演習問題 11

問題 1． (1) 曲線 $x=y^2$ 上で被積分関数が発散する．そこで，この曲線を避けて積分するために，$D_n=\left\{(x,y);\ 0\le y\le 1-\frac{1}{n},\ y^2+\frac{1}{n}\le x\le 1\right\}$ とおく．この場合は先に x を計算するのが楽である．以下では y に関して偶関数であることを利用している．

$$\begin{aligned}
\int_{D_n}\frac{d\boldsymbol{x}}{\sqrt{x-y^2}} &= \int_0^{1-\frac{1}{n}}\left(\int_{y^2+\frac{1}{n}}^1\frac{dx}{\sqrt{x-y^2}}\right)dy=\int_0^{1-\frac{1}{n}}\left[2\sqrt{x-y^2}\right]_{x=y^2+\frac{1}{n}}^1 dy\\
&=\int_0^{1-\frac{1}{n}}\left(\sqrt{1-y^2}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)dy\\
&=2\operatorname{Arcsin}(1-\tfrac{1}{n})+\sin\left(2\operatorname{Arcsin}(1-\tfrac{1}{n})\right)-\frac{1}{\sqrt{n}}\left(1-\frac{1}{n}\right).
\end{aligned}$$

よって，$\lim_{x\to 1-0}\operatorname{Arcsin}x=\dfrac{\pi}{2}$ であることを思い出して，

$$\int_D\frac{d\boldsymbol{x}}{\sqrt{x-y^2}}=2\lim_{n\to+\infty}\int_{D_n}\frac{d\boldsymbol{x}}{\sqrt{x-y^2}}=\pi.$$

(2) 積分区間が無限大である．また，この積分区間の中で被積分関数が発散する点はない．そこで，一辺の長さが n の正方形 K_n で第一象限を近似する．

$$\begin{aligned}
\int_{K_n}\frac{d\boldsymbol{x}}{(x+y+1)^3} &= \int_0^n\left(\int_0^n\frac{dy}{(x+y+1)^3}\right)dx=-\frac{1}{2}\int_0^n\left[\frac{1}{(x+y+1)^2}\right]_{y=0}^n dx\\
&=-\frac{1}{2}\int_0^n\left(\frac{1}{(x+n+1)^2}-\frac{1}{(x+1)^2}\right)dx\\
&=-\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{x+n+1}+\frac{1}{x+1}\right]_0^n\\
&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{2}{n+1}+1\right).
\end{aligned}$$

よって，

$$\int_D\frac{d\boldsymbol{x}}{(x+y+1)^3}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{2}{n+1}+1\right)=\frac{1}{2}.$$

(3) 点 $(a,0)$ を中心とする半径 $1-a$ の円を D' とすると，被積分関数は正なので

$$\int_D\frac{d\boldsymbol{x}}{(x-a)^2+y^2}\ge\int_{D'}\frac{d\boldsymbol{x}}{(x-a)^2+y^2}$$

である．さて $(x,y)=(a,0)$ で被積分関数が発散するので，その点を除いたところで積分する．$x=a+r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ と変数変換すれば

$$\int_{D'}\frac{d\boldsymbol{x}}{(x-a)^2+y^2}=\int_0^{2\pi}\left(\int_{\frac{1}{n}}^{1-a}\frac{r\,dr}{r^2}\right)d\theta=2\pi\int_{\frac{1}{n}}^{1-a}\frac{dr}{r}=2\pi\log\left(n(1-a)\right).$$

これは発散する．元の積分は D' よりも広い領域での積分であり，被積分関数は常に正であるので，元の積分も発散する．

問題 2. (1) $\dfrac{\sqrt{\pi}}{4}$　(2) $\dfrac{1}{2}\,\Gamma(\frac{3}{4})$ [*1]　(3) $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$　(4) $\sqrt{2\pi}$　(5) $\dfrac{\pi}{\sqrt{ac-b^2}}$

(1) $(e^{-x^2})' = -2xe^{-x^2}$ なので，

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x(e^{-x^2})'\,dx = \Big[xe^{-x^2}\Big]_0^{+\infty} + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$$
$$= \frac{\sqrt{\pi}}{4}.$$

(2) $u = x^2$ という変数変換をすれば

$$\int_0^{\infty} \sqrt{x}e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} u^{\frac{1}{4}}e^{-u}\cdot u^{-\frac{1}{2}}du = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} u^{\frac{3}{4}-1}e^{-u}\,du = \frac{1}{2}\,\Gamma(\tfrac{3}{4}).$$

(3) $u = \log\dfrac{1}{x}$ とおけば，$u\colon +\infty \to 0$ で，

$$x = e^{-u}, \quad du = -\frac{dx}{x} \quad\Longleftrightarrow\quad dx = -e^{-u}du.$$

よって，

$$\int_0^1 \left(\log\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} dx = \int_0^{+\infty} u^{1/2}e^{-u}du.$$

ここで $u = v^2$ と変数変換すれば，(1) に帰着される．

$$\int_0^{+\infty} u^{\frac{1}{2}}e^{-u}du = \int_0^{+\infty} ve^{-v^2}\cdot 2vdv = 2\int_0^{+\infty} v^2e^{-v^2}\,dv = 2\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{4} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

