線形代数学・同演習 A

5 月 24 日分　演習問題

1. 次の連立方程式を解け.

(1) $\begin{cases} x + 2y + 3z + 5w = 0 \\ 2x + 4y + 7z + 11w = 0 \\ -x - 2y - 2z - w = 0 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} x + y - 2z + w = 0 \\ 2x - y + 2z + 2w = 0 \\ 3x + 2y - 4z - 3w = 0 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 2x + 4y + z + 4u + 5v = 0 \\ x + 2y + 3z - 3u + 5v = 0 \\ 4x + 8y + 15z - 18u + 23v = 0 \end{cases}$　(4) $\begin{cases} x + 3y - 2z - 3w = 0 \\ 2x + y + z + 4w = 0 \\ 4x + 2y - z + 5w = 0 \\ -2x - y + z - 2w = 0 \end{cases}$

2. 次の行列は正則かどうか調べよ．また正則ならば，その逆行列を求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 2 & -6 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ -2 & 7 & 7 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} -3 & 6 & -7 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} -3 & 7 & 12 \\ 1 & -2 & -4 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$　(5) $\begin{pmatrix} 3 & -9 & -20 \\ -4 & 12 & 21 \\ 1 & -3 & -5 \end{pmatrix}$　(6) $\begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & -12 & 1 & 18 \\ 0 & 5 & 0 & -36 \end{pmatrix}$

(7) $\begin{pmatrix} -2 & 6 & 2 & 5 \\ 1 & -3 & -1 & -2 \\ 2 & -7 & 0 & 2 \\ 5 & -14 & -8 & -14 \end{pmatrix}$　(8) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -6 & -2 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

3. 正方行列 A に対して，逆行列が存在すれば唯一つであることを示せ. *1

4. A, B を正則行列とする.

(a) $(A^{-1})^{-1} = A$ を示せ.

(b) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ を示せ.

(c) $A + B$ はまた正則行列となるか.

5.* 次の連立一次方程式の解空間の次元をパラメータ a, b により分類して述べよ. *2

(1) $\begin{cases} x + y + z + aw = 0 \\ x + y + bz + w = 0 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} ax - y + z + 3aw = 0 \\ bx + y + bz + w = 0 \\ x + w = 0 \end{cases}$

6.* 与えられた整数係数の行列を簡約化するプログラムを作成せよ. *3

---

*1 つまり，B, C が共に A の逆行列とすれば，$B = C$ となることを示す.

*2 式が複雑になるので解は求めなくてもよい．また，解空間の次元とは，解を記述する際に用いるパラメータの個数のことである.

*3 行列の基本変形はプログラミングと相性がよい．このことが連立一次方程式を拡大係数行列に置き換えて解く大きな理由である．プログラミングに興味がある方はぜひやってみてください.