11　行列式の性質 II

11.1　行列式の積公式

命題 11.1. $A = (a_{ij})_{n\times n}$ が三角行列ならば，$\det A = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$. 特に $\det E_n = 1$ である.

定理 11.2. n 次正方行列 A, B に対して，$\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

証明. $2n$ 次正方行列 $\begin{pmatrix} A & O \\ -E_n & B \end{pmatrix}$ を二通りの方法で計算する. □

11.2　余因子展開

定義 11.3. $A = (a_{ij})_{n\times n}$ の第 i 行と第 j 列を取り除いて得られる $n-1$ 次の正方行列を余因子と呼び，A_{ij} とかく.

$A = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ において，

$$\boldsymbol{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} = a_{ij}\boldsymbol{e}_1 + \cdots + a_{rj}\boldsymbol{e}_n$$

なので，行列式は列ごとに加法的であることを用いると

$$\det = \det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{n}) = \sum_{i=1}^{n} \det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \overset{j\text{ 列目}}{a_{ij}\boldsymbol{e}_i}, \ldots, \boldsymbol{a}_n).$$

ここで i 番目のものを計算すると，

$$\det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \overset{j\text{ 列目}}{a_{ij}\boldsymbol{e}_i}, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = \left| \begin{array}{ccc|c|ccc} a_{11} & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ \hline a_{i1} & \cdots & \cdots & a_{ij} & \cdots & \cdots & a_{in} \\ \hline \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{array} \right| \quad A_{ij}\text{ があることに注意.}$$

$$= (-1)^{i-1} \left| \begin{array}{ccc|c|ccc} a_{i1} & \cdots & \cdots & a_{ij} & \cdots & \cdots & a_{in} \\ \hline a_{11} & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{array} \right| \quad \begin{array}{l}1\text{ つ上との入れ替えを繰り返して} \\ i\text{ 行目を一番上にする.}\end{array}$$

(↑ 行の並びは $i, 1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n$ の順)

$$= (-1)^{i1} \cdot (-1)^{j-1} \left| \begin{array}{c|cccc} a_{ij} & a_{i1} & \cdots & \cdots & a_{in} \\ \hline 0 & & & & \\ \vdots & & & & \\ & & A_{ij} & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{array} \right| \quad 1\text{ つ左との入れ替えを繰り返す.}$$

(↑ 列の並びは $j, 1, 2, \ldots, j-1, j+1, \ldots, n$ の順)

$$= (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}.$$

これより,

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$$

が成り立つことがわかる．これを $\det A$ の第 j 列に関する**余因子展開**という.

例.

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 & \boxed{4} \\ 3 & 2 & \boxed{0} \\ 1 & 5 & \boxed{3} \end{vmatrix} = (-1)^{1+3} \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= 4(15-2) - 0 \cdot (10-7) + 3(3-21) = 1.$$

注意 11.4. (1) 余因子展開に現れる符号は市松模様:

$$\begin{vmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \cdots \\ + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}$$

(2) 行に関する余因子展開もできる：

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}.$$

(3) 0 が多い列 (行) でやると効果的.

例題 11.5. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -8 & 11 & 4 \\ 9 & -6 & -2 \end{vmatrix}$ を計算せよ.

解) まず基本変形を施して 0 を増やしてから余因子展開を利用するとよい.