線形代数学・同演習 B

演習問題 3

1. (1) 基底をなす (2) 基底にならない
(考え方) 与えられたベクトルを並べた行列が正則かどうか調べる．正則ならば基底をなし，そうでないならば基底になれない．

2. (1) 略．(2) $\dim V = 3$ (自由に動けるパラメータは 3 つなので)．自然な基底は $x, y, 1$．(3) $f_1(x,y) = -x-y+1$, $f_2(x,y) = x$, $f_3(x,y) = y$ とすればよい．

3.[†] (1) 基底になる．(2) 基底にならない．
(考え方) 係数を並べた行列が正則かどうかで判断できる．

4.[†] (1) $\mathrm{Sym}(n,\mathbb{R})$ は n 次正方行列のなすベクトル空間の部分集合であるため，$O \in \mathrm{Sym}(n,\mathbb{R})$ (O は零行列) および $X, Y \in \mathrm{Sym}(n,\mathbb{R})$ のとき $\lambda X + \mu Y \in \mathrm{Sym}(n,\mathbb{R})$ となることを確認する．(2) $\dim \mathrm{Sym}(n,\mathbb{R}) = \frac{n(n+1)}{2}$．(3) E_{ii} $(i = 1, \ldots, n)$ および $E_{ij} + E_{ji}$ $(1 \le i < j \le n)$

5.[†] (1) $\begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} a \\ b-a \\ c-b \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 3a-2b-c \\ -2a+2b+c \\ -a+b+c \end{pmatrix}$
(考え方) (3) を例に説明する．$[q_1(x), q_2(x), q_3(x)] = [x^2, x, 1] \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ なので

$$[x^2, x, 1] = [q_1(x), q_2(x), q_3(x)] \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = [q_1(x), q_2(x), q_3(x)] \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

よって，$ax^2 + bx + c = [x^2, x, 1] \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = [q_1(x), q_2(x), q_3(x)] \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

6.[*] (1) ベクトル空間になるための条件 (教科書 p.63 の脚注) は，考えている空間が複素数なので当然全て成り立つ．ただし，(4)-(6) の a, b は実数だけを考えていることに注意．任意の複素数は $x + yi$ (i は虚数単位) と書けるので $\dim \mathbb{C} = 2$.
(2) $\mathbb{R}$ が $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間になることも (1) と同様である．その次元が無限次元になることは，背理法によって示せる．仮に有限次元になると仮定すると，ある自然数 n に対して $\pi^n, \ldots, \pi, 1$ が線形従属になってしまうが，それは適当な有理数係数 $a_0, \ldots, a_n$ により $a_n\pi^n + \cdots + a_1\pi + a_0 = 0$ となることを意味する．これは $x = \pi$ が多項式 $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ の零点になることを表しているが，この結果は π の超越性に反する．よって，$\mathbb{R}$ は “$\mathbb{Q}$ 上の” ベクトル空間としては無限次元でなければならない．

---

10 月 24 日分 (凡例：無印は基本問題，† は特に解いてほしい問題，$*$ は応用問題)
講義用 HP: http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~h-nakashima/lecture/2017LA.html