# 線形代数学・同演習 B

## 1 月 24 日分　演習問題[*1]

1. 2 次の回転行列 $P(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ が，任意の数ベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ に対して $\|\, P(\theta)\boldsymbol{x} \,\| = \|\, \boldsymbol{x} \,\|$ を満たすことを直接確かめよ．

2.[†]　次の 3 次実対称行列は正定値かどうか調べよ．

$$(1)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2)\ \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad (3)\ \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -4 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

3. $X$ を $n$ 次の実交代行列，すなわち ${}^tX = -X$ を満たす $n$ 次正方行列とする．
   (1) $X$ の固有値は常に純虚数もしくは 0 になることを示せ．
   (2) $\lambda i$ が $X$ の固有値とすると，その複素共役 $-\lambda i$ も $X$ の固有値となることを示せ．
   (3) $n$ が奇数のとき，$\det X = 0$ となることを示せ[*2]．

4.[†]　2 次対称行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ に対して，(1) $A$ が正定値であることと，(2) $a > 0$ かつ $ac - b^2 > 0$ を満たすことが同値であることを示せ．

5.[†]　任意の 2 次正定値対称行列 $A$ は，適当な下三角行列 $L$ を用いて $A = L\,{}^tL$ とかけることを示せ．また，この下三角行列 $L$ は一意に定まることも示せ[*3]．

6. $A$ を $n$ 次対称行列とし，$X$ を $n$ 次交代行列とする．このとき，常に $\mathrm{tr}(AX) = 0$ となることを示せ[*4]．

7.[*]　$\lambda, \mu > 0$ とする．$\mathbb{R}^2$ において，$(\cdot|\cdot)_0$ を $(\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{y})_0 := \lambda x_1 y_1 + \mu x_2 y_2$ により定義する．
   (1) $(\cdot|\cdot)_0$ は $\mathbb{R}^2$ の内積を定めることを示せ．
   (2) この内積に関する転置行列 $\widetilde{X}$ は[*5]，通常の転置行列を用いてどのように表されるか．
   (3) この内積に関する直交行列，すなわち以下を満たす行列 $P$ はどのような条件を満たすか．

$$\text{任意の } \boldsymbol{x},\, \boldsymbol{y} \text{ に対して} \quad (P\boldsymbol{x}\,|\,P\boldsymbol{y})_0 = (\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{y})_0\,.$$

8.[*]　2 次正則行列 $A$ に対して $\mathbb{R}^2$ の有界な領域における変数変換 $\boldsymbol{u} \mapsto \boldsymbol{x} = A\boldsymbol{u}$ を考える．この変換の Jacobian を求めよ．また，$A$ が直交行列ならば Jacobian は常に 1 となることを確認せよ．

9.[*]　正方行列 $A$ に対して，指数写像 exp を $\exp A := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$ により定義する．このとき，次の行列を指数写像で写したものを求めよ．

$$(1)\ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \quad (2)\ \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix} \quad (3)\ \begin{pmatrix} 0 & x \\ x & 0 \end{pmatrix}$$

---

[*1] 凡例：無印は基本問題，† は特に解いてほしい問題，$*$ は応用問題．

[*2] 12 月 20 日の問題 4 を用いる．この結果は任意の正方行列で成り立つことに注意．

[*3] このような分解を Gauss 分解もしくは Cholesky 分解という (分野によって呼び方が異なる)．なお，この分解は任意の次数の正定値対称行列に対して成立する．

[*4] 任意の行列 $M$ に対して ${}^t\mathrm{M} = \mathrm{M}$ が成り立つことを用いる．

[*5] 任意の $\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^2$ に対して $(X\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{y})_0 = (\boldsymbol{x}\,|\,\widetilde{X}\boldsymbol{y})_0$ を満たす 2 次正方行列 $\widetilde{X}$ のこと．