正弦関数の逆関数は，その微分からもわかるように，

$$y = \mathrm{Arcsin}\, x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

と積分を使って表すことができます．その逆関数，すなわち上式において x を y の関数と見做せば，それはもちろん正弦関数 $x = \sin y$ になります[1)]．では，この被積分関数を少しだけ変形した

$$y = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$$

で同様のことを考えるとどうなるでしょうか．実は，この問題が，19 世紀初頭から Gauss, Abel, Jacobi, Weierstrass といった数学界の巨人たちがこぞって研究した楕円関数論に発展していくのです．この楕円関数は複素数を変数とする関数として考えるのが自然で，したがってこの講義の範疇にはとても収まりません．しかし，例えば教科書 p.103 にもあるように算術幾何平均と密接に関わっているなど[2)]，面白い性質をたくさん持っています．本コラムでは度々紹介していますが，参考文献 [1] では，この楕円関数を中心として 19 世紀の数学者たちのドラマが展開されています．

参考文献．

[1] 高木貞治，近世数学史談，岩波書店．

---

1) つまり，不定積分で定義される関数の逆関数が非常に良い性質を持っている，ということです．$\log x = \int_1^x \frac{dt}{t}$ の逆関数である $x = e^y$ も同様の例を与えています．

2) 積分の見た目が大分異なりますが，本質的には同じものです．