4　関数の微分

関数 $f(x)$ の点 $x=a$ における微分係数 $f'(a)$ は，点 $x=a$ における変化率の極限

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \tag{4.1}$$

により定義された．これはグラフ $y=f(x)$ の点 $x=a$ における接線の傾きを表す量である．$f(x)=x^n$ のとき $f'(x)=nx^{n-1}$ であることは高校で学んだと思うが，ここでは微分計算の基本について学ぶ．

4.1　積と商の微分

定理 4.1

関数 $f(x)$ について，

$$\text{微分可能}\ \begin{array}{c}\Rightarrow\\ \not\Leftarrow\end{array}\ \text{連続}$$

ある点において連続であるが微分可能でない関数の例として，$f(x)=|x|$ が挙げられる (右図)．原点において，この関数が「尖っている」のが分かる．このようなときは式 (4.1) の極限において左右の極限が一致せず，微分係数が存在しないのである．

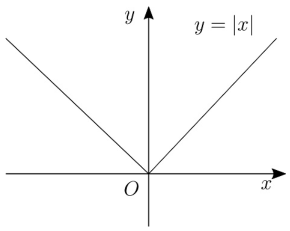

図 4.1　絶対値関数

関数の微分を計算する上で，次の定理は基本的である．

定理 4.2

関数 $f(x)$, $g(x)$ が微分可能ならば，

(1) $\bigl(f(x)g(x)\bigr)'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$,

(2) $g(x)\neq 0$ である点において

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

この定理の (2) より，特に次が成り立つ．

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)'=-\frac{g'(x)}{g(x)^2}.$$

最初に出てきた微分の公式 $\bigl(x^n\bigr)'=nx^{n-1}$ は，定理 4.2 の (1) を用いて証明することができる．

例題 4.3

次の関数を微分せよ．

$$(1)\ y=(2x+1)(x^2-3)\quad (2)\ y=\frac{x}{x^2+1}$$

解． (1) $u=2x+1$, $v=x^2-3$ とすれば，$u'=2$ および $v'=2x$ である．よって，

$$\begin{aligned} y' &= \bigl(uv\bigr)'=u'v+uv' \\ &= 2\cdot(x^2-3)+(2x+1)\cdot 2x \\ &= 6x^2+2x-6 \end{aligned}$$

であるので，$y'=6x^2+2x-6$. □

4.2　合成関数の微分

合成関数とは，例えば $f(x)=x^4$, $g(x)=x^2+1$ としたときに

$$F(x)=f\bigl(g(x)\bigr)=(x^2+1)^4$$

のように表される関数のことであった．このような関数の微分については，次の定理が便利である．

定理 4.4

関数 $f(x)$, $g(x)$ がそれぞれ微分可能であって，合成関数 $F(x)=f\bigl(g(x)\bigr)$ が定義できるとき，$F(x)$ も微分可能であって

$$F'(x)=f'\bigl(g(x)\bigr)\cdot g'(x).$$

$y=f\bigl(g(x)\bigr)$ のとき，$u=g(x)$ および $y=f(u)$ とみて，上の定理を適用すれば

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

のように書くこともできる．

例題 4.5

次の関数を微分せよ．

$$(1)\ y=(x^2+1)^4\quad (2)\ y=\frac{1}{(x^2+4)^3}$$

解． (1) $u=x^2+1$, $y=u^4$ とおけば，

$$\frac{du}{dx}=2x,\quad \frac{dy}{du}=4u^3$$

である．したがって

$$y'=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=4u^3\cdot 2x=4(x^2+1)^3\cdot 2x$$

なので，$y'=8x(x^2+1)^3$ となる． □

4.3　逆関数の微分

逆関数とは，関数 $f(x)$ が与えられたときに

$$f\bigl(g(x)\bigr) = x, \quad g\bigl(f(x)\bigr) = x$$

となるような関数 $g(x)$ のことであった．これを $f^{-1}(x)$ と表す．合成関数の微分を用いれば，逆関数の微分も計算できる．

定理 4.6

関数 f の逆関数 $y = f^{-1}(x)$ の微分は

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{f'\bigl(f^{-1}(x)\bigr)}$$

であり，記号的に書けば $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\frac{dx}{dy}}$ となる．

例題 4.7

関数 $y = \sqrt{x}$ を微分せよ．

解． $y = \sqrt{x}$ は関数 $f(x) = x^2$ の逆関数である．すなわち $x = y^2$ なので，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{2y} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}.$$

4.4　まとめ

- 積と商の微分を用いた計算
- 合成関数の微分を用いた計算
- 逆関数の微分の計算

4.5　演習問題

(1) 次の関数を微分せよ．

(a) 積・商の微分を用いるもの

(i) $(x-3)(x^2+2x+2)$　(ii) $(x^2+1)(x^2-4)$

(iii) $\dfrac{1}{x^2+1}$　(iv) $\dfrac{2x^2+3}{x}$　(v) $\dfrac{3x}{x^2-9}$

(b) 合成関数の微分を用いるもの

(i) $(x^4+2x+1)^3$　(ii) $\dfrac{1}{(x^3-2)^2}$

(iii) $\sqrt{2-3x}$　(iv) $\sqrt{x^2+1}$

(c) 逆関数の微分を用いるもの

(i) $\sqrt[3]{x}$　(ii) $\sqrt[5]{x}$

(2) 次の関数を微分せよ．

(i) $\sqrt[4]{9-x^2}$　(ii) $(x^3-1)(x^2-2)$　(iii) $(3x+1)^2$

(iv) $\dfrac{1}{x^2}$　(v) $\dfrac{1}{x^3}$　(vi) $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$　(vii) $\sqrt{x^3}$

(3) $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ を微分可能な関数とするとき，次の関数の導関数を求めよ．

$$y = f(x)g(x)h(x)$$

(4) 次の問いに答えよ．

(a) n を負の整数とするとき，次の等式を示せ．

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

(b) 正の整数 n に対して，次が成り立つことを示せ．

$$\left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$$

(c) n, m を（互いに素な）自然数とするとき，次の等式を証明せよ．

$$\left(x^{\frac{m}{n}}\right)' = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}$$

4.5.1　ヒント

(3) $G(x) = g(x)h(x)$ とおいて積の微分公式を用いてから，次は $G(x)$ に対して再び積の微分公式を適用する．(4) (a) $n = -m$ とすれば，$x^n = \dfrac{1}{x^m}$ であるので，商の微分を用いればよい．(b) $y = x^{\frac{1}{n}}$ とすれば $x = y^n$ であるので，逆関数の微分を用いればよい．(c) $x^{\frac{m}{n}} = \bigl(x^{\frac{1}{n}}\bigr)^m$ なので，(a), (b) と合成関数の微分を用いる．

4.5.2　補足

なお，この演習問題 (4) は次が成り立つことを示している．

定理 4.8

p を有理数とするとき，次が成り立つ．

$$(x^p)' = px^{p-1}$$

実はこの定理は任意の数 p に対して成立する．その証明には対数関数 $\log x$ の微分が必要になる．