線形代数学・同演習 B

11 月 8 日分　演習問題[*1]

1.[†] (1) 各 j に対して, $\boldsymbol{v}_j \in \operatorname{Im} T$ であるので, その定義より U のある要素 $\boldsymbol{u}_{r+j}$ で $T(\boldsymbol{u}_{r+j}) = \boldsymbol{v}_j$ となるものが存在する．ここで，$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_s$ は基底であるので，どれも $\mathbf{0}_V$ にはならない．つまり，$T(\boldsymbol{u}_{r+j}) \neq \mathbf{0}_V$ であるので，$\boldsymbol{u}_{r+j} \notin \operatorname{Ker} T$ である．(2) $\boldsymbol{u}$ を U の任意の要素とする．まず，$T(\boldsymbol{u})$ を考えると，これは $\operatorname{Im} T$ に属しているので，$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_s$ の線形結合で表すことができる．つまり $\boldsymbol{u} = b_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + b_s\boldsymbol{v}_s$ と表すことができる．さて，ここで $\widetilde{\boldsymbol{u}} := \boldsymbol{u} - b_1\boldsymbol{u}_{r+1} - \cdots - b_s\boldsymbol{u}_{r+s}$ という U の要素を考える．これを T でうつすと,

$$T(\widetilde{\boldsymbol{u}}) = T(\boldsymbol{u}) - (b_1T(\boldsymbol{u}_{r+1}) + \cdots + b_sT(\boldsymbol{u}_{r+s})) = \mathbf{0}_V$$

であるので，$\widetilde{\boldsymbol{u}} \in \operatorname{Ker} T$ となる．つまり，$\widetilde{\boldsymbol{u}} = a_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + a_r\boldsymbol{u}_r$ と書くことができる．以上より,

$$\boldsymbol{u} = a_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + a_r\boldsymbol{u}_r + b_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + b_s\boldsymbol{v}_s$$

となるので，U の任意の要素はこれらの線形結合で書ける．(3) $\boldsymbol{u}' = a_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + a_r\boldsymbol{u}_r + b_1\boldsymbol{u}_{r+1} + \cdots + b_s\boldsymbol{u}_{r+s}$ とし，方程式 $\boldsymbol{u}' = \mathbf{0}_U$ を考える．$\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_r$ は $\operatorname{Ker} T$ の基底であること，および線形写像は零元を零元にうつすことより,

$$\mathbf{0}_V = T(\boldsymbol{u}') = b_1T(\boldsymbol{u}_{r+1}) + \cdots + b_sT(\boldsymbol{u}_{r+s}) = b_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + b_s\boldsymbol{v}_s$$

であるが，$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_s$ は $\operatorname{Im} T$ の基底なので，これを満たす $(b_1, \ldots, b_s)$ は $(0, \ldots, 0)$ しかありえない．よって $\boldsymbol{u}' = a_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + a_r\boldsymbol{u}_r$ であり特に $\boldsymbol{u}' \in \operatorname{Ker} T$ であるが，今度は $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_r$ が $\operatorname{Ker} T$ の基底であるため，$a_1 = \cdots = a_r = 0$ を得る．よって，$\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_{r+s}$ は線形独立となる.

2.[†] いずれの場合も $T(\mathbf{0}_U) = \mathbf{0}_V$ より，零元を持つことが分かる．また，$\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ としておく．(1) $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2} \in \operatorname{Im} T$ とする．このとき，U のある要素 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ を用いて $\boldsymbol{v}_1 = T(\boldsymbol{u}_1)$, $\boldsymbol{v}_2 = T(\boldsymbol{u}_2)$ とかけるが, $T(\lambda\boldsymbol{u}_1 + \mu\boldsymbol{u}_2) = \lambda\boldsymbol{v}_1 + \mu\boldsymbol{v}_2$ であるので, $\lambda\boldsymbol{v}_1 + \mu\boldsymbol{v}_2 \in \operatorname{Im} T$ となる．よって部分空間となる．(2) $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}' \in \operatorname{Ker} T$ とすると，$T(\lambda\boldsymbol{u} + \mu\boldsymbol{u}') = \lambda T(\boldsymbol{u}) + \mu T(\boldsymbol{u}') = \mathbf{0}_V$ であるので，$\lambda\boldsymbol{u} + \mu\boldsymbol{u}' \in \operatorname{Ker} T$，つまり部分空間となる.

3. 与えられた行列を簡約化すれば，それぞれ次のようになる．(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (5) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (6) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 余白の都合で次ページへ.

4. (1) ◯ (2) × (3) ◯ (4) ◯ (5) ◯ (6) ×

5.[†] (1) $h(x) = \lambda p(x) + \mu q(x)$ (p, q は多項式) とおいて，$T(h(x)) = \lambda T(p(x)) + \mu T(q(x))$ を満たすことを確認すればよい．(2) 退化次元は 1，階数は 3 (3) $1, x, x^2$($-3, 3-2x, -3+6x-x^2$ でもよい)

[*1] 凡例：無印は基本問題，† は特に解いてほしい問題，∗ は応用問題.

	(a)		(b)	
(1)	1	$\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$	2	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$
(2)	1	$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	2	$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
(3)	2	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$	2	$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$
(4)	1	$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	3	$\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$
(5)	2	$\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	2	$\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
(6)	2	$\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	3	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$