線形代数学・同演習 A

7 月 19 日分　演習問題

1. 次の行列の余因子行列を求めよ．また，その逆行列を求めよ．

$$(1)\ \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & -2 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad (2)\ \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad (3)\ \begin{pmatrix} -1 & 2 & -5 \\ -5 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

2. n 次正方行列 A に対して，$\det \tilde{A} = (\det A)^{n-1}$ を示せ．
3. (1) 次の行列の行列式を計算せよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix}$$

   (2) a を整数とするとき，A^{-1} の成分がすべて整数になるような a の値を求めよ*1．

4.* 2 次正方行列 A の成分が全て整数であるとする．A^{-1} の成分もすべて整数であるならば，$\det(A) = \pm 1$ であることを示せ*2．

本日の講義内容とは離れますが，行列の指数写像 exp というものを紹介したいと思います*3．

定義. n 次正方行列 A に対して，指数写像 exp を次で定義する:

$$\exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k.$$

5. A を任意の n 次正方行列とする．自然数 N に対して，行列 $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} A^k$ の (i,j) 成分を $x_{ij}(N)$ とするとき，$\displaystyle\lim_{N\to+\infty} x_{ij}(N)$ は収束することを示せ．
6. 次の行列を A とするとき，その n 乗 A^n を計算せよ．

$$(1)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3)\ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4)\ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \quad (5)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

7. 問題 6 の行列 A に対して，$\exp(tA)$ $(t \in \mathbb{R})$ を計算せよ．
8. 問題 6, 7 の行列 A および $\exp(tA)$ のトレース tr および行列式に関して，なにか関係はあるか．それはどんな行列に対しても成り立ちそうか．
9. A, B が可換 $(AB = BA)$ ならば，$\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$ が成り立つことを示せ．また，可換でないときにも成立するか．

---

*1 ヒント：余因子行列を考える．

*2 この性質は，一般の n 次のものでも成り立つ．

*3 試験範囲には含めません．この指数写像は “Lie 群と Lie 環” という理論で中心的な役割を果たしますが，他にも常微分方程式などにも応用されています．定義自体は実数における指数写像をそのまま行列に拡張した形ではありますが，その内容は驚くほど多様です．