線形代数学・同演習 B

小テスト 11　(1 月 16 日分)

学籍番号：　　　　　　　　　　　　　　　氏名：

次の 3 本のベクトルに対して Gram–Schmidt の直交化法を適用して直交化せよ.

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}.$$

(考え方) Gram-Schmidt の直交化法をそのまま適用すればよい.

解. まずは $\|\boldsymbol{v}_1\| = \sqrt{1^2+0^2+1^2} = \sqrt{2}$ より，$\boldsymbol{u}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\1\end{smallmatrix}\right)$. 次に $(\boldsymbol{v}_2|\boldsymbol{u}_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1\cdot 1+2\cdot 0+0\cdot 1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ より，

$$\widetilde{\boldsymbol{v}}_2 = \boldsymbol{v}_2 - (\boldsymbol{v}_2|\boldsymbol{u}_1)\,\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2-1\\4-0\\0-1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\4\\-1\end{pmatrix}.$$

よって，$\left\|\left(\begin{smallmatrix}1\\4\\-1\end{smallmatrix}\right)\right\| = \sqrt{1^2+4^2+(-1)^2} = 3\sqrt{2}$ なので $\boldsymbol{u}_2 = \dfrac{1}{3\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix}1\\4\\-1\end{smallmatrix}\right)$. 最後に，

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{v}_3|\boldsymbol{u}_1) &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}(1\cdot 1+0\cdot 0+(-2)\cdot 1) = -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\\ (\boldsymbol{v}_3|\boldsymbol{u}_2) &= \tfrac{1}{3\sqrt{2}}(1\cdot 1+0\cdot 4+(-2)\cdot(-1)) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

より，$\widetilde{\boldsymbol{v}}_3 = \boldsymbol{v}_3 - (\boldsymbol{v}_3|\boldsymbol{u}_1)\,\boldsymbol{u}_1 - (\boldsymbol{v}_3|\boldsymbol{u}_2)\,\boldsymbol{u}_2$ を計算すれば

$$\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{6}\begin{pmatrix}1\\4\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}6+3-1\\0+0-4\\-12+3+1\end{pmatrix} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}.$$

よって，$\left\|\left(\begin{smallmatrix}2\\-1\\-2\end{smallmatrix}\right)\right\| = \sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2} = 3$ より，$\boldsymbol{u}_3 = \dfrac{1}{3}\left(\begin{smallmatrix}2\\-1\\-2\end{smallmatrix}\right)$. 以上より，

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\4\\-1\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}. \qquad \square$$

※講義や講義内容に関して，意見・感想・質問等を自由に記述してください.