中間試験までの講義の概要[1)]

ここで，中間試験までの講義のあらすじを振り返ることにしましょう．

数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の一般化として，ベクトル空間 というものを考えています．これは "スカラー倍と足し算で閉じている" というとても緩い条件を満たすものであり，数ベクトル空間はもちろん，多項式や関数の空間，行列の空間なども含んでいる，とても応用範囲の広いものです．さて，このようにベクトル空間というものを定義したわけですが，実は 基底 をとれば，ベクトル空間は，今まで扱ってきた数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ と同じように扱うことができます[2)]．しかも，ベクトル空間上の 線形写像 も，前期に扱った行列として表現することができます．しかしながら，**基底のとり方には任意性があり，基底を変えれば表現するものの見た目が変わります**．例えば，ベクトル空間の同じ要素でも，基底を変えると表現する数ベクトルが変わってしまいますし，線形写像の表現行列も変わってしまいます．ここがベクトル空間を理解する上で難しい点の一つです[3)]．"基底を変えると表現するものの見た目が変わる" と言いましたが，これには規則性があり，基底の変換行列というものを用いて，その間にある関係を記述することができます．例えば，線形写像 T に対する 2 つの表現行列 A, B の間には $B = Q^{-1}AP$ という関係があります[4)]．

線形写像の中でも，線形変換 (同じ空間の間の線形写像) が特に重要で，以降は線形変換を中心に扱っていきます．線形変換 T の，ある基底に関する表現行列を A としたとき，別の基底に関する表現行列 B は必ず

$$B = P^{-1}AP \qquad (\text{ただし } P \text{ は正則行列})$$

という形で書けますが，今は "この B をなるべく簡単なものにできないか" という問題について考えています．この問題を解くのに，行列 (線形変換) の 固有値・固有ベクトル が鍵となってくるのです．

後期の後半は，B を対角行列にできる場合に，どのようにすれば 対角化 できるのかということを主に扱います．そして，B を対角行列にするような正則行列 P として良いものはなにか，それを見つけるにはどうすればいいのか，という方向に進んでいきます．

---

1) キーワードには下線を引いています．
2) ただし有限次元のベクトル空間に限る．
3) しかし，最大のメリットでもあります．
4) ただし P, Q は基底の変換行列．特に，正則行列である．