6 条件付き極値問題

6.1 平面曲線

定義 6.1. なめらかな 2 変数関数 $f(x,y)$ の零点全体の集合 $N_f := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ f(x,y) = 0\}$ は xy 平面上の曲線を描く．これを f が定める**平面曲線**という．

例． (1) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ ならば，$f(x,y) = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$ なので，N_f は単位円になる．(2) $g(x,y) = x^2 + y^2 + 1$ ならば，$g(x,y) = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = -1$ なので，$N_g = \emptyset$ (空集合).

定義 6.2. (1) $\nabla f(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$，つまり $f_x(\boldsymbol{a}) = f_y(\boldsymbol{a}) = 0$ をみたす N_f 上の点を，N_f の**特異点**という．これは f の停留点のうち，$f(\boldsymbol{a}) = 0$ をみたすものである．(2) 特異点でない N_f 上の点を非特異点という．

$\boldsymbol{a}$ を N_f の特異点とすると，$f(\boldsymbol{a}) = 0$ かつ $\nabla f(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$ である．このとき，f の Taylor 展開を考えれば

$$f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) = (h_1, h_2)\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + o(\|\boldsymbol{h}\|^2)$$

となる．これより特異点の近くでの曲線 N_f の振る舞いは $H_f(\boldsymbol{a})$ を調べることでわかる．

定理 6.3. $\boldsymbol{a}$ を N_f の特異点とする．(1) $\det H_f(\boldsymbol{a}) > 0$ ならば点 $\boldsymbol{a}$ は N_f の中で孤立している．これを**孤立点**という．(2) $\det H_f(\boldsymbol{a}) < 0$ ならば，点 $\boldsymbol{a}$ の近くで N_f は 2 本の曲線であって，点 $\boldsymbol{a}$ で交わる．これを**結節点**という．(3) $\det H_f(\boldsymbol{a}) = 0$ のときは何もわからない．

例題 6.4. 次の関数が定める平面曲線の特異点を求め，その特異点の種類を答えよ．

$$f(x,y) = y^2 - x^3 + x^2, \quad g(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

(考え方) 特異点は f の停留点であって f の零点になる点であるので，まず $f_x = f_y = 0$ かつ $f = 0$ となる点を探し，次に $H_f(\boldsymbol{a})$ の正負を調べる．解答略．
(コメント) (1) は楕円曲線と呼ばれる曲線の一種であり，(2) はDescartes（デカルト）の正葉線と呼ばれる (次ページ参照).

6.2 陰関数定理

$f(x,y) = 0$ において，x を一つ決めると y も決まる．このように，$f(x,y) = 0$ から定まる関数を陰関数という．ただし，一般には一つの x に対して決まる y は複数個存在することもあれば，1 つも存在しないときもある．逆に $y = f(x)$ とかけるものを陽関数という．

例． $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ のとき，陰関数 $f(x,y) = 0$ は $y = \pm\sqrt{1-x^2}$ のように (2 つの) 陽関数として表せる．しかし，点 $(1,0)$ の近くでは陽関数の形で表せない．

定理 6.5 (陰関数定理)**.** $f(x,y)$ はなめらかとし，$f(a,b) = 0$ を満たすとする．もし $f_y(a,b) \neq 0$ ならば，ある関数 $y = \varphi(x)$ が一意的に存在して，(1) $\varphi(a) = b$, (2) $x = a$ の近くで $f(x, \varphi(x)) = 0$, (3) $x = a$ の近くで φ はなめらかで $\varphi'(x) = -\dfrac{f_x(x,\varphi(x))}{f_y(x,\varphi(x))}$.

6.3 $\mathbb{R}^2$ の集合について

定義 6.6. (1) $B(\boldsymbol{a};r) := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2;\ \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\| < r\}$ を開円板という (境界を含まない). (2) $\overline{B}(\boldsymbol{a};r) := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2;\ \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\| \leq r\}$ を閉円板という (境界を含む).

定義 6.7. $A^c := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2;\ \boldsymbol{x} \notin A\}$ を A の補集合.

定義 6.8. 集合 $A \subset \mathbb{R}^2$ に対して，(1) $B(\boldsymbol{x};\delta) \subset A$ となる正数 $\delta > 0$ が存在するような点 $\boldsymbol{x} \in A$ を A の**内点**といい，(2) A の補集合 A^c の内点を A の**外点**という．(3) A の内点でも外点でもない点を**境界点**という．その全体の集合を ∂A と書き，**境界**という．

定義 6.9. (1) 集合 $A \subset \mathbb{R}^2$ の任意の点が内点であるとき A を**開集合**という．(2) A の補集合 A^c が**開集合**であるとき，A を閉集合という．

例． (1) $B(\boldsymbol{a};r)$ は開集合，$\overline{B}(\boldsymbol{a};r)$ は閉集合．(2) 連続関数 $f(x,y)$ に対して，$A := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2;\ f(\boldsymbol{x}) \neq 0\}$ は開集合，$B := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2;\ f(\boldsymbol{x}) = 0\}$ は閉集合.

命題 6.10. (1) 開集合 O に対して，$O \cap \partial O = \emptyset$.
(2) 閉集合 C に対して，$\partial C \subset C$.

