線形代数学・同演習 A

6 月 14 日分　演習問題

計算問題は解答のみ，証明問題は大雑把な道筋を説明するに留めています．

1. (1) 7

   (2) a^2+b^2

   (3) 36

   (4) -12

   (5) -10

   (6) 0

   (7) $1+a^2+b^2+c^2$

2. (1) $(a-b)(a-b)(a-c)$

   (2) $-(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

   (3) $(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$

   (4) $2(a+b+c)^3$

3.
$$(1)\ \begin{pmatrix}-7\\-1\\5\end{pmatrix}\quad(2)\ \begin{pmatrix}115\\7\end{pmatrix}\quad(3)\ \begin{pmatrix}-10\\-8\\2\end{pmatrix}$$

4. $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ を任意の $\mathbb{R}^n$ のベクトルとし，実数 t を任意にとる．このとき，ベクトル $t\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ を考える．ノルム $||\cdot||$ の定義および内積 $(\cdot|\cdot)$ の双線形性から
$$0\leqslant||\,t\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\,||^2=(t\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\,|\,t\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=||\,\boldsymbol{x}\,||^2\cdot t^2+2\,(\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{y})\cdot t+||\,\boldsymbol{y}\,||^2.$$
つまり，t に関する 2 次関数 $||\,\boldsymbol{x}\,||^2\cdot t^2+2\,(\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{y})\cdot t+||\,\boldsymbol{y}\,||^2$ が常に ≥ 0 である事がわかる．これより，この二次関数の判別式は常に ≤ 0 となるので，
$$(2\,(\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{y}))^2-4||\,\boldsymbol{x}\,||^2\cdot||\,\boldsymbol{y}\,||^2\leq 0,$$
つまり，$|\,(\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{y})\,|\leq||\,\boldsymbol{x}\,||\cdot||\,\boldsymbol{y}\,||.$

5. $A=\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)$ とすれば，$\mathrm{tr}(A)=a+d$, $\det(A)=ad-bc$ なので，$A^2-\mathrm{tr}(A)\,A+\det(A)E_2$ を普通に計算すれば良い．

6. 略.

7. 成立しない．反例として $A=\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)$, $B=\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$. 成り立たないほうが普通である．

8. (1) $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}16\\-13\\2\end{smallmatrix}\right)$, det=1,　(2) 解を持たない，　det=0.

9. (1) $2\det(A)$　(2) $-\det(A)$　(3) $\det A$