

線形代数学・同演習 A

5 月 31 日分 小テスト

学籍番号：

氏名：

自然数 n に対して、次の総和を計算せよ。

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} (j+i)(j-i)$$

解) $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j$ である。まず、 i に関する和を計算すると、

$$\sum_{i=1}^j (j^2 - i^2) = j \cdot j^2 - \frac{1}{6}j(j+1)(2j+1) = \frac{2}{3}j^3 - \frac{1}{2}j^2 - \frac{1}{6}j$$

となる。したがって、次に j に関して和を取れば、

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \left[\frac{2}{3}j^3 - \frac{1}{2}j^2 - \frac{1}{6}j \right] &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2}n(n+1) \\ &= \frac{1}{12}n(n+1)[2n(n+1) - (2n+1) - 1] \\ &= \frac{1}{12}n(n+1)(2n^2 - 2) \\ &= \frac{1}{6}(n-1)n(n+1)^2. \end{aligned}$$

これより、

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} (j+i)(j-i) = \frac{1}{6}(n-1)n(n+1)^2.$$

講義や講義内容に関して、意見・感想・質問等を自由に記述してください。