演習問題 7

問題 1. Lagrange の未定乗数法を用いる．条件を与える曲線の特異点を調べることを忘れずに．条件を与える関数を $g(x,y)$，極値を考える関数を $f(x,y)$ とおく．

(1) $g(x,y)=x^2+y^2-6$ であるが，$g(x,y)=0$ は円なので特異点を持たない．さて，$F(x,y):=f(x,y)-\lambda g(x,y)$ とおくと，

$$
\begin{aligned}
&F_x = 4x^3-4y-4x-2\lambda x=0,\\
&F_y = 4y^3-4x-4y-2\lambda y=0,\\
&F_\lambda = -(x^2+y^2-6)=0
\end{aligned}
$$

である．このままだとうまく解けないので，$F_x+F_y=0$ および $F_x-F_y=0$ として考える．

$$
\begin{aligned}
&F_x+F_y = 2(x+y)\{2(x^2-xy+y^2)-4-\lambda\}=0\\
&F_x-F_y = 2(x-y)\{2(x^2+xy+y^2)-\lambda\}=0
\end{aligned}
$$

これより① $x=y$, ② $x=-y$, ③ $2(x^2-xy+y^2)-4-\lambda$ かつ $2(x^2+xy+y^2)-\lambda$, となる．①のときは候補点 $A^\pm=\pm(\sqrt{3},\sqrt{3})$，②のときは候補点 $B^\pm=\pm(\sqrt{3},-\sqrt{3})$，③のときは候補点 $C^\pm=\pm(\sqrt{2}+1,-\sqrt{2}+1)$ および $D^\pm=\pm(\sqrt{2}-1,-\sqrt{2}-1)$ を得る．これの値を円周上に書き込めば極値を判定できる．点 $A^\pm$ で極小値 -6，点 $B^\pm$ で極小値 18，点 $C^\pm$ および $D^\pm$ で極大値 26 をとる．

コメント． ③では，まず $xy=-1$ となることを導き，これを $x^2+y^2=6$ に代入して値を求める．値の計算において，$f(x,y)=(x^2+y^2)^2-2(x^2+y^2)-2xy(xy+2)$ と変形すると計算がしやすい．

(2) $g(x,y)=x^3+y^3-3xy$ であるが，平面曲線 N_g の特異点は例題 6.4 より原点 $O=(0,0)$ のみ．さて，$F(x,y)=f(x,y)-\lambda g(x,y)$ のとき，

$$
\begin{aligned}
&F_x = y-\lambda(3x^2-3y),\\
&F_y = x-\lambda(3y^2-3x),\\
&F_\lambda = -(x^3+y^3-3xy)=0
\end{aligned}
$$

である．$\lambda\neq 0$ かどうかで場合を分ける．$\lambda=0$ のときは $x=y=0$ となり，これは原点である．$\lambda\neq 0$ のとき，

$$
\frac{1}{\lambda}=3\cdot\frac{x^2-y}{y}=3\cdot\frac{y^2-x}{x}
$$

であるので，式を整理すれば $x^3-y^3=0$，すなわち $x=y$ を得る．このとき

$$
0=2x^3-3x^2=x^2(2x-3)
$$

より，$x=0,\frac{3}{2}$ となるので，原点と $A=(\frac{3}{2},\frac{3}{2})$ の 2 点を候補点として得る．さて，$f(0,0)=0$ であるが，原点の近くにおいて曲線 N_g は第 1 象限と第 2,4 象限の方向に続いていく．第 1 象限では f は正，第 2,4 象限で f は負であるので，原点は極値にはなれない．一方，点 A で極大値 $\frac{9}{4}$ をとることは図を書いて確認できる．

