線形代数学・同演習 A

6 月 21 日分　演習問題

1. 4 次の置換群 S_4 の元をすべて記述せよ．また，その中で偶置換であるものは何個あるか．
2. S_n の元の個数が $n!$ であることを証明せよ．
3. 次の置換の符号を求めよ．

$$(1)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad (2)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \qquad (3)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

4. 置換の互換の積への分解は 1 通りではない．問題 3 に現れる置換でそれを確かめよ．またその分解に依らず，互換の偶奇は変わらないことも確かめよ．

定義. 複数の巡回置換に対して，それぞれの巡回域が共通の数を持たないとき，互いに素であるという．例えば，(1 2) と (3 4) は互いに素であるが，(1 2) と (1 3) は互いに素ではない．

5. σ, τ を互いに素な巡回置換とする．このとき，$\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma$ を示せ．
6. 次の置換を，互いに素な巡回置換の積として表わせ．

$$(a)\ (1\ 2\ 3)(4\ 5)(1\ 2\ 3\ 6\ 7) \qquad (b)\ (1\ 2)(1\ 2\ 3\ 4)(1\ 2)(2\ 3\ 5\ 6)$$

定義. n 変数の多項式 $f(x_1, \dots, x_n)$ と $\sigma \in S_n$ に対して，新しい多項式 $(\sigma f)(x_1, \dots, x_n)$ を

$$(\sigma f)(x_1, \dots, x_n) := f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$$

により定義する．例えば，$\sigma = (1\ 2)$ のとき，$f(x_1, x_2) = 2x_1^2 - x_2^3$ ならば，$(\sigma f)(x_1, x_2) = 2x_2^2 - x_1^3$ である．

7.* $\Delta(x_1, \dots, x_n) := \prod_{1 \le i < j \le n} (x_i - x_j)$ とおく．[*1]
(i) 互換 $\sigma = (i, j)$ に対して，$(\sigma\Delta)(x_1, \dots, x_n) = -\Delta(x_1, \dots, x_n)$ となることを示せ．
(ii) $\sigma, \tau \in S_n$ に対して，$((\sigma \circ \tau)\Delta)(x_1, \dots, x_n) = (\sigma(\tau\Delta))(x_1, \dots, x_n)$ を示せ．[*2]
任意の置換 σ に対して，$(\sigma\Delta)(x_1, \dots, x_n) = (-1)^{\mathrm{sgn}(\sigma)}\Delta(x_1, \dots, x_n)$ となることを示せ．[*3]
8. 任意の $\sigma \in S_n$ に対して $(\sigma f)(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n)$ となる多項式を対称式と呼ぶ．
(1) 次の多項式は対称式か．

$$(a)\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1 \quad (b)\ x_1x_2 + 2x_2 + x_3 \quad (c)\ (x_1x_2 - x_3x_4)(x_1x_3 - x_2x_4)$$

(2) 次の対称式を 3 次の基本対称式 $t_1 = x_1 + x_2 + x_3$, $t_2 = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$, $t_3 = x_1x_2x_3$ を用いて記述せよ．[*4]

$$(a)\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \quad (b)\ x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 \quad (c)^*\ \Delta(x_1, x_2, x_3)^2$$

[*1] $\prod$ は，総和記号 $\sum$ のかけ算版．
[*2] このことを，数学では，群 S_n は多項式に作用しているという．
[*3] 特にこれより，sgn は互換への分解の仕方に依らずに定まることが分かる．
[*4] 任意の対称式は，このような基本対称式と呼ばれる対称式を用いて記述できることが知られている．