(4) (3) と同じ変換を行う．すると，

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x\log(1/x)}} = \int_0^{+\infty} \frac{u^{-1/2}}{e^{-u/2}}\,e^{-u}du = \int_0^{+\infty} u^{-u/2}e^{-u/2}\,du.$$

ここで $u/2 = v^2$ となるように変数変換すると，与えられた積分に帰着される．

$$\int_0^{+\infty} u^{-u/2}e^{-u/2}\,du. = \int_0^{+\infty} (2v^2)^{-1/2}e^{-v^2}\cdot 4vdv = \frac{4}{\sqrt{2}}\int_0^{+\infty} e^{-v^2}\,dv = \sqrt{2\pi}.$$

(5) まず次の式に注目する．

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = (x,\ y)\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

[*1] 出題ミスで本来は $\sqrt{x}e^{-x}$ でした．

ここで行列 $A=\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & c \end{smallmatrix}\right)$ は対称行列なので，直交行列により対角化可能で，次のように書ける．

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = {}^t P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} P.$$

ここで λ, μ は行列 A の固有値であり，P は直交行列である．与えられた条件から $\lambda, \mu > 0$ となることが分かる．また，$\lambda \cdot \mu = \det A = ac - b^2$ に注意．さて，$\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) = P\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ と変数変換すると，P は直交行列なので Jacobian は ± 1 である．よって

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-ax^2-2bxy-cy^2}\,d\boldsymbol{x} = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\lambda u^2-\mu v^2}\,d\boldsymbol{u}.$$

正方形による近似列をとれば,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\lambda u^2-\mu v^2}\,d\boldsymbol{u} &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda u^2}\,du \times \int_0^{+\infty} e^{-\mu v^2}\,dv \\ &= \frac{1}{\sqrt{\lambda\mu}}\left(\int_0^{+\infty} e^{-w^2}\,dw\right)^2 = \frac{\pi}{\sqrt{\det A}}.\end{aligned}$$

途中で $w = \lambda u^2$ のような変数変換を行っている．この計算の中で，P も固有値も具体的に計算する必要が無いことに注意.

小レポート 11

(1) 問題が生じる箇所は境界 $x^2+y^2=1$ のところ．よって近似する集合列として，$B_n=\{\sqrt{x^2+y^2}\le 1-\frac{1}{n}\}$ を取る．このとき，極座標変換を行うと，

$$\begin{aligned}\int_{B_n}\frac{d\boldsymbol{x}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}&=\int_0^{2\pi}d\theta\times\int_0^{1-\frac{1}{n}}\frac{r\,dr}{\sqrt{1-r^2}}=2\pi\times\frac{1}{2}\int_0^{(1-\frac{1}{n})^2}\frac{du}{\sqrt{1-u}}\\&=-2\pi\Big[\sqrt{1-u}\Big]_0^{(1-\frac{1}{n})^2}=2\pi\left(1-\sqrt{1-(1-\tfrac{1}{n})^2}\right)\end{aligned}$$

よって，

$$\int_{D_1}\frac{d\boldsymbol{x}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}=\lim_{n\to+\infty}\left(2\pi\left(1-\sqrt{1-(1-\tfrac{1}{n})^2}\right)\right)=2\pi.$$

(2) 問題が生じるのは原点 $(0,0)$ のみ．x^2+y^2 があるので極座標変換を考えることにする．この場合，近似する集合列として $0\le\theta\le\frac{\pi}{4}$，$\frac{1}{n}\le r\le\frac{1}{\cos\theta}$ が取れる．これを K_n と書くことにすると，

$$\begin{aligned}\int_{K_n}\frac{x+y}{x^2+y^2}\,d\boldsymbol{x}&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{\cos\theta}}\frac{r(\cos\theta+\sin\theta)}{r^2}\,rdr\right)d\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left\{\left(1+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)-\frac{1}{n}(\sin\theta+\cos\theta)\right\}d\theta\\&=\left[\theta+\log|\cos\theta|+\frac{1}{n}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}\\&=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\log 2-\frac{1}{\sqrt{2}n}.\end{aligned}$$

よって，

$$\int_{D_2}\frac{x+y}{x^2+y^2}d\boldsymbol{x}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\log 2-\frac{1}{\sqrt{2}n}\right)=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\log 2.$$

(3) D_3 は非有界である所が問題．極座標変換を用いたいので，$\mathbb{R}^2$ への近似列として円板 $B_n=\{\sqrt{x^2+y^2}\le n\}$ を取る．すると，

$$\begin{aligned}\int_{B_n}\frac{d\boldsymbol{x}}{(x^2+y^2+1)^2}&=\int_0^{2\pi}d\theta\times\int_0^{n}\frac{r}{(r^2+1)^2}\,dr=2\pi\times\frac{1}{2}\int_0^{n^2}\frac{du}{(u+1)^2}\\&=\pi\times\left[-\frac{1}{u+1}\right]_0^{n^2}=\pi\left(1-\frac{1}{n^2+1}\right).\end{aligned}$$

よって，

$$\int_{D_3}\frac{d\boldsymbol{x}}{(x^2+y^2+1)^2}=\lim_{n\to+\infty}\left(\pi\left(1-\frac{1}{n^2+1}\right)\right)=\pi.$$