(3) $g(x,y)=(x^2+y^2)^2-2(x^2-y^2)$ であるが，$g_x=4x(x^2+y^2-1)$, $g_y=4y(x^2+y^2+1)$ なので，特異点は原点 O のみである (候補点として $\pm(1,0)$ も現れるが，これは曲線上にない)．さて，$F(x,y)=f(x,y)-\lambda g(x,y)$ のとき，

$$
\begin{aligned}
&F_x=y-\lambda\cdot 4x(x^2+y^2-1)=0,\\
&F_y=x-\lambda\cdot 4y(x^2+y^2+1)=0,\\
&F_\lambda=-\{(x^2+y^2)^2-2(x^2-y^2)\}=0
\end{aligned}
$$

である．$\lambda\neq 0$ かどうかで場合を分ける．$\lambda=0$ のときは $x=y=0$ となり，これは原点である．$\lambda\neq 0$ のとき，

$$
\frac{1}{\lambda}=4x\cdot\frac{x^2+y^2-1}{y}=4y\cdot\frac{x^2+y^2+1}{x}
$$

であるので，式を整理すれば

$$
x^4-x^2-y^4-y^2=(x^2;y^2)(x^2-y^2-1)=0
$$

となる．原点は除去してよいので (原点はすでに候補に上がっている)，$x^2=y^2+1$ である．このとき

$$
(2y^2+1)^2=2 \quad\Leftrightarrow\quad y^2=\frac{\sqrt{2}-1}{2},\quad x^2=\frac{\sqrt{2}+1}{2}
$$

となるので, 候補点 $A^{\pm}=\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}},\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\right)$ および $B^{\pm}=\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}},-\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\right)$ を得る．(2) と同じ理由により原点 O は極値にならない．また，f は点 $A^{\pm}$ で極大値 $\frac{1}{\sqrt{2}}$, 点 $B^{\pm}$ で極小値 $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ をとる．

問題 2. 内部と境界とに場合を分けて考える．

(1) 問題の f は $f(x,y)=x^4+y^4-4xy-2x^2-2y^2$ としてください．まず内部について考える．$f(x,y)$ の停留点は $(x,y)=(0,0),\pm(\sqrt{2},\sqrt{2})$ の三点で，それぞれ $f(0,0)=0$, $f(\pm(\sqrt{2},\sqrt{2}))=8$ となる．次に境界の場合であるが，一部は既に問題 1 の (1) で求めている．それは $A+,B^+,C^+,D^+$ で，それぞれ $f(A^+)=-6$, $f(B^+)=18$, $F(C^+)=f(D^+)=26$ である．残るは y 軸上の線分である．$h(y):=f(0,y)=y^4-2y^2$ $(-\sqrt{6}\leq y\leq\sqrt{6})$ の最大最小を考えると，$y=\pm\sqrt{6}$ で最大値 24，$y=\pm 1$ で最小値 -1 をとる．以上をまとめれば，f はこの領域上におい

て，$(x,y)=(\sqrt{2},\sqrt{2})$ で最小値 -8 を取り，$(x,y)=(\sqrt{2}+1,-\sqrt{2}+1)$ および $(\sqrt{2}-1,-\sqrt{2}-1)$ で最大値 26 をとる．

(2) まず f の停留点を求める．$f_x=3x^2$, $f_y=3y^2$ なので停留点は原点のみであり，そこでの値は $f(0,0)=0$ である．次に条件を与える曲線の特異点を求める．$g_x=2x$, $g_y=4y^3-2y$ なので候補点は $(0,0)$, $\pm(0,\frac{1}{\sqrt{2}})$ の 3 点．この内で曲線上にあるのは原点のみなので，特異点も原点のみ．さて，ここで Lagrange の未定乗数法を用いる．$F(x,y)=f(x,y)-\lambda g(x,y)$ とすれば

$$\begin{aligned}
&F_x=3x^2-2\lambda x=0,\\
&F_y=3y^2-2\lambda(2y^3-y)=0,\\
&F_\lambda=-(y^4-y^2+x^2)=0.
\end{aligned}$$

