微分積分学・同演習 A

演習問題 1

1. (1) $X_1 = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$
   (2) $X_2 = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47\}$
   (3) $X_3 = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right\}$
2. (1) $ax^2 + bx + c\ (a, b, c \in \mathbb{R})$
   (2) $ax^2 + bx - a - b\ (a, b \in \mathbb{R})$
   (3) $x^3/3 + x^2/2 + c\ (c \in \mathbb{R})$
3. $(\text{右辺})^2 - (\text{左辺})^2 \geq 0$ を確認すればよい．(1) $(\text{右辺})^2 - (\text{左辺})^2 = 2(|ab| - ab)$ であるが，絶対値の定義より $|ab| \geq ab$ が成り立つ．(2) $(\text{右辺})^2 - (\text{左辺})^2 = 2(|ab| - ab)$ なので，(1) と同じ．
4. 左辺から式変形する．

$$(\text{右辺}) = \frac{n!}{(j-1)!(n-j+1)!} + \frac{n!}{j!(n-j)!} = \frac{n!}{(j-1)!(n-j)!}\left(\frac{1}{n-j+1} + \frac{1}{j}\right).$$

   ここで $\frac{1}{n-j+1} + \frac{1}{j} = \frac{n+1}{j(n+1-j)}$ なので，

$$(\text{右辺}) = \frac{n!}{(j-1)!(n-j)!} \cdot \frac{n+1}{j(n+1-j)} = \frac{(n+1)!}{j!(n+1-j)!} = \binom{n+1}{j} = (\text{左辺}).$$

5. $(x+1)^n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} x^i$ を利用する．
   (1) 上式において $x = 1$ を代入する．(2) 上式において $x = -1$ を代入する．
6.† (1) 任意の正の数 $\varepsilon > 0$ に対してある自然数 N が存在して，$n \geq N$ を満たす任意の自然数 n に対して $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ が成立する．
   (2) ある正の数 $\varepsilon > 0$ が存在して, どんな自然数 N に対しても $n \geq N$ かつ $|a_n - \alpha| \geq \varepsilon$ となる自然数 n が存在する．
7.† 実数 a に対して $[a]$ を，a を超えない最大の整数とする．任意の正数 ε が与えられたとする．
   (1) $N = [\sqrt[3]{3/\varepsilon}] + 1$ とすれば，$n \geq N$ のとき，$n^3 \geq N^3 \geq 3/\varepsilon$ であるので，$3/n^3 < \varepsilon$ となる．
   (2) $N = [-\log \varepsilon] + 1$ とすれば，$n \geq N$ のとき $e^{-n} \leq e^{-N} < \varepsilon$.

---

4 月 11 日分 (凡例：無印は基本問題，† は特に解いてほしい問題，$*$ は応用問題)
講義用 HP: http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~h-nakashima/lecture/2017C.html

(3) $N = [-\log\varepsilon/\log 2] + 1$ とすれば，$n \geq N$ のとき $1/2^n < 1/2^N < \varepsilon$ である．よって，$|1 - (1 - 1/2^n)| = 1/2^n < \varepsilon$.

8. 背理法を用いる：もし $\alpha \neq 0$ とすれば α は非負の数であることより $\alpha > 0$ であるが，このとき $\varepsilon = \alpha/2$ に対しては $\alpha < \varepsilon$ が成立していない．これは任意の正の数 ε に対して $\alpha < \varepsilon$ を満たすことに矛盾する．よって $\alpha = 0$ でなければならない．