

線形代数学・同演習 A

演習問題 10

1. (1) 1 (2) 5 (3) 19 (4) -8 (5) 100 (6) -40

2.[†] (1) 17 (2) 64 (3) 52

3.[†] (1) -6 (2) 6 (3) 0 (4) 6

(2) は 2 列目と 4 列目および 2 行目と 4 行目を入れ替えるとよい。(3) は 2 5 行目から 1 行目を引けば $(5, 5, 5, 5, 5)$ のベクトルの定数倍が並んでいることが分かる。よって $\det = 0$ 。(4) は行 (もしくは列) 基本変形を繰り返す。

4. (i) $\det A = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) = a^3+b^3+c^3-3abc$, $\det W = -3\sqrt{3}i$
(ii) ω は 1 の三乗根であることに注意すると, 例えば AW の 2 列目は

$$\begin{pmatrix} a+b\omega+c\omega^2 \\ c+a\omega+b\omega^2 \\ b+c\omega^2+a\omega \end{pmatrix} = (a+b\omega+c\omega^2) \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \\ \omega^2 \end{pmatrix}$$

となる。行列式は 1 次同次なので,

$$\det(AW) = (a+b+c)(a+b\omega+c\omega^2)(a+b\omega^2+c\omega)\det(W)$$

となる。あとは行列式の積公式を使えば, $\det(W) \neq 0$ であるので, 与式を得る。