まず $(x,y)\neq(0,0)$ と仮定する．このとき

$$\lambda=\frac{3x}{2}=\frac{3y}{4y^2-2}$$

となるので $x=\frac{y}{2y^2-1}$ となる．これを $g(x,y)=0$ に代入してみると，実数解を持たないことが分かる．次に $x=0$, $y\neq0$ とする．このとき，条件は $y=\pm1$ となるが ($y=0$ は除外できる)，$\lambda=\pm\frac{3}{2}$ とすれば $F_x=F_y=F_\lambda=0$ となるので，$(x,y)=\pm(0,1)$ が候補点を与える．このとき $f(\pm(0,1))=\pm1$ である．最後に $x\neq0$ かつ $y=0$ とすると，条件は $x=0$ となるので不適．以上より，調べるべきものは全て調べたので最大値・最小値を決定できる．f は領域 $y^4-y^2+x^2\leq0$ において，$(x,y)=(0,1)$ において最大値 1 を取り，$(x,y)=(0,-1)$ において最小値 -1 を取る．

(3) まず f の停留点を求める．$f_x=y$, $f_y=x$ なので停留点は原点のみで，このとき $f(0,0)=0$ である．次に境界の特異点を調べるが，今の場合は楕円なので，特異点はない．Lagrange の未定乗数法を用いる．$F(x,y)=f(x,y)-\lambda g(x,y)$ とすれば

$$\begin{aligned}
&F_x=y-\tfrac{2\lambda x}{9}=0,\\
&F_y=x-\tfrac{2\lambda y}{4}=0,\\
&F_\lambda=-(\tfrac{x^2}{9}+\tfrac{y^2}{4}-1)=0.
\end{aligned}$$

今の場合は $F_x=F_y=0$ の方程式は次の連立 1 次方程式である：

$$\begin{pmatrix}\frac{-9\lambda}{2} & 1\\ 1 & \frac{-\lambda}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}.$$

これが $(x,y)=(0,0)$ 以外の解を持つためには，係数行列の行列式が 0 であることが必要十分である．それは $\lambda=\pm3$ のときである．さて，このとき上の連立

方程式の解を求めると，$(x, y) = s(3, \pm 2)$ (s はパラメータ) である．これが楕円 N_g 上にあるので，$s = \frac{\pm 1}{\sqrt{2}}$ である．これより候補点は $A^{\pm} = \pm\left(\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{2}{\sqrt{2}}\right)$ および $B^{\pm} = \pm\left(\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{-2}{\sqrt{2}}\right)$ となる．それぞれにおける f の値は，$f(A\pm) = 3$, $f(B^{\pm}) = -3$ である．以上により，調べるべきものはすべて調べたので最大値・最小値を決定できる．f は領域 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1$ において，$(x, y) = \pm\left(\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{2}{\sqrt{2}}\right)$ において最大値 3 を取り，$(x, y) = \pm\left(\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{-2}{\sqrt{2}}\right)$ において最小値 -3 を取る．

小レポート 7

(1) 積分区間内に不連続点があればそこで分割して考える．積分区間が無限ならば，まず有界であるところで考えて，そのあと極限を取る．

(i) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{\boldsymbol{dx}}{\sqrt{|\boldsymbol{x}|}}$;　不連続点は原点．$\int \frac{dx}{\sqrt{|x|}} = 2\,\mathrm{sgn}\,x\cdot\sqrt{|x|}$ なので，

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{|x|}} &= \lim_{\varepsilon_1\to+0}\int_{-1}^{-\varepsilon_1}\frac{dx}{\sqrt{|x|}} + \lim_{\varepsilon_2\to+0}\int_{\varepsilon_2}^{1}\frac{dx}{\sqrt{|x|}}\\ &= \lim_{\varepsilon_1\to+0}\left[-2\sqrt{|x|}\right]_{-1}^{-\varepsilon_1} + \lim_{\varepsilon_2\to+0}\left[2\sqrt{|x|}\right]_{\varepsilon_2}^{1} = 4.\end{aligned}$$

(ii) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{x^2}}$;　不連続点は原点．$\int\frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}$ であるが，$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$ は発散するので，この広義積分は発散する．

