線形代数学・同演習 A

4 月 19 日分　演習問題

計算問題は解答のみ，証明問題は大雑把な道筋を説明するに留めています．解答が間違えている可能性も有りますので，見つけたら連絡ください．

1. 2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ においては $\det A = ad - bc$ である．$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ とおいて，$\det(AB)$ と $\det(A)\det(B) = (ad-bc)(xw-yz)$ をそれぞれ計算し，比較する．
2. 平面の方程式は，内積を使えば $(\boldsymbol{a}|\boldsymbol{x}) = d \cdots$ ①と書ける．平面上の点 $\boldsymbol{x}_0$ は当然 $(\boldsymbol{a}|\boldsymbol{x}_0) = d \cdots$ ②を満たすので，①から②を辺々引けばよい．
3. θ を 2 つのベクトルのなす角とする．(1) $\cos\theta = \frac{4}{5}$ (2) $\cos\theta = \frac{11}{14}$ (3) $\cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{3}$ (4) $\cos\theta = 0$ (直交している)
4. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(t \in \mathbb{R})$
5. $2y + z = 3$
6. (1) $x - 2y + z = 0$ (2) $y + z = 1$ (3) $8x + 14y + 9z = 29$ (4) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$
7. (a) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, よって $5x + 11y - 2z = -58$. (b) $5x + 11y - 2z = 3$ (求める平面は直線 l_1, l_2 に平行なので (a) と同じ法線ベクトルを持つ．)
8. $\frac{1}{3}$．平面において原点と直線との距離を与える方向は，直線と垂直になる方向であったように，3 次元空間において原点と平面との距離を与える方向は平面に沿う方向と垂直な方向である．[*1]それは問題 2 より法線ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ である．そこで，原点と平面との距離を d で表すと，空間上の点 $d \cdot \frac{\boldsymbol{a}}{||\boldsymbol{a}||}$ は平面上にあるので，$\left(\boldsymbol{a} \middle| d \cdot \frac{\boldsymbol{a}}{||\boldsymbol{a}||}\right) = 1$ を満たす．これより $d = \frac{1}{||\boldsymbol{a}||} = \frac{1}{3}$.
9. $\sqrt{\frac{26}{3}}$. $x = 1 + s$, $y = -5 - s$, $z = 2 + s$ なので，$d(s) := (1+s)^2 + (-5-s)^2 + (2+s)^2$ が最小になるような s を求めればよい．
10. (1) $(0, -8, 0)$ (2) $(1, 1, -2)$
11. (a) 直線 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ $(t \in \mathbb{R})$ (b) 直線 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 7/2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(t \in \mathbb{R})$ (c) 直線 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(t \in \mathbb{R})$

[*1] 後期に微積分で習う偏微分を使っても求めることができる．