演習問題 10

問題 1. 極座標変換なので，$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ で，このとき Jacobian は

$$d\boldsymbol{x} = \left| \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} \right| dr\, d\theta = r\, dr\, d\theta.$$

(1) 二つ目の等号は，$u = r^2$ という変数変換である．

$$\begin{aligned}\int_D (x^2+y^2)e^{-x^2-y^2}\,d\boldsymbol{x} &= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^R r^2 e^{-r^2}dr\right)d\theta = \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}\int_0^{r^2} ue^{-u}du\right)d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta \times \left\{\left[-ue^{-u}\right]_{u=0}^{R^2} + \int_0^{R^2} e^{-u}\,du\right\} \\ &= \pi\cdot\left[-ue^{-u}-e^{-u}\right]_{u=0}^{R^2} = \pi\left(1-(R^2+1)e^{-R^2}\right).\end{aligned}$$

(2) ここでは単に $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ としたが，$(x,y) = (R\cdot r\cos\theta, R\cdot r\sin\theta)$ として計算してもよい．また，二つ目の等号は $r^2 = R^2 u$ という変数変換である．

$$\begin{aligned}\int_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,d\boldsymbol{x} &= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^R \sqrt{R^2-r^2}\cdot r dr\right)d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \times \int_0^1 \sqrt{R^2-R^2u}\cdot\frac{R^2}{2}du \\ &= \pi R^3\int_0^1 \sqrt{1-u}\,du \\ &= \pi R^3\left[-\frac{2}{3}(1-u)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2\pi R^3}{3}.\end{aligned}$$

(3) ここでも $r^2 = u$ という変数変換を行う．

$$\begin{aligned}\int_D \frac{d\boldsymbol{x}}{(1+x^2+y^2)^2} &= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^R \frac{1}{(1+r^2)^2}\,r dr\right)d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \times \frac{1}{2}\int_0^{R^2}\frac{du}{(1+u)^2} \\ &= \pi\cdot\left[-\frac{1}{1+u}\right]_0^{R^2} = \frac{\pi R^2}{1+R^2}.\end{aligned}$$

問題 2. まず (u,v) の変域を決定する．$1 \le x = u^2 \le 3$ より $1 \le u \le \sqrt{3}$ であり，$0 \le y = \dfrac{v}{u} \le 1$ より $0 \le v \le u$ であるので，

$$D' = \left\{(u,v);\ 1 \le u \le \sqrt{3},\ 0 \le v \le u\right\}$$

となる．次に Jacobian を計算する．

$$d\boldsymbol{x} = \left|\det\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}\right| d\boldsymbol{u} = \left|\det\begin{pmatrix} 2u & 0 \\ -\frac{v}{u^2} & \frac{1}{u} \end{pmatrix}\right| d\boldsymbol{u} = 2\,d\boldsymbol{u}.$$

よって，

$$\begin{aligned}
\int_D \frac{d\boldsymbol{x}}{(1+x)(1+xy^2)} &= \int_{D'} \frac{2}{(1+u^2)(1+v^2)}\,d\boldsymbol{u} \\
&= 2\int_1^{\sqrt{3}} \left(\int_0^u \frac{dv}{(1+u^2)(1+v^2)} \right) du \\
&= 2\int_0^{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{1+u^2} \Big[\operatorname{Arctan} v \Big]_{v=0}^{u} \right) du \\
&= 2\int_0^{\sqrt{3}} \frac{\operatorname{Arctan} u}{1+u^2} du = 2\int_0^{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan} u \big(\operatorname{Arctan} u\big)'\,du \\
&= \Big[\big(\operatorname{Arctan} u\big)^2 \Big]_0^{\sqrt{3}} = \left(\frac{\pi}{3}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 = \frac{7}{144}\,\pi^2.
\end{aligned}$$

ここで，$(f(x)^2)' = 2f(x)f'(x)$ より，$2\displaystyle\int f(x)f'(x)\,dx = f(x)^2$ であることを用いた．

問題 3.　極座標変換を用いる．r の変域は $1 \leq r \leq 2$ である．

$$\int_D \frac{d\boldsymbol{x}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \int_0^{2\pi} \left(\int_1^2 \frac{1}{r} \cdot r\,dr \right) d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi.$$

小レポート 10

(1) ヒントにあるように極座標変換すればよい．

$$\int_{D_1} e^{-x^2-y^2}\,d\boldsymbol{x} = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^R e^{-r^2}\,rdr\right)d\theta = 2\pi\cdot\frac{1}{2}\int_0^{R^2} e^{-u}\,du = \pi\Big[-e^{-u}\Big]_0^{R^2} = \pi\big(1-e^{-R^2}\big).$$

(2) 与えられた変数変換 $x=u+v$, $y=u-v$ において領域が動対応しているのかを見る．

(1) $0\le x\le 1$ より $0\le u+v\le 1$．これより，

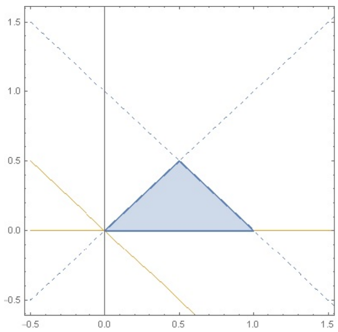
$$\text{(i)}\quad 0\le u+v \;\Leftrightarrow\; v\ge -u \qquad \text{(ii)}\quad u+v\le 1 \;\Leftrightarrow\; v\le 1-u.$$

u,v に関する領域を考えるので，各不等式ごとに u と v との関係を調べると間違いが減る．

(2) $0\le y\le x$ より $0\le u-v\le u+v$．これより

$$\text{(iii)}\quad 0\le u-v \;\Leftrightarrow\; v\le u \qquad \text{(iv)}\quad u-v\le u+v \;\Leftrightarrow\; v\ge 0.$$

以上の情報をまとめると，$D'=\{(u,v);\ 0\le v\le 1/2,\ v\le u\le 1-v\}$ となることが分かる (以下の図を参照のこと．黄線よりも上，青の破線よりも下の領域．$x=1/2$ のところで折れるので，横線領域と見るほうが計算が楽になる)．



次に Jacobian を計算する．

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -2.$$

これより積分が計算できる．途中で $w=2v$ という変数変換を行っている．

$$\begin{aligned}
\int_{D_2}\frac{x+y}{1+(x-y)^2}\,d\boldsymbol{x} &= \int_{D'}\frac{2u}{1+(2v)^2}\cdot\big|-2\big|d\boldsymbol{u} = \int_0^{1/2}\left(\int_v^{1-v}\frac{4u}{1+4v^2}du\right)dv \\
&= 2\int_0^{1/2}\frac{(1-v)^2-v^2}{1+4v^2}dv = \int_0^1\left(\frac{1}{1+w^2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2w}{1+w^2}\right)dw \\
&= \left[\operatorname{Arctan} w - \frac{1}{2}\log(1+w^2)\right]_0^1 = \operatorname{Arctan} 1 - \frac{1}{2}\log 2 \\
&= \frac{\pi - 2\log 2}{4}. \qquad \square
\end{aligned}$$