2020 年度　名古屋大学
理系基礎科目（文系）数学入門

第 10 回

講義担当者：中島秀斗

2020 年 6 月 25 日

はじめに

- 授業形態：学習資料 (スライド・ノート) 配布
  - はじめはスライドに目を通してください.
  - ノートはスライドの要約になります．復習にご活用ください.
  - スライド内にある赤い枠で囲った演習問題は，実際に解いてもらうことを想定しています.
- 小テストについて
  - 小テストは NUCT で行われます.
  - 講義日の午前８時から日付が変わるまでの間に完了してください.
- レポートについて
  - 講義 3,4 回毎にレポートを課します.
  - 各回に出題する演習問題を解いたものを，pdf ファイルとして提出してもらいます.
  - 学習資料配布時のお知らせの中で通知します.

凡例

公式や定理など，講義において重要な情報は青の枠で囲む．

演習問題は赤の枠で囲む．実際に手を動かして解いてほしい．

コメントや注意すべき点などは緑の枠で囲む．

例題は黄色の枠で囲む．解答も用意されているが，計算量の多いものは実際に手を動かして一緒に解いてほしい．

§10 積分法

- 微分法については先週までで一区切りとし，今回からは積分法について学ぶ．
- 高校のときに学んだように，積分は微分の逆演算である．
- しかし，本来微分と積分は別の文脈で研究がなされていたものである．ここで関数のグラフの作る図形の面積としての定積分として，再定義する．

今回の目標

- 高校のときに学んだ積分について復習する
- 初等関数の積分の公式を身につける
- 定積分と面積との関係を学ぶ
- Riemann 積分の定義について理解する

§10 積分法

復習

- 微分すると関数 $f(x)$ になる関数，すなわち $F'(x) = f(x)$ となる関数 $F(x)$ を，$f(x)$ の原始関数といい，次の記号で表す．

$$\int f(x)\,dx$$

- 定数 C は微分すると 0 になるので，$F(x) + C$ の形の関数はすべて $f(x)$ の原始関数となる．
- 逆に，$f(x)$ の任意の原始関数は，ある定数 C を用いて以下のようになる．

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

- 導関数の公式を利用することで，次のページにある初等関数の積分の公式が得られる．
- 後に出てくる定積分と対比させて不定積分とも呼ばれる．

不定積分の基本公式

定理 9.1. C を積分定数とする.

(1) $\alpha \neq -1$ のとき $\displaystyle\int x^{\alpha}\,dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C$

(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \log|x| + C$

(3) $\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

(4) $\displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x + C$

(5) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$

(6) $\displaystyle\int e^{x}\,dx = e^{x} + C$

(7) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{Arcsin} x + C$

(8) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{Arctan} x + C$

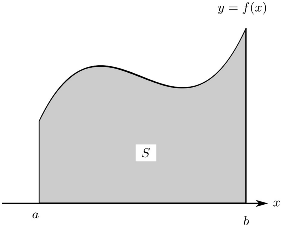
- この講義では，これらの公式を基本公式として引用していく.
- 積分定数は C で表すことにするが，本講義では省略されることもある.
- $\displaystyle\int \frac{1}{f(x)}dx$, $\displaystyle\int 1\,dx$ をそれぞれ $\displaystyle\int \frac{dx}{f(x)}$, $\displaystyle\int dx$ と書くことが多い.

§10.2 定積分

- ある区間で連続な関数 $f(x)$ の原始関数を $F(x)$ とするとき，この区間に属する 2 つの数 a, b に対して，$F(b) - F(a)$ の値を関数 $f(x)$ の a から b までの定積分といい，以下の記号を用いる．

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

- このとき a を定積分の下端といい，b を上端という．ここで下端 a と上端 b の大小関係は $a < b$, $a = b$, $a > b$ のいずれであってもよい．
- 特に，区間 $[a, b]$ で常に $f(x) \geqq 0$ ならば，定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ は，曲線 $y = f(x)$ と x 軸，および 2 直線 $x = a$, $x = b$ で囲まれた部分の面積 S に等しい．



定積分の基本的な性質についても，ここで復習しておこう．

定積分の基本性質．

1. 任意の定数 α, β に対して

$$\int_a^b \big(\alpha f(x) + \beta f(x)\big) dx + \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b f(x)\,dx$$

2. $a < b < c$ のとき

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

3. 区間 $[a, b]$ において $f(x) \geqq g(x)$ ならば

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqq \int_a^b g(x)\,dx.$$

定積分の基本性質.

4. 区間 $[a,b]$ で連続な関数 $f(x)$ に対して

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad (a \leqq x \leqq b)$$

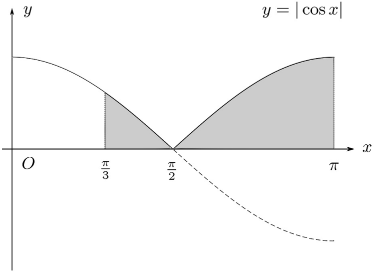
と定義すれば，$F(x)$ は区間 $[a,b]$ において微分可能で，$F'(x) = f(x)$ となる.

