はじめに

2020 年度 名古屋大学教養教育院　全学教育科目

科目区分:	理系基礎科目（文系）
科目名:	数学入門
主担当教員名:	中島秀斗
開講時期:	木曜日 1 時限目 (I 期)

- 本授業の目的およびねらい
  定量的変化を記述・分析する数学の分野が解析学であり，その中心的方法は微分積分学である。それは自然科学，さらに近年社会科学などにも広く応用される。本科目では 1 変数関数の微分積分学の基礎理解を目的とする。高校数学との接続を考慮し，直感的見方の紹介，応用への言及などにより理解を容易にする。特に，対数関数・三角関数など初等関数を理解し，自在な解析学的取扱いができるようになることを重視する。
- 履修条件あるいは関連する科目等
  高校数学 II・B までの内容を既知とする。
- 講義担当者からのコメント
  本講義ノートは,「初等 微分積分学 (改訂版)」，田代嘉宏著，裳華房，をもとに作成しています．より詳細な記述がほしいという方は，この本を参考にしてください．また，合わせて「改訂版 高等学校 新編 数学 III」，数研出版，の記述も参考にしています．
  この講義の目標は，上にも書いてあるとおり，初等関数の微分・積分を理解することです．どうしても計算することが多くなってしまいますが，少しでも数学を楽しんでいただけたらと思います．

目次

1　関数の復習

高校のときに学んだ関数について復習をしておこう．この講義の目標の一つは，ここで紹介する関数の微分・積分を計算できるようになることである．また，三角関数については，従来の度数法ではなく，弧度法という新しい角度の単位を導入する．これは三角関数の微分を考える際には非常に自然な単位になる．

1.1　数列・関数

数列とは $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ のように数字が並んでいるものであり，n 番目に数 a_n があるという対応が分かっているときには $\{a_n\}_{n=1,2,\ldots}$ と書く．

関数とは，数 x に対して $f(x)$ というただ一つの数を対応させるものであり，関数 $y = f(x)$ などのように書く．関数をグラフとして描写したとき，y 軸と平行な直線との交点は多くても一つしか持たない．

1.2　種々の関数

ここではよく用いられる関数をいくつか紹介する．

多項式:　$f(x) = x^2 + 2x - 1$ や $g(x) = x^3 + 1$ などのように，x^k の形の関数をいくつか足し合わせて得られる関数のこと．

分数関数:　2 つの多項式 $f(x)$, $g(x)$ を用いて

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

のようにかける関数のこと．有理関数ともいう．

無理関数:　$\sqrt{x}$ や $\sqrt{x^2 + 2x - 1}$ などのように，多項式に根号 $\sqrt{\ }$ をつけて表される関数のこと．

三角関数:　半径 1 の円の，角度 $\theta°$ に当たる点の x 座標が $\cos\theta°$，y 座標が $\sin\theta°$ である．また，直線 $x = 1$ と原点とこの点をつなぐ直線との交点の y 座標が $\tan\theta°$ である (図 1 参照).

指数関数:　0 でない数 a を用いて $f(x) = a^x$ のように書ける関数のこと (図 2 参照).

対数関数:　指数関数の逆関数 $\log_a(x)$ のこと．これは，$a^{\log_a x} = x$, $\log_a a^x = x$ を満たす (図 2 参照).

ここで紹介した関数は，まとめて**初等関数**と呼ばれている．これらはいずれも，数学に限らず多くの自然科学で自然に現れてくる，非常に重要な関数である．

1.3　関数同士の演算

2 つの関数 $f(x), g(x)$ が与えられたとき，その 2 つを用いて新たな関数を作ることができる．たとえば，和 $f(x) + g(x)$ や，積 $f(x)g(x)$ などである．この他に，$h(x) = f\big(g(x)\big)$ のようにして新しい関数を構成することができる．このような形で定義される関数を**合成関数**と呼ぶ．例えば $\sin(x^2 + 1)$ は，$f(x) = \sin x$, $g(x) = x^2 + 1$ としたときの $f\big(g(x)\big)$ である．一般に，$f\big(g(x)\big) \neq g\big(f(x)\big)$ であることに注意．実際，今の例の場合においても，$g\big(f(x)\big) = (\sin x)^2 + 1 = \sin^2 x + 1$ となり，$\sin(x^2 + 1)$ とは異なる．

ここで関数 $f(x)$ が与えられたとき，

$$f\big(g(x)\big) = g\big(f(x)\big) = x$$

となるような関数 $g(x)$ について考える．そのような関数はいつでも存在するとは限らないが，存在するときには $g(x)$ のことを $f(x)$ の逆関数といい，$f^{-1}(x)$ という記号で表す．図で言えば，$y = f(x)$ のグラフを直線 $y = x$ で折り返したものになる (図 1 参照).

考える区間を狭めることにより，逆関数を定義できる場合もある．そのための必要十分条件は，考える区間の上で 1 対 1 となっていることである．

1.4　三角関数

これまでは度数法 ($30°$ など) を用いていたが，今後は**弧度法**を用いることにする．半径 r の円を考え，弧 $\overset{\frown}{AB}$ の長さを l_r とすれば，比 $\dfrac{l_r}{r}$ は r に関わらずに一定の値になる ($\because$ 相似)．そこで，角度 $\theta°$ を表すために数 $\dfrac{l_r}{r}$ を用いることにする．これは，半径 1 の円を考えたときには，角度 $\theta°$ に対応する弧の長さと一致する．単位は**ラジアン**というが，単位ラジアンは省略して書かれることが多い．例えば，

$$180° = \pi \text{ ラジアン}, \quad 90° = \frac{\pi}{2} \text{ ラジアン}, \quad 60° = \frac{\pi}{3}.$$

弧度法を導入するメリットの一つとして，三角関数の微分の公式が綺麗になることが挙げられる．

$$\big(\sin x\big)' = \cos x, \quad \big(\cos x\big)' = -\sin x.$$

虚数単位を i とすれば，次のような公式 (**ド・モアブルの定理**) が成り立つ．

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos(nx) + i \sin(nx)$$

また，次のような積公式も成り立っている．

$$
\begin{aligned}
&(\cos a + i\sin a)(\cos b + i\sin b) \\
&\qquad = \cos(a+b) + i\sin(a+b)
\end{aligned}
$$

ここから三角関数の加法定理が導かれる．

定理 1.1

$$
\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b
$$

$$
\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b
$$

1.5 まとめ

- 初等関数とそのグラフの概形
- 合成関数と逆関数
- 度数法と弧度法

1.6 演習問題

(1) 次の分数式を約分せよ．

$$
(a)\ \frac{x^2-3x-4}{x^2+3x+2} \quad (b)\ \frac{x^2-1}{x^3-1}
$$

(2) 次の関数の逆関数を求めよ．

$$
(a)\ y = -\frac{1}{3}x + 4 \quad (b)\ y = 3x - 1
$$

(3) 次の関数の逆関数を求めよ．

$$
(a)\ y = x^2 \quad (b)\ y = 2^x \quad (c)\ y = \log_{10} x
$$

(4) 次の角を，度数は弧度に，弧度は度数に，それぞれ書き直せ．

$$
(a)\ 15^\circ \quad (b)\ -60^\circ \quad (c)\ \frac{8}{5}\pi \quad (d)\ -\frac{5}{12}\pi
$$

(5) $f(x) = x+1,\ g(x) = \sqrt{x^2+1},\ h(x) = \log_2(x)$ のとき，次の合成関数を x の式で表せ．

$$
(a)\ f\big(g(x)\big) \quad (b)\ g\big(f(x)\big) \quad (c)\ h\big(g(x)\big)
$$

1.6.1 ヒント

(1) 通常の数と同じように，分数式の分母と分子をその共通の因子で割ること (約分) ができる．例えば，

$$
\frac{x^3+1}{x^2-x-2} = \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x+1)(x-2)} = \frac{x^2-x+1}{x-2}
$$

