

線形代数学・同演習 A

演習問題 9

1. 4 次の置換群 S_4 の元をすべて記述し^{*1}，その中で偶置換であるものの個数を調べよ．
2. S_n の元の個数が $n!$ であることを証明せよ．
- 3.† σ, τ を次のような置換とするとき，積 $\sigma \circ \tau$ と積 $\tau \circ \sigma$ をそれぞれ計算せよ．

$$(1) \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 5 & 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(2) \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 4 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

- 4.† 次の置換の符号を求めよ．

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad (b) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \quad (c) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(d) (1\ 3\ 4)(4\ 1\ 5\ 2) \quad (e) (2\ 4\ 7)(2\ 5\ 4)(1\ 6\ 3\ 2) \quad (f) (1\ 5\ 4)(3\ 1\ 6\ 2)(1\ 5\ 4)$$

5. 置換の互換の積への分解は 1 通りではない．問題 4 に現れる置換でそれ確かめよ．またその分解に依らず，互換の偶奇は変わらないことも確かめよ．
6. σ を巡回置換 $(k_1\ k_2\ \cdots\ k_r)$ とするとき， $\sigma^r = \varepsilon$ (単位置換) となることを示せ．
7. 次で定義される置換 σ_n の符号を求めよ．

$$\sigma_n := \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow & \downarrow \\ n & n-1 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

定義．複数の巡回置換に対して，それぞれの巡回域が共通の数を持たないとき，互いに素という．例えば， $(1\ 2)$ と $(3\ 4)$ は互いに素であるが， $(1\ 2)$ と $(1\ 3)$ は互いに素ではない．

8. σ, τ を互いに素な巡回置換とする．このとき， $\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma$ を示せ．
- 9.† 次の置換を，互いに素な巡回置換の積として表わせ．

$$(a) (1\ 2\ 3)(4\ 5)(1\ 2\ 3\ 6\ 7) \quad (b) (1\ 2)(1\ 2\ 3\ 4)(1\ 2)(2\ 3\ 5\ 6) \\ (c) (1\ 3)(4\ 5)(3\ 6)(2\ 4) \quad (d) (1\ 2\ 4)(1\ 3\ 4\ 5)$$

6 月 20 日分 (凡例：無印は基本問題，† は特に解いてほしい問題，* は応用問題)

講義用 HP: <http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~h-nakashima/lecture/2017LA.html>

*1 巡回置換の長さ毎に調べると分類が楽である．