4　写像の微分と逆写像定理

例題 4.1 (前回の復習). $\mathbb{R}^3$ における極座標変換は $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$ で与えられた．ただし，$r \geq 0$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ である．このとき，r, θ, φ を x, y, z を用いて表せ．

4.1　写像の微分

$f(x, y)$ を 2 変数関数とし，x, y がそれぞれ u, v の関数 $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ になっているとする．このとき，合成関数 $F(u, v) := f(x(\boldsymbol{u}), y(\boldsymbol{u}))$ の偏微分は連鎖律によって計算できる．ベクトルを用いて記述すれば

$$\nabla F(\boldsymbol{u}) = \nabla_{\boldsymbol{x}} f\bigl(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{u})\bigr) \cdot \begin{pmatrix} x_u(\boldsymbol{u}) & x_v(\boldsymbol{u}) \\ y_u(\boldsymbol{u}) & y_v(\boldsymbol{u}) \end{pmatrix}$$

とかける．1 変数での合成関数の微分の公式と比べれば，変換 $\boldsymbol{x}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ の微分は行列になると考えられる．

定義 4.2. 2 つの 2 変数関数 $f(x, y)$, $g(x, y)$ を並べたもの $\boldsymbol{F}(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$ を，$\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^2$ への写像という．

定義 4.3. 次の行列 $J_{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{x})$ を，写像 $\boldsymbol{F}$ の **Jacobi 行列**という[*1]．これは導関数の写像版である．

$$J_{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{x}) := \begin{pmatrix} f_x(\boldsymbol{x}) & f_y(\boldsymbol{x}) \\ g_x(\boldsymbol{x}) & g_y(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla f(\boldsymbol{x}) \\ \nabla g(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}.$$

注意 4.4. 極座標変換などの変換は写像の一種である．

例題 4.5. 極座標変換 $\boldsymbol{F}(r, \theta) := (r\cos\theta, r\sin\theta)$ に対し，その Jacobi 行列を求めよ．

注意 4.6. $\det J_{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{x})$ は **Jacobian** と呼ばれ，多変数関数の積分において重要な役割を果たす．例題 4.5 の $\boldsymbol{F}$ では $\det J_{\boldsymbol{F}}(r, \theta) = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r$ となる．

4.2　行列による写像

定義 4.7. A を 2 次正方行列とし，$(a, b) \in \mathbb{R}^2$ とする．このとき，$(x, y) \longmapsto (x, y)A$ を線形写像，$(x, y) \longmapsto (a, b) + (x, y)A$ をアフィン写像という．

「写像」は $\mathbb{R}^2$ 内の図形を変形させる．ここでは，線形写像によって正方形がどのように変形するかを考察する．線形写像は「真っ直ぐなものを真っ直ぐなものにうつす写像」であることを踏まえると，2 点 $(1, 0)$, $(0, 1)$ について調べるだけで十分である．$A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ とすると，

$$(1, 0) \longmapsto (a, b), \quad (0, 1) \longmapsto (c, d)$$

なので，一般には 2 ベクトル (a, b), (c, d) を辺とする「平行四辺形」になる．A を変えることにより，様々な変換を作ることができる．また，この平行四辺形の面積は $|\det A|$ になる．

4.3　逆写像定理

線形 (アフィン) 写像は次の意味で基本的な写像である: $\boldsymbol{F}(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$ において，$f(x, y)$, $g(x, y)$ を平面で近似したものを考えると，

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{h} \cdot {}^t J_{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{a}) + o(\|\boldsymbol{h}\|)$$

となることがわかる．つまり，写像の主要部に，Jacobi 行列を係数行列に持つアフィン写像が現れる．

定理 4.8 (逆写像定理). なめらかな写像 $\boldsymbol{F}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ は，点 $\boldsymbol{a}$ において $J_{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{a}) \neq 0$ であるとする．このとき，
(i) 点 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{a})$ の近くで $\boldsymbol{F}$ の逆写像 $\boldsymbol{F}^{-1}$ が存在する：

$$\boldsymbol{F}^{-1}\bigl(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})\bigr) = \boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{F}\bigl(\boldsymbol{F}^{-1}(\boldsymbol{u})\bigr) = \boldsymbol{u}.$$

(ii) $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ とすれば $\boxed{J_{\boldsymbol{F}^{-1}}(\boldsymbol{u}) = \bigl(J_{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{x})\bigr)^{-1}}$ が成り立つ．