(2), (3) 与えられた関数を $x = \cdots$ の形にしてから x と y を入れ替える．

(4) 角度 θ° を弧度 x ラジアンで表したいときは，比

$$
\frac{\pi}{180^\circ} = \frac{x}{\theta^\circ}
$$

から x の式として表せばよい．逆に弧度 x ラジアンから角度 θ° を知りたいときは，同じ式を θ について解けばよい．

1.7 関数のグラフなど

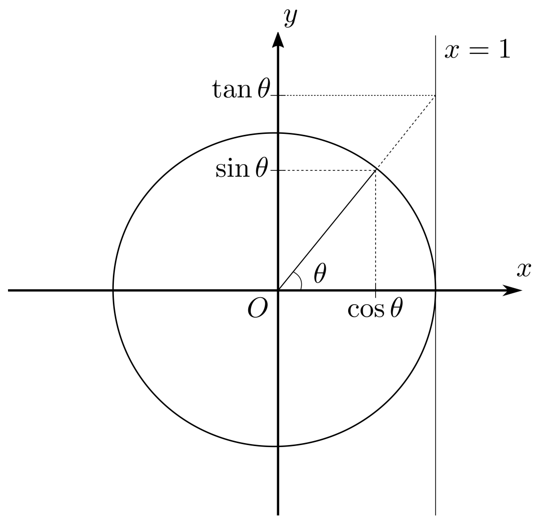

図 1　三角関数の定義

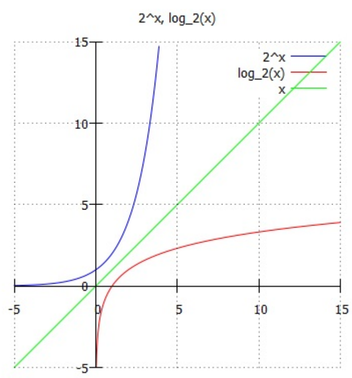

図 2　逆関数

2　数列の極限

項がどこまでも限りなく続く数列を無限数列という．今後単に数列といえば無限数列を意味するものとする．無限数列においては，n が増大するに従って，その第 n 項がどのようになっていくかを知ることが重要である．∞ は無限大を表す記号であり，その意味するところとしては「どんな数よりも大きい」という概念であって，数としては扱わない点に注意．

2.1　収束・発散

次の数列を考える．

$$
\begin{array}{llllllll}
\text{(a)} & 1, & \frac{1}{2}, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{4}, & \ldots, & \frac{1}{n}, & \ldots \\
\text{(b)} & 1, & 4, & 9, & 16, & \ldots, & n^2, & \ldots \\
\text{(c)} & 4, & 1, & -4, & -11, & \ldots, & 5-n^2, & \ldots \\
\text{(d)} & 1, & -1, & 1, & -1, & \ldots, & (-1)^{n-1}, & \ldots
\end{array}
$$

(a) について．数列 $a_n = \dfrac{1}{n}$ は，n が大きくなるに従って，一定の値 $A=0$ に近づいていく．このことを a_n は $A=0$ に**収束する**といい，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad \text{または} \quad n\to\infty \text{ のとき } a_n \to 0$$

と書く．数列が収束しないとき，**発散する**という．

(b) について．数列 $b_n = n^2$ は，n が大きくなるに従って，限りなく大きくなっていく．このことを b_n は**正の無限大に発散する**といい，次のように書く．

$$\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty \text{ または } n\to\infty \text{ のとき } b_n \to +\infty.$$

(c) について．数列 $c_n = 5-n^2$ は，あるところから先の項は負の数であり，n が大きくなるに従って，その絶対値 $|c_n|$ は限りなく大きくなっていく．このことを，c_n は**負の無限大に発散する**といい，次のように書く．

$$\lim_{n\to\infty} c_n = -\infty \text{ または } n\to\infty \text{ のとき } c_n \to -\infty.$$

(d) について．数列 $d_n = (-1)^{n-1}$ は，$1, -1$ が交互に現れ，項が一定の値に近づかないので発散する．しかし，正・負の無限大に発散するわけでもない．このようなとき，数列 d_n に**極限はない**，あるいは**振動する**という．

[*1] これは片方が $+\infty$ に発散し，もう片方は正の極限値に収束する場合でも成り立つ．しかし，もう片方が負の極限値に収束する場合は $-\infty$ となるので，注意が必要である．

定理 2.1

2 つの収束する数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ に対して，次が成り立つ．

1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} ka_n = k\lim_{n\to\infty} a_n$　(k は定数)
2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (a_n+b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$
3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (a_nb_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n)(\lim_{n\to\infty} b_n)$
4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$　($\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$ のとき)

例． $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n-2} = \lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{3-\frac{2}{n}} = \frac{2}{3}.$

2.2　極限の不定形

正の無限大に発散する 2 つの数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ が与えられたとき，すなわち $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ かつ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$ のとき，明らかに

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = +\infty, \quad \lim_{n\to\infty}(a_nb_n) = +\infty$$

が成り立つ[*1]．しかし，

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n), \quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$$

についてはいろいろな場合がある．このような場合を**不定形**という．以下の例題で見るように，若干の工夫によってその極限を求めることが可能であることも多い．

例題 2.2

次の極限を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(4n^2-n^3)$　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

この例題でもわかるように，不定形の極限では「次数が一番大きい項」の影響が最も大きく，極限はその項に支配される．基本的な数列（n^k や a^n など）の「大きさ」を理解しておくことは重要である．

定理 2.3

収束する数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ について，その極限値を $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = A, \lim_{n\to\infty} b_n = B$ とするとき，

1) すべての n について $a_n \leqq b_n$ ならば，$A \leqq B$,
2) 数列 $\{c_n\}$ がすべての n に対して $a_n \leqq c_n \leqq b_n$ を満たしていて，さらに $A=B$ ならば，数列 $\{c_n\}$ も収束して $\displaystyle\lim_{n\to\infty} c_n = A$.

この定理の 2) は「**はさみうちの定理**」と呼ばれ，直接計算しづらい極限を求める際に役に立つ定理である．図 3 は，$a_n = 1 - \frac{1}{n^2}$, $b_n = 1 + \frac{1}{n}$ としたものを図示している．数列 a_n および b_n はそれぞれ関数 $y = 1 - \frac{1}{x^2}$, $y = 1 + \frac{1}{x}$ の曲線上に乗っている．数列 c_n はこの 2 つの曲線に間にある以上，この図が示しているように，その極限値は a_n, b_n の同一の極限値にならざるを得ない．

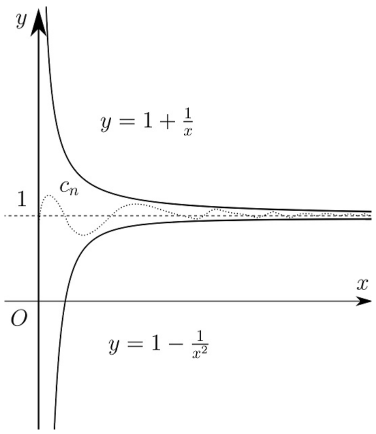

図 3　はさみうちの定理

例題 2.4

極限値 $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \sin \dfrac{n\pi}{6}$ を求めよ．

2.3　等比数列 $a_n = ar^{n-1}$ の極限について

定理 2.5

$a > 0$ のとき，等比数列 $a_n = ar^{n-1}$ の極限は，

1)　$r > 1$ ならば $\lim_{n\to\infty} ar^{n-1} = +\infty$,

2)　$r = 1$ ならば $\lim_{n\to\infty} ar^{n-1} = 1$,

3)　$-1 < r < 1$ ならば $\lim_{n\to\infty} ar^{n-1} = 0$,

4)　$r \leqq -1$ ならば $\lim_{n\to\infty} ar^{n-1}$ は極限を持たない．

$a < 0$ のときは 1) の極限が $-\infty$ になる．また，$r = 0$ のときは場合分けが不要で，すべての場合の極限値が 0 になる．

雑な説明をすれば，正の数 r が 1 よりも大きかったら，r を掛ける毎にどんどん大きくなっていくし，逆に 1 よりも小さかったら，r を掛ける毎にどんどん小さくなっていく，ということ．1 は当然ずっと変わらないが，大きくなるか小さくなるかの分水嶺となっている．r が負の数のときは，§2.1 の d_n のように振動していて，絶対値が 1 よりも小さければ振動しつつ 0 に収束していくが，1 以上だったら収束できないことは想像しやすい．

