1 正則行列

復習. A: n 次正方行列

$$A \text{ が正則} \Leftrightarrow \text{逆行列 } A^{-1} \text{ を持つ}.$$

命題 1.1. (1) A が正則のとき，逆行列はただひとつに決まる．
(2) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

証明. (1) B, C がともに A の逆行列とすると，

$$BAC = B(AC) = BE_n = B.$$

一方，

$$BAC = (BA)C = E_nC = C.$$

よって，$B = C$.
(2) $(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}E_nB = B^{-1}B = E_n$. よって (1) より $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. □

1.1 余因子行列

$A = (a_{ij})_{n\times n}$
復習. 各 j 列について $\det A = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}|A_{ij}|$ (余因子展開)
これは $\det A = det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \overset{j}{\boldsymbol{a}_j}, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ の j 列目を展開して得られた．

定義 1.2. $A = (a_{ij})_{n\times n}$ に対して

$$\widetilde{a}_{ij} := (-1)^{i+j}|A_{ji}|$$

と置いたとき，$\widetilde{A} = (\widetilde{a}_{ij})_{n\times n}$ を A の余因子行列という．

例. $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ とすると，$A_{11} = d$, $A_{12} = c$, $A_{21} = b$, $A_{22} = a$ なので，

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} (-1)^2A_{11} & (-1)^3A_{21} \\ (-1)^3A_{12} & (-1)^4A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

よって $A\widetilde{A} = \widetilde{A}A = (ad - bc)E_2 = (\det A)E_2$.

命題 1.3. A を任意の n 次正方行列とするとき，$A\widetilde{A} = \widetilde{A}A = (\det A)E_n$.

定理 1.4. (1) A が正則 $\Leftrightarrow \det A \neq 0$.
(2) $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\widetilde{A}$.
(3) $AB = E_n \ \Rightarrow \ BA = E_n$.

例題 1.5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ の余因子行列と逆行列を求めよ．

注意 1.6. この方法もやはり実用的なのは $n = 2$ のときのみ．$n \geq 3$ のときは掃き出し法のほうが有効．

定理 1.7. n 次正方行列 A に対し，次は同値．

(1) A は正則行列,

(2) A は逆行列 A^{-1} を持ち，$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\widetilde{A}$,

(3) $\det A \neq 0$,

(4) A の簡約化は E_n,

(5) $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ はただ 1 つの解を持つ.