演習問題 1

問題 1 教科書 p.124 の命題 6.2 を参照のこと.

問題 2 (1) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ は存在しない, $\lim_{x\to0}\lim_{y\to0} f(x,y)=1$, $\lim_{y\to0}\lim_{x\to0} f(x,y)=-1$

(2) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ は存在しない, $\lim_{x\to0}\lim_{y\to0} f(x,y)=1$, $\lim_{y\to0}\lim_{x\to0} f(x,y)=1$

(3) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ および $\lim_{x\to0}\lim_{y\to0} f(x,y)$ は存在しない, $\lim_{y\to0}\lim_{x\to0} f(x,y)=0$

(4) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$, $\lim_{x\to0}\lim_{y\to0} f(x,y)=0$, $\lim_{y\to0}\lim_{x\to0} f(x,y)=0$

(解説) $\lim_{x\to0}\lim_{y\to0} f(x,y)$, $\lim_{y\to0}\lim_{x\to0} f(x,y)$ は順次極限を取って計算すればよい．この 2 つのいずれかが存在しない，または一致していなければ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ が存在しないことがわかる．しかし，一致していたとしても，$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ が収束しているとは限らないことに注意 (問題 (2) 参照)．この場合は，例えば極座標変換を用いて考えるとよい.

問題 3† (1) 存在しない．(2) 0

(解説) 極座標変換すればすぐわかる．いずれも分子・分母ともに同次式なので考えやすい.

問題 4 (1)，(2) ともに $(x,y)=(0,0)$ で連続

(解説) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)$ かどうかを調べる．極座標変換をすれば極限の計算が容易になる.

問題 5† (1) $f_x(x,y)=2\sqrt{2}xe^{-x^2-y^2}\sin(x^2+y^2+\frac{3\pi}{4})$,

$f_y(x,y)=2\sqrt{2}ye^{-x^2-y^2}\sin(x^2+y^2+\frac{3\pi}{4}$

(2) $g_x(x,y)=x^y y^x(y/x+\log y)$, $\quad g_y(x,y)=x^y y^x(x/y+\log x)$

(3) $h_x(x,y)=\dfrac{2x-y}{x^2+y^2-xy}$, $\quad h_y(x,y)=\dfrac{2y-x}{x^2+y^2-xy}$

(解説) 実質的には 1 変数関数の微分なので，特に解説することなし.

問題 6† (1) $f_x(0,0)=0$, $f_y(0,0)=0$

(2) 原点において x,y に関する偏微分はどちらも存在しない

(3) $f_x(0,0)=0$, $f_y(0,0)=0$

(解説) 原点が特異である場合は，定義に従って計算する必要がある．例えば (2) の $f_x(0,0)$ は

$$\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\sqrt{h^2}}{h}=\begin{cases}1 & (h\to+0)\\ -1 & (h\to-0)\end{cases}$$

なので, 原点において x に関する偏微分は存在しない．他の場合も同様に確認できる.

小レポート 1

(1) 各関数の原点における Taylor 展開の最初の 4 項は次の通り．

$$
\begin{aligned}
e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} && = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \\
\sin x &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} x^{2m+1} && = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + o(x^7) \\
\cos x &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} x^{2m} && = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + o(x^6) \\
\log(1+x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n && = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4) \\
\mathrm{Arctan}\, x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} && = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + o(x^7) \\
\mathrm{Arcsin}\, x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} && = x + \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 2} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{5 \cdot 3 \cdot 1}{6 \cdot 4 \cdot 2} \cdot \frac{x^7}{7} + o(x^7) \\
(1+x)^\alpha &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n && = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6} x^3 + o(x^3)
\end{aligned}
$$

コメント． これらの Taylor 展開は基本的なものになります．公式から導くこともちろん可能ですが，覚えておきましょう．

(2) (i) $(x,y) \neq (0,0)$ のとき $f_x(x,y) = \dfrac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$, $f_y(x,y) = \dfrac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$. また，$(x,y) = (0,0)$ のときは講義で説明したように $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$.

(ii) $\displaystyle\lim_{h\to 0} f(h,h) = \lim_{h\to 0} \frac{h \cdot h}{h^2+h^2} = \frac{1}{2}$. (iii) $\displaystyle\lim_{h\to 0} f(h,-h) = \lim_{h\to 0} \frac{h \cdot (-h)}{h^2+(-h)^2} = -\frac{1}{2}$.

コメント． 偏微分は，他の変数を定数と思って微分するものです．(i) の原点のように，ある点で関数値が別で定義されている場合は場合を分けて考える必要が有ることも，1 変数の微分と同様です．(ii),(iii) はそれぞれ直線 $y = x$, $y = -x$ に沿って原点に近づくときの関数の極限を表しています．このように，多変数になると近づけ方によってその極限が変わってしまうという現象が現れるようになります．「全微分可能」はこのような現象が起きないための条件であると解釈することができます．