演習問題 6

問題 1.† 与えられた 2 変数関数を $f(x,y)$ で表す．また，それぞれの曲線を描いたグラフは，全問の解答の後ろに載せている．

(1) $f_x = 4x^3 - 4y$, $f_y = -4x + 4y^3$ である．$f_x = f_y = 0$ とすれば $x^3 = y$ かつ $x = y^3$ となるので，$x = x^6$ すなわち $x = 0, 1$ となる．よって停留点は $(x,y) = (0,0)$, $(1,1)$ の 2 つであり，このうち曲線 N_f 上にあるのは原点 $(0,0)$ のみである．さて $H_f = \begin{pmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{pmatrix}$ なので，$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$ より，$(0,0)$ は鞍点である．以上より，N_f の特異点は原点 $(0,0)$ のみであり，これは結節点になる．

(2) $f_x = 6x^2 - 6x$, $f_y = 6y^2 - 6y$ である．$f_x = f_y = 0$ とすれば $x^2 - x = 0$ かつ $y^2 - y = 0$ となるので, 停留点は $(x,y) = (0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$ の 4 つであり, このうち曲線 N_f 上にあるのは $(0,1)$, $(1,0)$ の 2 つである．さて $H_f = \begin{pmatrix} 12x-6 & 0 \\ 0 & 12y-6 \end{pmatrix}$ であるが，$H_f(0,1) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$, $H_f(1,0) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$ より，いずれの場合も鞍点になる．以上より，N_f の特異点は $(0,1)$, $(1,0)$ の 2 つであり，これはいずれの場合も結節点になる．

(3) $f_x = y - 3x^2$, $f_y = 2y + x$ である．$f_x = f_y = 0$ とすれば $y = 3x^2$ かつ $y = -x/2$ となるので，$x(6x+1) = 0$ すなわち $x = 0, -1/6$ となる．よって停留点は $(x,y) = (0,0)$, $(-1/6, 1/12)$ の 2 つであり，このうち曲線 N_f 上にあるのは原点 $(0,0)$ のみである．さて $H_f = \begin{pmatrix} -6x & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ なので，$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ より，$(0,0)$ は鞍点である．以上より，N_f の特異点は原点 $(0,0)$ のみであり，これは結節点になる．

(4) $f_x = 2x$, $f_y = 4y^3 - 2y$ である．$f_x = f_y = 0$ とすれば $x = 0$ かつ $2y(2y^2 - 1) = 0$ となるので，停留点は $(x,y) = (0,0)$, $\pm(0, 1/\sqrt{2})$ の 3 つであり，このうち曲線 N_f 上にあるのは原点 $(0,0)$ のみである．さて $H_f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12y^2-2 \end{pmatrix}$ なので，$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ より，$(0,0)$ は鞍点である．以上より，N_f の特異点は原点 $(0,0)$ のみであり，これは結節点になる．

問題 2. (1) $A_1 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2;\ \begin{matrix} 0 < x < 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{matrix} \right\} \subset \mathbb{R}^2$

(i) 開集合でも閉集合でもない．

(ii) $\partial A_1 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2;\ \begin{matrix} \text{(a) } x = 0, 1 \text{ かつ } 0 \leq y \leq 1 \\ \text{(b) } y = 0, 1 \text{ かつ } 0 \leq x \leq 1 \end{matrix} \right\}$

(2) $A_2 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq 1 \right\} \subset \mathbb{R}^2$

(i) 閉集合．(ii) $\partial A_2 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 = 1 \right\}$

(3) $A_3 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{Q}^2;\ \begin{matrix} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{matrix} \right\} \subset \mathbb{R}^2$

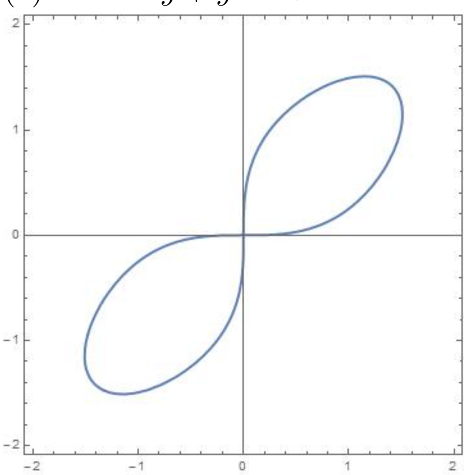
(i) 開集合でも閉集合でもない.

