線形代数学・同演習 A

7 月 12 日分 質問への回答

質問 $\det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{b}, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = \det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \sum_{j=1}^{n} x_j \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$

$$= \boxed{\sum_{j=1}^{n} x_j} \det(\cdots\cdots)$$

なんでくくり出せるかわからない

— 行列式の性質 (講義で言うところの命題 10.3 と 10.4) を繰り返し使うと総和記号がくくり出せることが分かります.

質問 ヒント出すなら全体に対して出してください.

— 訊かれるとつい色々話してしまうんですよね．来週以降気を付けます.

質問 $\cdots$ のところはどんな数字が入るんですか。

— 基本的には $\cdots$ の前後にある数字と同じもの，あるいは $1, 2, \ldots, n$ のように (簡単な) 規則に従って並んでいると解釈します．それは斜め $\ddots$ になっても同様です.

質問 中間の $\boxed{2}$ (1) の標準形は $3x - 4y + 12z = 13$ の形ではないでしょうか。

— 多分そうだと思いますが、何に対してのコメントなのかが分からないので、なんとも言えません.

質問 分かりません。

質問 さっぱり分かりませんでした。

質問 よくわからんかった

質問 何をすればいいか分かりませんでした,

— いきなり n 次のものを計算しようとしても難しいので，まず $n = 2, 3, 4$ といったサイズが小さいものから計算してみるといいかもしれません.

質問 わかりません。次回かいせつきく！

— 全体的にあまりできていない感じでしたので，次回は解説から始めようと思います.

質問 むりぽ $\backslash(\hat{}q\hat{})/$

— 諦めないでくださいね?

質問 点ください...

— 期末では点を取れるように演習問題で復習してください.

質問 三週連続ホームラン打ってしまった.

— おめでとうございます？

質問 今日の演習は鬼

— 今までの小テストの問題に比べると少し難しかったですが，このような問題も解けるようになってほしいところです.

質問 (問) パンはパンでも食べられるないパンはなーんだ??

質問 (答) パンツ!

— ええと…?

この日の小テストの問題で，漸化式や帰納法を使わなくても計算できる方法があるので紹介しておきます．

$$L_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \qquad U_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \ddots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とおけば,

$$L_n^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & \ddots & \vdots \\ & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad U_n^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

なので，$A_n = L_n^{-1} + U_n^{-1}$．ここで,

$$L_n^{-1} + U_n^{-1} = L_n^{-1}(L_n + U_n)U_n^{-1}$$

と書けること，および L_n^{-1}, U_n^{-1} はいずれも対角成分が 1 である三角行列であることを踏まえると，行列式の積公式より

$$\det(A_n) = \det(L_n + U_n) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

である．各行の成分の和が等しいので，それを第 1 列に集めると,

$$\begin{vmatrix} n+1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ n+1 & 2 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ n+1 & 1 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix} = (n+1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix} = (n+1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

なので，$\det(A_n) = n+1$ がでる．

この方法は，この行列だからうまく行った方法であって，普通は帰納法なり漸化式なり用いるほうがよいです．

因みに，この行列 A_n は “A 型の Cartan 行列” と呼ばれている特別な行列になります．数学の表現論という分野において，非常に重要な行列です．