12　多変数関数における広義積分 II

前回は多変数関数における広義積分を扱った．それは, 問題が生じる箇所を避けたところで重積分を計算し, その後で極限を取るものであった．今回は発散する場合および被積分関数が符号を変える場合について扱う．

12.1　発散する場合

例題 12.1. $D=\{(x,y);\ 0<x,y\le 1\}$ のとき，

$$I=\int_D \frac{d\boldsymbol{x}}{x^2y^2}.$$

解． $D_n=\{\frac{1}{n}\le x,y\le 1\}$ として，

$$\int_{D_n}\frac{d\boldsymbol{x}}{x^2y^2}=\left(\left[-\frac{1}{x}\right]_{\frac{1}{n}}^{1}\right)^2=(n-1)^2.$$

より，$I=\lim_{n\to+\infty}\int_{D_n}\frac{d\boldsymbol{x}}{x^2y^2}=+\infty$ なので，発散．

例題 12.2. $D=\left\{(x,y);\ 0<x^2+y^2\le 1\right\}$ のとき，

$$I=\int_D\frac{d\boldsymbol{x}}{x^2+y^2}.$$

解． $B_n=\{\frac{1}{n^2}\le x^2+y^2\le 1\}$ として，

$$\int_{B_n}\frac{d\boldsymbol{x}}{x^2+y^2}=\int_0^{2\pi}d\theta\times\int_{\frac{1}{n}}^1\frac{r\,dr}{r^2}=2\pi\log n.$$

よって，$I=\lim_{n\to+\infty}\int_{B_n}\frac{d\boldsymbol{x}}{x^2+y^2}=+\infty$ なので，発散．

12.2　関数が符号を変えるとき

これまでは $f(x,y)\ge 0$ を仮定していた．この条件を外すとどうなるだろうか．次の広義積分を例に考察する: $D=\{0\le x,y\le 1,\ (x,y)\neq(0,0)\}$ として，

$$I=\int_D\frac{x-y}{(x+y)^3}\,d\boldsymbol{x}.$$

(i) D を横線領域としてみると，

$$I=\int_0^1\left(\int_0^1\frac{x-y}{(x+y)^3}\,dx\right)dy=-\frac{1}{2}.$$

(ii) D を縦線領域としてみると，

$$I=\int_0^1\left(\int_0^1\frac{x-y}{(x+y)^3}\,dy\right)dx=\frac{1}{2}.$$

つまり, **計算の仕方によって値が変わる**可能性がある[*1]．

定義 12.3. $f(x,y)$ を D 上で連続な関数とする．絶対値を取った関数 $|f(x,y)|$ が D で広義積分が可能であるとき，$f(x,y)$ は D で**絶対積分可能**という．

先程の例では，$f(x,y)=f^+(x,y)+f^-(x,y)$ と分解[*2]したとき，$\int_D f^+(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}$ と $\int_D f^-(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}$ がともに発散してしまうために不都合が生じた．実際,

$$f^+(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x-y}{(x+y)^3} & (x\ge y)\\ 0 & (x<y)\end{cases}$$

であり，$D_n=\{\frac{1}{n}\le y\le 1,\ y\le x\le 1\}$ とすると，

$$\int_{D_n}f^+(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}=\frac{1}{2}-\frac{n}{n+1}+\frac{1}{4}\log n$$

なので,

$$\int_D f^+(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}=\lim_{n\to+\infty}\int_{D_n}f^+(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}=+\infty.$$

命題 12.4. 有界閉集合 D 上で，1 点 $\boldsymbol{x}_0$ を除いて有界な連続関数は $D':=D\setminus\{\boldsymbol{x}_0\}$ 上で絶対積分可能.

