演習問題 9

問題 1. (1) (i) $\dfrac{1}{4}$ (ii) $\log\dfrac{4}{3}$ (iii) $(e-1)^2$ (iv) $\dfrac{\pi-2}{4}$ (2) (i) $\dfrac{1}{8}$ (ii) $\dfrac{\pi}{8}$ (3) 1

解説. (1) (i) 特に解説することなし.

$$\int_D xy\,d\boldsymbol{x} = \int_0^1 \left(\int_0^1 xy\,dx\right) dy = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}\cdot x\right) dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

(ii) これも特に解説することなし.

$$\begin{aligned}\int_D \frac{d\boldsymbol{x}}{(x+y+1)^2} &= \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{1}{(x+y+1)^2}\,dx\right) dy = \int_0^1 \left[\frac{-1}{x+y+1}\right]_{x=0}^1 dy \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{y+1} - \frac{1}{y+2}\right) dy = \Big[\log(y+1) - \log(y+2)\Big]_{y=0}^1 \\ &= (\log 2 - \log 3) - (\log 1 - \log 2) = \log\frac{4}{3}.\end{aligned}$$

(iii) これも特に解説することなし.

$$\int_D e^{x+y}\,d\boldsymbol{x} = \int_0^1 \left(\int_0^1 e^{x+y}\,dx\right) dy = (e-1)\cdot\int_0^1 e^y\,dy = (e-1)^2.$$

(iv) x を先に計算するほうが楽. 最初の x の積分において $u = yx$ と変数変換する.

$$\begin{aligned}\int_D \frac{y^2}{x^2y^2+1}\,d\boldsymbol{x} &= \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{y^2}{x^2y^2+1}\,dx\right) dy = \int_0^1 \left(\int_0^y \frac{y}{u^2+1}\,du\right) dy \\ &= \int_0^1 \Big[y\,\mathrm{Arctan}\,u\Big]_{u=0}^y dy = \int_0^1 y\,\mathrm{Arctan}\,y\,dy \\ &= \int_0^1 \left(\frac{y^2}{2}\right)' \mathrm{Arctan}\,y\,dy = \left[\frac{y^2}{2}\ \mathrm{Arctan}\,y\right]_{y=0}^1 - \int_0^1 \frac{y^2}{2}\cdot\frac{1}{y^2+1}\,dy \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{y^2+1}\right) dy = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\Big[y - \mathrm{Arctan}\,y\Big]_{y=0}^1 \\ &= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi-2}{4}.\end{aligned}$$

(2) (i) x, y どちらから計算してもよいが, ここでは y から計算する. つまり D を縦線領域と思う. $D = \left\{(x,y);\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le \sqrt{1-x^2}\right\}$ であるので,

$$\begin{aligned}\int_D xy\,d\boldsymbol{x} &= \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} xy\,dy\right) dx = \int_0^1 \left[x\cdot\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \frac{1}{2}\cdot\int_0^1 x(1-x^2)dx = \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_{x=0}^1 = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8}.\end{aligned}$$

(ii) これも x, y どちらから計算してもよい．(i) と同様に y から先に計算する．

$$\begin{aligned}\int_D (1-x^2-y^2)d\boldsymbol{x} &= \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} (1-x^2-y^2)dy\right) dx \\ &= \int_0^1 \left[(1-x^2)y - \frac{y^3}{3}\right]_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{2}{3}\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{3}{2}} dx.\end{aligned}$$

ここで，$x = \cos\theta$ と変数変換すると，(簡単のため定数 2/3 は書いてない)

$$\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{3}{2}} dx = \int_{\pi/2}^0 (1-\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}} \cdot (-\sin\theta d\theta) = \int_0^{\pi/2} \sin^4\theta\, d\theta.$$

ここで $\sin^4\theta = (-cos\theta)' \sin^3\theta$ と思って部分積分をすると，$I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^4\theta\, d\theta$ は

$$I = \Big[-\sin^3\theta\cos\theta\Big]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} 3\sin^2\theta\cos^2\theta\, d\theta = 3\int_0^{\pi/2} (\sin^2\theta - \sin^4\theta)d\theta.$$

ここで $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^2\theta\, d\theta = \frac{\pi}{4}$ より $I = \dfrac{3}{4}\pi - 3I$．よって $I = \dfrac{3}{16}\pi$ となるので，

$$\int_D xy\, d\boldsymbol{x} = \frac{2}{3}\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{16}\pi = \frac{\pi}{8}.$$