(iii) $\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{\boldsymbol{dx}}{\sqrt[3]{\boldsymbol{x^3+1}}}$;　被積分関数の原始関数は容易には計算できない上に，区間が有限ではない．このような場合の収束・発散は他の簡単な関数と比較することにより判断する．今は $\frac{1}{\sqrt[3]{x^3+1}} \approx \frac{1}{x}$ であるので，発散すると予測できる．さて，$x>0$ のとき $x^3+1<(x+1)^3$ であるので，$\frac{1}{\sqrt[3]{x^3+1}} > \frac{1}{x+1}$ となる．したがって，$R>0$ のとき

$$\int_0^R\frac{dx}{\sqrt[3]{x^3+1}} \geq \int_0^R\frac{dx}{x+1} = \left[\log(x+1)\right]_0^R = \log(R+1)\to+\infty \quad (R\to+\infty)$$

となるので，この広義積分は確かに発散する．

(2) 次の手順により解いていく．① 領域内にある極値を求める．② 境界の特異点を探す．③ 境界上の極値を求める．④ 以上を総括して最大値・最小値を決定する．
① $f_x = 3x^2-3$, $f_y = 3y^2-3$ であるので，停留点は $\pm(1,1)$, $\pm(1,-1)$ の 4 点．この内で D の内部にあるものは $A^{\pm}=(1,\pm1)$ の 2 点．そこでの値はそれぞれ $f(A^+)=-4$, $f(A^-)=0$ である．② まずは円周 $x^2+y^2=4$ 上で考える．このとき特異点はない．③ Lagrange の未定乗数法を用いる．$g(x,y)=x^2+y^2-4$ とおき，$F(x,y)=f(x,y)-\lambda g(x,y)$ とすると，

$$F_x = 3x^2-3-2\lambda x = 0, \quad F_y = 3y^2-3-2\lambda y=0, \quad F_\lambda = -(x^2+y^2-4)=0$$

である．このままだと解きづらいので，$F_x+F_y=0$, $F_x-F_y=0$ として考える．

$$F_x+F_y = \lambda(x+y) = 3 \quad \cdots① \quad F_x-F_y = (x-y)(3(x+y)-2\lambda)=0 \quad \cdots②$$

①より $\lambda\neq 0$ および $x+y\neq 0$ が，②より $x-y=0$ または $3(x+y)-2\lambda=0$ がわかる．
(i) $x=y$ のとき．候補点 $B^{\pm}=\pm(\sqrt{2},\sqrt{2})$ を得る．そこでの値は $f(B^{\pm})=\mp2\sqrt{2}$ である．

(ii) $3(x+y)=2\lambda$ のとき．①と合わせると $(x+y)^2=2$ となる．紛れが生じないように $y=-x+\sqrt{2}\varepsilon$ $(\varepsilon=\pm 1)$ とかく．これを $F_\lambda=0$ に代入して解を求めると

$$x=\frac{\pm\sqrt{6}+\sqrt{2}\varepsilon}{2},\quad y=\frac{\mp\sqrt{6}+\sqrt{2}\varepsilon}{2}\quad (\text{複合同順})$$

となる．したがって候補点

$$C^{\pm}=\pm\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2},\ \frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right),\quad D^{\pm}=\pm\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2},\ \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)$$

を得る．そこでの値はそれぞれ $f(C^{\pm})=\pm 2\sqrt{2}$, $f(D^{\pm})=\mp 2\sqrt{2}$ である．③$'$ 次に y 軸上の線分について考える．$h(y)=f(0,y)=y^3-3y$ $(-2\leq y\leq 2)$ の最大値，最小値を考えると，$y=2,-1$ で最大値 2，$y=1,-2$ で最小値 -2 を取ることが分かる (高校レベルの問題なので解説略)．④ 以上をまとめて図に値を書き込んでいくことにより，最大値・最小値を決定できる (図を書くのが大変だったので，図は省略します)．以上により，領域 D 内において，f は点 $(1,1)$ で最小値 -4，点 $\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)$ で最大値 $2\sqrt{2}$ を取る．