2}$ だけずれた形になっている．その理由は，幾何学的にも説明ができる．

まず中心が O の円 $x^2 + y^2 = 1$ を考え，その上の $\angle AOP = x$ となる点 $P = (\cos x, \sin x)$ をとる．さて,「微分」は接線の傾きを表す量であった．点 P における接線は線分 OP と直交していて，点 P は x が大きくなると図の矢印の方向に動く．すなわち，点 P は $x+$ “$90°$” $= x + \frac{\pi}{2}$ の方向に向かって動くということになる．これが $\sin x$, $\cos x$ を微分すると $\frac{\pi}{2}$ だけずれる理由であり，今は弧度法を採用しているので余計な係数が現れないようになっている．



§5.2 逆三角関数

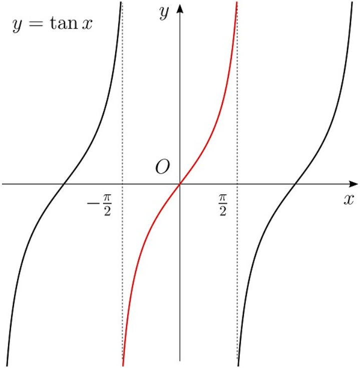
ここでは三角関数，とくに $\sin x$ と $\tan x$ の逆関数について考える．まず正弦関数 $\sin x$ のグラフは以下のようであった．



値域（y の動く範囲）は $-1 \leqq y \leqq 1$ であるが，その範囲の y に対応する x は無数にある (上図の正弦関数のグラフと点線との交点)．しかし，赤い線の部分 $-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ に制限して考えると，x と y とが 1 対 1 に対応していることが分かる．この範囲で $\sin x$ の逆関数を取ったものを

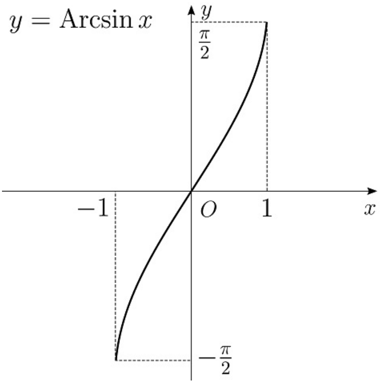
$y = \mathrm{Arcsin}\, x$ のように書く．

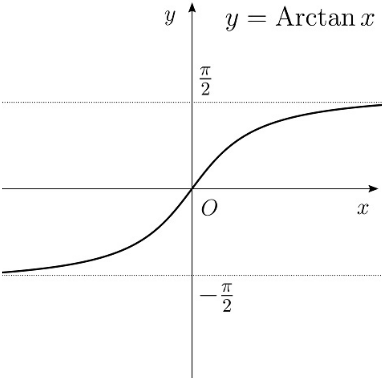
正接関数 $y = \tan x$ のグラフは以下のようであった．



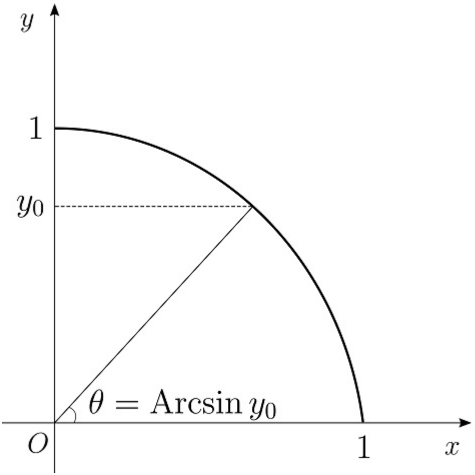
値域（y の動く範囲）はすべての数を取りうるが，y に対応する x は無数にある．しかし，赤い線の部分 $-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ に制限して考えると，x と y とが 1 対 1 に対応していることが分かる．この範囲で $\tan x$ の逆関数を取ったものを $y = \mathrm{Arctan}\, x$ のように書く．

$y = \mathrm{Arcsin}\, x$ と $y = \mathrm{Arctan}\, x$ のグラフはそれぞれ以下のようになる.





$\mathrm{Arcsin}\, y_0$ の意味について.



円 $x^2 + y^2 = 1$ において，y 座標が y_0 になる角度 θ のうち，$-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ を満たすものが $\mathrm{Arcsin}\, y_0$ である (つまり，第一象限か第四象限のいずれかを考える).

