5　初等関数の微分

初等関数とは，多項式・指数関数・対数関数や三角関数あるいはその逆関数を用いて表される関数のことである．ここでは，それらの微分について学ぶ．

5.1　三角関数の微分

初回に少しだけ紹介したが，次が成り立つ．

定理 5.1

角度の単位を弧度法とするとき，

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x,$$
$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.$$

$f(x) = \sin x$ について説明する．微分の定義から

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h}$$

において $h \to 0$ を考えることになる．三角関数の和を積に変える公式を使えば，

$$\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} = \frac{\cos(x+\frac{h}{2})\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$

となる．ここで分母を $\frac{h}{2}$ としているのは，sin の中と同じにするため．ここで次の定理が必要になる．

定理 5.2

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = 1$$

これを認めれば，

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+\frac{h}{2})\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$
$$= \lim_{h\to 0}\cos(x+\frac{h}{2})\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = \cos x \cdot 1 = \cos x$$

のようにして証明できる．定理 5.2 を証明しよう．簡単のため $x > 0$ として考える．図 1 にあるように，$\sin x$ は線分 BH の長さであり，今弧度法を採用しているので x は弧 $\overset{\frown}{AB}$ の長さである．更に線分 OB を延長して直線 $x = 1$ と交わる点の y 座標，すなわち線分 AC の長さは $\tan x$ である．図からも分かるように，

$$\sin x \leqq x \leqq \tan x$$

となる (正確には面積を考える必要がある)．両辺を $\sin x$ で割ってみれば

$$1 \leqq \frac{x}{\sin x} \leqq \frac{\tan x}{\sin x} = \frac{1}{\cos x}$$

となり，$\lim_{x\to 0}\cos x = 1$ なので，はさみうちの定理から定理 5.2 が成立することが分かる．

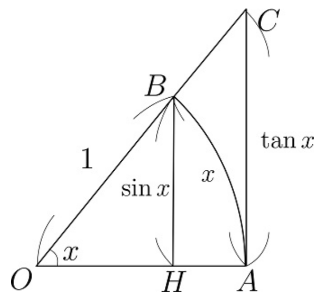

図 1　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ について

5.2　逆三角関数の微分

$y = \sin x$ は区間 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ において 1 対 1 であるので，この区間で逆関数を持つ (図 2 の赤い線)．それを $y = \mathrm{Arcsin}\,x$ と表す．$y = \tan x$ についても，その逆関数を $y = \mathrm{Arctan}\,x$ のように表す．$\mathrm{Arccos}\,x$ も同様に定義できるが，$\mathrm{Arcsin}\,x$ とほとんど同じなので省略する．

なお，分野によって例えば $\mathrm{Arctan}\,x$ を $\arctan x$ や $\tan^{-1} x$, $\mathrm{Tan}^{-1} x$ などのように書くこともあるので，注意が必要である．

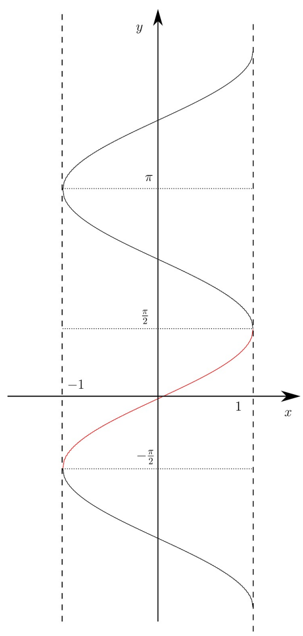

図 2　$y = \sin x$ の逆関数

定理 5.3

次が成り立つ．

$$(\mathrm{Arcsin}\,x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\mathrm{Arctan}\,x)' = \frac{1}{x^2+1}$$

