線形代数学・同演習 B

演習問題 1

1. (1) $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (2) 解なし

   (解説) (1) 係数行列を簡約化すれば $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$．(2) 簡約化すれば $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -9 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. (1) -1 (2) -12 (3) 223

3. (1) $ax^2 + bx + c$ $(a, b, c \in \mathbb{R})$

   (2) $ax^2 + bx - a - b$ $(a, b \in \mathbb{R})$

   (3) $x^3/3 + x^2/2 + c$ $(c \in \mathbb{R})$

   (4) $ax^2 + bx + c$ $(a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0)$

4. (1) × (2) ◯

   (解説) 考えている集合に属する要素に対して，その和やスカラー倍を考えたときに，元の集合に留まっているかどうかを調べる．**(1)** $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in W_1$ とすれば，$A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}$ なので $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \notin W_1$．よって部分空間でない．($A\mathbf{0} = \mathbf{0} \neq \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ なので部分空間でない，でも可)．**(2)** $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in W_2$ とすれば，$A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \mathbf{0}$ なので $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in W_2$．スカラー倍も同様．よって部分空間.

5.† (1) × (2) ◯ (3) ◯ (4) ×

   (解説) 考えている集合に属する要素に対して，その和やスカラー倍を考えたときに，元の集合に留まっているかどうかを調べる．**(1)** x^2 と $-x^2$ はどちらも 2 次多項式であるが，その和は 0 であり，これは 2 次の多項式ではない．よって部分空間でない．**(2)** $(x-1)$ で割り切れるような 3 次多項式は，適当な 2 次以下の多項式 $p(x)$ を用いて $(x-1)p(x)$ と書ける．例えば和を考えると，$(x-1)p_1(x) + (x-1)p_2(x) = (x-1)(p_1(x)+p_2(x))$ となるので和をとっても元の集合に留まっている．スカラー倍も同様．よって部分空間．**(3)** 定数項が 0 である多項式は $ax^3 + bx^2 + cx$ $(a, b, c \in \mathbb{R})$ という形をしている．このような多項式の和・スカラー倍をとっても定数項は 0 のままであるので，部分空間になる．**(4)** 各係数の和が 1 であるような多項式同士を足せば，各係数の和は 2 になるので，和を取ったら元の集合からはみ出してしまう．よって部分空間でない.

6.† (1) ◯ (2) ◯ (3) ×

   (解説) 命題 1.9 の三条件を確認すれば良い．**(1)** $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in W_1 \cap W_2$ とす

---

10 月 10 日分 (凡例：無印は基本問題，† は特に解いてほしい問題，$*$ は応用問題)

講義用 HP: http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~h-nakashima/lecture/2017LA.html

る．このとき $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in W_1$ かつ $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in W_2$ である．$i = 1, 2$ に対して W_i は V の部分空間なので，$\mathbf{0} \in W_i$ かつ $\lambda\boldsymbol{u} + \mu\boldsymbol{v} \in W_i$ である．したがって，$\mathbf{0} \in W_1 \cap W_2$ かつ $\lambda\boldsymbol{u} + \mu\boldsymbol{v} \in W_1 \cap W_2$ なのでこれは部分空間．**(2)** (1) と同様に $\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0} \in W_1 + W_2$ である．また，$\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2$，$\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 \in W_1 + W_2$ $(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{v}_i \in W_i)$ とすれば,

$$\lambda(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2) + \mu(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) = (\lambda\boldsymbol{u}_1 + \mu\boldsymbol{v}_1) + (\lambda\boldsymbol{u}_2 + \mu\boldsymbol{v}_2)$$

であり, W_1, W_2 は部分空間なので, $W_1 + W_2$ も部分空間となる．**(3)** 例えば, $V = \mathbb{R}^2$ とし，$W_1 = \{\left(\begin{smallmatrix} x \\ 0 \end{smallmatrix}\right);\ x \in \mathbb{R}\}$, $W_2 = \left\{\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ y \end{smallmatrix}\right);\ y \in \mathbb{R}\right\}$ とすれば明らかに W_1, W_2 は部分空間であり, $W_1 \cup W_2 = \{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right);\ x = 0$ 又は $y = 0\}$ となる．しかしながら，$\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \in W_1$, $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \in W_2$ であるが，$\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \notin W_1 \cup W_2$ である．

7.[†]　部分空間になるのは (1),(2) で，ならないのは (3),(4) である．考え方は他の問題と同じなので解説は省略.