線形代数学・同演習 B

10 月 4 日分　小テスト

学籍番号：　　　　　　　　　　　　　　氏名：

$C(\mathbb{R})$ を連続な実数値関数全体のなすベクトル空間とする．このとき，次の W_1, W_2 は $C(\mathbb{R})$ の部分空間になるかどうか調べよ．ただし，$C(\mathbb{R})$ の零関数は f_0 で表すこととする．

(1) $W_1 = \{f(x) \in C(\mathbb{R});\, f(0) = 0,\ f(1) = 1\}$,

(2) $W_2 = \{f(x) \in C(\mathbb{R});\, f$ は微分可能かつ $xf'(x) = 2f(x)\}$.

解) 命題 1.9 の条件 (を関数空間 $C(\mathbb{R})$ に合わせて書き直したもの)

$$\text{(i)}\ f_0 \in W_j, \quad \text{(ii)}'\ f, g \in W_j,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda f + \mu g \in W_j \qquad (j = 1, 2)$$

を調べればよい．

(1) 条件 (i) について，$f_0(1) = 0 \neq 1$ であるため，f_0 は W_1 に属するための条件を満たさない．つまり $f_0 \notin W_1$ なので，W_1 は $C(\mathbb{R})$ の部分空間でない．

(2) 条件 (i) について，f_0 は値が 0 の定数関数なので，任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $f_0'(x) = 0$ である．よって W_2 に属するための条件 $xf_0'(x) = 2f_0(x)$ を満たすので，$f_0 \in W_2$．次に条件 (ii)$'$ について．$f, g \in W_2$ とすると，

$$xf'(x) = 2f(x), \quad xg'(x) = 2g(x)$$

を満たす．さて，$h = \lambda f + \mu g$ とおけば,

$$\begin{aligned} xh'(x) &= x(\lambda f(x) + \mu g(x))' = x(\lambda f'(x) + \mu g'(x)) = \lambda \cdot xf'(x) + \mu \cdot xg'(x) \\ &= \lambda \cdot 2f(x) + \mu \cdot 2g(x) = 2h(x). \end{aligned}$$

よって $h = \lambda f + \mu g \in W_2$ である．W_2 は条件 (i),(ii)$'$ を満たすので，$C(\mathbb{R})$ の部分空間となる．

※講義や講義内容に関して，意見・感想・質問等を自由に記述してください．