13　高次元における重積分

3 次元以上になっても，同様の手法で重積分を定義できる．2 次元では長方形 $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ が基本となったが，n 次元においては n 次元の直方体 $I = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ が基本となる．この直方体の体積は $\mu(I) = (b_1 - a_1) \times \cdots \times (b_n - a_n)$ により定義する．そして，$\mathbb{R}^n$ の部分集合 D についても，n 次元直方体でメッシュを入れて，「内体積」と「外体積」を通して D の体積を定義する．講義ではこうした一般論は展開せず，計算法の紹介に留める．

13.1　変数変換について (復習)

例題 13.1. $D = \{(x, y);\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x\}$ を極座標変換したときの，r, θ の動く範囲 D' を求めよ．

(考え方) 片方の変数を固定して，もう片方の変数の動く範囲を見る．つまり，縦線 (or 横線) 領域とみる．

例題 13.2. 例題 13.1 と同じ D を取る．変換 $x = u + v$, $y = u - v$ のとき，(u, v) の動く範囲 D' を求めよ．

(考え方) 与えられた不等式から $v \gtreqless$ (u の関数) を作る．そこから (u, v) 平面に図示して，数式で表す．

13.2　3 変数以上での積分

例題 13.3. $D = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3;\ x, y, z \ge 0,\ x + y + z \le 1\right\}$ のとき，次の重積分の値 I を求めよ．

$$I = \int_D \frac{d\boldsymbol{x}}{(x + y + z + 1)^2}.$$

考え方) 2 変数のときと同様に，累次積分ができる．$z \to y \to x$ の順で計算することにすると，積分区間は $x \to y \to z$ の順で決めることになる．

まず　$0 \le x \le 1$
次に[*1]　$0 \le y \le 1 - x$
最後に　$0 \le z \le 1 - x - y$

例題 13.4. 3 次元の球 $B_3(R)$ の体積 $V_3(R)$ を求めよ．

$$B_3(R) := \left\{(x, y, z);\ x^2 + y^2 + z^2 \le R^2\right\}$$

(考え方) 変数変換も，2 変数の場合と同様にできる．3 次元の球極座標変換においては次のようになる．

$$dx\,dy\,dz = r^2 \sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$$

ここで $r^2 \sin\theta$ は Jacobian である．

1 月 30 日．

[*1] $1 - x - z$ において z を動かしたものの中で一番大きいもの．

13.3　ガンマ関数とベータ関数

定義 13.5. ガンマ関数 $\Gamma(s)$ $(s > 0)$ とベータ関数 ($B(s, t)$ $(s, t > 0)$ を次のように定義する (1 変数関数).

$$\Gamma(s) := \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{s-1}\,dx \quad (s > 0),$$
$$B(s, t) := \int_0^1 x^{s-1} (1 - x)^{t-1}\,dx \quad (s, t > 0).$$

注意 13.6. これらは広義積分であるが，与えられた範囲において収束する．

定理 13.7. $B(s, t) = \dfrac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s + t)}$ $(s, t > 0)$.

定理 13.8. n 次元の球 $B_n(R)$ の体積 $V_n(R)$ は

$$V_n(R) = \frac{(\pi R^2)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}$$

で与えられる．ただし，

$$B_n(R) = \left\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n;\ x_1^2 + \cdots + x_n^2 \le R^2\right\}.$$

(計算の粗筋) $V_n(R)$ は「各変数が 0 以上である $B_n(R)$ の部分集合 $B'_n(R)$」の体積 $V'_n(R)$ の 2^n 倍になることを利用する．裏面にある計算より，

$$V'_n(R) = \frac{\sqrt{\pi} R}{2} \cdot \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} \cdot V'_{n-1}(R)$$

という関係式が得られる．明らかに $V'_1(R) = R$ であるので，$\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ に注意すれば，

$$V'_n(R) = \left(\frac{\sqrt{\pi} R}{2}\right)^{n-1} \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} \cdot V'_1(R) = \frac{(\sqrt{\pi} R)^n}{2^n\,\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}.$$

これより，求める公式が得られる:

$$V_n(R) = 2^n \cdot V'_n(R) = \frac{(\pi R^2)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}.$$