- $\sin x$ および $\tan x$ の逆関数を考える際に $x = 0$ を含む区間での逆関数を考えたが，もちろんそれ以外の区間で逆関数を考えることもできる．それらをまとめて逆正弦関数や逆正接関数などのようにいう．
- それらの中で最も基本的なものが $x = 0$ を通るものであり，その意味でここで定義した $\mathrm{Arcsin}\, x$ は逆正弦関数の主値という．
- 逆正弦関数 $\mathrm{Arcsin}\, x$ は，分野や著者によって，$\arcsin x$ や $\sin^{-1} x$, $\mathrm{Sin}^{-1} x$ など様々に書かれるので注意が必要である．$\sin^{-1} x$ は，三角関数でよく用いられている記号 $\sin^2 x = (\sin x)^2$ との相性が良くないのでここではその使用を避けた．
- もちろん，余弦関数 $\cos x$ の逆関数 $y = \mathrm{Arccos}\, x$ も考えられる．区間を $0 \leqq x \leqq \pi$ に制限したものが標準的であるように思う．

§5.2 逆三角関数の微分

定理 5.3. 次が成り立つ.

$$(\operatorname{Arcsin} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\operatorname{Arctan} x)' = \frac{1}{x^2+1}$$

それぞれ $y = \sin x$, $y = \tan x$ の逆関数なので，逆関数の微分を用いる.

(1) $y = \mathrm{Arcsin}\, x$ とすれば，逆正弦関数の定義より $x = \sin y$ である．
$f(x) = \sin x$ とすれば $f'(x) = \cos x$ なので，逆関数の微分を用いれば

$$(\mathrm{Arcsin}\, x)' = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{\cos y}.$$

$\cos y$ を x で表すことを考える．$x = \sin y$ だったので

$$\cos^2 y = 1 - \sin^2 y = 1 - x^2$$

であり，$-\frac{\pi}{2} \leqq y = \mathrm{Arcsin}\, x \leqq \frac{\pi}{2}$ の範囲では $\cos y \geqq 0$ であることに注意すれば

$$\cos y = \sqrt{1 - x^2}$$

となる．よって，

$$(\mathrm{Arcsin}\, x)' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad \square$$

(2) $y = \mathrm{Arctan}\, x$ とすると $x = \tan y$ である．$f(x) = \tan x$ とおけば $f'(x) = \tan^2 x + 1$ なので，逆関数の微分を用いれば

$$(\mathrm{Arctan}\, x)' = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{\tan^2 y + 1}.$$

ここで，$\tan y = x$ であったので

$$(\mathrm{Arctan}\, x)' = \frac{1}{\tan^2 y + 1} = \frac{1}{x^2 + 1} \quad \square$$

§5.3 指数関数と対数関数の微分

- a を 1 でない正の定数とする．
- 指数関数は $f(x) = a^x$ という形の関数であり，対数関数 $y = \log_a x$ はその逆関数である．
- それらの基本的な性質をここで復習しておく．指数関数については

$$a^{x_1+x_2} = a^{x_1} \cdot a^{x_2}, \quad (a^x)^p = a^{px}, \quad a^0 = 1$$

- 互いが逆関数であることから

$$a^{\log_a x} = x, \quad \log_a a^x = x.$$

対数関数については

1. $\log_a(x_1x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$
2. $\log_a \dfrac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2$
3. $\log_a x^p = p \log_a x$
4. $\log_a 1 = 0$
5. $\log_a a = 1$
6. $\log_b x = \dfrac{\log_a x}{\log_a b}$　(底の変換公式)

が成り立つ.

対数関数の微分

まず対数関数の微分を考えよう．$x > 0$ を一つ決めて，そこでの微分を考える．

$$\begin{aligned}
\frac{\log_a(x+h) - \log_a h}{h} &= \frac{1}{h}\log_a \frac{x+h}{x} && \log \text{ の性質 } 2 \\
&= \log_a\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} && \log \text{ の性質 } 3\ (p = \tfrac{1}{h}) \\
&= \frac{1}{x}\log_a\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}} && \text{変数を } h' = \tfrac{h}{x} \text{ に揃えるため.}
\end{aligned}$$

今 x は極限を取る変数 h とは無関係なので，

$$h \to 0 \quad \text{のとき} \quad h' = \frac{h}{x} \to 0$$

である．

(続く)

これより考えるべき極限は $\lim_{h'\to 0}(1+h')^{\frac{1}{h'}}$ である．これを計算してみると

h'	$(1+h')^{\frac{1}{h'}}$
1	2
0.1	2.5937424601000002
0.01	2.704813829421529
0.001	2.7169239322355 2
0.0001	2.718145926824356
0.00001	2.718268237192297
0.000001	2.718280469156428

のようになり，

$$e = \lim_{h'\to 0}(1+h')^{\frac{1}{h'}} = 2.71828...$$

という値に収束していく．この e はとても重要な数であり，e を底に持つ対数は自然対数と呼ばれ，

$$\log x := \log_e x$$

のように底 e を省略して書く．この数 e は自然対数の底もしくはネイピア数と呼ばれる．

(続く)

これより,

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{\log_a(x+h)-\log_a h}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{x}\log_a\Bigl(1+\frac{h}{x}\Bigr)^{\frac{x}{h}} \\
&= \frac{1}{x}\log_a\left(\lim_{h'\to 0}\bigl(1+h'\bigr)^{\frac{1}{h'}}\right) \\
&= \frac{\log_a e}{x} \\
&= \frac{1}{x\log a} \quad \text{(底の変換公式と } \log e = 1 \text{ より)}
\end{aligned}$$

特に $a=e$, すなわち自然対数の微分は

$$(\log x)' = \frac{1}{x}$$

となる.

