微分積分学・同演習 A

演習問題 2

1.† 詳しくは教科書 pp.15,16 を参照のこと．

考え方．使えるもの：$\forall\varepsilon_1 > 0\ \exists N$ s.t. $n \geq N \Rightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon_1$

$\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{\alpha}\right| = \frac{|a_n - \alpha|}{|a_n|\,|\alpha|}$ であるが，$a_n \to \alpha$ よりある番号 N_1 があって，$n \geq N_1$ のとき $|a_n - \alpha| < \frac{|\alpha|}{2}$，つまり $|a_n| > \frac{|\alpha|}{2} (> 0)$ となる．よって

$$\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{\alpha}\right| = \frac{|a_n - \alpha|}{|a_n|\,|\alpha|} < \frac{2\varepsilon_1}{|\alpha|^2}$$

なので，改めて $|a_n - \alpha| < \frac{|\alpha|^2}{2}\ (n \geq N_2)$ を満たす $N_2 (> N_1)$ をえらべばよい．

2.† 準備：$\left|\frac{1}{\sqrt{n}} - 0\right| < \varepsilon$ を式変形すると $n \geq \frac{1}{\varepsilon^2}$ なので，$N = \left[\frac{1}{\varepsilon^2}\right] + 1$ とすれば十分．

証明．ε を任意にとる．このとき $N := \left[\frac{1}{\varepsilon^2}\right] + 1$ ととれば，$n \geq N$ のとき

$$\left|\frac{1}{\sqrt{n}} - 0\right| = \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{N}} < \varepsilon$$

とできるので，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ である．

3. (1) 0 (2) $\frac{3}{2}$ (3) 1 (4) $\frac{1}{3}$ (5) $\frac{1}{2}$ (6) 0

(1) および (5) は，いわゆる無理化をする．

(3) は $\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \to e \cdot e^{-1} = 1$.

4. (1) 1 (2) 1 (3) 0

(1) $a = 1$ のときは明らか．$a > 1$ のとき，$\sqrt[n]{a} = 1 + \lambda_n$ とおくと，

$$a = (1 + \lambda_n)^n = 1 + n\lambda_n + \cdots (\text{正の数}) > n\lambda_n$$

なので $0 < \lambda_n < \frac{a}{n}$．はさみうちの定理より $\lambda_n \to 0$，すなわち $\sqrt[n]{a} \to 1$．$0 < a < 1$ のときは $b = 1/a$ が $\sqrt[n]{b} \to 1$ となることより，$\sqrt[n]{a} \to 1$.

(2) $\sqrt[n]{n} = 1 + \lambda_n$ とおくと，

$$n = (1 + \lambda_n)^n = 1 + n\lambda_n + \frac{n(n-1)}{2}\lambda^2 \cdots (\text{正の数}) > 1 + \frac{n(n-1)}{2}\lambda^2$$

なので $0 < \lambda < \frac{2}{n}$．あとは (1) と同様.

---

4 月 18 日分 (凡例：無印は基本問題，† は特に解いてほしい問題，$*$ は応用問題)

講義用 HP: http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~h-nakashima/lecture/2017C.html

(3) $a=0$ のときは明らか．$b=\frac{1}{|a|}>0$ とおき，$b=1+\lambda$ とおく．

$$b^n=(1+\lambda)^n=1+n\lambda+\frac{n(n-1)}{2}\lambda^2+(\text{正の数})>\frac{n(n-1)}{2}\lambda^2$$

なので，$0<\frac{n}{b^n}=n|a|^n<\frac{2}{n-1}\frac{1}{\lambda^2}\to 0\ (n\to\infty)$.

5.† (1) 基本的には講義で扱った例題 2.8 と同様.

(準備) $\forall\varepsilon_1>0\ \exists N_1$ s.t. $|a_n-\alpha|<\varepsilon_1$．例題 2.8 で使った変形と，$\sum_{k=1}^n k=n(n+1)/2\le n^2$ より，

$$\left|\frac{\sum_{k=1}^n ka_n}{\sum_{k=1}^n k}-\alpha\right|\le\left(\sum_{k=1}^n k\right)^{-1}\sum_{k=1}^n k|a_n-\alpha|\le\frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{N_1-1}k|a_n-\alpha|+\sum_{k=N_1}^n k|a_n-\alpha|\right).$$

