線形代数学・同演習 A

6 月 21 日分　演習問題

計算問題は解答のみ，証明問題は大雑把な道筋を説明するに留めています．

1. 偶置換は

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon,\\
&(1,\,2,\,3),\ (1,\,2,\,4),\ (1,\,3,\,4),\ (2,\,3,\,4),\\
&(1,\,3,\,2),\ (1,\,4,\,2),\ (1,\,4,\,3),\ (2,\,4,\,3),\\
&(1,\,2)\circ(3,\,4),\ (1,\,3)\circ(2,\,4),\ (1,\,4)\circ(2,\,3)
\end{aligned}
$$

   の 12 個．そして奇置換は

$$
\begin{aligned}
&(1,\,2),\ (1,\,3),\ (1,\,4),\ (2,\,3),\ (2,\,4),\ (3,\,4),\\
&(1,\,2,\,3,\,4),\ (1,\,2,\,4,\,3),\ (1,\,3,\,2,\,4),\\
&(1,\,4,\,3,\,2),\ (1,\,3,\,4,\,2),\ (1,\,4,\,2,\,3)
\end{aligned}
$$

   の 12 個．
2. 1 が移り得るのは n 通り，2 が移り得るのは $(n-1)$ 通り，と順に移れる可能性を考えていくと，k が移り得るのは $(n-k+1)$ 通りの可能性があることが分かる．よって，S_n は $\prod_{k=1}^{n}(n-k+1)=n!$ 個の元がある．
3. (1) 1　　(2) 1　　(3) -1
4. 例えば (1) では，$(1\,2)\circ(3\,4)=(3\,4)\circ(1\,2)=(3\,4)\circ(2\,3)(2\,3)\circ(1\,2)$ など．
5. σ を巡回置換とすると，その定義より，巡回域に属さない数 k に対しては $\sigma(k)=k$ である．さて，そのことを踏まえると，k が巡回置換 σ,τ どちらの巡回域にも属さないのならば，$(\sigma\circ\tau)(k)=(\tau\circ\sigma)(k)=k$ である．次に，k が σ の巡回域に属しているが τ の巡回域には属していないとする．つまり，$\tau(k)=k$．このとき，σ と τ は互いに素であるため，$\sigma(k)$ は τ の巡回域に属さない．したがって，

$$(\tau\circ\sigma)(k)=\tau(\sigma(k))=\sigma(k)=\sigma(\tau(k))=(\sigma\circ\tau)(k).$$

   k が τ の巡回域に属しているが σ の巡回域には属していないときも同様に示せる．
6. (1) $(1\,3\,6\,7\,2)\circ(4\,5)$　　(2) $(1\,3\,5\,6)\circ(2\,4)$
7. (1) 多項式 x_j-x_i に互換を施すと $-(x_j-x_i)$ となる．次に p,q $(q\geq p)$ が共に i,j のいずれでもない場合は当然 x_q-x_p は変わらない．さて，自然数 k を次の 3 つの場合にわけて考える: (i) $k\leq i$; (ii) $i\leq k\leq j$; (iii) $j\leq k$. (i) のとき，k と i,j が現れるものは x_i-x_k と x_j-x_k の二つで，これは互換 $(i,\,j)$ で互いに入れ替わる．つまり符号は変わらない．(ii) のとき，k と i,j が現れるものは x_k-x_i と x_j-x_k の二つで，これは互換 $(i,\,j)$ を施すとそれぞれ $-(x_j-x_k)$ と $-(x_k-x_i)$ となる．つまり，これら二つのマイナスが打ち消し合って，全体の符号は変わらない．最後に (iii) のとき，k と i,j が現れるものは x_k-x_i と x_k-x_j の二つで，これは互換 $(i,\,j)$ で互いに入れ替わる．つまり符号は変わらない．
   以上より，互換 $\sigma=(\imath,\,j)$ に対して，$(\sigma\Delta)(\boldsymbol{x})=-\Delta(\boldsymbol{x})$ が示された．

(2) 前半部分は問題が間違っていたようです: $((\sigma \circ \tau)\Delta)(\boldsymbol{x}) = (\tau(\sigma\Delta))(\boldsymbol{x})$. 証明は，差積がVandermonde の行列式を使ってかけることを使えばすぐでます[*1]. 後半は (1) と前半を合わせると出ます.

8. (1) (a) 対称式でない (b) 対称式でない (c) 対称式でない
※勘違いで，すべて非対称なものになっていました.
(2) (a) $t_1^2 - 2t_2$　(b) $t_1^3 - 3t_1t_2 + 3t_3$　(c) $-4t_1^3t_3 + t_1^2t_2^2 + 18t_1t_2t_3 - 4t_2^3 - 27t_3^2$

[*1] これはここで定義した作用が，通常のものと異なるために生じた間違いです: 通常は $(\sigma f)(x_1, \ldots, x_n) := f(x_{\sigma^{-1}(1), \ldots, \sigma^{-1}(n)})$ と定めます. こうすると，$((\sigma \circ \tau)f)(\boldsymbol{x}) = (\sigma(\tau f))(\boldsymbol{x})$ となります.