2020 年度　名古屋大学

理系基礎科目（文系） 数学入門
第 6 回小テスト・解答

講義担当者：中島秀斗

問題 6.1

微分可能な関数 $f(x)$ が $f'(a)=0$ を満たすならば、関数 $f(x)$ はいつでも点 $x=a$ で極値をとる。

解．誤り

実際，$f(x)=x^3$ とすれば，この関数は $x=0$ で $f'(0)=0$ であるが，$x=0$ の前後で正負が変わるので，$x=0$ を含むいかなる開区間で考えても $x=0$ で最小/最大となることはない．

問題 6.2

媒介変数表示 $(x,y)=\left(\dfrac{2t}{1+t^2}, \dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)$ は半径 1、中心原点の円を描く（x^2+y^2 を計算してみる)。

解．正しい

計算すれば $x^2+y^2=1$ となり，これは半径 1，中心が原点の円である．この媒介変数表示の図形的な意味は次ページで解説を行う．

問題 6.3

関数 $f(x)=xe^x$ は $x=-1$ で極大値 $-\dfrac{1}{e}$ をとる。

解．誤り

$f'(x)=(x+1)e^x$ であるので，$x=-1$ が極値の候補．増減表より，$f(x)$ はこの点で極小値を取ることがわかる．

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

問題 6.4

関数 $f(x)=x^3-x$ は極大値・極小値を一つずつ持つ。

解．正しい

微分すれば $f'(x)=3x^2-1$ であるので，$x=-1/\sqrt{3}$ および $x=1/\sqrt{3}$ が極値の候補．増減表より，$f(x)$ はこれらの点でそれぞれ極大/極小であることがわかる．

x	$\cdots$	$-1/\sqrt{3}$	$\cdots$	$1/\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

媒介変数表示 $(x,y)=\left(\dfrac{2t}{1+t^2},\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)$ について．

半径 1，中心が原点の円を考える．点 $(0,-1)$ を通り傾き $\frac{1}{t}$ の直線は，この円と 2 点で交わり，$(0,-1)$ でない方の点の座標を考える．図にあるように，この直線と x 軸との交点は t になる．$\theta_t=\mathrm{Arctan}\,t$ とおくと，$\tan\theta_t=t$ であり，関係式 $1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$ より

$$\cos\theta_t=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}},\quad \sin\theta_t=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

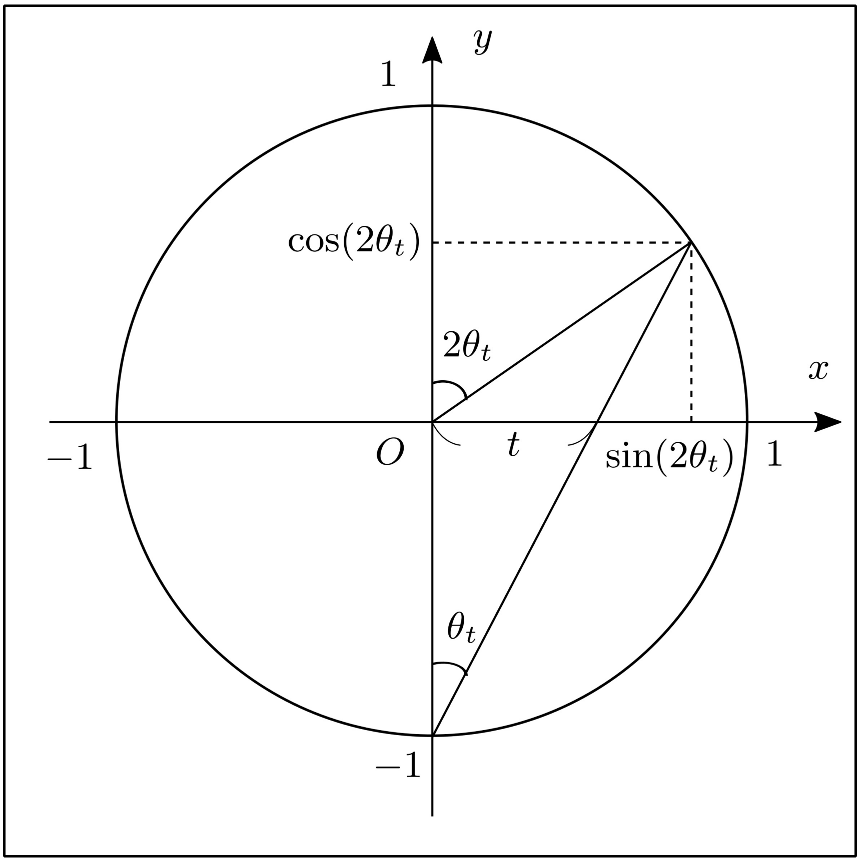
である．さて図にあるように，求める交点の座標は $(\sin(2\theta_t),\cos(2\theta_t))$ のように表示できるが，

$$\sin(2\theta_t)=2\sin\theta_t\cos\theta_t=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos(2\theta_t)=\cos^2\theta_t-\sin^2\theta_t=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

であるので・求める交点の座標を t を用いて表現すれば

$$(x,y)=\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)$$

となる．



この媒介変数表示は，円周上の有理点（x,y 座標がともに有理数である点）を考察する際に現れる．実際，点 $(0,-1)$ とそれ以外の円周上の有理点を通る直線の傾きは必ず有理数であり，逆に点 $(0,-1)$ を通る傾き有理数の直線は，必ず円と有理点で交わる．したがって，上記の媒介変数において $t=\frac{n}{m}$（n,m は整数）とすれば，円周上の有理点を与える．

※ $(x,y)=\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2},\dfrac{2t}{1+t^2}\right)$ を考えるほうが自然でした．