(ii) $\partial A_3 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \leq x \leq 1 \text{ かつ } 0 \leq y \leq 1\right\}$

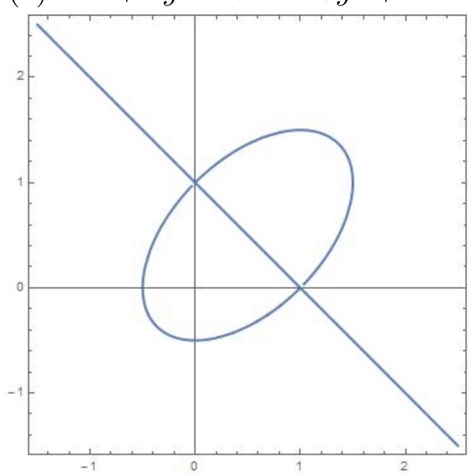
(コメント) (1)，(2) においては，境界は図を描けばすぐにわかる．解答する際も「図よりこうなる」で十分である．ただし，(3) は直感と反する結果になっていることに注意．A_3 のどの点の近傍にも必ず無理数を座標に持つものが存在するので，A_3 は内点を持たないので開集合ではない．そしてその補集合には $\{(x,y);\ 0 \leq x \leq 1,$ $0 \leq y \leq 1,\ x,y$ のいずれかは無理数 $\}$ が含まれるが，この集合は先程と同様に理由により内点を持たない (有理数の稠密性)．したがって，補集合も開集合にならないので，A_3 は閉集合でもない．またこの議論から $\{(x,y);\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$ が境界の定義を満たすこともわかる．

▶ 問題 1 の曲線のグラフは以下のようになっている．

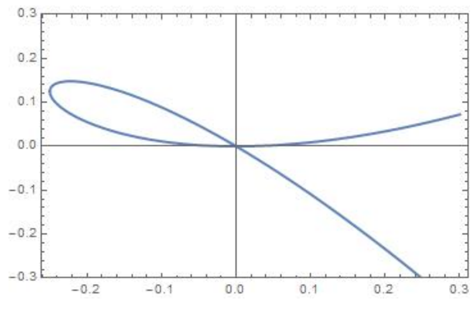
(1) $x^4 - 4xy + y^4 = 0$



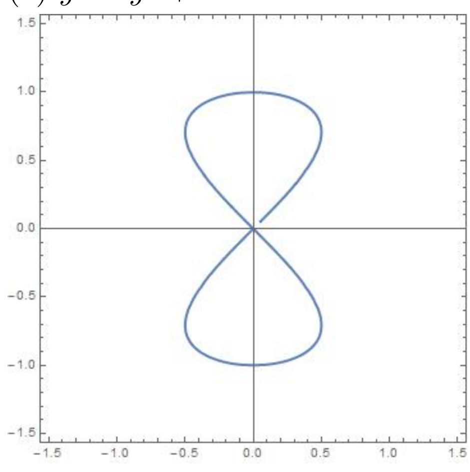
(2) $2x^3 + 2y^3 - 3x^2 - 3y^2 + 1 = 0$



(3) $y^2 + xy - x^3 = 0$



(4) $y^4 - y^2 + x^2 = 0$



小レポート 6

(1) 有理関数 (多項式を多項式で割ったもの) の積分である．まず部分分数分解により基本的なものに分割してから積分を実行する．

▶ $f_1(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$

$x^2-1 = (x+1)(x-1)$ より $\dfrac{1}{x^2-1} = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x+1}$ のように表すことができる．これは x に関する恒等式なので，両辺に x^2-1 を掛けて計算すれば $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$ を得る．したがって

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^2-1} &= \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)dx = \frac{1}{2}\left(\log|x-1| - \log|x+1|\right)\\ &= \frac{1}{2}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right|. \quad \square\end{aligned}$$

▶ $f_2(x) = \dfrac{1}{x^4-1}$

$\dfrac{1}{x^4-1} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x^2-1} - \dfrac{1}{x^2+1}\right)$ なので，f_1 の結果を用いれば

$$\int \frac{dx}{x^4-1} = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x^2-1} - \frac{1}{x^2+1}\right)dx = \frac{1}{4}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2}\operatorname{Arctan} x. \quad \square$$