(3) 与えられた領域が縦線領域なので，素直に y から先に計算する．

$$\begin{aligned}\int_D \left(1-\frac{x}{3}-\frac{y}{2}\right) d\boldsymbol{x} &= \int_0^3 \left(\int_0^{2-\frac{2x}{3}} \left(1-\frac{x}{3}-\frac{y}{2}\right) dy\right) dx \\ &= \int_0^3 \left[\left(1-\frac{x}{3}\right)y - \frac{y^2}{4}\right]_{y=0}^{2-\frac{2x}{3}} dx \\ &= \frac{1}{4}\cdot\int_0^3 \left(2-\frac{2x}{3}\right)\left\{4\left(1-\frac{x}{3}\right) - \left(2-\frac{2x}{3}\right)\right\} dx \\ &= \frac{1}{4}\int_0^3 \left(2-\frac{2x}{3}\right)^2 dx.\end{aligned}$$

ここで $u = 2 - \dfrac{2x}{3}$ と変数変換すれば，

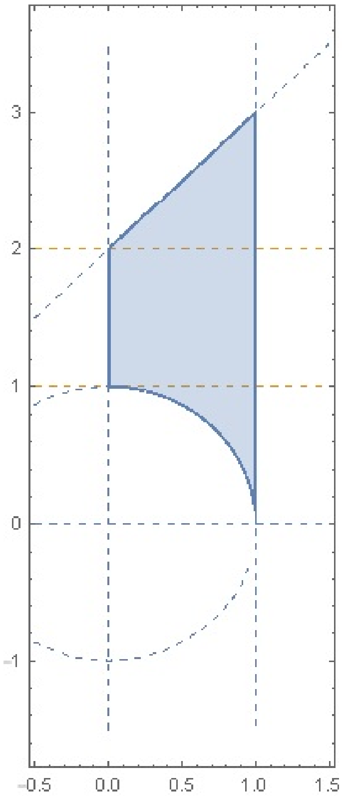
$$\frac{1}{4}\int_0^3 \left(2-\frac{2x}{3}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int_0^2 u^2\cdot\frac{3}{2}\, du = \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{8}{3} = 1.$$

問題 2. (i) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_{\sqrt{1-y^2}}^1 f(x,y)\,dx\right) dy + \int_1^2 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dx\right) dy + \int_2^3 \left(\int_{y-2}^1 f(x,y)\,dx\right) dy$

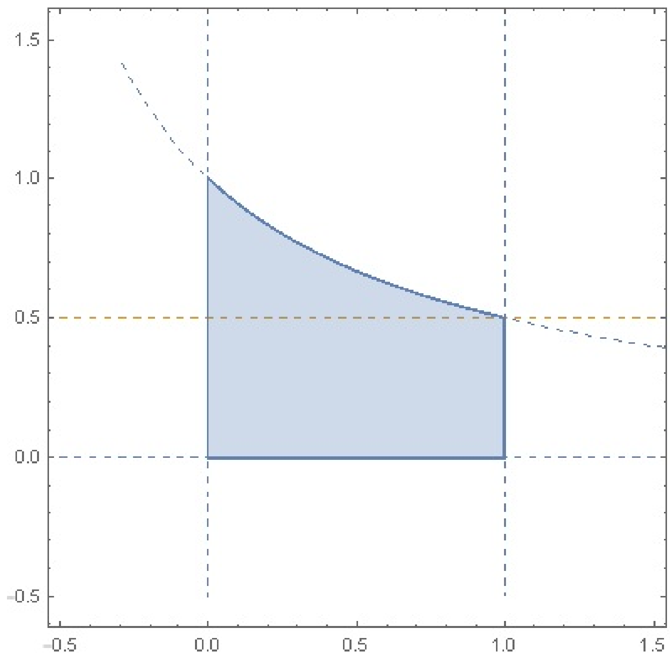
(ii) $\displaystyle\int_0^{1/2} \left(\int_0^1 f(x,y)\,dx\right) dy + \int_{1/2}^1 \left(\int_0^{(1-y)/y} f(x,y)\,dx\right) dy$

以下のように図を描き，どのように分割するのかを考える．

(i)

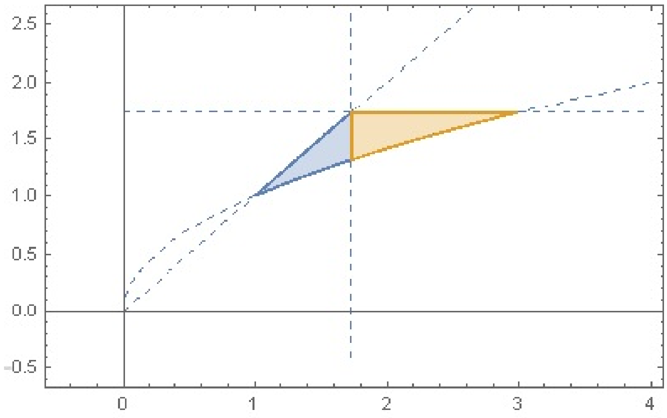


(ii)



