線形代数学・同演習 B

演習問題 9

1. 次の行列は対角化可能か．可能ならば対角化せよ．

$$(1)\ \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \quad (2)\ \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \quad (3)\ \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \quad (4)\ \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ -4 & -7 \end{pmatrix}$$

$$(5)\ \begin{pmatrix} 9 & -10 \\ 5 & -6 \end{pmatrix} \quad (6)\ \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (7)\ \begin{pmatrix} -7 & -5 \\ 10 & 8 \end{pmatrix} \quad (8)\ \begin{pmatrix} 9 & -7 \\ 14 & -12 \end{pmatrix}$$

2.† 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は対角化できないことを，直接計算することにより示せ．[*1]

3.† 次の行列は対角化可能か．可能ならば対角化せよ．

$$(1)\ \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -4 & 3 & -2 \\ -4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (2)\ \begin{pmatrix} -1 & 4 & 9 \\ -1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad (3)\ \begin{pmatrix} 7 & -3 & -6 \\ 6 & -2 & -6 \\ 6 & -3 & -5 \end{pmatrix}$$

4. A を対角化可能な n 次正方行列とし，A の互いに異なる固有値を $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$，それぞれの重複度を $m_1, \ldots, m_r$ と書く[*2]．このとき，次が成り立つことを示せ[*3]．

$$(1)\quad \mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{r} m_i \lambda_i \qquad (2)\quad \det(A) = \prod_{i=1}^{r} \lambda_i^{m_i}$$

5.† 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ を考える．A を対角化することにより，その n 乗 A^n を求めよ．また，数列 f_n を次の関係式で定めるとき，f_n の一般項を，A^n を用いて求めよ．

$$f_1 = f_2 = 1, \qquad \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n-1} \end{pmatrix} \quad (n \geq 1).$$

6. 講義における定理 9.6 を証明せよ．すなわち，n 次正方行列 A の相異なる**実**固有値を $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ とするとき，A が $\mathbb{R}$ 上で対角化可能ならば，$\sum_{i=1}^{r} \dim W(\lambda_i;\, A) = n$ となることを示せ．

7.* 講義における命題 9.5 を証明せよ．

---

12 月 20 日分 (凡例：無印は基本問題，† は特に解いてほしい問題，$*$ は応用問題)

講義用 HP: http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~h-nakashima/lecture/2017LA.html

[*1] 対角化できるとすると，ある対角行列 $D = \left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{smallmatrix}\right)$ と**正則**行列 P を用いて $D = P^{-1}AP \Leftrightarrow PD = AP$ を満たすはずだが，そのような P, D が存在しないことを示す．

[*2] $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ のとき，$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ である．また，$\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n$ である．

[*3] 実は任意の正方行列で成り立つ．