2020 年度　名古屋大学

理系基礎科目（文系） 数学入門
第 4 回小テスト・解答

講義担当者：中島秀斗

問題 4.1

ある点において微分可能であるが，その点で連続でないような関数が存在する．

解：誤り

関数がある点で微分可能ならば，その点において必ず連続になる．

問題 4.2

次の等式は正しいか．$\left((x^4+2x+1)^3\right)' = 3(x^4+2x+1)$

解：誤り

$u = x^4+2x+1$ とすれば，$(u^3)' = 3u^2 \cdot u' = 3(4x^2+2)(x^4+2x+1)^2$.

問題 4.3

次の等式は正しいか．$\left((x^2+1)(x^2-4)\right)' = 4x^3-6x$

解：正しい

$u = x^2+1$, $v = x^2-4$ として積の微分を行えば，$u' = 2x$, $v' = 2x$ なので，$(uv)' = 2x(x^2-4)+(x^2+1)\cdot 2x = 2x(2x^2-3) = 4x^3-6x$.

問題 4.4

次の等式は正しいか．$\left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \dfrac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1}$

解：正しい

有理数 p に対して，$\left(x^p\right)' = px^{p-1}$ が成り立つ (第 4 回ノートの最後を参照のこと).

問題 4.5

次の等式は正しいか．$\left(\dfrac{3x}{x^2-9}\right)' = \dfrac{9x^2-27}{(x^2-9)^2}$

解：誤り

$f(x) = 3x$, $g(x) = x^2-9$ とおいて分数関数の微分を行えば，$f'(x) = 3$, $g'(x) = 2x$ であることより

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} = \frac{3(x^2-9)-3x\cdot 2x}{(x^2-9)^2} = \frac{-3x^2-27}{(x^2-9)^2}.$$

質問への回答

質問 スライドの 8 ページ目〜11 ページ目に書かれている微分不可能な関数の例について、微分不可能な理由の説明がよく理解できませんでした。「微分係数を定める極限」とはどういうことでしょうか。

回答 ある関数が点 $x=a$ で微分可能である，とは次の極限

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

が収束すること，として定義しています．この極限が「微分係数を定める極限」です．関数の極限が収束するとはどのような近づけ方をしても同一の値に近づくということなので，異なる近づけ方（この例では右からと左から）をしたときに異なる値に近づく，または発散するのであれば，極限は収束しないということになります．

第 1 回レポートについて

- **第 1 回分レポート問題**

全体的に良くできていました．ただ，問題 1-4 の $(a),(b)$ は $y=\cdots$ の形にできていないものも見受けられました．$y=x^2$ とすれば両辺は非負なので，両辺の根号を取れば $\sqrt{y}=\sqrt{x^2}=|x|$ となる．ここで $x\geqq 0$ ならば $|x|=x$ であるし，$x\leqq 0$ ならば $|x|=-x$ なので，それぞれ

$$(a)\quad \sqrt{y}=x,\qquad (b)\quad \sqrt{y}=-x$$

となる．したがって，ここで x,y の記号を入れ替えて

$$(a)\quad y=\sqrt{x},\qquad (b)\quad y=-\sqrt{x}.\quad \square$$

- **第 2 回分のレポート問題**

全体的に良くできていました．問題 2-6 の解答だけ載せておきます．$a_n=\frac{r^n}{1+r^n}$ とおく．$r=1,\ |r|<1$ および $|r|>1$ の 3 つに場合を分ける．$r=1$ のときは $r^n=1$ なので $a_n=\frac{1}{2}$ である．$|r|<1$ ならば，$n\to\infty$ のとき $r^n\to 0$ および $1+r^n\to 1$ であるので，$a_n\to 0$ である．$|r|>1$ のとき，$a_n=\frac{1}{(\frac{1}{r})^n+1}$ とかけること，および $n\to\infty$ のとき $(\frac{1}{r})^n\to 0$ となることより，$a_n\to 1$ となる．　$\square$

- **第 3 回分のレポート問題**

よくできていました．問題 3-4 は若干問題の不備がありました．問題文としては，「$f(0)$ の値を適切に定めることにより，関数 $f(x)$ を $x=0$ で連続にできるか」とするのが適切でした．なお，右極限，左極限が片方，あるいはどちらも $+\infty$（または $-\infty$）であるときは，関数 f のその点における値をどのように定義しても $+\infty$ にはできないので，この場合は連続になることはありません．