線形代数学・同演習 A

7 月 26 日分　演習問題

計算問題は解答のみ，証明問題は大雑把な道筋を説明するに留めています．

1. 固有ベクトルは，対応する固有値と同じ順番で並んでいる．

(1) $\lambda = 5, -3$, 固有ベクトル $= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$

(2) $\lambda = -1, 1$, 固有ベクトル $= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(3) $\lambda = 3, 2$, 固有ベクトル $= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(4) $\lambda = i, -i$, 固有ベクトル $= \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$

(5) $\lambda = 2$, 固有ベクトル $= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(6) $\lambda = 2, -1, 1$, 固有ベクトル $= \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(7) $\lambda = 3, 1, 1$, 固有ベクトル $= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(8) $\lambda = -3, 1, 1$, 固有ベクトル $= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

(9) $\lambda = 2, -1, 1$, 固有ベクトル $= \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

2. (1) $t^3 - 21t - 68$　(2) $t^3 + 4t^2 - 4t - 21$　(3) $t^3 + 2t^2 - 7t - 48$

3. 略．

4. (1) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とすれば，

$$g_A(t) = t^2 - (a+d)t + (ad - bc).$$

(2) $g_A(A) = O$ (零行列) となる．

5. (1) $g_A(t) = t^2 + 2(\cos\theta)t + 1$, $\lambda = \cos\theta \pm i\sin\theta$

(2) $g_A(t) = t^2 + (a+c)t - (ac - b^2)$, $\lambda = \frac{-a-c\pm\sqrt{(a-c)^2+4b^2}}{2}$
(根号の中が非負なので，常に実固有値を持つことが分かる)
(3) $g_A(t) = t^3 + (a^2+b^2+c^2)t$, $\lambda = 0, \pm i\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

6. (1) 問題 4 より $A^2 - 6A + 7E = O$ が成り立つ．この左辺の A を x に置き換えた多項式で，S の A を x に置き換えた多項式を割ることを考えると

$$2x^4 - 12x^3 + 19x^2 - 29 = (x + 37x^2 - 6x + 7)(2x^2 + 5) + x + 2$$

なので，ここで x を A に書き換えてもこの等式は成立するので[*1]，$S = A + 2E$.
(ii) は，2 次の正方行列は，問題 4 の結果より $aA + bE$ の形に書けることを利用すると楽.

$$\text{(i)}\ \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{(ii)}\ \frac{1}{23}(-A + 8E) = \frac{1}{23}\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

(2) (i) は問題 4 の結果より $aA + bE$ の形に書けることを利用すると楽．(ii) は $A^{n+2} - (a+d)A^{n+1} + (ad - bc)A^n = O$ が成り立つので，隣接三項間の漸化式を立てる方法がよい (と思う)．(iii) のようなときはそのまま計算するほうが速い.
(i) $A^n = 3^{n-1}(nA - 3(n-1)E) = 3^{n-1}\begin{pmatrix} 3-2n & 2n \\ -2n & 3+2n \end{pmatrix}$
(ii) $\alpha = 1 + 2\sqrt{2}$, $\beta = 1 - 2\sqrt{2}$ とおけば,

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2\big(\alpha^n + \beta^n\big) & -\sqrt{2}\big(\alpha^n - \beta^n\big) \\ -2\sqrt{2}\big(\alpha^n - \beta^n\big) & 2\big(\alpha^n + \beta^n\big) \end{pmatrix}$$

(iii) $A^n = (a+d)^{n-1}A \ (n \geq 1)$.

7. (1) $\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 7\cdot 5^n + (-3)^n & 5^n - (-3)^n \\ 7\cdot 5^n - 7(-3)^n & 5^n + 7(-3)^n \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} -1 + 2(-1)^n & 1 + (-1)^{n+1} \\ 2(-1 + (-1)^n) & 2 + (-1)^{n+1} \end{pmatrix}$
(3) $\begin{pmatrix} 2^{n+1} - 3^n & 2(2^n - 3^n) \\ -2^n + 3^n & -2^n + 2\cdot 3^n \end{pmatrix}$ (5) $\begin{pmatrix} 2^n & n\cdot 2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$
(4) $n = 2k$ のとき，$(-1)^k E_2$,　$n = 2k+1$ のとき，$(-1)^k\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

8. 以下では $\exp(tA)$ を計算している.
(1) $\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 7e^{5t} + e^{-3t} & e^{5t} - e^{-3t} \\ 7(e^{5t} - e^{-3t}) & e^{5t} + 7e^{-3t} \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} -e^t + 2e^{-t} & e^t - e^{-t} \\ 2(-e^t + e^{-t}) & 2e^t - e^{-t} \end{pmatrix}$
(3) $\begin{pmatrix} 2e^{2t} - e^{3t} & 2(e^{2t} - e^{3t}) \\ -e^{2t} + e^{3t} & -e^{2t} + 2e^{3t} \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$ (5) $\begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$

[*1] 現れる行列は A もしくは E であり，すべて可換であるから．ここで，定数項は E の倍数に書き換える