

線形代数学・同演習 B

小テスト 9 (12 月 12 日分)

学籍番号：

氏名：

次の行列は対角化可能か．可能ならば対角化せよ．裏面も使用してよい．

$$(1) \quad A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 6 \\ 6 & 1 & -6 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad (2) \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & -6 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(考え方) 対角化に必要なのは固有値と固有ベクトル．求める対角行列は固有値を対角に並べたものであり，対角化を与える正則行列 P は固有ベクトルを並べたものである．対角化できるための条件は，各固有値について，線形独立な固有ベクトルが，固有値の重複度の数だけ存在することである．

解) 与えられた行列は小テスト 7 のものと同じなので，固有値および固有ベクトルの計算はそちらを参照ください．

(1) 固有多項式は $g_A(t) = (t-1)^2(t+2)$ なので，固有値は $\lambda = 1$ (重複度 2)， -2 である．固有値 $\lambda = 1$ に対する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ であり，重複度の数だけ固有ベクトルがある．また，固有値 $\lambda = -2$ に対する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ である．よって A は対角化可能で，

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とすれば， $D = P^{-1}AP$ と対角化できる．

(2) 固有多項式は $g_B(t) = (t-2)(t-1)^2$ なので，固有値は $\lambda = 1$ (重複度 2)， 2 である．まず重複度が大きいものから計算する．固有値 $\lambda = 1$ に対する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ の 1 本だけである．よって，重複度の本数分の固有ベクトルがないので，対角化できない．

講義や講義内容に関して，意見・感想・質問等を自由に記述してください．