線形代数学・同演習 B

11 月 8 日分　演習問題[*1]

1.† U, V を一般のベクトル空間とし，$T\colon U \to V$ はその間の線形写像とする．このとき，$\mathrm{rank}(T)+\mathrm{null}(T)=\dim(U)$ が成り立つことを次の方針に従って示せ．ここで $r=\mathrm{rank}(T)$, $s=\mathrm{null}(T)$ とおき，$\boldsymbol{u}_1,\dots,\boldsymbol{u}_r$ を $\mathrm{Ker}(T)$ の基底，$\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_s$ を $\mathrm{Im}(T)$ の基底とする．

(1) $T(\boldsymbol{u}_{r+j})=\boldsymbol{v}_j$ かつ $\boldsymbol{u}_{r+j}\notin \mathrm{Ker}(T)$ $(j=1,\dots,s)$ となる U の要素 $\boldsymbol{u}_{r+1},\dots,\boldsymbol{u}_{r+s}$ が存在することを示せ．

(2) U の任意の要素 $\boldsymbol{u}$ は，$\boldsymbol{u}_1,\dots,\boldsymbol{u}_r,\boldsymbol{u}_{r+1},\dots,\boldsymbol{u}_{r+s}$ の線形結合で表されることを示せ[*2]．

(3) $\boldsymbol{u}_1,\dots,\boldsymbol{u}_{r+s}$ は線形独立であることを示せ．

2.† U, V を一般のベクトル空間とし，$T\colon U \to V$ はその間の線形写像とする．

(1) $\mathrm{Im}(T)$ は V の部分空間となることを示せ．

(2) $\mathrm{Ker}(T)$ は U の部分空間となることを示せ．

3. 次の行列 A に対して，(a) T_A の退化次元と $\mathrm{Ker}(T_A)$ の基底，(b) T_A の階数と $\mathrm{Im}(T_A)$ の基底，をそれぞれ求めよ．

(1) $\begin{pmatrix} 1 & -4 & -9 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -4 \\ -2 & 2 & 1 & 2 \\ -5 & 5 & -5 & 20 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & -4 \\ 5 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & -4 & -4 & -1 \end{pmatrix}$　(5) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 & -6 \\ -5 & 1 & -3 & 2 \\ -2 & -1 & -4 & -2 \end{pmatrix}$　(6) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & -5 & 2 \\ -1 & 2 & -3 & 1 & -5 \\ -3 & 2 & -9 & -1 & -3 \end{pmatrix}$

4. 次の写像は線形となるか調べよ．

(1) $T_1\colon \mathbb{R}^4 \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$　(2) $T_2\colon \mathbb{R}^2 \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto x_1x_2 \in \mathbb{R}$

(3) $T_3\colon \mathbb{R}^2 \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ x_2 \\ x_1-x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$　(4) $T_4\colon \mathbb{R}[x]_3 \ni p \mapsto \int_{-1}^{1} p(t)\,dt \in \mathbb{R}$

(5) $T_5\colon \mathbb{R}[x]_3 \ni p \mapsto p(0) \in \mathbb{R}$　(6) $T_6\colon \mathbb{R}[x]_3 \ni p \mapsto x+p'(x) \in \mathbb{R}[x]_3$

5.† $V=\mathbb{R}[x]_3$ とし，写像 $T\colon V\to V$ を以下で定義する．

$$T\colon p(x) \longmapsto xp'(x)-3p(x-1)$$

(1) T は線形写像となることを示せ．

(2) T の退化次元と階数をそれぞれ求めよ．

(3) $\mathrm{Im}(T)$ の基底を一組求めよ．

[*1] 凡例：無印は基本問題，† は特に解いてほしい問題，∗ は応用問題．

[*2] まず $T(\boldsymbol{u})$ を考える．