小レポート 9

まずは積分領域 D を縦線領域に分割する．そのために図を描く．



よって，与えられた領域を次の 2 つの領域に分割すれば良いことが分かる．

$$D_1 = \left\{(x, y);\ 1 \leq x \leq \sqrt{3},\ \sqrt{x} \leq y \leq x\right\}, \quad D_2 = \left\{(x, y);\ \sqrt{3} \leq x \leq 3,\ \sqrt{x} \leq y \leq \sqrt{3}\right\}.$$

これより，次のように計算できる．

$$\begin{aligned}
I &= \int_D \frac{y}{x^2 + y^2}\, d\boldsymbol{x} = \int_{D_1} \frac{y}{x^2 + y^2}\, d\boldsymbol{x} + \int_{D_2} \frac{y}{x^2 + y^2}\, d\boldsymbol{x} \\
&= \int_1^{\sqrt{3}} \left(\int_{\sqrt{x}}^{x} \frac{y}{x^2 + y^2}\, dy \right) dx + \int_{\sqrt{3}}^{3} \left(\int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{3}} \frac{y}{x^2 + y^2}\, dy \right) dx \\
&= \frac{1}{2} \int_1^{\sqrt{3}} \Big[\log(x^2 + y^2)\Big]_{y=\sqrt{x}}^{x} dx + \frac{1}{2} \int_{\sqrt{3}}^{3} \Big[\log(x^2 + y^2)\Big]_{y=\sqrt{x}}^{\sqrt{3}} dx \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \int_1^{\sqrt{3}} \Big(\log(2x^2) - \log(x^2 + x)\Big) dx + \int_{\sqrt{3}}^{3} \Big(\log(x^2 + 3) - \log(x^2 + x)\Big) dx \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \int_1^{\sqrt{3}} \log(2x^2)\, dx + \int_{\sqrt{3}}^{3} \log(x^2 + 3)\, dx - \int_1^{3} \log(x^2 + x)\, dx \right\}.
\end{aligned}$$

積分領域を複数に分割したときでも，上式の第 3 項のように積分区間をまとめられる場合があるので，各積分領域ごとでの計算ではなく，まとめて計算している．もちろん，別々で計算してもよい．好みの問題である．しかし，ここからは計算ミスを防ぐため，そして式が長くならないために個別に計算する．

① $\int \log x\, dx = x \log x - x$ であることより，

$$\begin{aligned}
\int_1^{\sqrt{3}} \log(2x^2)\, dx &= \int_1^{\sqrt{3}} \Big(\log 2 + 2 \log x\Big) dx = (\sqrt{3} - 1) \log 2 + 2\Big[x \log x - x\Big]_1^{\sqrt{3}} \\
&= (\sqrt{3} - 1) \log 2 + \sqrt{3} \log 3 + (2 - 2\sqrt{3}).
\end{aligned}$$

後で和を取るので，例えばこの式の最後の項において 2 で括るということはしないほうがよい．結局展開することになって二度手間である．

② 部分積分を用いる．

$$\begin{aligned}\int_{\sqrt{3}}^{3}\log(x^2+3)\,dx &= \int_{\sqrt{3}}^{3}(x)'\log(x^2+3)\,dx \\ &= \Big[x\log(x^2+3)\Big]_{\sqrt{3}}^{3} - \int_{\sqrt{3}}^{3} x\cdot\frac{2x}{x^2+3}\,dx \\ &= (3\log 12-\sqrt{3}\log 6) - \int_{\sqrt{3}}^{3}\left(2-\frac{6}{x^2+3}\right)dx \\ &= (3\log 12-\sqrt{3}\log 6) - 2(3-\sqrt{3}) + 6\int_{1}^{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{3t^2+3}\,dt \\ &= (6-\sqrt{3})\log 2 + (3-\sqrt{3})\log 3 + (2\sqrt{3}-6) + \frac{6}{\sqrt{3}}\Big[\mathrm{Arctan}\,t\Big]_{1}^{\sqrt{3}} \\ &= (6-\sqrt{3})\log 2 + (3-\sqrt{3})\log 3 + (2\sqrt{3}-6) + \frac{\sqrt{3}\pi}{6}.\end{aligned}$$

各括弧の前の符号は $+$ にしておくと計算ミスを減らすことができる．

③ $\int\log(x+1)\,dx=(x+1)\log(x+1)-(x+1)$ より，

$$\begin{aligned}\int_{1}^{3}\log(x^2+x)\,dx &= \int_{1}^{3}\Big(\log x+\log(x+1)\Big)dx \\ &= \Big[(x\log x-x)+\Big((x+1)\log(x+1)-(x+1)\Big)\Big]_{1}^{3} \\ &= \Big\{(3\log 3-3)+(4\log 4-4)\Big\} - \Big\{(0-1)+(2\log 2-2)\Big\} \\ &= 6\log 2+3\log 3-4.\end{aligned}$$

これで I の値が計算できる．

$$I=\frac{①+②-③}{2}=\frac{\sqrt{3}\pi-6\log 2}{12}=\frac{\sqrt{3}}{12}\pi-\frac{1}{2}\log 2.$$