例題 2.6

次の極限を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n + 2^{n+1}}{2^{2n} - 3^n}$$

例題 2.7

$a_1 = 0$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}a_n + 1$ によって定義される数列 $\{a_n\}$ の極限値を求めよ．

2.4　まとめ

- 数列の極限 (収束・発散)
- 数列の極限の計算・はさみうちの定理

2.5　演習問題

(1) すべての n に対して $a_n < b_n$ であるが，$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$ となる数列の組を一例挙げよ．

(2) 一般項が次の式で表される数列の極限を調べよ．

$$(a)\ \frac{2n-1}{5n+1} \quad (b)\ \frac{2n^2+n}{n^2-6} \quad (c)\ \frac{7n-3}{3n^2+4n}$$

(3) 一般項が次の式で表される数列の極限を調べよ．

$$(a)\ 2n^3 - 4n \quad (b)\ \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$$

(4) 次の無限等比数列の極限を調べよ．

(a) $3, 9, 27, 81, \ldots$　(b) $-\dfrac{2}{3}, \dfrac{4}{9}, -\dfrac{8}{27}, \ldots$

(c) $8, -12, 18, -27, \ldots$

(5) 一般項が次の式で表される数列の極限を調べよ．

$$(a)\ \frac{5^n - 2^n}{3^n} \quad (b)\ \frac{2^{n+1}}{3^n + 2^n} \quad (c)\ \frac{(-2)^n + 3^n}{3^n - (-2)^n}$$

(6) $r \neq -1$ のとき，数列 $\dfrac{r^n}{1+r^n}$ の極限を調べよ．

2.5.1　ヒント

(1) このノートの中にもその一例の組が現れている．(2) 分子分母を，n の次数が一番高いもので割ってから，$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ を使う．(3) 例題 2.2 を真似る．(4) 公比 r は (第 2 項) $\div$ (第 1 項) で求まる．(5) 例題 2.6 を真似る．(6) 定理 2.5 を利用し，場合分けする．

3　関数の極限と連続性

数列は $n \to \infty$ という一方向の極限しかなかったが，関数は $+\infty$ と $-\infty$ の二方向があり，さらに任意の点においても極限を考える事ができる．このことは，現代数学において基本的な役割を果たす「**実数の連続性**」という概念と関係している．これは本講義の後半に解説を行うこととし，まずは関数の極限を扱えるようになることを目標とする．

3.1　関数の極限

$x \to +\infty$ のときは数列のときと同様に考えればよい．また，$x \to -\infty$ のときは，$x = -u$ として，$u \to +\infty$ を考えればよい．もちろん慣れてきたら，変換せずに直接 $x \to -\infty$ でよい．

例題 3.1

次の極限値を求めよ．

$$(1)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} \quad (2)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-4}{3x^3+1}$$

関数 $y = f(x)$ において，変数 x がある値 a に，a 以外の値を取りながら近づいていくとき，どのような近づけ方に対しても $f(x)$ の値が一定値 A に近づいていくとする（下図参照）．

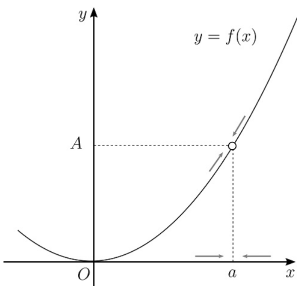

図 4　関数の極限

このとき，A をそのときの**極限値**といい，

x が a に近づくとき，関数 $f(x)$ は A に**収束する**

という．記号では

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \quad \text{または} \quad f(x) \to A \quad (x \to a)$$

にように書く．また，$x = a + h$ とおけば，$x \to a$ と $h \to 0$ とは等しいので，

$$\lim_{h\to 0} f(a+h) = A$$

とも書ける．この表記は微分を考える際によく用いる．

例題 3.2

次の極限値を求めよ．

$$(1)\ \lim_{x\to 2} x^2 \quad (2)\ \lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$$

数列の極限と同様に，関数の極限も次の性質を持つ．

定理 3.3

a を定数，もしくは $\pm\infty$ とする．$x \to a$ のときに $f(x), g(x)$ がともに収束するならば

(1) $\lim_{x\to a}\bigl(f(x)+g(x)\bigr) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$

(2) $\lim_{x\to a}\bigl(k\,f(x)\bigr) = k\lim_{x\to a} f(x)$　(k は定数)

(3) $\lim_{x\to a}\bigl(f(x)g(x)\bigr) = \bigl(\lim_{x\to a} f(x)\bigr)\bigl(\lim_{x\to a} g(x)\bigr)$

(4) a の近くで $g(x) \neq 0$ で $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$ ならば

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$$

(5) a の近くで常に $f(x) \leqq g(x)$ ならば

$$\lim_{x\to a} f(x) \leqq \lim_{x\to a} g(x)$$

(5) において，a の近くで常に $f(x) < g(x)$ でも，

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)$$

となることがある．演習問題 (5) を参照のこと．

3.2　関数の連続性

関数 $f(x)$ について，$\lim_{x\to a} f(x)$ が存在していて，なおかつ $x = a$ で定義されていも，一般的には

$\lim_{x\to a} f(x)$ と $f(a)$ **が一致するとは限らない．**

例えば，下図（図 5）の関数 $f_1(x) = \begin{cases} 1 & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$ に対しては，以下のようになっている．

$$\lim_{x\to 0} f_1(x) = 1 \quad \neq \quad 0 = f_1(0).$$

定義．関数 $f(x)$ が点 $x = a$ で**連続**であるとは，

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

となることをいう．さらに，$f(x)$ が区間 D のすべての点 x で連続であるときには，**区間 D で連続**という．このとき，関数 $y = f(x)$ のグラフを描いてみれば，一本の線で描けていることになる． □

初等関数は，基本的には連続である．「基本的」というのは，例えば分数関数の分母が 0 になる点では不連続になるので，そういった例外があることを表している．

3.3　右極限と左極限

次の関数 $f_2(x)$ について考える（下図（図 6）参照）．

$$f_2(x) = \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ 0 & (x = 0) \\ -1 & (x < 0) \end{cases}$$

この関数は，x の符号を返す関数である．グラフを見れば明らかなように，$f_2(x)$ は点 $x = 0$ で連続ではなく，極限値も存在しない．しかし点 $x = 0$ に，右から近づくと 1 に近づいていき，左から近づくと -1 に近づいていく．これらの極限値をそれぞれ**右側極限値**および**左側極限値**といい，記号ではそれぞれ

$$\lim_{x\to a+0} f_2(x) = 1, \quad \lim_{x\to a-0} f_2(x) = -1$$

のように書く．ここで $a+0$ は $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0,\ \varepsilon>0}(a+\varepsilon)$ の略記である．$a = 0$ のときは，$a+0$ の代わりに，単に $+0$ と書く．$a-0$ についても同様である．

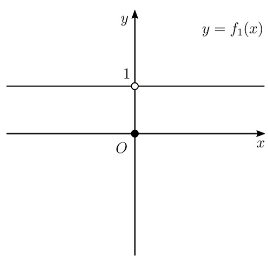

図 5　関数の例 1

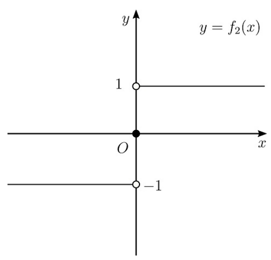

図 6　関数の例 2

例題 3.4

次の極限値を求めよ．

$$(1)\ \lim_{x\to 2+0}\frac{1}{x-2} \qquad (2)\ \lim_{x\to 2-0}\frac{1}{x-2}$$

数列の極限の場合と同じであるが，極限を求める際に，少し工夫が必要な場合もある．なお，関数の極限の場合にも「**はさみうちの定理**」が成り立つことに注意．

例題 3.5

次の極限値を求めよ．

$$(1)\ \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-x) \qquad (2)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}$$

