

微分積分学・同演習 A

5 月 9 日分 小テスト

学籍番号：

氏名：

次の $\operatorname{Arctan} x$ に関する公式 (Machin^{マチン}の公式) を，以下の設問にしたがって示せ．

$$4 \operatorname{Arctan} \frac{1}{5} - \operatorname{Arctan} \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}. \quad (1)$$

- (i) $\alpha := \operatorname{Arctan} \frac{1}{5}$ とおく． $\tan x$ の倍角の公式を用いて $\tan 2\alpha$, $\tan 4\alpha$ を求めよ．
(ii) $\tan(\frac{\pi}{4} - 4\alpha)$ を計算せよ．
(iii) 式 (1) を示せ．

(解) $\tan \alpha = \frac{1}{5}$ なので， $\tan x$ の倍角の公式より

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{5}{12}, \quad \tan 4\alpha = \frac{2 \tan 2\alpha}{1 - \tan^2 2\alpha} = \frac{120}{119}.$$

よって $\tan x$ の加法定理より

$$\tan(\frac{\pi}{4} - 4\alpha) = \frac{\tan \frac{\pi}{4} - \tan 4\alpha}{1 + \tan \frac{\pi}{4} \tan 4\alpha} = -\frac{1}{239}.$$

さて，(ii) は

$$-\operatorname{Arctan} \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4} - 4\alpha = \frac{\pi}{4} - 4 \operatorname{Arctan} \frac{1}{5}$$

を意味しているので，移項すれば Machin の公式を得る．

講義や講義内容に関して，意見・感想・質問等を自由に記述してください．