5. 定積分において積分記号内の記号はダミー変数であり，別の記号に変えても結果は変わらない．すなわち，

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt.$$

例題 10.2. 定積分 $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} |\cos x|\,dx$ を求めよ．

下図にもあるように $\cos x$ は積分区間の中で符号を変えるので，絶対値を外すときに注意が必要である．積分自体は基本公式を使えばよい．



解. $\cos x$ は，$\frac{\pi}{3} \leqq x < \frac{\pi}{2}$ で正，$\frac{\pi}{2} < x \leqq \pi$ で負であるので，積分区間をこの 2 つに分割する．

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} |\cos x|\,dx &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} |\cos x|\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} |\cos x|\,dx \\ &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x\,dx\end{aligned}$$

さて基本公式より $\displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x + C$ であるので，

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = \Big[\sin x\Big]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{3} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2},$$

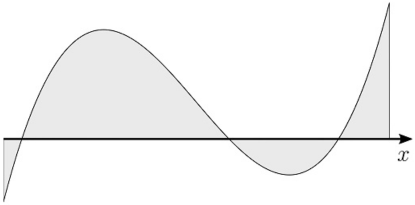
$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x\,dx = \Big[\sin x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \sin\pi - \sin\frac{\pi}{2} = -1.$$

よって $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} |\cos x|\,dx = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - (-1) = 2 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ □

§10.3 和の極限としての定積分

- 積分を微分の逆演算として定義したが，もともとは別の文脈で研究がなされていたものであり，それを結びつけたのがNewton（ニュートン）とLeibniz（ライプニッツ）である．
- ここでは，Riemann（リーマン）により導入された，関数のグラフの面積として定積分を定義する方法のあらすじについて紹介する．

1. 関数 $y = f(x)$ が区間 $[a, b]$ で連続で，その曲線と x 軸，2 直線 $x = a$, $x = b$ で囲まれた図形 A を考える．ただし，負の部分（x 軸よりも下にある部分）はマイナスの面積を持つものとしておく．



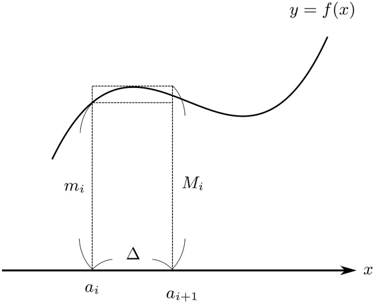
2. 区間 $[a,b]$ を n 等分して，n 個の小区間に分ける．

$$[a_0,a_1],\ [a_1,a_2],\ \ldots,\ [a_{n-1},a_n]$$

ここで $a_i = a + \frac{i}{n}(b-a)$ である．特に $a_0 = a$, $a_n = b$．各小区間の幅は $\Delta = \frac{b-a}{n}$ である．

3. 各小区間 $[a_i, a_{i+1}]$ における $f(x)$ の最大値と最小値をそれぞれ M_i および m_i とすれば，次の不等式が成り立つ．

$$m_i \leqq f(x) \leqq M_i \quad (a_i \leqq x \leqq a_{i+1}).$$



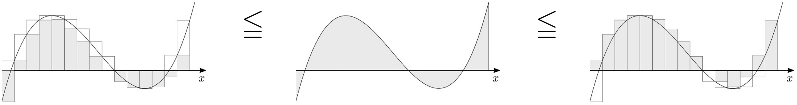
4. s_n と S_n を次で定義をする.

$$s_n = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \times \Delta, \quad S_n = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \times \Delta.$$

s_n は図形 A に含まれる長方形の面積の和であり，S_n は全体として図形 A を含む長方形の面積の和である.

5. A の面積を S とすると，次の不等式が成立する.

$$s_n \leqq S \leqq S_n.$$



s_n $\qquad S \qquad$ S_n

6. $n \to \infty$ としたとき，

もし s_n と S_n とが同一の極限値に収束するならば，

はさみうちの定理より，S はその極限値と一致する．この極限値を図形 A の面積と定義するわけである．

このアイデアにより定義された積分は，Riemann(リーマン)積分と呼ばれる．

要するに，曲線で囲まれた図形を，たくさんの長方形を用いて上からと下からとで挟み，それらの面積の和の極限を取ることで，関数で囲まれた図形の面積を計算しましょう，ということである．

もちろん，すべての関数に対してこのような積分が定義できるわけではない．

例 (Dirichlet（ディリクレ）の関数) 関数 $f(x)$ を次で定義する．

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x \text{ は有理数}) \\ 0 & (x \text{ は無理数}) \end{cases}$$