3.4　まとめ

- 関数の極限・右極限・左極限
- 関数の連続性
- 関数の極限の計算・はさみうちの定理

3.5　演習問題

(1) 次の極限を求めよ．

$$(a)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+1} \qquad (b)\ \lim_{x\to-\infty}(x^3+1)$$

(2) 次の極限を求めよ．

$$(a)\ \lim_{x\to-2}\frac{x+3}{(x-1)(x^2+3)} \qquad (b)\ \lim_{x\to 2}\frac{2x^2-5x+2}{x^2-4}$$

$$(c)\ \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{x+1}\right) \qquad (4)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$$

(3) 次の極限を求めよ．

$$(a)\ \lim_{x\to+0}\frac{x^2+x}{|x|} \quad (b)\ \lim_{x\to-0}\frac{x^2+x}{|x|} \quad (c)\ \lim_{x\to 1+0}\frac{x}{x-1}$$

(4) 次の極限を求めよ．

$$(a)\ \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}) \quad (b)\ \lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$$

(5) 点 $x = 0$ 以外の点で常に $f(x) < g(x)$ であるが，$\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$, $\displaystyle\lim_{x\to 0} g(x)$ がともに存在して，さらに

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x)$$

となるような関数の組の一例を挙げよ．

3.5.1　ヒント

(1) 数列の極限と同様にして考える．(2) 分数式において $x = a$ をそのまま代入したときに $\dfrac{0}{0}$ となる場合は，まず分数式のまま計算して約分できないかを考える．(3) 絶対値 $|x|$ は，$x > 0$ のときは $|x| = x$，$x < 0$ のときは $|x| = -x$，のように置き直して考える．(4) (a) は「無理化」してみる．(b) は「はさみうちの定理」を用いる．(5) グラフで描いたときにどのような状況になるのかを考える．

4 関数の微分

関数 $f(x)$ の点 $x=a$ における微分係数 $f'(a)$ は，点 $x=a$ における変化率の極限

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

により定義された．$f(x)=x^n$ のとき $f'(x)=nx^{n-1}$ であることは高校で学んだと思うが，ここでは微分計算の基本について学ぶ．

4.1 積と商の微分

定理 4.1

関数 $f(x)$ について，

$$\text{微分可能} \quad \begin{array}{c}\Rightarrow\\ \not\Leftarrow\end{array} \quad \text{連続}$$

ある点において連続であるが微分可能でない関数の例として，$f(x)=|x|$ が挙げられる（下図）．原点において，この関数が「尖っている」のが見て取れる．このようなときは左右の極限が一致せず，極限値が存在しないため，微分が存在しないことになるのである．

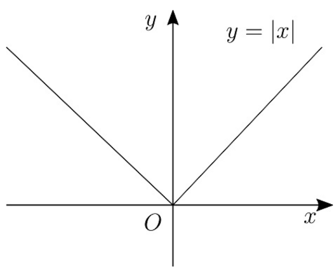

図 7　絶対値関数

関数の微分を計算する上で，次の定理は基本的である．

定理 4.2

関数 $f(x), g(x)$ が微分可能ならば，
(1) $\big(f(x)g(x)\big)'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$,
(2) $g(x)\neq 0$ である点において

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

この定理の (2) より，特に次が成り立つ．

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)'=-\frac{f'(x)}{f(x)^2}.$$

例題 4.3

次の関数を微分せよ．

(1) $y=(2x+1)(x^2-3)$　(2) $y=\dfrac{x}{x^2+1}$

解． (1) $u=2x+1$, $v=x^2-3$ とすれば，$u'=2$ および $v'=2x$ である．よって，

$$\begin{aligned} y' &= \big(uv\big)' = u'v+uv' \\ &= 2\cdot(x^2-3)+(2x+1)\cdot 2x \\ &= 6x^2+2x-6 \end{aligned}$$

であるので，$y'=6x^2+2x-6$. □

4.2 合成関数の微分

合成関数とは，例えば $f(x)=x^4$, $g(x)=x^2+1$ としたときに

$$h(x)=f\big(g(x)\big)=(x^2+1)^4$$

のように表される関数のことであった．このような関数の微分については，次の定理が便利である．

定理 4.4

関数 $f(x), g(x)$ がそれぞれ微分可能であって，合成関数 $h(x)=f\big(g(x)\big)$ が定義できるとき，$h(x)$ も微分可能であって

$$h'(x)=f'\big(g(x)\big)\cdot g'(x).$$

$y=f\big(g(x)\big)$ のとき，$u=g(x)$ および $y=f(u)$ とみて，上の定理を適用すれば

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

のように書くこともできる．

例題 4.5

次の関数を微分せよ．

(1) $y=(x^2+1)^4$　(2) $y=\dfrac{1}{(x^2+4)^3}$

解． (1) $u=x^2+1$, $y=u^4$ とおけば，

$$\frac{du}{dx}=2x,\quad \frac{dy}{du}=4u^3$$

である．したがって

$$y'=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=4u^3\cdot 2x=4(x^2+1)^3\cdot 2x$$

なので，$y'=8x(x^2+1)^3$ となる． □

4.3 逆関数の微分

逆関数とは，関数 $f(x)$ が与えられたときに

$$f\big(g(x)\big) = x, \quad g\big(f(x)\big) = x$$

となるような関数 $g(x)$ のことであった．これを $f^{-1}(x)$ と表す．合成関数の微分を用いれば，逆関数の微分も計算できる．

定理 4.6

関数 $y = f(x)$ の逆関数 $y = f^{-1}(x)$ の微分は次で与えられる．

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{f'\big(f(x)\big)}$$

記号的に書けば $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\frac{dx}{dy}}$ となる．

例題 4.7

関数 $y = \sqrt{x}$ を微分せよ．

解． $y = \sqrt{x}$ は関数 $f(x) = x^2$ の逆関数である．すなわち $x = y^2$ なので，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{2y} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}.$$

4.4 まとめ

- 積と商の微分を用いた計算
- 合成関数の微分を用いた計算
- 逆関数の微分の計算

4.5 演習問題

(1) 次の関数を微分せよ．

(a) 積・商の微分を用いるもの

(i) $(x-3)(x^2+2x+2)$ (ii) $(x^2+1)(x^2-4)$

(iii) $\dfrac{1}{x^2+1}$ (iv) $\dfrac{2x^2+3}{x}$ (v) $\dfrac{3x}{x^2-9}$

(b) 合成関数の微分を用いるもの

(i) $(x^4+2x+1)^3$ (ii) $\dfrac{1}{(x^3-2)^2}$

(iii) $\sqrt{2-3x}$ (iv) $\sqrt{x^2+1}$

(c) 逆関数の微分を用いるもの

(i) $\sqrt[3]{x}$ (ii) $\sqrt[5]{x}$

(2) 次の関数を微分せよ．

(i) $\sqrt[4]{9-x^2}$ (ii) $\dfrac{1}{x^2}$ (iii) $\dfrac{1}{x^3}$ (iv) $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

(v) $(3x+1)^2$ (vi) $\sqrt{x^3}$ (vii) $(x^3-1)(x^2-2)$

(3) 次の問いに答えよ．

(a) n を負の整数とするとき，次の等式を示せ．

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

(b) 正の整数 n に対して，次が成り立つことを示せ．

$$\left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$$

(c) n, m を（互いに素な）自然数とするとき，次の等式を証明せよ．

$$\left(x^{\frac{m}{n}}\right)' = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}$$