ここで，一番目の総和は n に依存しないものなので M とおく．$\frac{M}{n^2}\to 0$ なので，ある番号 N_2 から先の n に対しては $\frac{M}{n^2}<\varepsilon_1$ とできる．これより

$$(\text{前式})\le\frac{M}{n^2}+\frac{\sum_{k=1}^n k}{n^2}\varepsilon_1<\varepsilon_1+\varepsilon_1=2\varepsilon_1.$$

証明．ε が任意に与えられたとする．以上の議論を踏まえて，N_1 を，$n\ge N_1$ ならば $|a_n-\alpha|<\frac{\varepsilon}{2}$ を満たす自然数とし，N_2 を，$n\ge N_2$ ならば $\sum_{k=1}^{N_1-1}k|a_n-\alpha|/n^2<\frac{\varepsilon}{2}$ を満たす自然数とする．すると，$N=\max(N_1,N_2)$ とすれば，$n\ge N$ のとき

$$\left|\frac{\sum_{k=1}^n ka_n}{\sum_{k=1}^n k}-\alpha\right|<\varepsilon.$$

(2) 方針だけ．仮定は $\forall\varepsilon_1>0\ \exists N_1$ s.t. $|a_n-\alpha|,|b_n-\beta|<\varepsilon_1\ (n\ge N_1)$.

$$\left|\frac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1}{n}-\alpha\beta\right|\le\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n|a_kb_{n-k+1}-\alpha\beta|.$$

ここで総和の区間を (i) $k=1,\ldots,N_1-1$, (ii) $k=N_1,\ldots,n-N_1+1$, (iii) $k=n-N_1+2,\ldots,n$ にわける．また，$M_a:=\max(|a_1|,\ldots,|a_{N_1}|,|\alpha|+1)$, $M_b:=\max(|b_1|,\ldots,|b_{N_1}|,|\beta|+1)$ とおく．

(i) においては $|b_k-\beta|<\varepsilon_1$ なので $\sum<(N_1-1)M_b\varepsilon_1$.

(ii) においては $|a_k-\alpha|,|b_k-\beta|<\varepsilon_1$ なので命題 2.3 の三角不等式を用いると $\sum<(M_a+M_b)(n-2N_1+2)\varepsilon_1$.

(iii) においては $|a_k-\alpha|<\varepsilon_1$ なので $\sum<(N_1-1)M_a\varepsilon_1$.

以上より，

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n|a_kb_{n-k+1}-\alpha\beta|\le\frac{n-N_1+1}{n}(M_a+M_b)\varepsilon_1<(M_a+M_b)\varepsilon_1$$

なので，与えられた任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$k \geq N$ ならば $|a_k - \alpha|$, $|b_k - \beta| < \frac{\varepsilon}{M_a + M_b}$ となる自然数 N を選べばよい．

(3) 教科書の解答 (p.210) を参考のこと． ちなみに

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} a_k(n-k+1) = \sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{n} - \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} a_k k + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{n}$$

であり，例題 2.8 より一番目の総和は α に収束および三番目の総和は 0 に収束し，また二番目の総和は本問題 (1) を用いると

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} a_k k = \frac{\sum_{k=1}^{n} k}{n^2} \cdot \sum_{k=1}^{n}\frac{a_k k}{\sum_{k=1}^{n} k} \to \frac{\alpha}{2} \quad (n \to \infty)$$

となることからも与えられた極限が $\alpha - \frac{\alpha}{2} + 0 = \frac{\alpha}{2}$ になることが分かる．

6.† $1 < \sqrt[3]{3} < 2$ より $a_n := (\sqrt[3]{3} - 1)^n$ とすれば，$a_n > 0$ であり，かつ $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ とある．一方，二項定理より，各 a_n は**整数**x_n, y_n, z_n を用いて

$$a_n = x_n + y_n\sqrt[3]{3} + z_n\sqrt[3]{9}$$

と表せる．ここで $\sqrt[3]{3} = \frac{p}{q}$ (p, q は互いに素な整数) と表せると仮定する．このとき

$$a_n = \frac{x_n q^2 + y_n pq + z_n p^2}{q^2}$$

であり，分子 $x_n q^2 + y_n pq + z_n p^2$ は整数でさらに $a_n > 0$ より 0 でない．特に $|x_n q^2 + y_n pq + z_n p^2| \geq 1$．よって

$$|a_n| \geq \frac{1}{q^2}$$

となるはずだが，これは $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$ に矛盾．よって a_n は有理数でない．

7. 教科書の解答 (p.210) を参考のこと．
8. $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n} = c$.
9. 教科書の解答 (p.211) を参考のこと．