8 Taylor 級数展開

初等関数は数学のみならず，多くの自然科学において自然に現れ，その関数値が必要になることも多い．関数電卓で，たとえば $\sin 1$ や $\log 5$ などと入力すると，その近似値が少数表記で出力される．一体どのようにしてこのような値を計算しているのだろうか．ここではその基礎となる関数の多項式による近似 (Taylor 級数展開・Maclaurin 級数展開) について学ぶ.

8.1 無限級数

無限数列 $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ があったとき，各項を前から順に $+$ の記号で結んで得られる式

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots \tag{8.1}$$

を無限級数という．この式を和の記号 $\sum$ を用いて

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

のように表すこともある．この式において a_1 を初項，a_n を第 n 項という．初項から第 n 項までの和を

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

とする．S_n は第 n 項までの部分和という．

部分和の作る数列 $\{S_n\}$ も無限数列であるのでその極限を考えることができるが，これが収束してその極限値が S であるとき，すなわち

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

となるとき，無限級数 (8.1) は「**収束する**」という．このとき，S は無限級数 (8.1) の和といい，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$ と書き表す．反対に無限数列 $\{S_n\}$ が発散するとき，無限級数 (8.1) は「**発散する**」という．

例題 8.1

次の無限級数の収束・発散について調べ，収束すればその和を求めよ．

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} + \cdots$$

解．第 n 項は $\dfrac{1}{n\cdot(n+1)}$ であるが，これは

$$\frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

のように分解できる．したがって，第 n までの和 S_n は

$$\begin{aligned} S_n &= \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \cdots \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

となるので，$\lim_{n\to\infty} S_n = 1$ となる． □

定理 8.2

$a \neq 0$ とし，数列 a_n を等比数列 $a_n = ar^{n-1}$ とする．$|r| < 1$ ならば無限数列 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ は収束して，その和は

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots = \frac{a}{1-r}$$

となる．一方，$|r| \geqq 1$ ならば発散する．

注意． 無限級数において，「和の順番」は大事である．実際，同じ数が現れる無限数列であっても，足す順番を変えると，別の極限値に収束する例もある．例えば，

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots$$
$$\frac{3}{2}\log 2 = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots$$

いずれも $a_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ が一回ずつ現れる数列である．前者は a_n が番号の小さい順に並べたものであるが，後者は a_n を値が正のものと負のものとに分けて，番号が小さい順に，正のものを 2 個，負のものを 1 個，を繰り返して得られる数列である．

8.2 Taylor 級数展開

定理 8.2 において，$a = 1, r = x^2$ としてみると，

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + \cdots \quad (|x| < 1)$$

となっていて，

$$\text{関数} = \text{無限級数}$$

の形になっている．この式において $x = 0.1$ とすると

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= 1.01010101... \\ (\text{右辺の } x^6 \text{までの和}) &= 1.01010101 \end{aligned}$$

のようになる．途中までで打ち切っていても，右辺の値は本来の値 (左辺) と十分近い値になっている．このように，関数を x^n の和で表すことができれば，x^n は計算が容易であるので，近似値を計算することができるのである．

定理 8.3

なめらかな関数 $f(x)$ は，$x=0$ の周りで x^n を用いた無限級数として以下のように表される:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

定理 8.4

初等関数の $x=0$ の周りにおける Taylor 級数展開は以下の通り．

$$
\begin{aligned}
&(1) & e^x &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} &&= 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots\\
&(2) & \sin x &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} &&= x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots\\
&(3) & \cos x &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} &&= 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+\cdots\\
&(4) & (1+x)^p &= \sum_{n=0}^{\infty}\binom{p}{n}x^n &&= 1+px+\frac{p(p-1)}{2}x^2+\cdots+\binom{p}{n}x^n+\cdots\\
&(5) & \log(1+x) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n &&= x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n+\cdots
\end{aligned}
$$

定義． 定理 8.3 のように，与えられたなめらかな関数[*1]を，高次導関数と x^n を用いた無限級数で展開したものを「**Taylor 級数展開**」という[*2]．

注意 1． より正確に言えば，$x=a$ の近くで展開する，すなわち $(x-a)^n$ の和で表すものを Taylor 級数展開といい，$a=0$ のときには Maclaurin 級数展開と呼ぶのが正しい．

注意 2． すべての関数がこのように Taylor 級数展開ができるとは限らない．例えば次の関数は原点 $x=0$ において何回でも微分可能であるが，対応する定理 8.3 の和は 0 になってしまう．

$$f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}\quad(x\neq 0),\quad f(0)=0,\quad f^{(n)}(0)=0.$$

初等関数の Taylor 級数展開は上の定理 8.4 の通りである．なお，(1)–(3) はすべての実数 x について収束するが，(4),(5) はそれぞれ $-1<x<1$ および $-1<x\leqq 1$ でしか収束しない．

[*1] なめらかな関数とは，必要なだけ微分が可能である関数のことを指す．実はこの条件では少し不十分であるが，本講義でそこまで踏み込むのは適切ではないであろう．注意 2 参照．

[*2] このあたりにはごまかしが入っている．本来はまず「平均値の定理」を用いて x^n までの和と剰余項に分解できることを示し (Taylor 展開)，その剰余項が $n\to\infty$ のときに 0 に収束する場合に Taylor 級数展開可能であるというのである．

例題 8.5

$\sqrt{1+x}$ の $x=0$ の周りにおける Taylor 級数展開を第 4 次の項まで求めよ．

8.3 まとめ

- 無限級数および無限等比級数
- Taylor 級数展開
- 初等関数の Taylor 級数展開

8.4 演習問題

(1) 次の等比数列からなる無限級数の収束・発散を調べ，収束する場合はその和を求めよ．

(a) $\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ (b) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{n}$ (c) $\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

(2) 次の数列を第 n 項に持つ無限級数の収束・発散を調べ，収束する場合はその和を求めよ．

(a) $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ (b) $\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

(3) $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ の $x=0$ の周りにおける Taylor 級数展開を第 4 次の項まで求めよ．