(4) $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ を微分可能な関数とするとき，次の関数の導関数を求めよ．

$$y = f(x)g(x)h(x)$$

4.5.1 ヒント

(3) (a) $n = -m$ とすれば，$x^n = \dfrac{1}{x^m}$ であるので，商の微分を用いればよい．(b) $y = x^{\frac{1}{n}}$ とすれば $x = y^n$ であるので，逆関数の微分を用いればよい．(c) $x^{\frac{m}{n}} = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m$ なので，(a), (b) と合成関数の微分を用いる．(4) $G(x) = g(x)h(x)$ とおいて積の微分公式を用いてから，次は $G(x)$ に対して再び積の微分公式を適用する．

4.5.2 補足

なお，この演習問題 (3) は次が成り立つことを示している．

定理 4.8

p を有理数とするとき，次が成り立つ．

$$\left(x^p\right)' = px^{p-1}$$

実はこの定理は任意の数 p に対して成立する．その証明には対数関数 $\log x$ の微分が必要になる．

5　初等関数の微分

初等関数とは，多項式・指数関数・対数関数や三角関数あるいはその逆関数を用いて表される関数のことである．ここでは，それらの微分について学ぶ．

5.1　三角関数の微分

初回に少しだけ紹介したが，次が成り立つ．

定理 5.1

角度の単位を弧度法とするとき，

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x,$$
$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.$$

$f(x) = \sin x$ について説明する．微分の定義から

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h}$$

において $h \to 0$ を考えることになる．三角関数の和を積に変える公式を使えば，

$$\frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \frac{\cos(x + \frac{h}{2}) \sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$

となる．ここで分母を $\frac{h}{2}$ としているのは，sin の中と同じにするため．ここで次の定理が必要になる．

定理 5.2

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$$

これを認めれば，

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cos(x + \frac{h}{2}) \sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$
$$= \lim_{h \to 0} \cos(x + \frac{h}{2}) \lim_{h \to 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = \cos(x) \cdot 1 = \cos(x)$$

のようにして証明できる．定理 5.2 を証明しよう．簡単のため $x > 0$ として考える．図 8 にあるように，$\sin x$ は線分 BH の長さであり，今弧度法を採用しているので x は弧 $\overset{\frown}{AB}$ の長さである．更に線分 OB を延長して直線 $x = 1$ と交わる点の y 座標，すなわち線分 AC の長さは $\tan x$ である．図からも分かるように，

$$\sin x \leqq x \leqq \tan x$$

となる (正確には面積を考える必要がある)．両辺を $\sin x$ で割ってみれば

$$1 \leqq \frac{x}{\sin x} \leqq \frac{\tan x}{\sin x} = \frac{1}{\cos x}$$

となり，$\lim_{x \to 0} \cos x = 1$ なので，はさみうちの定理から定理 5.2 が成立することが分かる．

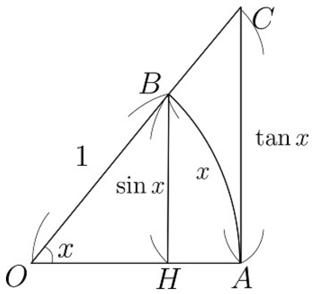

図 8　$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ について

5.2　逆三角関数の微分

$y = \sin x$ は区間 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ において 1 対 1 であるので，この区間で逆関数を持つ (図 9 の赤い線)．それを $y = \mathrm{Arcsin}\, x$ と表す．$y = \tan x$ についても，その逆関数を $y = \mathrm{Arctan}\, x$ のように表す．$\mathrm{Arccos}\, x$ も同様に定義できるが，$\mathrm{Arcsin}\, x$ とほとんど同じなので省略する．

なお，分野によって例えば $\mathrm{Arctan}\, x$ を $\arctan x$ や $\tan^{-1} x$, $\mathrm{Tan}^{-1} x$ などのように書くこともあるので，注意が必要である．

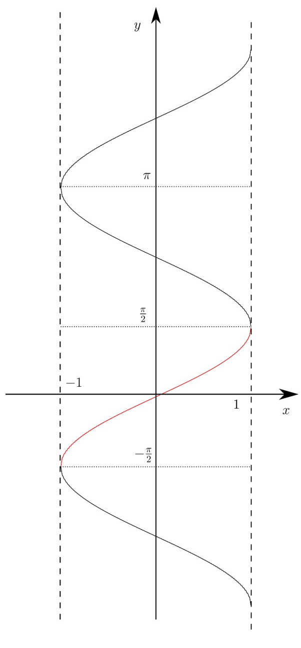

図 9　$y = \sin x$ の逆関数

定理 5.3

次が成り立つ．

$$(\mathrm{Arcsin}\, x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad (\mathrm{Arctan}\, x)' = \frac{1}{x^2 + 1}$$

5.3 指数関数と対数関数の微分

a を 1 でない正の定数とする．指数関数は $f(x)=a^x$ という形の関数であり，対数関数 $y=\log_a x$ はその逆関数である．それらの基本的な性質をここで復習しておく．指数関数について，

$$a^{x_1+x_2}=a^{x_1}\cdot a^{x_2},\quad (a^x)^p=a^{px},\quad a^0=1$$

であり，対数関数については

$$\log_a(x_1x_2)=\log_a x_1+\log_a x_2,\quad \log_a x^p=p\log_a x,\\ \log_a 1=0,\quad \log_a a=1$$

および底の変換公式

$$\log_b x=\frac{\log_a x}{\log_a b}$$

が成り立つ．互いが逆関数であることから

$$a^{\log_a x}=x,\quad \log_a a^x=x.$$

対数関数の微分を考えよう．x を一つ決めて，そこでの微分を考えると，

$$\frac{\log(x+h)-\log h}{h}=\frac{1}{h}\log\frac{x+h}{x}\\ =\log\Big(1+\frac{h}{x}\Big)^{\frac{1}{h}}=\frac{1}{x}\log\Big(1+\frac{h}{x}\Big)^{\frac{x}{h}}.$$

最後の等式は，log の中にある変数を $h'=\frac{h}{x}$ に揃えるためである．今 x を一つ決めているので（つまり h とは無関係），$h\to 0$ のとき $h'\to 0$ である．このとき，

$$e=\lim_{h'\to 0}\big(1+h'\big)^{\frac{1}{h'}}=2.71828...$$

は x とは無関係の定数になる．この e はとても重要な数であり，e を底に持つ対数は**自然対数**と呼ばれ，

$$\log x:=\log_e x$$

のように底 e を省略して書く．この数 e は**自然対数の底**もしくは**ネイピア数**と呼ばれる．

定理 5.4

次が成り立つ．

$$(\log x)'=\frac{1}{x},\quad (e^x)'=e^x.$$

底の変換公式を用いれば，次の公式

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x\log a},\quad \big(a^x\big)'=a^x\log a$$

が成り立つこともすぐに分かる．

5.4 対数微分法

関数 $y=f(x)$ に対して $\log f(x)$ を微分してみると

$$\frac{f'(x)}{f(x)}$$

となる．このことを利用して，与えられた関数の自然対数をとって微分することにより導関数を求める方法は，積・商あるいは指数の形の関数を微分する場合に有効であることも多い．この方法を**対数微分法**という．

