線形代数学・同演習 A

6 月 14 日分　演習問題

計算問題は解答のみ，証明問題は大雑把な道筋を説明するに留めています．

1. (1) 7
   (2) a^2+b^2
   (3) 36
   (4) -12
   (5) -10
   (6) 0
   (7) $1+a^2+b^2+c^2$
2. (1) $(a-b)(a-b)(a-c)$
   (2) $-(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$
   (3) $(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$
   (4) $2(a+b+c)^3$
3. $$(1)\ \begin{pmatrix}-7\\-1\\5\end{pmatrix}\quad (2)\ \begin{pmatrix}115\\7\end{pmatrix}\quad (3)\ \begin{pmatrix}-10\\-8\\2\end{pmatrix}$$
4. $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ を任意の $\mathbb{R}^n$ のベクトルとし，実数 t を任意にとる．このとき，ベクトル $t\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ を考える．ノルム $||\cdot||$ の定義および内積 $(\cdot|\cdot)$ の双線形性から
   $$0 \leqslant ||\,t\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\,||^2 = (\,t\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\,|\,t\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\,) = ||\,\boldsymbol{x}\,||^2\cdot t^2 + 2\,(\,\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{y}\,)\cdot t + ||\,\boldsymbol{y}\,||^2.$$
   つまり，t に関する 2 次関数 $||\,\boldsymbol{x}\,||^2\cdot t^2 + 2\,(\,\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{y}\,)\cdot t + ||\,\boldsymbol{y}\,||^2$ が常に ≥ 0 である事がわかる．これより，この二次関数多項式の判別式は常に ≤ 0 となるので，
   $$\left(2\,(\,\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{y}\,)\right)^2 - 4||\,\boldsymbol{x}\,||^2\cdot||\,\boldsymbol{y}\,||^2 \leq 0,$$
   つまり，$|\,(\,\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{y}\,)\,| \leq ||\,\boldsymbol{x}\,||\cdot||\,\boldsymbol{y}\,||$.
5. $A=\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)$ とすれば，$\mathrm{tr}(A)=a+d$, $\det(A)=ad-bc$ なので，$A^2-\mathrm{tr}(A)\,A+\det(A)E_2$ を普通に計算すれば良い．
6. 求める体積は $|(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\,|\,(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})\times(\boldsymbol{d}-\boldsymbol{a}))|$ なので，$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) := (\,\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{y}\times\boldsymbol{z}\,)$ という記号を導入すれば，
   $$|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})-(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d})+(\boldsymbol{c},\boldsymbol{d},\boldsymbol{a})-(\boldsymbol{d},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})|\,.$$
7. 略.
8. 成立しない．反例として $A=\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)$, $B=\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$. 成り立たないほうが普通である．
9. (1) $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}16\\-13\\2\end{smallmatrix}\right)$, det=1,　(2) 解を持たない，　det=0.
10. (1) $2\det(A)$　(2) $-\det(A)$　(3) $\det A$