線形独立・線形従属は一見分かりにくい概念です．これは，次回出てくる基底というものを導入するために必要になります．基底とは，例えば $\mathbb{R}^3$ における基本ベクトル

$$\boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{e}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

を一般化したものです．$\mathbb{R}^3$ の元 $\boldsymbol{x}=\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)$ が

$$\boldsymbol{x}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2+z\boldsymbol{e}_3$$

のように $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ の線形結合として一意に表現されるように，ベクトル空間の元はその基底の線形結合として一意に表現できます．この一意性が重要なのです．なぜ重要なのか考えてみましょう．例えばベクトル空間 $\mathbb{R}^2$ において，

$$\boldsymbol{x}_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{x}_2=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{x}_3=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$$

とおいたとき，“$\left(\begin{smallmatrix}2\\5\end{smallmatrix}\right)=\boldsymbol{x}_1+2\boldsymbol{x}_2+3\boldsymbol{x}_3$ の係数の和は偶数である” という命題を考えます．一見正しそうですが，$\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_3=\boldsymbol{0}$ という関係が成り立つことに注意すると $\left(\begin{smallmatrix}2\\5\end{smallmatrix}\right)=2\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2+2\boldsymbol{x}_3$ とも書けるので，表示の仕方によって係数の和の偶奇が変わってしまいます．一意に表示できるということは，このような事態を避けることができるという点で非常に重要です．かの有名なフェルマーの最終定理の証明競争において，‘複素数の範囲では整数の素因数分解の一意性が成り立たない’ ことを見落として，当時の大数学者が間違った証明を与えようとしたというのも有名な話です．

さて，一度基底を取ってしまうと，線形独立性というものは ‘前期で扱った連立一次方程式の解が唯一つの解を持つ’ ということと対応していることが分かります．このように，一見新しい概念でも実際のところは今までのものに言い換えになっているということがよくあります．新しい言葉や定義が出てきたら，既存のものとどう関わっているかを考える癖をつけるとよいでしょう．