

線形代数学・同演習 A

5 月 10 日分 演習問題

1. 次の連立方程式を解け.

$$(1) \begin{cases} 3x & -z = 1 \\ -2x + 2y & = 3 \\ -5x + y + z & = -2 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x + 2y & = 3 \\ 2x + 2y + z & = -2 \\ x + y + z & = 1 \end{cases} \quad (3) \begin{cases} x + 2y + 3z = -1 \\ 4x + 5y + 8z = 5 \\ -4x + 8y + 9z = 0 \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} x - 4y + z = -6 \\ 5x + y + z = 0 \\ 2x + 2y + z = 5 \end{cases} \quad (5) \begin{cases} x - y - 4z = -17 \\ 3x + y - z = 0 \\ 2y + z = 3 \end{cases} \quad (6) \begin{cases} 2x - 3y + 4z = 3 \\ x - 2y + 3z = 2 \\ x - 2y - 4z = -5 \end{cases}$$

$$(7) \begin{cases} x & + w = -1 \\ x + y + z & = -2 \\ 2x & + 4w = 0 \\ y & + w = 3 \end{cases} \quad (8) \begin{cases} x + 2y + 3z + 4w = 1 \\ 5x + 5y + 6z + 7w = -1 \\ 8x + 5y + 6z + 5w = 0 \\ 4x + 3y + 2z + 2w = 5 \end{cases}$$

$$(9) \begin{cases} x + 2y & - 4w + 7u = -1 \\ 3x - 2y + z - 2w + 4u & = 2 \\ 2x - 2y + z & + 4u = -4 \\ 2x - 6y + z + 5w + 7u & = -2 \\ x + y & - 3w + 3u = 0 \end{cases} \quad (10) \begin{cases} x + 2y - 2z - 2w & = 3 \\ 3x + y + z + 4w + 2u & = 4 \\ y + z + 3w + 5u & = 4 \\ 5x & + 5z - w - 2u = -2 \\ x - y + z + w - u & = -1 \end{cases}$$

2. 一般の $m \times n$ 行列に対する基本変形と与える m 次正方行列たち

$D_i(\lambda)$: i 行目を λ 倍する基本変形に対応する行列

$F_{ij}(\lambda)$: i 行目に j 行目の λ 倍を加える基本変形に対応する行列

W_{ij} : i 行目と j 行目を入れ替える基本変形に対応する行列

の具体的な表示を求めよ.

3. 問題 2 の各行列たちに対して, 逆行列を求めよ.*¹

4. 次の行列は逆行列を持つか. 持てばそれを求めよ.*²

$$(1) \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

5.* 次の連立一次方程式はいつ唯一の解を持つか. またそのときの解を求めよ.*³

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + by + cz = d \\ a^2x + b^2y + c^2z = d^2 \end{cases}$$

*¹ 正方行列 A の逆行列とは, $AB = BA = E_n$ を満たす正方行列 B のこと. 存在すればそれは一意に決まり, $B = A^{-1}$ で表す.

*² 拡大行列 $(A|E_3)$ に基本変形を施す. もし $(E_3|B)$ の形になれば A は逆行列 $A^{-1} = B$ を持つが, その形にならなければ逆行列を持たない.

*³ この連立一次方程式の係数行列は, Vandermonde(ヴァンデルモンド) 行列という名前がついている.