微分積分学・同演習 A

4 月 25 日分 質問への回答

質問 $x \to 2$ のとき 0 に収束しないことを考えるから，$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 0$ で話を進めるんじゃないですか?

— 違います．関数 $f(x)$ が点 $x = a$ で連続であることの定義は，$x \to a$ の極限が存在してそれが $f(a)$ に一致することですので，まずは ($f(a)$ の値とは無関係に) $\lim_{x\to a} f(x)$ を計算して，その後で値 $f(a)$ と比較するのです．

質問 今日の講義の使い方がわかりませんでした。おしえてほしいです。

— 小テストの極限 ($\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4$) を ε-δ 論法で書くと，次のようになります．

$\varepsilon > 0$ を任意にとる．このとき $\delta = \varepsilon$ ととれば，$0 < |x-2| < \delta$ のとき

$$\left| \frac{x^2-4}{x-2} - 4 \right| = |x-2| < \delta = \varepsilon$$

であるので，$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4$ となる．今 $f(2) = 0$ なので $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} \neq f(2)$ ゆえ f は点 $x = 2$ で連続でない．

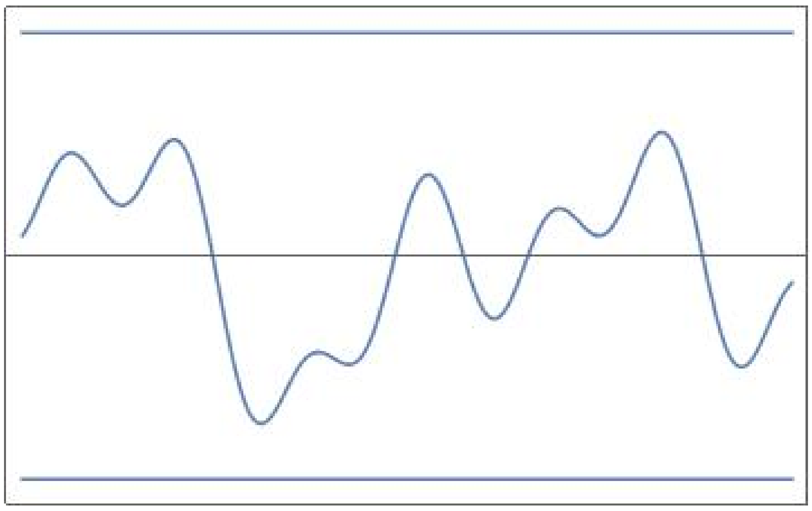
一般の関数では $\lim_{x\to a} f(x)$ の値 (そもそも存在しないこともある) と $f(a)$ の値とは独立なので，はじめから $|f(x) - f(2)| < \varepsilon$ とすると上手くいきません．ちなみに関数 $f(x)$ が $x \to a$ のときにある数 b に収束**しない**ことを ε, δ を用いて表せば

ある正の数 $\varepsilon > 0$ が存在して，どんな正の数 $\delta > 0$ に対しても $0 < |x-a| < \delta$ かつ $|f(x) - b| \geq \varepsilon$ となる

ですが，論理記号が入った式の否定は慣れていないと少し難しいので，これは講義では (今のところ) 紹介していません．

質問 Def 3.9 関数 $f(x)$ が区間 I で有界 $\Leftrightarrow$ $\exists M > 0$ s.t. $|f(x)| < M$ がよく分かりません．

— 大雑把なイメージで言うと，下図のように上と下に境があって，そこから大きく（小さく）なることはないということです．



質問 $\delta = \min(\bigcirc, \triangle)$ の意味がわかりませんでした．

質問 $\delta = \min(\bigcirc, \triangle)$　　← この記号の意味を知りたい

— $\min(a, b)$ は a と b のうちで小さい方を選ぶというものです．たとえば $\min(2, 3) = 2$ です．また，$\min(1, a)$ だったら，$a \leq 1$ のときは $\min(1, a) = a$, $1 < a$ のときは $\min(1, a) = 1$ になります．

質問 難しい

質問 (ˆωˆ) わかんね

— 小テストの時間にも言いましたが，関数の極限も ε-δ 論法を用いて厳密に定義しなおしましたが，実際の計算は，多くの場合は高校までの手法が使えます．もちろん ε-δ 論法を用いないとうまくいかない時もありますの

で，そのような場合にも困らないように ε-δ 論法で定義しなおす必要がありました．

質問 定義しなおした方のも理解はできるのですが，やっぱり抽象度が抜けてないと感じます。仕方ないのですかね。

— 抽象度は抜けません．というよりも，抽象化することによって厳密性や汎用性を獲得した，という方がよいかもしれません．

質問 なし．

— はい．