例題 5.5

実数 p に対して，次が成り立つことを示せ．

$$(x^p)'=px^{p-1}$$

5.5 まとめ

- 三角関数・対数関数・指数関数の微分
- 逆三角関数の定義
- 対数微分法
- 自然対数の底 e

5.6 演習問題

(1) 次の関数を微分せよ．

(a) 三角関数・逆三角関数の微分を用いるもの．

(i) $\sin^2 x$ (ii) $\cos^3 2x$ (iii) $\tan 2x$

(iv) $\mathrm{Arctan}\,3x$ (v) $x\cos x$

(b) 指数関数・対数関数の微分を用いるもの．

(i) $\log(x^2+x+1)$ (ii) $\log|x|$ (iii) $e^x\log x$

(iv) $(x+1)\log x$ (v) $\log(x^3+x-2)$

(c) 対数微分法を用いるもの．

(i) $(x-1)^2\sqrt[3]{x+2}$ (ii) $\dfrac{\sqrt{x+2}}{x+1}$

(2) 次の関数を微分せよ．

(a) $\dfrac{\log x}{x}$	(b) xe^x	(c) $x\cos x-\sin x$
(d) $\log\sin x$	(e) $\log\tan x$	(f) $(x^2+1)\tan x$
(g) $e^x\sin x$	(h) $\mathrm{Arcsin}\sqrt{x}$	(i) $\mathrm{Arctan}\sqrt{x^2-1}$
(j) e^{-3x}	(k) $\log 2x$	(l) $\log_2|3x-1|$
(m) $(x-1)e^x$	(n) $x(\log x-1)$	(o) $\log\dfrac{x-1}{x+1}$

6　微分法の応用

前回までにいろいろな関数の微分について学んだ．そのことを利用して，多くの関数のグラフを描くことができる．そのときに必要になる情報は

- 定義域はどこか
- 定義域の境界あるいは $\pm\infty$ での挙動
- どこで増減が変わるか (極値)
- どこで x 軸，y 軸と交わるか
- 特異点の近くでの挙動

あたりである．特異点とは，例えば分数関数における分母が 0 になる点である．

6.1　関数の増減

関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は，$f(x)$ のグラフの傾きの情報を持つ関数である．それはすなわち，関数 $f(x)$ の増減に関する情報も持っているということである．実際，ある開区間において

- 常に $f'(x) > 0$ ならば $f(x)$ は増加していき，
- 常に $f'(x) < 0$ ならば $f(x)$ は減少していく．

これは直感的にもわかりやすい性質であるが，厳密に証明する際には「平均値の定理」が必要となる．ここでは細かいことにはこだわらずに，これを認めてしまおう．平均値の定理は講義の後半で紹介することにする．

例題 6.1

関数 $y = x + \dfrac{1}{x}$ の増減を調べよ．

解． 与えられた関数を微分すれば $y' = 1 - \dfrac{1}{x^2}$ である．$y' = 0$ となる点は $x = 1$ および -1 である．これより以下のような増減表を得る．ここで $\times$ は関数が定義できないことを表す（特異点）．

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	$\times$	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$\times$	$\searrow$	2	$\nearrow$

6.2　関数の極大と極小

$f(x)$ をある区間で連続な関数とする．$x = a$ を含む十分小さい開区間において，$x \neq a$ ならばいつでも $f(x) < f(a)$ となるとき，$f(x)$ は $x = a$ で**極大**であるといい，$f(a)$ を**極大値**という．直感的には「局所的に最大」であることである．同様に**極小**および**極小値**も定義される．これらをまとめて**極値**という．下図において，左側の山の頂上に当たる点が極大値であり，右側の谷の底に当たる点が極小点である．

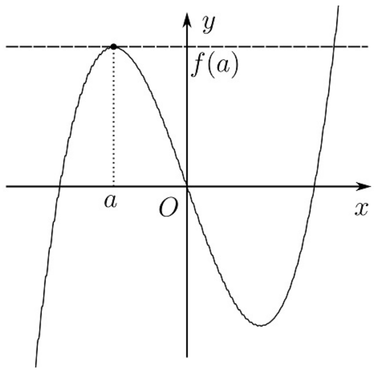

図 10　関数の極値

上図の極値での様子をみてもわかるように，

$$x = a \text{ で極値をとるならば，} f'(a) = 0 \tag{1}$$

でなければならない．ただし，$f(x) = x^3$ の $x = 0$ を考えればわかるように，その逆は成り立たない．極値となるのは，$x = a$ の前後で $f'(x)$ の符号が変わるときである．

例題 6.2

関数 $f(x) = \dfrac{4x+3}{x^2+1}$ の極値を求めよ．

解． まず (1) を利用して，$y = f(x)$ の極値の候補を探す．

$$\begin{aligned} y' &= \frac{4(x^2+1) - (4x+3)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{-2(2x^2+3x-2)}{(x^2+1)^2} = \frac{-2(2x-1)(x+2)}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

これが 0 になるのは $x = \frac{1}{2}$ と $x = -2$ の 2 点である．増減表を書けば，以下のようになる．

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$

これより，$y = f(x)$ は $x = -2$ で極小値 $f(-2) = -1$，$x = \frac{1}{2}$ で極大値 $f(\frac{1}{2}) = 4$ をとる．　$\square$

> **例題 6.3**
>
> 関数 $f(x) = \dfrac{4x+3}{x^2+1}$ のグラフの概形を描け．

解． グラフを描く際に必要となるのは，本稿の冒頭に述べた情報である．まず定義域は特に制限はない．次に，

$$\frac{4x+3}{x^2+1} = \frac{\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}$$

なので，$\pm\infty$ での挙動は，$x \to +\infty$ のときも $x \to -\infty$ のときも $f(x) \to 0$ となる．次は極値だが，これは例題 6.2 ですでに調べている．x 軸，y 軸との交点．y 軸との交点は $x=0$ での値を見ればよく，x 軸との交点は方程式 $f(x)=0$ を解けばよい:

$$f(0) = \frac{4\cdot 0+3}{0^2+1} = 3, \quad \frac{4x+3}{x^2+1} = 0 \text{ より } x = -\frac{3}{4}.$$

特異点．この関数は特異点を持たないので調べる必要はない．以上のことを増減表にまとめると，

x	$-\infty$	$\cdots$	-2	$\cdots$	$-\frac{3}{4}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$+\infty$
y'		$+$	0			$+$			0	$-$	
y	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	3	$\nearrow$	4	$\searrow$	0

よって関数 $y=f(x)$ のグラフの概形は以下の通り．

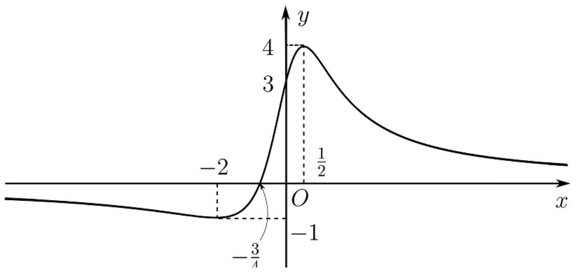

図 11　例題 6.3 の関数のグラフ

6.3　媒介変数方程式

変数 t に関する関数 $f(t)$, $g(t)$ を用いて

$$(x,y) = \big(f(t),\, g(t)\big)$$

のように表される点 $P(x,y)$ を考える．これは t が変化するに従って xy 平面上で一つの曲線を描く．例えば

$$(x,y) = (\cos t,\, \sin t)$$

とすれば，半径 1，中心原点の円になる．このようにして曲線を x,y 座標をそれぞれ新たなパラメータ t を用いて表示することを曲線の媒介変数（パラメータ）表示という．なお，半径 1，中心原点の円は $(x,y) = (\sin t, \cos t)$ としても表すことができる．このように，1 つの図形を媒介変数を用いて表示する仕方はたくさんある．

通常の関数 $y=f(x)$ は，$(x,y) = \big(t, f(t)\big)$ と見ることで媒介変数表示ができる．媒介変数表示のメリットの一つとして，関数のグラフよりも多くの種類の曲線を描くことができるという点がある．例えば先程の円であっても，関数を使って描こうとすれば

$$f_1(x) = \sqrt{1-x^2}, \quad f_2(x) = -\sqrt{1-x^2}$$

と 2 つの関数に分けなければならない．またプログラミングを用いて曲線を描画する際にも非常に有効である．

曲線の媒介変数表示が与えられたとき，関係式をうまく使ってパラメータを消去できるときがある．例えば先程の円ならば $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ なので

$$x^2 + y^2 = 1$$

という表示を得る（曲線の「**陰関数**」表示という）．

6.4　まとめ

- 関数の極大・極小
- 関数のグラフの描き方
- 関数の媒介変数表示について

6.5　演習問題

(1) 次の関数の極値を調べよ．

(a) $(1+\cos x)\sin x$　(b) $\sqrt{4-9x^2}$　(c) e^{-x^2}

(d) $\dfrac{xe^x}{x-1}$　(e) $x^2 \log x$　(f) $3x^4 + 4x^3 + 1$

(2) (1) の関数について，グラフの概形を描け．

(3) 次の媒介変数表示の描く曲線はどのような曲線か．

(a)　$(\cos^3 t,\, \sin^3 t)$　　(b)　$\left(\dfrac{3t}{t^3+1}, \dfrac{3t^2}{t^3+1}\right)$

