

線形代数学・同演習 A

5 月 31 日分 演習問題

計算問題は解答のみ，証明問題は雑な道筋を説明するに留めています．

- (1) ${}^t(A + A) + {}^tA + {}^t(A) = {}^t + A$ より．
(2) (1) と同様
(3) (1) のものと (2) のものの和が丁度 A になっている．
- いずれも定義に従って計算するだけ．
- $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ である．あとはべき乗を計算するだけ．
- (1) $\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$ (2) $\frac{1}{6}n^2(n+1)(2n+1)$ (3) $\frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(3n+1)$
(4) $\frac{1}{12}n(n+1)(7n^2+13n+4)$
- $\sum_{l=0}^{m+n-k} a_l b_{m+n-k-l}$
- 右辺から計算していく．

$$e(x)e(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{y^m}{m!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^n y^m}{n! m!}.$$

ここで， $k = m + n$ ， $l = n$ と変数変換すると， $m = k - l$ なので，

$$e(x)e(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^k \frac{x^l}{l!} \frac{y^{k-l}}{(k-l)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot \sum_{l=0}^k \frac{k!}{l!(k-l)!} x^l y^{k-l} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+y)^k}{k!}.$$

したがって， $e(x)e(y) = e(x+y)$ となる．^{*1}

- $\sum_{i=1}^{\min(l,m,n)} a_{ii}^2$
- $(1+x)^n$
- (1) 右辺の \sum を展開すればよい．
(2) (1) の右辺の \sum の中を，問題 8 を使って展開して，和の順序を入れ替える．
(3) (2) の式を， $C_k(n) = \dots$ の形で書けばよい．
(4) 以下のとおり．

$$C_4(n) = \frac{6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n}{30} = \frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1),$$

$$C_5(n) = \frac{2n^6 + 6n^5 + 5n^4 - n^2}{12} = \frac{1}{12}n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1).$$

^{*1} お気づきかとは思いますが， $e(x) = e^x$ です．