線形代数学・同演習 B

12 月 13 日分　演習問題[*1]

1. (1) $W(1;\,A) = \mathrm{Span}(\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix})$, $W(-1;\,A) = \mathrm{Span}(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$

   (2) $W(2;\,A) = \mathrm{Span}(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix})$, $W(-1;\,A) = \mathrm{Span}(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix})$

2.† (1) ◯ (2) × (3) ◯ (4) ×

   (1) $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}' \in \mathrm{Im}(T)$ とすると，$\mathrm{Im}(T)$ の定義より，$\boldsymbol{v} = T(\boldsymbol{u})$, $\boldsymbol{v}' = T(\boldsymbol{u}')$ となる $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}' \in V$ が存在する．このとき，T の線形性から

$$T(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}') = T(\boldsymbol{u}) + T(\boldsymbol{u}') = \boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}', \quad T(\lambda\boldsymbol{u}) = \lambda T(\boldsymbol{u}) = \lambda\boldsymbol{v}$$

   なので，$\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}' \in \mathrm{Im}(T)$, $\lambda\boldsymbol{v} \in \mathrm{Im}(T)$ である．また，$\mathbf{0}_V = T(\mathbf{0}_V)$ であることより $\mathbf{0}_V \in \mathrm{Im}(T)$ なので，$\mathrm{Im}(T)$ は V の部分空間となる．

   (2) V の零元 $\mathbf{0}_V$ は係数が全て 0 である多項式である．よって W_1 に属するための条件「最高次の係数が 1」を満たさないため，W_1 には零元が含まれない．つまり W_1 は部分空間ではない．

   (3) $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}' \in \mathrm{Ker}(T)$ とすると，定義より $T(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}_V$, $T(\boldsymbol{v}') = \mathbf{0}_V$ となる．このとき，T の線形性から

$$T(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}') = T(\boldsymbol{v}) + T(\boldsymbol{v}') = \mathbf{0}_V, \quad T(\lambda\boldsymbol{v}) = \lambda T(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}_V$$

   なので，$\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}' \in \mathrm{Ker}(T)$, $\lambda\boldsymbol{v} \in \mathrm{Ker}(T)$ である．また，$T(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_V$ であることより $\mathbf{0}_V \in \mathrm{Ker}(T)$ なので，$\mathrm{Ker}(T)$ は V の部分空間となる．

   (4) $T(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_V \neq x$ であるため，零元 $\mathbf{0}_V$ は W_2 に属するための条件を満たさない．つまり，W_2 は部分空間ではない．

3. (1) $g_{T_1}(t) = t(t-1)$, $W(0;\,T_1) = \mathrm{Span}(1)$, $W(1;\,T_1) = \mathrm{Span}(x)$

   (2) $g_{T_2}(t) = (t+1)(t-1)$, $W(1;\,T_2) = \mathrm{Span}(1+x)$, $W(-1;\,T_2) = \mathrm{Span}(1-x)$

   (3) $g_{T_3}(t) = (t-1/2)(t-2)$, $W(1/2;\,T_3) = \mathrm{Span}(x)$, $W(2;\,T_2) = \mathrm{Span}(1)$

4. (1) 固有値は $1, a$ で，対応する固有空間はそれぞれ $\mathrm{Span}(1)$, $\mathrm{Span}(x+\frac{b}{a-1})$

   (2) 固有値は $1, a, a^2$ で，対応する固有空間はそれぞれ $\mathrm{Span}(1)$, $\mathrm{Span}(x+\frac{b}{a-1})$, $\mathrm{Span}((x+\frac{b}{a-1})^2)$

   (3) 固有値は a^i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ で，固有値 a^i に対する固有空間は $\mathrm{Span}((x+\frac{b}{a-1})^i)$ となる．

5.† (1) $W(1;\,T) = \mathrm{Span}(-3x^2-5x+1)$, $W(-2;\,T) = \mathrm{Span}(x)$,
   $W(3;\,T) = \mathrm{Span}(-2x^2-3x+1)$.

   (2) $W(1;\,T) = \mathrm{Span}(-2x^2+3x+1)$, $W(-2;\,T) = \mathrm{Span}(-x^2+2x+1)$,
   $W(4;\,T) = \mathrm{Span}(-2x^2+x)$.

   (3) $W(1;\,T) = \mathrm{Span}(x^2+5x,\ x^1+1)$, $W(2;\,T) = \mathrm{Span}(x^2-x+1)$.

[*1] 凡例：無印は基本問題，† は特に解いてほしい問題，$*$ は応用問題．

6.† $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおく．$PD = AP$ の各成分を比較する．

$$PD = \begin{pmatrix} \lambda a & \mu b \\ \lambda c & \mu d \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix} = AP.$$

特に $(2,1)$ 成分と $(2,2)$ 成分より，$\lambda = \mu = 1$ でなければならないことが分かる．さらに $(1,1)$ 成分と $(1,2)$ 成分を見ると，$c = d = 0$ でなければならない．しかしこのとき $P = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ となるため，正則行列にはなりえない．よって，$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は対角化することができない．

7.* (1) $W_1 \ni \boldsymbol{w}_1 = -\boldsymbol{w}_2 \in W_2$ なので，$\boldsymbol{w}_1, -\boldsymbol{w}_2 \in W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$，つまり $\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{w}_2 = \mathbf{0}$ となる．

(2) $W_1 \ni \boldsymbol{w}_1 - \boldsymbol{w}_1' = \boldsymbol{w}_2' - \boldsymbol{w}_2 \in W_2$ なので (1) より $\boldsymbol{w}_1 - \boldsymbol{w}_1' = \mathbf{0}$ かつ $\boldsymbol{w}_2' - \boldsymbol{w}_2 = \mathbf{0}$．つまり $\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{w}_1'$ かつ $\boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{w}_2'$ となる．