例題 12.5. D を単位円板 $D=\left\{(x,y);\ x^2+y^2\le 1\right\}$, $f(x,y)=\dfrac{x^2+2xy-3y^2}{x^2+y^2}$ $((x,y)\neq(0,0))$ とする．
(1) $f(x,y)$ は $D'=D\setminus\{\boldsymbol{0}\}$ 上で有界であることを示せ.
(2) $\int_D f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}$ を求めよ．

(考え方) 有界であることを示すには，絶対値を取って，上から x,y に依存しない定数で抑えればよい．

注意 12.6. x 軸に沿って原点に近付くとき $f(x,y)\to 1$, y 軸に沿って原点に近付くときは $f(x,y)\to -3$ である．つまり，$f(x,y)$ は原点で不連続であるが，それでも絶対積分が可能である．

注意 12.7. 例題 12.2 の被積分関数は

$$|f(\boldsymbol{x})|=\frac{1}{r^2}\longrightarrow+\infty\quad(r\to+0\text{ のとき})$$

である．つまり，$f(x,y)$ は $D'=D\setminus\{\boldsymbol{0}\}$ で有界でない．なお，これが有界でなくても収束する場合もある[*3]．

まとめ (1) 広義積分は収束せず，発散することもある．
(2) 被積分関数が符号を変えるときは，絶対積分可能なもののみ広義積分が意味を持つ．

---

1 月 23 日.

[*1] 紙面の都合で計算の詳細は省いている．

[*2] $f^+(x,y)$ は $f(x,y)$ が正の値を取る場合はその値を，それ以外のときは 0 を取る関数．$f^-(x,y)$ も同様に定義する．

[*3] 単位円板上における $f(x,y)=(x^2+y^2)^{-1/2}$ など.

演習問題 12

問題 1． 次の広義積分は収束するか．収束する場合はその値を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_D \frac{d\boldsymbol{x}}{\sqrt{x^2-y^2}}$; $D = \left\{ \begin{array}{c} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le x \end{array} \right\}$

(2) $\displaystyle\int_D \frac{d\boldsymbol{x}}{|x-y|}$; $\quad D = \left\{ \begin{array}{c} 0 \le x, y \le 1 \\ x \ne y \end{array} \right\}$

(3) $\displaystyle\int_D \frac{xy}{x^2+y^2}\, d\boldsymbol{x}$; $\quad D = \{0 < x^2+y^2 \le 1\}$

問題 2． 関数 $f(x, y) = \sin(x^2+y^2)$ は $\mathbb{R}^2$ において絶対積分可能かどうか調べよ．

問題 3． 次の閉曲線で囲まれる図形の面積を求めよ．

(1) $x^2+y^2=1$

(2) $ax^2+by^2=1$ $(a, b > 0)$

(3) $\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}=1$

1 月 9 日出題分の小レポートの問題 (2) が全然できていませんでした．しかも，間違いの系統が綺麗に 3 つ (① 答えが $\pi/4$　② 答えが $\pi/32+1/8$　③ 途中で諦め) に分かれていました．③ はともかくとして，他人の解答をうつしたところで何の意味も価値もありません．ウェブページに解答を用意していますので，それを参考にして，きちんと理解するようにしてください．

小レポート

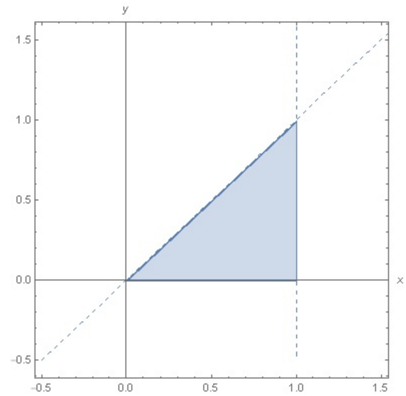
次の広義積分は収束するか．収束するならば，その値を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_D \frac{d\boldsymbol{x}}{x^2y^2}$　(2) $\displaystyle\int_D \frac{d\boldsymbol{x}}{\sqrt{xy}}$　(3) $\displaystyle\int_{D'} \frac{d\boldsymbol{x}}{x-y}$

ここで

$$D = \{(x, y);\ 1 \le x, y \le +\infty\}$$

および D' は次の図形で表される領域である．



小レポートについて． 次回の講義の際に提出すること．原則として期限を過ぎての提出は認めないが，やむを得ない事情がある際は，必ずその旨を**期限日までにメールにより**連絡すること．