線形代数学・同演習 A

6 月 21 日分　小テスト

学籍番号：　　　　　　　　　　　　　氏名：

置換 $\sigma, \tau \in S_6$ を次で定義する．

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) $\sigma \circ \tau$ および $\tau \circ \sigma$ を計算せよ．

(2) σ および τ を巡回置換の積で表わせ．また $\mathrm{sgn}(\sigma)$, $\mathrm{sgn}(\tau)$ を求めよ．

解)　(1) σ, τ の上段を，それぞれの下段に合わせると

$$\sigma = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 & 1 & 6 & 2 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 4 & 6 & 5 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 5 & 4 & 1 & 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

なので，

$$\sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 4 & 6 & 5 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \tau \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 5 & 4 & 1 & 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

ここで，後ろ側にある方を先に計算することに注意する．

(2) 例題 9.8 の方法を用いると，それぞれ，

$$\begin{aligned} \sigma:&\quad 1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 6 \to 1, \\ \tau:&\quad 1 \to 3 \to 4 \to 1, \\ &\quad 2 \to 5 \to 6 \to 2 \end{aligned}$$

なので，

$$\sigma = (1\,2\,3\,4\,5\,6), \quad \tau = (1\,3\,4) \circ (2\,5\,6).$$

r 文字の巡回置換の符号は $(-1)^{r-1}$ であること，および符号は各置換に分解できることより，

$$\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^5 = -1, \qquad \mathrm{sgn}(\tau) = (-1)^2 \cdot (-1)^2 = 1.$$

※講義や講義内容に関して，意見・感想・質問等を自由に記述してください．