線形写像は，ベクトル空間上の写像の中で最も基本的なものです．実は，より一般の (可微分) 写像を考える上でも線形写像が重要な役割を果たします．例えば，2 変数関数 $f(\boldsymbol{x})$ の点 $\boldsymbol{a}$ における Taylor 展開

$$f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{a}) + \nabla f(\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{h} + o(\|\,\boldsymbol{h}\,\|)$$

に現れる $\nabla f(\boldsymbol{a})$ は $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}$ への線形写像です．これは，曲面上の各点において，十分小さい近傍をとれば平面と思うことができるということを表しています．例えば，地球は球体ですが，地平線・水平線などはまっすぐに見えます[1)]．もちろんすべての関数がこのようにできるわけではありませんが，それでも非常に応用範囲が広いのです．

その例として，多変数関数の積分における変数変換との関係を紹介します．$\mathbb{R}^2$ の二つの領域 D, D' に対して，その間の同型写像（1 対 1 の写像）$\boldsymbol{\Phi}\colon D'\to D$ を $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{u}) = (\varphi_1(\boldsymbol{u}), \varphi_2(\boldsymbol{u}))\in D$ $(\boldsymbol{u}\in D')$ とするとき，次の行列を $\boldsymbol{\Phi}$ の Jacobi 行列と言います．これは，写像における導関数に当たるものになります．

$$J_{\boldsymbol{\Phi}}(\boldsymbol{u}) := \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial u}(\boldsymbol{u}) & \frac{\partial\varphi_1}{\partial v}(\boldsymbol{u}) \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial u}(\boldsymbol{u}) & \frac{\partial\varphi_2}{\partial v}(\boldsymbol{u}) \end{pmatrix} \quad (\boldsymbol{u}=(u,v)\in D').$$

このとき，領域 D 上での重積分は，領域 D' 上の重積分として，$J_{\boldsymbol{\Phi}}$ を用いて

$$\int_D f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} = \int_{D'} f(\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{u}))\bigl|\det J_{\boldsymbol{\Phi}}(\boldsymbol{u})\bigr|\,d\boldsymbol{u}$$

となります．つまり，変数変換ができるということです．なぜこのようにできるかを，ざっくりとですが説明してみましょう．この $J_{\boldsymbol{\Phi}}(\boldsymbol{u})$ は，写像 $\boldsymbol{\Phi}$ の‘無限小部分’で，一点 $\boldsymbol{u}$ に非常に近いところにおいて $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{u})$ を近似する <u>線形写像</u> です．一方，積分とは何だったかというと，(i) 領域を小さく分割して，(ii) その上での関数の値とその領域の面積をかけて，(iii) それを足し合わせたものを考え，(iv) 領域の分割を限りなく細かくして得られる極限値でした．さて，元の積分領域 D は $\boldsymbol{\Phi}$ によって D' に引き戻されている形になっています．このとき，D 内の小さい領域は線形写像 $J_{\boldsymbol{\Phi}}$ によって引き戻されていると思えますが，その面積は，対応する D' の領域の面積の $\bigl|\det J_{\boldsymbol{\Phi}}(\boldsymbol{u})\bigr|$ 倍になっています[2)]．つまり，D' で積分する際に，この‘重みを掛ける’ことによって D の積分を表現しているのです．これが重積分の変数変換に $\bigl|\det J_{\boldsymbol{\Phi}}(\boldsymbol{u})\bigr|$ という量が現れるという仕組みになります．

---

1) 日本では地平線が見られる場所は少ないですが⋯．

2) 前期の講義の内容！