5.3 指数関数と対数関数の微分

a を 1 でない正の定数とする．指数関数は $f(x) = a^x$ という形の関数であり，対数関数 $y = \log_a x$ はその逆関数である．それらの基本的な性質をここで復習しておく．指数関数について，

$$a^{x_1+x_2} = a^{x_1} \cdot a^{x_2}, \quad (a^x)^p = a^{px}, \quad a^0 = 1$$

であり，対数関数については

$$\log_a(x_1x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2, \quad \log_a x^p = p\log_a x, \\ \log_a 1 = 0, \quad \log_a a = 1$$

および底の変換公式

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

が成り立つ．互いが逆関数であることから

$$a^{\log_a x} = x, \quad \log_a a^x = x.$$

対数関数の微分を考えよう．x を一つ決めて，そこでの微分を考えると，

$$\frac{\log(x+h) - \log h}{h} = \frac{1}{h}\log\frac{x+h}{x} \\ = \log\Big(1 + \frac{h}{x}\Big)^{\frac{1}{h}} = \frac{1}{x}\log\Big(1+\frac{h}{x}\Big)^{\frac{x}{h}}.$$

最後の等式は，log の中にある変数を $h' = \frac{h}{x}$ に揃えるためである．今 x を一つ決めているので（つまり h とは無関係），$h \to 0$ のとき $h' \to 0$ である．このとき，

$$e = \lim_{h'\to 0}\big(1+h'\big)^{\frac{1}{h'}} = 2.71828...$$

は x とは無関係の定数になる．この e はとても重要な数であり，e を底に持つ対数は**自然対数**と呼ばれ，

$$\log x := \log_e x$$

のように底 e を省略して書く．この数 e は**自然対数の底**もしくは**ネイピア数**と呼ばれる．

定理 5.4

次が成り立つ．

$$(\log x)' = \frac{1}{x}, \quad \big(\log|x|\big)' = \frac{1}{x}, \quad (e^x)' = e^x.$$

底の変換公式を用いれば，次の公式

$$(\log_a x)' = \frac{1}{(\log a)x}, \quad \big(a^x\big)' = (\log a)a^x$$

が成り立つこともすぐに分かる．

5.4 対数微分法

関数 $y = f(x)$ に対して $\log|f(x)|$ を微分してみると

$$\frac{f'(x)}{f(x)}$$

となる．このことを利用して，与えられた関数の自然対数をとって微分することにより導関数を求める方法は，積・商あるいは指数の形の関数を微分する場合に有効であることも多い．この方法を**対数微分法**という．

例題 5.5

実数 p に対して，次が成り立つことを示せ．

$$(x^p)' = px^{p-1}$$

5.5 まとめ

- 三角関数・対数関数・指数関数の微分
- 逆三角関数の定義
- 対数微分法
- 自然対数の底 e

5.6 演習問題

(1) 次の関数を微分せよ．

(a) 三角関数・逆三角関数の微分を用いるもの．

(i) $\sin^2 x$ (ii) $\cos^3 2x$ (iii) $\tan 2x$
(iv) $\mathrm{Arctan}\, 3x$ (v) $x\cos x$

(b) 指数関数・対数関数の微分を用いるもの．

(i) $\log(x^2+x+1)$ (ii) $\log|x|$ (iii) $e^x \log x$
(iv) $(x+1)\log x$ (v) $\log(x^3+x-2)$

(c) 対数微分法を用いるもの．

(i) $(x-1)^2\sqrt[3]{x+2}$ (ii) $\dfrac{\sqrt{x+2}}{x+1}$

(2) 次の関数を微分せよ．

(a) $\dfrac{\log x}{x}$	(b) xe^x	(c) $x\cos x - \sin x$
(d) $\log\sin x$	(e) $\log\tan x$	(f) $(x^2+1)\tan x$
(g) $e^x\sin x$	(h) $\mathrm{Arcsin}\sqrt{x}$	(i) $\mathrm{Arctan}\sqrt{x^2-1}$
(j) e^{-3x}	(k) $\log 2x$	(l) $\log_2|3x-1|$
(m) $(x-1)e^x$	(n) $x(\log x - 1)$	(o) $\log\dfrac{x-1}{x+1}$