まとめ (1) 3 変数以上になっても，2 変数における重積分の計算手法がほぼそのままの形で適用できる．(2) 空間の極座標変換と，その Jacobian の公式は

$$dx\,dy\,dz = r^2 \sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi.$$

(3) n 次元の球の体積はガンマ関数を用いて表せる．

演習問題 13

問題 1. $D=\left\{(x,y,z);\ x^2+y^2+z^2\le 1\right\}$ とする．空間の極座標変換

$$x=r\sin\theta\cos\varphi,\ y=r\sin\theta\sin\varphi,\ z=r\cos\theta$$

を利用して，次の重積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\int_D \frac{d\boldsymbol{x}}{x^2+y^2+(z-2)^2}$

(2) $\displaystyle\int_D \frac{d\boldsymbol{x}}{\sqrt{x^2+y^2+(z-2)^2}}$

問題 2. 円柱座標変換

$$x=\rho\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\varphi,\quad z=z$$

を利用して，次の重積分を計算せよ．

$$(1)\quad \int_D z\,d\boldsymbol{x}\qquad (2)\quad \int_D z^2\,d\boldsymbol{x}$$

ただし，D は次で定義される $\mathbb{R}^3$ の領域である．

$$D=\left\{(x,y,z);\ \begin{array}{c} x^2+y^2+z^2\le 1\\ x^2+y^2\le 2x,\ z\ge 0\end{array}\right\}$$

問題

次の積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\int_D (x+y+z)\,d\boldsymbol{x}\quad D=\left\{\begin{array}{c} x,y,z\ge 0\\ x+y+z\le 1\end{array}\right\}$

(2) $\displaystyle\int_D x^2\,d\boldsymbol{x}\quad D=\left\{x^2+y^2+z^2\le 1\right\}$

(3)* $\displaystyle\int_D 1\cdot d\boldsymbol{x}\quad D=\{x^2+y^2+z^2-2xyz\le 1\}$

(3) は力試し用の問題．

累次積分は，見易さのために $\int dx\int d\boldsymbol{y}$ のような形で書いている．後ろの積分から順に計算をしていく．また，$\int_{y_1+\cdots+y_n\le 1}\cdots d\boldsymbol{y}$ は $D_0=\{y_1+\cdots+y_n\le 1,\ y_1,\dots,y_n\ge 0\}$ 上での積分という意味．特に $y_1,\dots,y_n\ge 0$ を暗に仮定していることに注意 (記述を簡潔にするため)．また，$r=R/2$ とおく (スペースの都合)．

$$\begin{aligned}
V_n'(R) &= \int_{x^2+\cdots+x_n^2\le R^2} d\boldsymbol{x}\\
&\overset{(1)}{=} \int_{y_1+\cdots+y_n\le 1} r^n(y_1\times\cdots\times y_n)^{-1/2}d\boldsymbol{y}\\
&\overset{(2)}{=} r^n\int_0^1 y_n^{-1/2}\,dy_n\\
&\qquad\times\int_{y_1+\cdots+y_{n-1}\le 1-y_n}(y_1\cdots y_{n-1})^{-1/2}d\boldsymbol{y}'\\
&\overset{(3)}{=} r^n\int_0^1 y_n^{1/2-1}(1-y_n)^{(n+1)/2-1}\,dy_n\\
&\qquad\times\int_{z_1+\cdots+z_{n-1}\le 1}(z_1\cdots z_{n-1})^{-1/2}d\boldsymbol{z}'\\
&\overset{(4)}{=} r\times B(\tfrac{1}{2},\tfrac{n+1}{2})\times V_{n-1}'(R)\\
&= r\times\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}\cdot V_{n-1}'(R).
\end{aligned}$$

式変形について．

(1) $x_j^2=R^2y_j$．Jacobian は $r^n(y_1\cdots y_n)^{-1/2}$．

(2) y_n とそれ以外という形の累次積分．

また $d\boldsymbol{y}'=dy_1\,dy_2\cdots dy_{n-1}$ である．

(3) $y_j=(1-y_n)z_j$．Jacobian は $(1-y_n)^{n-1}$．

(4) 後ろの積分は y_n に依存していないので，累次積分はただの積分の積になる．y_n に関する積分はベータ関数でかける．