線形代数学・同演習 A

5 月 17 日分　演習問題

1. 行列の階数について，以下を示せ.
   (a) 任意の $m \times n$ 行列 A に対して，$\operatorname{rank} A \leq \min(m, n)$.
   (b)* 行列 A, B の積が定義できるとき，$\operatorname{rank}(AB) \leq \min(\operatorname{rank} A, \operatorname{rank} B)$.

2. 次の行列を簡約化し，その階数を求めよ.

$$(1)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & -3 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad (2)\ \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & -6 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -5 & -2 & -7 \end{pmatrix} \qquad (3)\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 12 \\ 2 & 0 & 3 & 10 \end{pmatrix}$$

$$(4)\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -4 & -6 \\ 3 & -5 & 16 & -29 & -5 \end{pmatrix} \qquad (5)\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 & 5 & -5 & 2 & 9 \\ 2 & 1 & -1 & 4 & 5 & -5 & 4 & 8 \\ 3 & 3 & 0 & 1 & 9 & -9 & 1 & 10 \\ 1 & -3 & -4 & 5 & -1 & 1 & 5 & 0 \\ 5 & -1 & -6 & 5 & 9 & -9 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

3. 次の連立一次方程式を解け.

$$(1)\ \begin{cases} x + 4y + 2z + 3w = 1 \\ 2x + 3y + 4z + w = -2 \\ 3x + 2y + z + 4w = 3 \\ 4x + y + 3z + 2w = 0 \end{cases} \qquad (2)\ \begin{cases} x - 3y - z + 2w = 3 \\ -x + 3y + 2z - 2w = 1 \\ -x + 3y + 4z - 2w = 9 \\ 2x - 6y - 5z + 4w = -6 \\ x - 3y + 2w = 7 \end{cases}$$

$$(3)\ \begin{cases} x - 2y + 5z - 2w = -12 \\ 3x + y + 8z - 2w = -4 \\ 4x + 5y + 7z + w = 13 \\ x + 5y - 2z - 2w = 16 \end{cases} \qquad (4)\ \begin{cases} y + 2z + 3w = 1 \\ -x + z + 3w = 1 \\ -2x - y + 3w = 1 \\ -3x - 3y - 3z = 1 \end{cases}$$

$$(5)\ \begin{cases} x + 3y + z - 8w = 3 \\ -2x - 5y - z + 13w = -4 \\ 3x + 8y + 2z - 21w = 0 \end{cases} \qquad (6)\ \begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ 2x - 3y - z = 1 \\ 4x - 11y - 7z = 2 \\ x - 9y - 8z = 4 \end{cases}$$

$$(7)\ \begin{cases} x + 3y - 2z = 3 \\ 2x + y + z = -4 \\ 4x + 2y - z = -5 \\ 2x + y - z = 2 \end{cases} \qquad (8)\ \begin{cases} x + y - 2z + w = -3 \\ 2x - y + 2z + 2w = -6 \\ 3x + 2y - 4z - 3w = 9 \end{cases}$$

4.* 次の行列の階数がちょうど 2 になるように，a, b, c の値を定めよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & a & 1 \\ 2 & b & 1 & c \\ 1 & 1 & b & 1 \\ 1 & b+1 & a & 1 \end{pmatrix}$$