このとき，$f(x)$ は Riemann 積分が定義できない．

実際，区間 $\left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right]$ には必ず無理数が含まれる．例えば $i \geqq 1$ のとき $\frac{\sqrt{i^2+1}}{n}$ とすれば，これは区間 $\left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right]$ に含まれる無理数になる．よって，この区間における $f(x)$ の最大値は 1 になる．一方で端点は有理数なので最小値は 0 であるので

$$s_n = 0, \quad S_n = 1$$

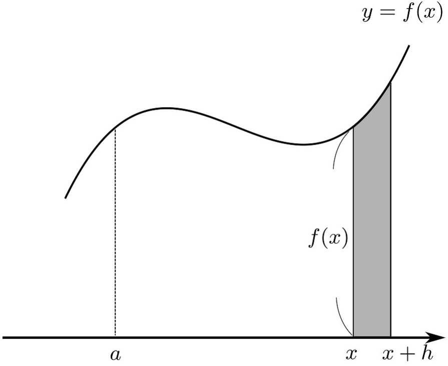
となる．したがってはさみうちの定理が使えず，面積が定義できない．

このように一般の関数の枠組みであれば Riemann 積分により積分が定義できるとは限らないが，連続関数であれば，実はいつでも Riemann 積分が定義できる．

定理． 連続関数は常に Riemann 積分可能である．

その証明は少し込み入った議論が必要になるので，この講義では扱わない．興味がある人は，例えば野村隆昭著「微分積分学講義」（共立出版）の第 5 章を参照のこと．

定積分の基本性質 4 を，図を用いて説明すると以下のようになる．微分の定義式の分子は $F(x+h)-F(x)$ であるが，これは下図の色で塗られた部分の面積である．分母に来るのは h，これはこの図形の「底辺」の長さである．連続関数ならば h が小さければ関数の変動は大きくないので，色で塗られた部分を長方形と思えば面積は大体 $f(x)\times h$ である．これを h で割るので，結局 $f(x)$ になる．



Riemann 積分の応用

例題 10.3.　次の不等式が成り立つことを示せ.

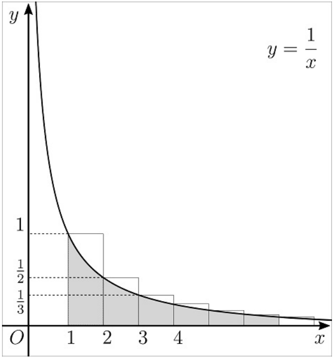
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} > \log(n+1)$$

（考え方）　$\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \log|x|$ を通して，$\dfrac{1}{x}$ と $\log x$ は関連している.
よって右辺の $\log$ は $\dfrac{1}{x}$ の積分で出てきたものと推測できる.

証明.　積分を使って不等式を導くことを考える．考え方でも述べたように，

$$\int \frac{dx}{x} = \log|x| + C$$

である．今回示す不等式においては積分して得られる $\log x$ の方が小さいので，関数 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ を上から長方形で囲むとよい．



各区間 $[k, k+1]$ において，関数 $f(x)$ で囲まれる面積とそれを上から囲む長方形の面積を比較することにより

$$\frac{1}{k} \times 1 > \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} = \Big[\log|x|\Big]_k^{k+1} = \log(k+1) - \log k$$

という不等式を得る．この両辺を $k=1$ から $k=n$ まで足し合わせると，所要の不等式

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} > \log(n+1)$$

となる． $\square$

演習問題. 次の不等式を証明せよ．ただし，$n \geqq 2$ とする．

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} < 1 + \log n$$

例題 10.3 と同様であるが，今度は関数 $f(x) = \frac{1}{x}$ のグラフの下にある長方形を考える．

この講義で積分を Riemann 積分として再定義したが，実際の計算においてはあまり意識する必要はない．その有り難みは，従来のように積分を微分の逆演算として定義すると，たとえば

$$\int \frac{\sin x}{x}\, dx$$

といった簡単な積分さえ，その存在が保証されない (この原始関数は初等関数の組み合わせでは書けないことが知られている)．一方，Riemann 積分で考えると，これは連続関数の積分なので (具体的な形は分からないけれども) その存在が保証されるのである．

演習問題

1. 次の図形の面積を求めよ.
    (a) $y = \sin x \ (0 \leqq x \leqq \pi)$ と x 軸
    (b) $y = \dfrac{1}{x^2+1}$ と x 軸，y 軸および直線 $x = 1$
    (c) $y = e^x$ と x 軸，y 軸および直線 $x = 1$
2. 次の不定積分を求めよ.

$$\text{(a)} \ \int x\sqrt{x}\,dx \quad \text{(b)} \ \int \frac{\cos^3 x + 2}{\cos^2 x}\,dx$$