線形代数学・同演習 A

7 月 19 日分　演習問題

計算問題は解答のみ，証明問題は大雑把な道筋を説明するに留めています．突貫で作成したので，誤りがある可能性が高いので注意してください (前半は大丈夫だと思いますが).

1. 余因子行列を $\widetilde{A}$，逆行列を A^{-1} とする．

(1) $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \\ 3 & -14 & -12 \end{pmatrix}$，$A^{-1} = \dfrac{1}{19}\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \\ 3 & -14 & -12 \end{pmatrix}$

(2) $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ -5 & -18 & -11 \end{pmatrix}$，$A^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ -5 & -18 & -11 \end{pmatrix}$

(3) $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 8 & -6 & -11 \\ -13 & 7 & 22 \\ -9 & 4 & 11 \end{pmatrix}$，$A^{-1} = \dfrac{1}{11}\begin{pmatrix} 8 & -6 & -11 \\ -13 & 7 & 22 \\ -9 & 4 & 11 \end{pmatrix}$

2. まず $\det(A) \neq 0$ とする．このとき，$A\widetilde{A} = (\det A)E_n$ の両辺の det をとれば，行列式の積公式より

$$\det(A)\det(\widetilde{A}) = \det(|A|E_n) = (\det(A))^n$$

であるので，$\det(\widetilde{A}) = (\det(A))^{n-1}$．次に，$\det(A) = 0$ とする．$A = O$ ならば明らかなので $A \neq O$ とする．このとき，もし $\det(\widetilde{A}) \neq 0$ ならば，$\widetilde{A}$ は逆行列 B を持つことになるが，$A\widetilde{A} = 0E_n = O$ の両辺に右から B をかけると $A = O$ となってしまう．

3. (1) $\det A = 2a - 7$

(2) $a = 3, 4$

4. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とする．このとき $|A| = ad - bc$ である．さて A^{-1} は

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

であるので，この成分が全て整数であるとすると，

$$\frac{a}{|A|},\quad \frac{b}{|A|},\quad \frac{c}{|A|},\quad \frac{d}{|A|}$$

がすべて整数になっていることになる．したがって，

$$a = a'|A|,\quad b = b'|A|,\quad c = c'|A|,\quad d = d'|A|$$

となる整数 a', b', c', d' が存在することになる．このとき，$|A| = ad - bc = |A|^2(a'd' - b'c')$ であるので，

$$a'd' - b'c' = \frac{1}{|A|}$$

となるが，左辺は整数の和と積なので整数であるが，右辺は $|A| \neq \pm 1$ ならば整数になり得ない．したがって，$|A| = \pm 1$ でなければならない．

5. $\max := \max_{i,j} |a_{ij}|$ とおく (A の成分の中で絶対値が最も大きいもの)．さて，すべての成分が 1 である $n \times n$ 行列を I と書くと，$I^k = n^k I$ となる．これを用いると，行列 X の (i,j) 成分を $(X)_{ij}$ と書くことにすれば，

$$|(A^k)_{ij}| \leq |((\max I)^k)_{ij}| = (n \max)^k$$

となる．ここで Cauchy 列

$$|x_{ij}(M) - x_{ij}(N)| \quad (M > N)$$

を考える．

$$|x_{ij}(M) - x_{ij}(N)| = \left| \sum_{k=N+1}^{M} \frac{1}{k!} (A^k)_{ij} \right| \leq \sum_{k=N+1}^{M} \frac{1}{k!} |(A^k)_{ij}| \leq \sum_{k=N+1}^{M} \frac{(n \max)^k}{k!}$$

であり，指数関数 $e^x = \sum_k \frac{x^k}{k!}$ は収束するので，$M, N \to \infty$ のとき

$$|x_{ij}(M) - x_{ij}(N)| \to 0$$

となる．

6. (1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(3) $n = 2k$ のとき，$(-1)^k E_2$，$n = 2k+1$ のとき，$(-1)^k \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(4) (5) $n = 1$ のとき $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，$n = 2$ のとき $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，$n \geq 3$ のとき，O.

7. (1) $\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} e^t & 2te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

(4) $n = 3k$ のとき $A^n = E_2$,
$n = 3k+1$ のとき $A^n = A$, $(A^3 = E$ なので$)$
$n = 3k+2$ のとき $A^n = A^2 = -A - E$

(5) $\begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

8. $\det(\exp(tA)) = e^{\mathrm{tr}\, A}$ という関係が成立する．これは，$A = PDP^{-1}$ と対角化[*1]としたとき，

$$\exp(tA) = \sum_k \frac{t^k}{k!} (PDP^{-1})^k = P \sum_k \frac{t^k}{k!} D^k P^{-1} = P(\exp tD) P^{-1}$$

[*1] 実際は Jordan 標準形まで考えないといけないが…。

と，対角行列 D の指数写像の共役 (P と P^{-1} で挟んだ形) になることからわかる．実際，D を対角に $d_1, \ldots, d_n$ が並んでいるとすると，$\exp(tD)$ は対角に $e^{td_1}, \ldots, e^{td_n}$ が並んでおり，

$$\det \exp(tA) = \det P \exp(tD) P^{-1} = \det \exp(tD) = \prod_j (e^{td_j}) = e^{\sum_j td_j}.$$

ここで $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} D$ であることを思い出せば，$\det(\exp(tA)) = e^{\operatorname{tr} A}$ という関係が得られる．

9. A と B が可換ならば $(A+B)^n = \sum_k {}_nC_k A^{n-k} B^k$ が成り立つので，後は実数の時と同様に証明できる．

例えば $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$, $B = -\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とすれば，$A+B = a\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ なので $\exp(A+B) = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix}$. 一方で，$\exp A = eA$, $\exp B = -e^{-1}B$ なので，

$$\exp(A)\exp(B) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & a^2+1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix}.$$