微分積分学・同演習 A

演習問題 2

1.† 数列 $\{a_n\}$ が 0 以外の数 α に収束しているとする．このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=\frac{1}{\alpha}$ を示せ.

2.† $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$ を ε-N 論法を用いて示せ.

3. 次の極限を求めよ.

$$(1)\ \lim_{n\to+\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) \qquad (2)\ \lim_{n\to+\infty}\frac{3n-1}{2n+5}$$

$$(3)\ \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \qquad (4)\ \lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+2n+1}{3n^2-n-1}$$

$$(5)\ \sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) \qquad (6)\ \lim_{n\to+\infty}\frac{10n}{2^n}$$

4. 次の極限を求めよ.

$$(1)\ \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a}\quad (a>0)\quad (2)\ \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}\quad (3)\ \lim_{n\to+\infty}n\cdot a^n\quad (|a|<1)$$

5.† $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}a_n=\alpha<+\infty$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}b_n=\beta<+\infty$ とするとき，次の極限を示せ.

$$(1)\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{1+2+\cdots+n}=\alpha$$

$$(2)\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1}{n}=\alpha\beta$$

$$(3)\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{na_1+(n-1)a_2+\cdots+2a_{n-1}+a_n}{n^2}=\frac{\alpha}{2}\qquad (\text{問題 } 2.7)$$

6.† $\sqrt[3]{3}$ が無理数であることを，極限を利用することにより示せ[*1].

7. 教科書 p.16 の問題 2.15 を解け.

8. $0<a\le b\le c$ のとき，次の極限を求めよ (問題 2.19).

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n+c^n}.$$

9. $a>0$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{a^n}{n!}=0$ を示せ (問題 2.24).

---

4 月 18 日分 (凡例：無印は基本問題，† は特に解いてほしい問題，$*$ は応用問題)

講義用 HP: http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~h-nakashima/lecture/2017C.html

[*1] 教科書の例 2.21 も参照のこと.