・10 月 18 日分　大問 1 の解説.

集合の扱いに関して説明が不十分だったようなので，ここで補足をしておきます.

まず，$W = \{x \in V\,;\, x$ に関する条件 $\}$ と書けば，これは “その条件をみたすような V の要素全体からなる集合” を表します.

例 1. $W_1 = \{n \in \mathbb{Z};\, n$ は偶数 $\}$ とすれば，W は偶数からなる集合.

例 2. $W_2 = \{m \in \mathbb{Z};\, |m| < 10\}$ とすれば，これは絶対値が 10 未満の整数の集合，つまり $\{0, \pm1, \ldots, \pm10\}$ を表す.

これらの例において，‘$n \in \mathbb{Z}$’ や ‘$m \in \mathbb{Z}$’ と書いていますが，この n や m という記号は，いわゆるダミー変数で，条件を記述するために用意するものです．例えば W_2 なら，$W_2 = \{$ 整数のうち，絶対値が 10 未満のもののなす集合 $\}$ と書いてもいいわけですが，数式を用いるほうが直感的にわかりやすいので，このような表記を用いています.

(1) $W_1 = \{(y, ay)\,;\, y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$　(a は定数)

$(x,\, ax)$，$(y,\, ay) \in W_1$ とする[*1]．このとき，この二つの要素の線形結合は

$$\lambda(x,\, ax) + \mu(y,\, ay) = (\lambda x + \mu y,\, a(\lambda x + \mu y)) \in W_1.$$

また，明らかに $(0,\, 0) \in W_1$ なので，W_1 は $\mathbb{R}^2$ の部分空間になる.

(2) $W_2 = \{(x,\, x^2)\,;\, x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$

$(x,\, x^2)$，$(y,\, y^2) \in W_2$ とすると，この二つの要素の和は

$$(x,\, x^2) + (y,\, y^2) = (x + y,\, x^2 + y^2)$$

であるが，これは $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \neq x^2 + y^2$ であるので，W_2 の要素にはなれない．つまり，W_2 は $\mathbb{R}^2$ の部分空間ではない.

(3) $W_3 = \{f \in C(\mathbb{R})\,;\, f(x) + f(x)^2 = 0\}$

$f, g \in W_3$ とする．つまり，$f(x) + f(x)^2 = 0,\ g(x) + g(x)^2 = 0$ を満たすとする．このとき，$f + g$ について考えると，

$$(f(x) + g(x)) + (f(x) + g(x))^2 = (f(x) + f(x)^2) + (g(x) + g(x)^2) + 2f(x)(g) = 2f(x)g(x).$$

ここで，例えば $f_1(x) = -1\ (\forall x)$ とすれば，$f_1(x) + f_1(x)^2 = 0$ であるので $f_1 \in W_3$ となるが，上式において $f = f_1,\, g = g_1$ としてみれば $f + g = 2f_1^2 = 2 \neq 0$ となるため，$f + g$ は W_3 の要素にはなれない．よって W_3 は $C(\mathbb{R})$ の部分空間ではない．(実は $W_3 = \{f_0(\text{零関数}), f_1\}$ である．)

(4)* $W_4 = \{g \in C(\mathbb{R})\,;\, \int_{\infty}^{\infty} |g(x)|\,dx < \infty\}$

$f, g \in W_4$ とする．つまり，$\int_{\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx < \infty,\, \int_{\infty}^{\infty} |g(x)|\,dx < \infty$ である．このとき，絶対値の三角不等式より $|\lambda f(x) + \mu g(x)| \leq |\lambda||f(x)| + |\mu||g(x)|$ が成り立つので，

$$\int_{\infty}^{\infty} |\lambda f(x) + \mu g(x)|\,dx \leq \int_{\infty}^{\infty} \bigl(|\lambda||f(x)| + |\mu||g(x)|\bigr)\,dx = |\lambda| \int_{\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx + |\mu| \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|\,dx < \infty$$

となる．また，明らかに $\int_{\infty}^{\infty} |f_0(x)|\,dx = 0 < \infty$ なので W_4 は零元 f_0 も持つ．よって W_4 は $C(\mathbb{R})$ の部分空間になる.

[*1] W_1 の定義式の y はダミー変数なので，実際に W_1 の要素を持ってくるときは y でなくてもよい.