ε-N 論法 (あるいは来週出てくる ε-δ 論法) は (大学数学の) 初学者にとっては難しいもので，多くの大学生が苦戦しています．なので，今わからなくても心配することはありません．質問への回答でも触れましたが，次のように段階を踏んで少しずつ理解していけばよいかと思います．

1. 現代数学では極限を ε-N 論法という手法で定義していて，そのおかげで厳密性が保証されている，ということを理解する；
2. 簡単な数列の極限を ε-N 論法を用いて示すことができる (ε の意味やなぜ N をとるのかといったことは置いておいて)；
3. ε-N 論法において，ε の意味やなぜ N をとるのかということを理解する．

しばらく理詰めの話が続いて辛いかもしれませんが，頑張ってついてきてください．

小テストの解答例．

$$\boxed{(準備)\quad \left|\frac{1}{n^2}-0\right| = \frac{1}{n^2} < \varepsilon \iff n^2 > \frac{1}{\varepsilon} \iff n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}}$$

(証明)[*1] ε **を任意にとる**[*2]**．** このとき，$N := \left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right]+1$ ($\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ よりも真に大きい最小の整数) とすれば，$n \geq N$ のとき，

$$\left|\frac{1}{n^2}-0\right| = \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{N^2} < \varepsilon$$

より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = 0$ である．もちろん，この N の取り方はこれでなくてもよい．例えば $n \geq N$ のとき $n^2 \geq n \geq N$ なので，$N_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$ としたとき $\frac{1}{N_0} < \varepsilon$ に注意すれば，$n \geq N_0$ のとき

$$\left|\frac{1}{n^2}-0\right| = \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{N_0} < \varepsilon$$

なので，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = 0$ が示される．

解答を見ていて多かったのが，「$n^2 \geq N$ のとき」としているもの．ここは「$n \geq N$ のとき」でないといけないところです[*3]．この誤差の幅を保証する N は誤差の幅 ε と，当然ながら考える数列に依存しますので，普通は問題毎に変わってきます．

[*1] 答案を書く際には，準備と実際の証明とをはっきりと分けて書くようにしましょう．

[*2] 答案には毎回 ε をどのように取ったのかを明記してください．

[*3] 採点者はなぜかスルーしていましたが…(採点は TA の方にお願いしています)．