微分積分学・同演習 A

演習問題 7

1. (1) $\dfrac{24}{(1-x)^5}$ (2) $\dfrac{5+18\sin^2 x+\sin^4 x}{\cos^5 x}$ (3) $\dfrac{24x(1-x^2)}{(1+x^2)^4}$ (4) $\dfrac{3x(2x^2+1)}{(1-x^2)^{7/2}}$

(1) $\dfrac{x^3}{1-x}=\dfrac{1}{1-x}-(1+x+x^2)$ と変形する．

2.† (1) $\dfrac{(-1)^n n!}{2}\left(\dfrac{1}{(x-1)^{n+1}}+\dfrac{1}{(x+1)^{n+1}}\right)$ (2) $n\geq 4$ なら $\dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$

(3) $\dfrac{(-1)^n(n-2)!}{x^{n-1}}$ (4) $\dfrac{3}{4}\sin\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)-\dfrac{3^n}{4}\sin\left(3x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$ (5) $2^{n/2}e^x\sin\left(x+\dfrac{n\pi}{4}\right)$

(1) 部分分数分解を用いる． (2) 問題 1 (1) の手法を用いる．

(3) $\sin^3 x=(3\sin x-\sin 3x)/4$

3. (1) $\dfrac{(n-1)!}{x}$ (2) $(-1)^n\dfrac{e^{1/x}}{x^{n+2}}$ (3) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 n!(1+x)^k(1-x)^{n-k}$

(1) $y=x^{n-1}\log x$ とおく．$y'=(n-1)x^{n-2}\log x+x^{n-2}$．$y^{(n)}=(y')^{(n-1)}=(n-1)(x^{n-2}\log x)^{(n-1)}$．これを繰り返す．(2) $n=1,2$ として計算し，$(x^{n-1}e^{1/x})^{(n)}=(-1)^n\frac{e^{1/x}}{x^{n+2}}$ と予測して，帰納法で示す．(3) Leibniz の公式を用いる．

4.† (1) $\dfrac{1}{2}\left[(\alpha+\beta)^n\sin\left((\alpha+\beta)x+\dfrac{n\pi}{2}\right)-(\alpha-\beta)^n\sin\left((\alpha-\beta)x+\dfrac{n\pi}{2}\right)\right]$

(2) $\alpha^{n-2}\left\{(\alpha^2x^2-n^2+n)\sin\left(\alpha x+\dfrac{n\pi}{2}\right)-2n\alpha x\cos\left(\alpha x+\dfrac{n\pi}{2}\right)\right\}$

(3) $(ad-bc)\dfrac{(-c)^{n-1}n!}{(cx+d)^{n+1}}$ (4) $\dfrac{(-1)^n n!}{ad-bc}\left(\dfrac{a^{n+1}}{(ax+b)^{n+1}}+\dfrac{c^{n+1}}{(cx+d)^{n+1}}\right)$

(1) 三角関数の和積の公式より．(2) Leibniz の公式より．(3) $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)'=\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$．

(4) 部分分数分解.

5.† 教科書 p.53 の命題 4.50 を参照のこと．

6. (1) $f_2'(x)=4x^3\sin(1/x)-x^2\cos(1/x)$ $(x\neq 0)$，$f_2'(0)=0$ である．また $f_2''(x)=12x^2\sin(1/x)-6x\cos(1/x)-\sin(1/x)$ $(x\neq 0)$，$f_2''(0)=0$ なので $f_2(x)$ は 2 階微分可能である．しかし，$f_2''(x)$ は $x=0$ で連続ではない ($\sin(1/x)$ の項が邪魔している)．よって f_2 の 2 階微分 $f_2''(x)$ は連続でないので C^2-級でない.

(2) 帰納法を用いる．$g_k(x):=x^{2k}\cos(1/x)$ とおく．明らかに $g_1(x)$ は 1 階微分可能であるが，C^1-級でない．そこで，$f_{k-1}(x)$ および $g_{k-1}(x)$ がともに $(k-1)$ 階微分可能であるが C^{k-1}-級でない，つまり $f_{k-1}^{(k-1)}(x)$ および $g_{k-1}^{(k-1)}(x)$ が存在するが不連続

---

5 月 30 日分 (凡例：無印は基本問題，† は特に解いてほしい問題，$*$ は応用問題)

講義用 HP: http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~h-nakashima/lecture/2017C.html

であるとする (明らかに不連続点は $x=0$ である)．さて，

$$f_k'(x) = 2kx^{2k-1}\sin\frac{1}{x} - x^{2k-2}\cos\frac{1}{x} = 2kxf_{k-1}(x) - g_{k-1}(x),$$
$$g_k'(x) = 2kx^{2k-1}\cos\frac{1}{x} + x^{2k-2}\sin\frac{1}{x} = 2kxg_{k-1}(x) + f_{k-1}(x)$$

である．$f_{k-1}(x)$ および $g_{k-1}(x)$ がともに $(k-1)$ 階微分可能であるので，$f_k(x)$, $g_k(x)$ は k 階微分可能である事がわかる．しかし，

$$f_k^{(k)}(x) = (2kxf_{k-1}(x) - g_{k-1}(x))^{(k)} = 2kxf_{k-1}^{(k-1)}(x) + 2kf_{k-1}^{(k-2)}(x) - g_{k-1}^{(k-1)}(x)$$

であり，第 1 項・第 2 項は $x \to 0$ のとき 0 に収束するが，第 3 項は，帰納法の仮定より $x \to 0$ のとき不連続である (第 1 項ははさみうち，第 2 項は $f_{k-1}(x)$ が $k-1$ 階微分可能であることより特に $f_{k-1}^{(k-2)}(x)$ は $x=0$ で連続であるので)．$g_k(x)$ に関しても同様である．よって $f_k(x)$, $g_k(x)$ はともに k 階微分可能であるが，C^k-級関数でない．

7.† (1) $1+\frac{1}{2}x^2$ (2) $1+x+x^2+\frac{2}{3}x^3$ (3) $1-\frac{1}{3}x^3$ (4) $x+x^2+\frac{1}{3}x^3$ (5) $x^2-\frac{1}{2}x^3$

8. (1) 教科書の p.216 にある問題 4.68 の解答を参考のこと．(2) $\binom{-1}{k}$ の分子は $(-1)\cdot(-1-1)\cdots(-1-k+1) = (-1)^k\cdot 1\cdot 2\cdots k = (-1)^k k!$ であることより．(3) 教科書 p.61 なかほどにある式を参考のこと．