線形代数学・同演習 B

12 月 20 日分　小テスト

学籍番号：　　　　　　　　　　　　　氏名：

次の行列は対角化可能か．可能ならば対角化せよ．(裏面も使用してよい．)

$$(1)\ A = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 6 & 9 & -2 \end{pmatrix} \qquad (2)\ B = \begin{pmatrix} 5 & 12 & 6 \\ 0 & -1 & 0 \\ -3 & -6 & -4 \end{pmatrix}$$

解) (1) まず固有多項式および固有値を求める．

$$\det(tE_3 - A) = \begin{vmatrix} t-4 & -9 & 0 \\ 1 & t+2 & 0 \\ -6 & -9 & t+2 \end{vmatrix} = (t+2)\begin{vmatrix} t-4 & -9 \\ 1 & t+2 \end{vmatrix} = (t+2)(t-1)^2.$$

よって固有多項式は $(t+2)(t-1)^2$ で，固有値は $\lambda = \begin{cases} 1 & (\text{重複度 } 2) \\ -2 & \end{cases}$ である．

(i) $\lambda = 1$ の固有空間 (固有ベクトル) を求める．$(1 \cdot E_3 - A)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ の解を求めればよい．係数行列 $1 \cdot E_3 - A$ を簡約化すれば,

$$E_3 - A = \begin{pmatrix} -3 & -9 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -6 & -9 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

なので, 解は $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ となる (s はパラメータ)．特にパラメータの数 ($= \dim W(1;\, A)$) を見ると $\dim W(1;\, A) = 1 \lneqq 2$ (固有値 1 の重複度) であるので，行列 A は対角化できない．($\lambda = 1$ の結果に関わらず対角化できないことがわかったことになるので，その場合の計算は必要がない)

(2) まず固有多項式および固有値を求める．

$$\det(tE_3 - B) = \begin{vmatrix} t-5 & -12 & -6 \\ 0 & t+1 & 0 \\ 3 & 6 & t+4 \end{vmatrix} = (t+1)\begin{vmatrix} t-5 & -6 \\ 3 & t+4 \end{vmatrix} = (t+1)^2(t-2).$$

よって固有多項式は $g_B(t) = (t+1)^2(t-2)$ で，固有値は $\lambda = \begin{cases} -1 & (\text{重複度 } 2) \\ 2 & \end{cases}$ である．

(次ページへ)

※講義や講義内容に関して，意見・感想・質問等を自由に記述してください．

(i) $\lambda=1$ の固有空間 (固有ベクトル) を求める．$(-1\cdot E_3-B)\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\mathbf{0}$ の解を求めればよい．係数行列 $-1\cdot E_3-B$ を簡約化すれば,

$$-1\cdot E_3-B=\begin{pmatrix}-6 & -12 & -6\\ 0 & 0 & 0\\ 3 & 6 & 3\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{簡約化}}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

なので，解は $\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$ となる (s,t はパラメータ)．特にパラメータの数を見ると $\dim W(-1;\, B)=2$ である．

(ii) $\lambda=2$ の固有空間 (固有ベクトル) を求める．$(2\cdot E_3-B)\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\mathbf{0}$ の解を求めればよい．係数行列 $2\cdot E_3-B$ を簡約化すれば

$$2\cdot E_3-B=\begin{pmatrix}-3 & -12 & -6\\ 0 & 3 & 0\\ 3 & 6 & 6\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{簡約化}}\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

なので，解は $\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}-2\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$ となる (s はパラメータ)．特にパラメータの数は $\dim W(2;\, B)=1$ である．

以上より，$\dim W(-1;\, B)+\dim W(2;\, B)=2+1=3$ であるので，B は対角化可能であり，(i),(ii) の計算より，$P=\begin{pmatrix}-2 & -1 & -2\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$ とすれば，$P^{-1}BP=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$ となる．