6.5.1　ヒント

(1) (a) 周期関数なので，$0 \leqq x \leqq 2\pi$ の範囲のみを調べれば十分．(f) 極値は一つである．(2) (a) (1) と同じく $0 \leqq x \leqq 2\pi$ のみでよい．(b) 定義域に注意．(d) 特異点近くでの挙動を調べる必要がある．(e) 定義域に注意．$x \to +0$ と $x \to +\infty$ を調べる必要がある．(3) プログラミングに興味ある人向けの設問．(a) は星芒形（アステロイド），(b) はデカルトの正葉線と呼ばれている．

7　高次の導関数

我々がよく用いる関数は，その導関数もまた微分ができることが多い．関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ をさらに微分した関数は第 2 次導関数と呼ばれ，$f''(x)$ のように表す．これをさらに微分したものは第 3 次導関数 $f'''(x)$ である．一般に，関数 $y = f(x)$ を n 回微分してられる関数を $f(x)$ の第 n 次導関数といい，

$$y^{(n)}, \quad f^{(n)}(x), \quad \frac{d^n y}{dx^n}, \quad \frac{d^n}{dx^n} f(x)$$

などで表す．$n = 3$ くらいまでは $f''(x)$ や $f'''(x)$ などのように，$'$ を用いて表すことが多い．また $f^{(0)}(x) = f(x)$ と考える．2 次以上の導関数を高次導関数という．

ちなみに，第 n 次導関数のことを n 階導関数ということもある．

ここでいくつか記号を用意する．

(1) **階乗** $n!$: 1 から n までの整数の積．つまり，

$$n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$$

(2) **一般二項係数** $\dbinom{p}{r}$: 実数 p から r 個の下降階乗冪を階乗 $r!$ で割ったもの，つまり

$$\binom{p}{r} := \frac{p(p-1)(p-2)\cdots(p-r+1)}{r!}$$

p が正の整数 $p = n$ ならば，これは通常の二項係数 ${}_nC_r$ と一致する．

例題 7.1

$n = 1, 2, 3, 4$ に対して $\dbinom{\frac{1}{2}}{n}$ を計算せよ．

定理 7.2

初等関数の第 n 次導関数は以下の通り．

(1) $\left(e^x\right)^{(n)} = e^x$

(2) $\left(x^p\right)^{(n)} = p(p-1)(p-2)\cdots(p-n+1)x^{p-n}$

(3) $\left(\sin x\right)^{(n)} = \sin\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$

(4) $\left(\cos x\right)^{(n)} = \cos\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$

(5) $\left(\log x\right)^{(n)} = (-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{x^n}$

注意:$\left(x^p\right)^{(n)} = n! \cdot \dbinom{p}{n} x^{p-n}$ と書ける．

7.1　グラフの概形 2

グラフが増加するといっても，のように増加するか，あるいはのように増加するかでその形は随分変わってくる．数学の言葉でいえば，その区間で**上に凸**か**下に凸**かということであるが，これは関数の第 2 次導関数を調べることにより調べることができる．

定義． 関数 $y = f(x)$ のグラフにおいて，$x = a$ に対する点で曲線の接線を引くとき，その近くでグラフがその接線の上側にあれば「**上に凸**」，下側にあれば「**下に凸**」という．その接点の前後でグラフの凹凸が変わるとき，その点を「**変曲点**」という．

下に凸な関数の代表例は $y = x^2$ であり，上に凸な関数の代表例は $y = -x^2$ である (下図参照)．

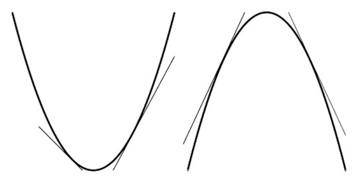

図 12　下に凸（左）と上に凸（右）

定理 7.3

関数 $f(x)$ はある区間で 2 回微分可能であり，$f''(x)$ が連続であるとする．このとき，

(1) 常に $f''(x) > 0$ ならば $y = f(x)$ は下に凸，

(2) 常に $f''(x) < 0$ ならば $y = f(x)$ は上に凸，

(3) 変曲点においては，$f''(x) = 0$

$f''(a) = 0$ であっても，$x = a$ が変曲点になるとは限らない．例えば $f(x) = x^4$ の $x = 0$ がその例になる．$x = a$ の前後で $f''(x)$ の符号が変わるならば，そのときは変曲点になる．

例題 7.4

関数 $y = -x^3 + 6x^2 - 9x + 1$ の増減，極値，凹凸，変曲点を調べてグラフを描け．

解． 極値や凹凸，変曲点を調べるので，与えられた関数の第 2 次導関数まで計算する．

$$y' = -3x^2 + 12x - 9 = -3(x-1)(x-3)$$

$$y'' = -6x + 12 = -6(x-2)$$

極値の候補は $y' = 0$ となる点であるので，$x = 1, x = 3$ の 2 点である．これらの点における第 2 次導関数の正負を調べると $f''(1) = 6 > 0$, $f''(3) - 6 < 0$ なので，$x = 1$ で極小，$x = 3$ で極大となる．変曲点の候補は $y'' = 0$ となる点なので $x = 2$ である．この点の前後で y'' の符号が異なっているので，$x = 2$ は変曲点になる．

次にグラフを描くための情報を調べる．凹凸・変曲点以外は前回と変わらない．まずは $\pm\infty$ における挙動．最高次の項の係数は -1 と負なので，

$$\lim_{n\to+\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{n\to-\infty} f(x) = +\infty.$$

次に軸との交点．y 軸との交点は $f(0) = 1$．一方 x 軸との交点は計算が難しそうなので省略する (無理に求めなくてもよい)．極値・変曲点での値はそれぞれ

$$\begin{aligned} f(1) &= -1 + 6 - 9 + 1 = -3, \\ f(3) &= -27 + 6 \times 9 - 9 \times 3 + 1 = 1, \\ f(2) &= -8 + 6 \times 4 - 9 \times 2 + 1 = -1 \end{aligned}$$

また，この関数は特異点を持たない．これより増減表は

x	$-\infty$	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$	3	$\cdots$	$+\infty$
y'		$-$	0		$+$		0	$-$	
y''			$+$		0		$-$		
y	$+\infty$	$\searrow$	極小	$\nearrow$	変曲点	$\nearrow$	極大	$\searrow$	$-\infty$

となり，これより関数 $y = f(x)$ のグラフの概形は以下のようになる．(赤い箇所は次の例題で用いる)

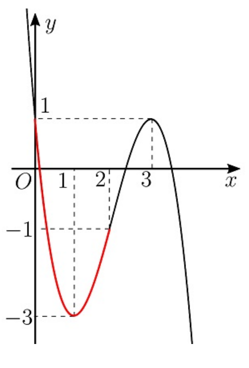

図 13　$y = -x^3 + 6x^2 - 9x + 1$ のグラフ

7.2　最大値・最小値

限られた区間で関数の最大値・最小値を考える場合がある．考える区間が「**閉区間**」ならば必ず最大値・最小値が存在する．グラフを描いてみればわかるが，最大 (最小) になりうる点というのは