▶ $f_3(x) = \dfrac{1}{(x+1)(x^2-1)}$

$(x+1)(x^2-1) = (x+1)^2(x-1)$ より，$\dfrac{1}{(x+1)(x^2-1)} = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x+1} + \dfrac{c}{(x+1)^2}$ のように表すことができる．これは恒等式なので，両辺に $(x+1)(x^2-1)$ を掛けて計算すれば $a = \frac{1}{4}$, $-b = \frac{1}{4}$, $c = -\frac{1}{2}$ を得る．したがって

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(x+1)(x^2-1)} &= \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2}\right)dx\\ &= \frac{1}{4}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1}. \quad \square\end{aligned}$$

▶ $f_4(x) = \dfrac{1}{x^3-1}$

$x^3-1 = (x-1)(x^2+x+1)$ なので $\dfrac{1}{x^3-1} = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{bx+c}{x^2+x+1}$ と分解できる．これを解けば $a = \frac{1}{3}$, $b = -\frac{1}{3}$, $c = -\frac{2}{3}$ である．さて，$\dfrac{-x-2}{x^2+x+1} = -\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2x+1}{x^2+x+1} - \dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1}{x^2+x+1}$ であるが，$x^2+x+1 = (x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$ なので $x + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}u$ と変数変

換すれば

$$\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{du}{\frac{3}{4}(u^2+1)} = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{Arctan}\,u = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{Arctan}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$

となる．したがって

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^3-1} &= \frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{x-1}+\frac{-x-2}{x^2+x+1}\right)dx\\ &= \frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{(x^2+x+1)'}{x^2+x+1}-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x^2+x+1}\right)dx\\ &= \frac{1}{3}\log|x-1|-\frac{1}{6}\log(x^2+x+1)-\frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{Arctan}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}}. \quad \square\end{aligned}$$

(2) f および g により定まる曲線は，解答の後ろに載せています．

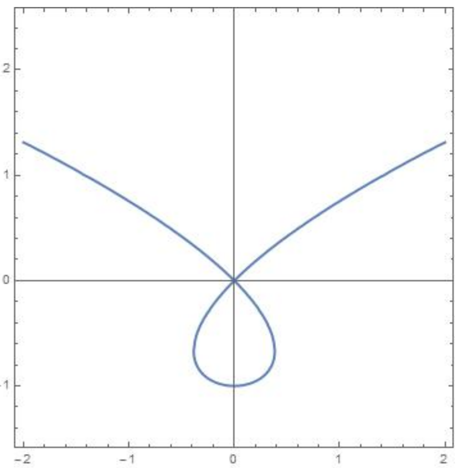
- ▶ (i) $f(x,y)=x^2-y^2(y+1)$

  $f_x=2x$, $f_y=-3y^2-2y$ である．$f_x=f_y=0$ とすれば $x=0$ かつ $y(3y+2)=0$ となるので，停留点は $(x,y)=(0,0)$, $(0,-\frac{3}{2})$ の 2 つであり，このうち曲線 N_f 上にあるのは原点 $(0,0)$ のみである．さて $H_f=\begin{pmatrix}2&0\\0&-6y-2\end{pmatrix}$ なので，$H_f(0,0)=\begin{pmatrix}2&0\\0&-2\end{pmatrix}$ より，$(0,0)$ は鞍点である．以上より，N_f の特異点は原点 $(0,0)$ のみであり，これは結節点になる．

- ▶ (ii) $g(x,y)=x^2-y^4+2y^2-1$

  $g_x=2x$, $g_y=-4y^3+4y$ である．$g_x=g_y=0$ とすれば $x=0$ かつ $4y(y^2-1)=0$ となるので, 停留点は $(x,y)=(0,0)$, $\pm(0,1)$ の 3 つであり, このうち曲線 N_f 上にあるのは原点 $\pm(0,1)$ の 2 つである．さて $H_g=\begin{pmatrix}2&0\\0&-12y^2+4\end{pmatrix}$ なので，$H_g(0,\pm1)=\begin{pmatrix}2&0\\0&-8\end{pmatrix}$ より，$\pm(0,1)$ はいずれも鞍点である．以上より，N_g の特異点は 2 点 $\pm(0,1)$ であり，これはいずれの場合も結節点になる．

(i) $f(x,y)=x^2-y^2(y+1)$



(ii) $g(x,y)=x^2-y^4+2y^2-1$