線形代数学・同演習 B

演習問題 13

1. 次の 2 次対称行列を直交行列により対角化せよ.

$$(1)\ \begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\quad (2)\ \begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}\quad (3)\ \begin{pmatrix}4 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}\quad (4)\ \begin{pmatrix}2 & -3\\ -3 & 2\end{pmatrix}\quad (5)\ \begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -2\end{pmatrix}$$

2.† 次の 3 次対称行列を直交行列により対角化せよ[*1].

$$(1)\ \begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 2 & 2\\ 0 & 2 & 3\end{pmatrix}\qquad (2)\ \begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\qquad (3)\ \begin{pmatrix}2 & 2 & -1\\ 2 & -1 & 2\\ -1 & 2 & 2\end{pmatrix}$$

$$(4)\ \begin{pmatrix}4 & 3 & -3\\ 3 & 1 & 0\\ -3 & 0 & 1\end{pmatrix}\qquad (5)\ \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix}\qquad (6)\ \begin{pmatrix}3 & -2 & -2\\ -2 & 0 & 1\\ -2 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

3.* n 変数 2 次同次多項式 $f(\boldsymbol{x}) = \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$ を 2 次形式という.

(1) 任意の 2 次形式 f はある対称行列 A を用いて $f(\boldsymbol{x}) = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ と表せることを示せ.

(2) (1) の行列 A を 2 次系式 f の表現行列という. 基底変換 $\boldsymbol{y} = S\boldsymbol{x}$ により f を $\boldsymbol{y}$ の 2 次形式と思うと, その表現行列は ${}^tSAS$ となることを示せ.

(3) 任意の 2 次系式は, 直交座標変換で $\lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$ という形に変換できることを示せ.

4.* 次の積分を以下の二通りの方法で計算せよ.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)}\,dx\,dy \quad (a>0,\ ac-b^2>0)^{*2}.$$

(1) 対称行列の直交行列による対角化を用いる.

(2) 正定値対称行列 A は下三角行列 L により $A = L\,{}^tL$ と書けることを用いる.

5.* 正方行列 A に対して, 指数写像 exp を $\exp A := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}A^n$ により定義する. このとき, 次の行列を指数写像で写したものを求めよ.

$$(1)\ \begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}\quad (2)\ \begin{pmatrix}0 & -\theta\\ \theta & 0\end{pmatrix}\quad (3)\ \begin{pmatrix}0 & x\\ x & 0\end{pmatrix}$$

---

1 月 30 日分 (凡例：無印は基本問題, † は特に解いてほしい問題, $*$ は応用問題)

講義用 HP: http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~h-nakashima/lecture/2017LA.html

[*1] 少なくとも (1), (2) は確実に計算できるようになっておくこと.

[*2] ヒント:$ax^2 + 2bxy + cy^2 = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ と考える. また (2) のような分解を Gauss 分解あるいは Cholesky 分解という (分野で呼び方が違う).