ベクトル空間の次元とは，基底をなすベクトルの組をなすベクトルの本数だったわけですが，どんなベクトル空間もその本数が有限で収まるわけではありません．例えば多項式全体がなすベクトル空間 $\mathbb{R}[x]$ は無限次元のベクトル空間です．実際，任意の自然数 n に対して

$$1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}$$

は n 本の線形独立なベクトルの組になります．このようなベクトル空間に対しては本講義で扱う理論は一般には通用しませんが，有限次元からの類推により無限次元用の理論が構築されています（固有値 $\to$ スペクトル等）．

無限という言葉が出てきたので，それに纏わる話を少し．

問題

次の集合たちの “要素の個数” を比較せよ．

$$\mathbb{N}, \quad \mathbb{Z}, \quad \mathbb{Q}, \quad \mathbb{R}, \quad \mathbb{R}^2.$$

もちろんこれらは無限集合なのでそのまま数は比較できないので，二つの集合の間に全単射があれば等しい，なければ等しくないということとします[1)]．すると，不思議な事に

$$|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| < |\mathbb{R}| = |\mathbb{R}^2| = \cdots = |\mathbb{R}^n|$$

となるのです（“要素の数” を $|\mathbb{N}|$ 等の記号で表している）．‘$\mathbb{N}$ と $\mathbb{Q}$’ では $\mathbb{Q}$ が，‘$\mathbb{R}$ と $\mathbb{R}^2$’ では $\mathbb{R}^2$ が圧倒的に数が多そうなものですが$\cdots$．このように，無限次元になると有限次元では思いもよらなかった事が起こってしまうため，無限を扱う際には細心の注意が必要となってきます．ちなみに，この無限に関する理論は G. Cantor により創始されました．詳しく調べたい方は参考文献に挙げた本を読んでください．

1) あまり正確ではないですが．

参考文献

[1]「無限」に魅入られた天才数学者たち，アミール・D. アクゼル (著)， 青木薫 (訳)，早川書房．