線形代数学・同演習 A

6 月 14 日分 質問への回答

質問 n 次の正方行列 A の行列式 $\det A$ を平行 $2n$ 面体の体積で定義するのは変ではありませんか?そもそも n 次元空間のよくわからない物体の体積というのが気持ち悪いです.

— 良い質問ですね．実際，講義でした定義は不十分な点 (符号の決め方が曖昧) もあります．行列式の定義の方法はいくつかあるので，それを幾つか紹介したいと思います.

① 置換群 S_n を利用した定義:

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}.$$

② 特定の条件を満たす関数 $\det\colon M(n,\mathbb{R}) \cong (\mathbb{R}^n)^n \to \mathbb{R}$ としての定義:

(i) $\det(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n) = 1$,
(ii) $\det$ は各列に関して線形性をもつ,
(iii) $\det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = -\det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$.

ここで，$M(n,\mathbb{R})$ は n 次正方行列で，$M(n,\mathbb{R}) \cong (R^n)^n$ は，行列を列ベクトルの集まりとみなす同一視．また，(iii) は i 列目と j 列目を入れ替えたら符号が変わる，ということを言っている.

③ 講義で紹介した方法 (行列を構成する列ベクトルを一辺とする平行 $2n$ 面体の体積としての定義)，符号は ‘適切に’ 定義する.

おそらく，①が普通の定義だと思います．ですので，講義での定義が気持ち悪いということであれば，この①を定義として，講義の定義は行列式の性質として読み替えてください．講義において，①の定義を避けた理由は，その定義のために置換群 S_n を導入する必要があるためです．置換群自体はそこまで難しいものではないのですが，新しい概念を使って定義するよりも，低次元からの類推で直感的な定義をしてから，公式として①を紹介するほうがわかりやすいと考えました．因みに，私としては，②の定義が一番わかりやすいと思っています.

なお，n 次元空間の領域の体積は，微分積分学の後期で学ぶことになります.

質問 線形はどこでつかうんですか？

— 例えば，球面のような曲がった領域を考えるとき，直接曲がった領域を扱うことは難しいので，“接平面” を考える事が多くあります．接平面は，まっすぐな空間なので，線形代数の理論を適応することが出来ます．そして，そこから元の曲面の情報を導出する事ができるというわけです．他にも，連続な関数全体のなす空間が “ベクトル空間” になるので，関数について調べるときに，線形代

数の理論を用いることが出来ます．例えば，微分・積分をするという写像は線形写像です．

質問 この世は点数という表面的なものにより，その人の性格あるいはその人自身を決定してしまうという傾向にあります。自分は，そのことはおかしいと思います。自分は点数だけでは見えてこない~~そのことを~~個性といったものを重視するべきだと思います．なので，今回は平均点行かなかった自分を~~おおめ~~大目に見てください．お願いします．

— その意見には同意しますが，残念ながら基幹教育は点数が全てです．期末試験で挽回してください．

質問 中間テストと小テストの成績のウェイト比を教えて下さい。

— だいたい半分くらいだと思います。

質問 中間テストの成績に入れる割合を教えて頂けますでしょうか。また期末テストの範囲は中間以降の内容ですか。それとも全範囲ですか。

— 多分、だいたい半分くらいです。期末は、中間試験に範囲の問題も出題する予定です。

質問 ボールを相手のゴールにシュウウウウー!!

— えーと…？

質問 レポート頑張りたいと思います!

— はい。

質問 中間テストも 6 割で C 評価ですか?

— 期末次第です。

質問 中間テストの答えはサイトにでますか?

— 出さない予定です．

質問 演習問題の解答をもっとくわしくしてほしい．

— これ以上詳しくはしないつもりですので、わからないときは直接聞きに来てください。

質問 演習問題の解答で定義に従ってとか書かれてもわからないのでちゃんと解答作ってください

— それはちゃんと定義を理解していないからでは? わからないと思ったらまず定義やその問題に出てくる記号について確認するようにしましょう．

質問 3 次のサラスの方法が今まで以上に簡単にできました．

— それはよかったです．

質問 期末テストは簡単にしてください (^_^;)

— そう言われると、難易度を上げたくなります。

質問 わかりやすかった

— そう言っていただけると嬉しいです．

質問 黒板上にしてくれてありがとうございます。助かります。

— 今後も書き終わった黒板を上にするようにしますが、忘れていたら指摘してください。

質問 うぇ〜い[*1]

— ？

サラスの公式が出てきたので，これに関する話を少し．3 次行列の全展開式

$$\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3$$

は，日本では，よく “サラスの公式” と呼ばれている．この ‘サラス’ というのはフランス人数学者 Sarrus という人物で，フランス人の名前なので ‘サリュー’ と読むのが正しい．さらに，この Sarrus がこの全展開式を発見したという確固とした証拠は見つかっておらず，しかも，この全展開式を世界で初めて発見した人は，実は和算家・関孝和である．なので，この公式を「サラスの公式」と呼ぶべきではない，という人もいるようです．[*2]

以下の小論文に詳しく書いてあります．興味のある人は読んでみてください．

関–Sarrus の公式をめぐって　—Sarrus は本当にこれを得たか?—
(阿部剛久，藤野清次; 数理解析研究所講究録 **1195** (2001), 38–50)
(http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/ kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1195-4.pdf)

[*1] 絵文字がありましたが，TeX では入力できず

[*2] もちろん，答案で ‘サラスの公式より’ と書いて減点，ということはありません．