線形代数学・同演習 B

演習問題 4

1. (1) 次元は 3，基底は例えば $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4$. (2) 次元は 2，基底は例えば $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$.
(考え方) 与えられたベクトルを並べて作った行列を簡約化し，その主成分の数が次元と一致し，主成分がある列に対応するベクトルを選べばそれが基底になる．

2.† (1) 次元は 2，基底は例えば $f_1(x)$ と $f_2(x)$ (2) 次元は 3，基底は例えば $g_1(x), g_2(x)$ と $g_4(x)$ (3) 次元は 4，基底は例えば $H_0(x), \ldots, H_3(x)$ [*1].
(考え方) 多項式の標準基底 $[x^3, x^2, x, 1]$ に関してベクトル表示をして，そのベクトルの組に対して問題 1 と同様の計算を行う．基底も主成分に対応する列を持ってくればよいが，考えている空間が多項式の空間なので，基底も多項式に戻すことを忘れずに．

3.† (1) 次元は 1，基底は例えば $\begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. (2) 次元は 2，基底は例えば $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.
(考え方) 解空間は，与えられた行列を係数行列に持つ連立方程式を解き，その解のパラメータの数が次元，解を表すベクトルが基底．像空間は問題 1 と同様．

4. (1) $\begin{pmatrix} 56 & -17 \\ -23 & 7 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 13 & -4 & 16 \\ 6 & -1 & 8 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; **(考え方)** 行列として $([\boldsymbol{u}])^{-1}([\widetilde{\boldsymbol{u}}])$ を計算すればよい．

5. U の二つの基底をそれぞれ $[\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n]$ と $[\widetilde{\boldsymbol{u}}_1, \ldots, \widetilde{\boldsymbol{u}}_n]$ とし，基底の変換行列を $P = (\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n)$ とおく．このとき $[\widetilde{\boldsymbol{u}}_1, \ldots, \widetilde{\boldsymbol{u}}_n] = [\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n]P$ である．さて，$\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n$ の線形独立性を調べるので，$a_1\boldsymbol{p}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{p}_n = \boldsymbol{0}$ とおく．このとき，
$$\boldsymbol{0} = [\boldsymbol{u}]\sum_{i=1}^{n} a_i\boldsymbol{p}_i = [\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n]P\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = [\widetilde{\boldsymbol{u}}_1, \ldots, \widetilde{\boldsymbol{u}}_n]\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_1\widetilde{\boldsymbol{u}}_1 + \cdots + a_n\widetilde{\boldsymbol{u}}_n.$$
ここで $\widetilde{\boldsymbol{u}}_1, \ldots, \widetilde{\boldsymbol{u}}_n$ は線形独立なので，$a_1 = \cdots = a_n = 0$ でなければならない．よって，$\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n$ は線形独立となる．

6.† **(1)** $m = \dim W$ とおき，$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ をその基底とする．すると，これらは V においても線形独立である．$\dim V$ は V から取り出せる線形独立なベクトルの最大個数だったので，$\dim V \geq m = \dim W$ となる．**(2)** $\Leftarrow$ は明らかなので，$\Rightarrow$ を示す．まず明らかに $W \subset V$ である．(1) と同様に $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ を W の基底とする．$\dim V = m$ であるので，V の元は m 個の線形独立なベクトルの線形結合で表すことができるが，そのベクトルとして $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ を選べば，V の任意の元は W の元 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ の線形結合で書けることになる．つまり $V \subset W$ となるので，$W = V$ である．

---

10 月 31 日分 (凡例：無印は基本問題，† は特に解いてほしい問題，$*$ は応用問題)

講義用 HP: http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~h-nakashima/lecture/2017LA.html

[*1] 問題 6 より $\mathbb{R}[x]_3$ と一致するので，今の場合は $x^3, x^2, x, 1$ でもよい．