定義 6.11. 集合 A に対して，ある正数 $R > 0$ が存在して $A \subset B(\boldsymbol{0};R)$ となるとき，A は**有界**であるという．

定理 6.12. 連続関数 $f(x,y)$ は，有界閉集合上で必ず最大値と最小値をとる．

まとめ (1) 平面曲線の**特異点**について．(2) **陰関数定理**は，陰関数 $f(x,y) = 0$ を局所的に陽関数 $y = \varphi(x)$ と表せることを保証してくれる．(3) 集合の内点・外点・境界および開集合・閉集合の定義．(4) **連続関数は有界閉集合において必ず最大値と最小値を持つ．**

---

11 月 14 日.

演習問題 6

問題 1.† 次の平面曲線の特異点を求めよ．

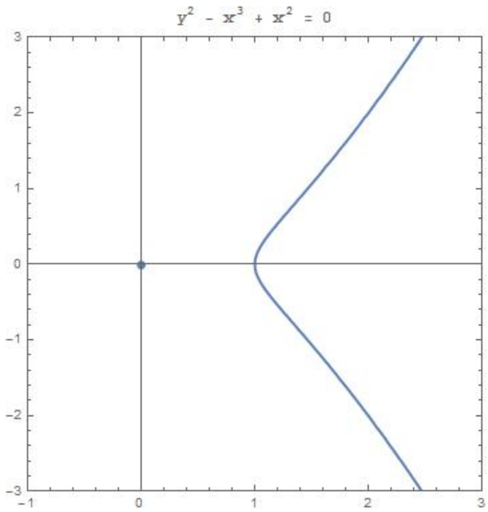
(1) $x^4 - 4xy + y^4 = 0$
(2) $2x^3 + 2y^3 - 3x^2 - 3y^2 + 1 = 0$
(3) $y^2 + xy - x^3 = 0$
(4) $y^4 - y^2 + x^2 = 0$

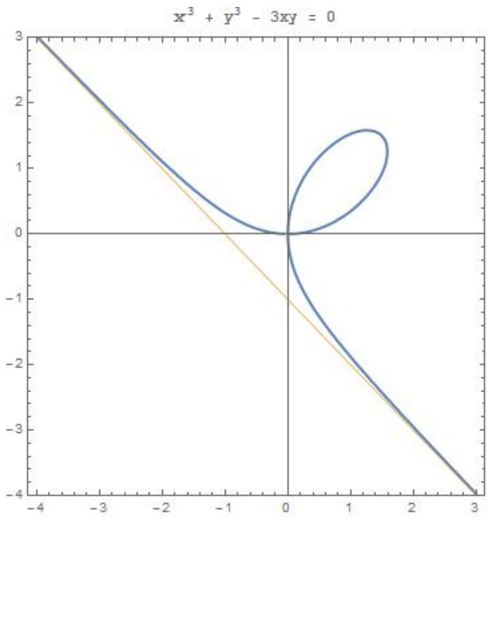
問題 2. 次の集合について，次の問いに答えよ．(i) 開集合になるか，閉集合になるか，あるいはどちらでもないか答えよ．(ii) その境界を求めよ．

(1)† $A_1 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2;\ \begin{array}{c} 0 < x < 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{array} \right\} \subset \mathbb{R}^2$

(2)† $A_2 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq 1 \right\} \subset \mathbb{R}^2$

(3)* $A_3 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{Q}^2;\ \begin{array}{c} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{array} \right\} \subset \mathbb{R}^2$





小レポート

(1) 次の関数の原始関数を一つ求めよ．

$$f_1(x) = \frac{1}{x^2-1}, \quad f_2(x) = \frac{1}{x^4-1},$$
$$f_3(x) = \frac{1}{(x+1)(x^2-1)}, \quad f_4(x) = \frac{1}{x^3-1}.$$

(2) 次の関数が定める平面曲線の特異点を求め，その特異点の種類を答えよ．

(i) $f(x,y) = x^2 - y^2(y+1)$
(ii) $g(x,y) = x^2 - y^4 + 2y^2 - 1$

注意． (1) 部分分数分解．f_4 は部分分数分解の後で $\frac{ax+b}{x^2+x+1}$ の積分に帰着される．これを $\frac{2x+1}{x^2+x+1}$ と $\frac{1}{x^2+x+1} = \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$ に分解し，後者は $x+\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}u$ と変数変換する．(2) 特異点は一つだけとは限らない．

小レポートについて． 次回の講義の際に提出すること．原則として期限を過ぎての提出は認めないが，やむを得ない事情がある際は，必ずその旨を**期限日までにメールにより**連絡すること．

今日の講義を踏まえると，簡単な平面曲線ならばグラフの概形を描くことができます．まず特異点を調べ，結節点ならばそこでの接線を求め，次に水平点 ($f_x = 0$ となる曲線上の点) と垂直線 ($f_y = 0$ となる曲線上の点) を調べる．これだけでも十分に概形を捉えることができます．さらに $x \to +\infty$ のときにどのような振る舞いをするか (漸近曲線という) ということも調べると，よりそれらしくなります．例えば例題で扱った次の平面曲線

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy = 0$$

について考えます．特異点を求めると，原点のみであり，そこでは $H_f(\mathbf{0}) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ なので，原点は結節点．ここでの接線は $x = 0$ と $y = 0$ で，水平点は $(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$，垂直点は $(\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2})$．また，少し難しいので割愛しますが，$x \to \pm\infty$ のとき，この曲線は直線 $x + y = -1$ を漸近線に持ちます．これより，この平面曲線は左図 (下) の形になることがわかります．

参考文献．斎藤正彦,「微分積分教科書」, 東京図書.