注意 4.9. この定理は 1 変数関数 $y = f(x)$ において，$f'(a) \neq 0$ ならば $x = a$ の近くで逆関数 $x = f^{-1}(y)$ を持つことと対応している．

例題 4.10. $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ のとき，$r_x, r_y, \theta_x, \theta_y$ を求めよ．

(考え方) $(x, y) = \boldsymbol{F}(r, \theta) \Leftrightarrow (r, \theta) = \boldsymbol{F}^{-1}(x, y)$ より，まず $J_{\boldsymbol{F}}(x, y)$ を求め，次にその逆行列を計算する．

4.4　写像の合成

二つの写像 $\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ があったとき，これらを合成して得られる写像 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{u}) := \boldsymbol{F}\bigl(\boldsymbol{G}(\boldsymbol{u})\bigr)$ について考える．$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{u})$ の各成分の関数において，連鎖律を適用することにより，次の結果を得る．

$$J_{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{u}) = J_{\boldsymbol{F}}\bigl(\boldsymbol{G}(\boldsymbol{u})\bigr) \cdot J_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{u}).$$

まとめ (1) 写像の微分は **Jacobi 行列**．(2) 変換における Jacobi 行列の計算では，**逆写像定理**の (ii) が使える．

---

10 月 31 日．

[*1] ドイツの数学者Jacobi（ヤコビ） (1804–1851) に因む．

演習問題 4

問題 1.† 次の変換における Jacobi 行列とその Jacobian を計算せよ．ただし，$\alpha \in \mathbb{R}$ は定数とする．

$$(1)\ \boldsymbol{F}(x,y) = (x,y)\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$
$$(2)\ \boldsymbol{F}(x,y) = (e^x \cos y,\ e^x \sin y)$$
$$(3)\ \boldsymbol{F}(x,y) = (\cosh x \cos y,\ \sinh x \sin y)$$
$$(4)\ \boldsymbol{F}(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2},\ \frac{y}{x^2+y^2}\right)$$

問題 2.† 問題 1 の変換の逆変換に関する Jacobi 行列を求めよ．

問題 3. 2 次正方行列 A とベクトル (a,b) をとる．このとき，アフィン変換に関する Jacobi 行列とその Jacobian を計算せよ．

$$\boldsymbol{F}(x,y) = (a,b) + (x,y)A.$$

問題 4.* 単位正方形を 2 次正方行列 A で変形して得られる平行四辺形の面積が $|\det A|$ になることを示せ．

問題 5.* 単位立方体を 3 次正方行列 A で変形して得られる図形は平行六面体になる．この平行六面体の体積が $|\det A|$ になることを示せ．

行列が出てきたので，関連する話題を少し．2 点 (x_1,y_1), (x_2,y_2) を通る方程式は，行列式の性質を思い出せば，次のように書けることがわかります:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & x_1 & x_2 \\ y & y_1 & y_2 \end{pmatrix} = 0.$$

また，3 点 (x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3) を頂点とする三角形の面積を計算すると，実は

$$\frac{1}{2!}\left|\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}\right|$$

になります．興味がある人は各自確かめてみてください．より一般の n 次の多面体についても同様の公式が成り立ちます．

小レポート

(1) 次の関数の原始関数を一つ求めよ．

$$f_1(x) = \frac{1}{x^2+1},\quad f_2(x) = \frac{2x}{x^2+1},$$
$$f_3(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad f_4(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

(2) $\boldsymbol{F}\colon (r,\theta,\varphi) \longmapsto (x,y,z)$ を空間の極座標変換とする．(i) $\boldsymbol{F}$ の Jacobi 行列 $J_{\boldsymbol{F}}(r,\theta,\varphi)$ とその Jacobian を計算せよ．(ii) $\boldsymbol{F}$ の逆変換 $\boldsymbol{F}^{-1}\colon (x,y,z) \longmapsto (r,\theta,\varphi)$ の Jacobi 行列 $J_{\boldsymbol{F}^{-1}}(x,y,z)$ を求めよ．

注意． (1) f_2 以外は逆三角関数，双曲線関数に関する積分である．(2) (ii) $J_{\boldsymbol{F}}(r,\theta,\varphi)$ の逆行列を計算すればよいが，各成分が関数なので，余因子を用いる計算法が有効である．検算を忘れずに．

小レポートについて． 次回の講義の際に提出すること．原則として期限を過ぎての提出は認めないが，やむを得ない事情がある際は，必ずその旨を**期限日までにメールにより**連絡すること．