次に $y = \log|x|$ について考えよう．

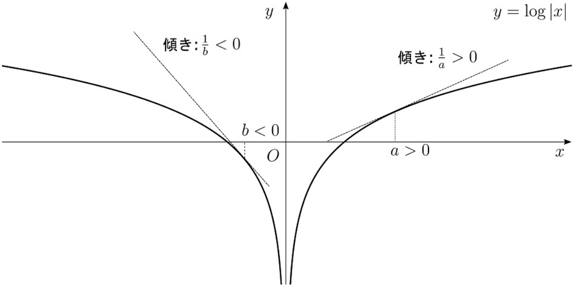
1. $x > 0$ のときは $(\log|x|)' = (\log x)' = \frac{1}{x}$
2. $x < 0$ のときは $|x| = -x > 0$ なので，合成関数の微分を用いれば

$$(\log|x|)' = \big(\log(-x)\big)' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$$

となり，いずれの場合においても

$$(\log|x|)' = \frac{1}{x}$$

となる．



指数関数の微分

指数関数は対数関数の逆関数なので，逆関数の微分を用いてその微分を計算できる．$y = a^x$ の微分を考える．$f(x) = \log_a x$ とおけば $y = f^{-1}(x)$ であり，$f'(x) = \frac{1}{x \log a}$ であったので

$$(a^x)' = (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(y)} = (\log a)y = (\log a)a^x.$$

特に $a = e$ (自然対数の底) とすれば

$$(e^x)' = e^x$$

となり，微分しても関数が変わらない．これが自然対数の底が重要な理由である．

以上をまとめると次の定理になる．

定理 5.4. 指数関数，対数関数の微分はそれぞれ

$$(a^x)' = (\log a)a^x, \quad (\log_a x)' = \frac{1}{(\log a)x}, \quad (\log_a |x|)' = \frac{1}{(\log a)x}$$

となる．特に $a = e$ (自然対数の底) ならば

$$(e^x)' = e^x, \quad (\log x)' = \frac{1}{x}, \quad (\log |x|)' = \frac{1}{x}.$$

§5.4 对数微分法

関数 $y = f(x)$ に対して $\log|f(x)|$ を微分してみると

$$\frac{f'(x)}{f(x)}$$

となる．このことを利用して，与えられた関数の自然対数をとって微分することにより導関数を求める方法は，積・商あるいは指数の形の関数を微分する場合に有効であることも多い．この方法を対数微分法という．

例題 5.5. 実数 p に対して，次が成り立つことを示せ．

$$(x^p)' = px^{p-1}$$

$y = x^p$ とおく．両辺の絶対値を取り，さらにその対数をとれば

$$\log|y| = \log|x^p| = p\log|x|$$

ここで両辺を x について微分すれば，対数関数の微分と合成関数の微分により

$$\frac{y'}{y} = p \cdot \frac{1}{x}$$

なので，両辺に y を掛ければ

$$y' = \frac{py}{x} = \frac{px^p}{x} = px^{p-1} \quad \square$$

演習問題

(1) 次の関数を微分せよ.

(a) 三角関数・逆三角関数の微分を用いるもの.

$$\text{(i)}\ \sin^2 x \quad \text{(ii)}\ \cos^3 2x \quad \text{(iii)}\ \tan 2x$$

$$\text{(iv)}\ \operatorname{Arctan} 3x \quad \text{(v)}\ x\cos x$$

(b) 指数関数・対数関数の微分を用いるもの.

$$\text{(i)}\ \log(x^2+x+1) \quad \text{(ii)}\ \log|x| \quad \text{(iii)}\ e^x \log x$$

$$\text{(iv)}\ (x+1)\log x \quad \text{(v)}\ \log(x^3+x-2)$$

(c) 対数微分法を用いるもの.

$$\text{(i)}\quad (x-1)^2\sqrt[3]{x+2} \qquad \text{(ii)}\quad \frac{\sqrt{x+2}}{x+1}$$

(2) 次の関数を微分せよ.

(a) $\dfrac{\log x}{x}$	(b) xe^x	(c) $x\cos x - \sin x$
(d) $\log\sin x$	(e) $\log\tan x$	(f) $(x^2+1)\tan x$
(g) $e^x\sin x$	(h) $\mathrm{Arcsin}\sqrt{x}$	(i) $\mathrm{Arctan}\sqrt{x^2-1}$
(j) e^{-3x}	(k) $\log 2x$	(l) $\log_2\lvert 3x-1\rvert$
(m) $(x-1)e^x$	(n) $x(\log x - 1)$	(o) $\log\dfrac{x-1}{x+1}$