線形代数学・同演習 A

6 月 14 日分　演習問題

1. 次の行列式を求めよ．ただし，a, b, c は任意の実数とする．

$$(1)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \quad (2)\ \begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} \quad (3)\ \begin{vmatrix} 5 & 2 & -5 \\ -2 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & -4 \end{vmatrix} \quad (4)\ \begin{vmatrix} 4 & -5 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & -5 \end{vmatrix}$$

$$(5)\ \begin{vmatrix} -1 & -4 & 3 \\ -3 & 5 & 3 \\ -3 & 1 & 5 \end{vmatrix} \quad (6)\ \begin{vmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} \quad (7)\ \begin{vmatrix} 1 & -a & -b \\ a & 1 & -c \\ b & c & 1 \end{vmatrix}$$

2. 次の行列式を求めよ．答えはできるだけ因数分解をした形で求めること．[*1]

$$(1)\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \quad (2)\ \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} \quad (3)\ \begin{vmatrix} a & a^2 & b+c \\ b & b^2 & c+a \\ c & c^2 & a+b \end{vmatrix}$$

$$(4)\ \begin{vmatrix} 2a+b+c & b & c \\ a & a+2b+c & c \\ a & b & a+b+2c \end{vmatrix}$$

3. ベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ が以下のベクトルであるとき，それらの外積 $\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}$ を求めよ．

$$(1) \begin{cases} \boldsymbol{x} = {}^t(2,1,3), \\ \boldsymbol{y} = {}^t(-1,2,-1) \end{cases} \quad (2) \begin{cases} \boldsymbol{x} = {}^t(1,5,2), \\ \boldsymbol{y} = {}^t(-2,-3,1) \end{cases} \quad (3) \begin{cases} \boldsymbol{x} = {}^t(3,-4,-1), \\ \boldsymbol{y} = {}^t(-1,2,3) \end{cases}$$

4. 任意の数ベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して，次の不等式が常に成り立つことを示せ．

$$|(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y})| \leq \|\boldsymbol{x}\| \cdot \|\boldsymbol{y}\|.$$

5. 任意の 2 次正方行列 A に対して，$A^2 - \mathrm{tr}(A)A + \det(A)E_2 = O$ が成り立つことを示せ．
6. 同一平面上にない 4 点 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^3$ を頂点に持つ四面体の体積を求めよ．
7. 任意の 3 次正方行列 A, B に対して，$\det(AB) = \det(A)\det(B)$ が成り立つことを示せ．[*2]
8. 任意の正方行列 A, B に対して，$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(A)\,\mathrm{tr}(B)$ は成り立つか．成立するならば証明を，しないのならば反例を与えよ．
9. 次の連立一次方程式を解け．また，係数行列の行列式を求めよ．

$$(1) \begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + 2y + 4z = -2 \\ 4x + 5y + 2z = 3 \end{cases} \qquad (2) \begin{cases} x - 3y - 3z = 2 \\ -x + 3y + 3z = -1 \\ 2x - 6y - 8z = 3 \end{cases}$$

10. 3 次正方行列 $A = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ に対して，次の行列式を計算せよ．

$$(1)\ \det(2\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) \qquad (2)\ \det(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) \qquad (3)\ \det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})$$

[*1] 後の講義で，より簡単な計算方法を紹介する．

[*2] この性質は任意の n 次正方行列に対しても成立する．後の講義で，行列式の理論を使った簡単な証明を紹介する．