1. $f'(x) = 0$ である点（極値）
2. 区間の端点
3. 微分不可能な点

のいずれかになる．よって，これらを調べてそこでの関数の値を比較して，最も大きい (小さいもの) をとればよい．なお，閉区間では必ずしも存在するとは限らないということに注意してほしい[*1]．

例題 7.5

関数 $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 1$ の $0 \leqq x \leqq 2$ という区間における最大値と最小値を求めよ．

解． 増減表・グラフをかいて，どこが一番大きい/小さいかを判断する．今の場合は図 (13) が利用できる．図 (13) のように，赤い箇所が区間 $0 \leqq x \leqq 2$ で関数 $y = f(x)$ が取りうる値の範囲である．よって，$f(x)$ は $x = 0$ で最大値 1，$x = 1$ で最小値 -3 を取る．□

7.3　まとめ

- 高次の導関数
- 初等関数の第 n 次導関数の公式
- 上に凸，下に凸，変曲点について
- グラフの描き方（その２）

7.4　演習問題

(1) 次の関数について，第 4 次導関数まで計算せよ．

$$\text{(a)}\ \tan x \quad \text{(b)}\ \mathrm{Arcsin}\, x \quad \text{(c)}\ \sqrt{1+x}$$

(2) 関数 $y = e^x \sin x$ について第 2 次導関数までを計算し，$y'' + 2y' + 2y = 0$ を満たすことを確認せよ．
(3) 次の関数について，与えられた区間における極値，凹凸および変曲点を調べ，そのグラフの概形を描け．
(a)　$y = x + 2\sin x \quad (0 \leqq x \leqq 2\pi)$
(b)　$y = x^2 e^{-x} \quad (x \geqq 0)$

7.4.1　ヒント等

(1) (a) は $\tan x$ の微分を $\tan x$ を用いて表示すれば幾分か計算が楽になる．(2) このような微分が入った方程式を微分方程式という．(3) (a) $y = x$ のグラフも描いて比較するとよいだろう．(b) 変曲点は 2 つ．

---

*1　$f(x) = \dfrac{1}{x}$ の区間 $(0, 1)$ での最大・最小を考えるとよい．

8 Taylor 級数展開

初等関数は数学のいたる至るところで自然に現れる．関数電卓で，たとえば $\sin 1$ や $\log 5$ などと入力すると，その近似値が少数表記で出力される．一体どのようにしてこのような値を計算しているのだろうか．ここではその基礎となる関数の多項式による近似 (Taylor 級数展開・Maclaurin 級数展開) について学ぶ．

8.1 無限級数

無限数列 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ があったとき，各項を前から順に $+$ の記号で結んで得られる式

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots \tag{2}$$

を無限級数という．この式を和の記号 $\sum$ を用いて

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

のように表すこともある．この式において a_1 を初項，a_n を第 n 項という．初項から第 n 項までの和を

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

とする．S_n は第 n 項までの部分和という．

部分和の作る数列 $\{S_n\}$ も無限数列であるのでその極限を考えることができるが，これが収束してその極限値が S であるとき，すなわち

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

となるとき，無限級数 (2) は**収束する**という．このとき，S は無限級数 (2) の和といい，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$ と書き表す．反対に無限数列 $\{S_n\}$ が発散するとき，無限級数 (2) は**発散する**という．

例題 8.1

次の無限級数の収束・発散について調べ，収束すればその和を求めよ．

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} + \cdots$$

（考え方）第 n 項は $\dfrac{1}{n\cdot(n+1)}$ であるが，これは

$$\frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

のように分解できるので，第 n までの和 S_n は

$$\begin{aligned} S_n &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

となるので，$\lim_{n\to\infty} S_n = 1$ となる．□

定理 8.2

$a \neq 0$ とする．数列 a_n を等比数列 $a_n = ar^{n-1}$ とする．$|r| < 1$ ならば無限数列 $a_1+a_2+a_3+\cdots$ は収束して，その和は

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots = \frac{a}{1-r}$$

となる．一方，$|r| \geqq 1$ ならば発散する．

注意． 無限級数において，「和の順番」は大事である．実際，同じ数が現れる無限数列であっても，足す順番を変えると，別の極限値に収束する例もある．例えば，

$$\begin{aligned} \log 2 &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots \\ \frac{3}{2}\log 2 &= 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots \end{aligned}$$

いずれも $a_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ が一回ずつ現れる数列である．前者は a_n が番号の小さい順に並べたものであるが，後者は a_n を値が正のものと負のものとに分けて，番号が小さい順に，正のものを 2 個，負のものを 1 個，を繰り返して得られる数列である．

8.2 Taylor 級数展開

定理 8.2 において，$a = 1,\ r = x^2$ としてみると，

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + \cdots \quad (|x| < 1)$$

となっていて，

$$\text{関数} = \text{無限級数}$$

の形になっている．この式において $x = 0.1$ とすると

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= 1.01010101... \\ (\text{右辺の } x^6 \text{までの和}) &= 1.01010101 \end{aligned}$$

のようになる．途中までで打ち切っていても，右辺の値は本来の値 (左辺) と十分近い値になっている．このように，関数を x^n の和で表すことができれば，x^n は計算が容易であるので，近似値を計算することが容易になる．

定理 8.3

滑らかな関数 $f(x)$ は，$x=0$ の周りで x^n を用いた無限級数として以下のように表される:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

定理 8.4

初等関数の $x=0$ の周りにおける Taylor 級数展開は以下の通り．

$$\begin{aligned}
&(1) & e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \\
&(2) & \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \\
&(3) & \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \cdots \\
&(4) & (1+x)^p &= 1 + px + \frac{p(p-1)}{2}x^2 + \cdots + \binom{p}{n}x^n + \cdots \\
&(5) & \log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + \cdots
\end{aligned}$$

※組版の都合で定理と本文が前後します．

定義． 定理 8.3 のように，与えられた滑らかな関数[*2]を，導関数を用いて x^n を用いた無限級数で展開したものを **Taylor 級数展開**という[*3]．

注意 1． より正確に言えば，$x=a$ の近くで展開する，すなわち $(x-a)^n$ の和で表すものを Taylor 級数展開といい，$a=0$ のときには Maclaurin 級数展開と呼ぶのが正しい．

注意 2． すべての関数がこのように Taylor 級数展開ができるとは限らない．例えば次の関数は原点 $x=0$ において何回でも微分可能であるが，対応する定理 8.3 の和は 0 になってしまう．

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \quad (x \neq 0), \quad f(0) = 0, \quad f^{(n)}(0) = 0.$$

初等関数の Taylor 級数展開は上の定理 8.4 の通りである．なお，(1)–(3) はすべての実数 x について収束するが，(4),(5) はそれぞれ $-1 < x < 1$ および $-1 < x \leqq 1$ でしか収束しない．

[*2] 滑らかな関数とは，必要なだけ微分が可能である関数のことを指す．実はこの条件では少し不十分であるが，本講義でそこまで踏み込むのは適切ではないであろう．注意 2 参照．

[*3] このあたりにはごまかしが入っている．本来はまず「平均値の定理」を用いて x^n までの和と剰余項に分解できることを示し (Taylor 展開)，その剰余項が $n \to \infty$ のときに 0 に収束する場合に Taylor 級数展開可能であるというのである．

例題 8.5

$\sqrt{1+x}$ の $x=0$ の周りにおける Taylor 級数展開を第 5 次の項まで求めよ．

8.3 まとめ

- 無限級数および無限等比級数
- Taylor 級数展開
- 初等関数の Taylor 級数展開

8.4 演習問題

(1) 次の等比数列の無限級数の収束・発散を調べ，収束する場合はその和を求めよ．

(a) $\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ (b) $\left(-\frac{2}{3}\right)^n$ (c) $\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

(2) 次の数列の無限級数の収束・発散を調べ，収束する場合はその和を求めよ．

(a) $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ (b) $\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

(3) $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ の $x=0$ の周りにおける Taylor 級数展開を第 5 次の項まで求めよ．