

微分積分学・同演習 A

演習問題 1

1. 次の集合に属する元を具体的にすべて表せ．

- (1) $X_1 = \{n \in \mathbb{Z}; |n| < 5\}$ (2) $X_2 = \{m \in \mathbb{N}; m \text{ は } 50 \text{ 以下の素数}\}$
(3) $X_3 = \{x \in \mathbb{Q}; x = p/q \text{ (} p, q \text{ は互いに素) とするとき } 0 < p < q < 5 \text{ となるもの}\}$

2. 次の多項式の集合の元を，具体的に表せ^{*1}．

- (1) $X_1 = \{2 \text{ 次以下の実数係数の多項式全体}\}$
(2) $X_2 = \{2 \text{ 次以下の実数係数の多項式で，係数の和が } 0 \text{ となるもの全体}\}$
(3) $X_3 = \{3 \text{ 次以下の実数係数多項式で，微分したら多項式 } x^2 + x \text{ になるもの全体}\}$

3. 次の三角不等式が成り立つことを証明せよ．

$$(1) |a + b| \leq |a| + |b| \quad (2) ||a| - |b|| \leq |a - b| \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

4. 二項係数が $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ を満たすことを用いて，次の等式を証明せよ．

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{j-1} + \binom{n}{j}.$$

5. 二項係数に関して，次の等式を証明せよ．

$$(1) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n \quad (2) \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

6[†] (1) 数列 $\{a_n\}$ がある実数 α に収束することを ε - N 論法の言葉で表せ．

(2) 数列 $\{a_n\}$ がある実数 α に収束しないことを ε - N 論法の言葉で表せ．

7[†] 次の極限を， ε - N 論法を用いて証明せよ．

$$(1) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{n^3} = 0 \quad (2) \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} = 0 \quad (3) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1$$

8. α を非負の数とし，任意の正の数 ε に対して $\alpha < \varepsilon$ を満たすとする．このとき $\alpha = 0$ となることを示せ．

4 月 11 日分 (凡例：無印は基本問題，[†] は特に解いてほしい問題，* は応用問題)

講義用 HP: <http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~h-nakashima/lecture/2017C.html>

^{*1} 問題が少し曖昧であるが，たとえば (1) なら実数 a, b, c を用いて $ax^2 + bx + c$ と表せる，など．