線形代数学・同演習 A

4 月 19 日分　演習問題

1. 2 次正方行列 A, B に対して，$\det(AB) = \det(A)\det(B)$ が成り立つことを証明せよ．
2. 平面 $P: ax + by + cz = d$ の法線ベクトルを $\boldsymbol{a}$ とし，平面 P 上の 1 点 $\boldsymbol{x}_0$ を一つ固定する．このとき，平面 P 上の任意の点 $\boldsymbol{x}$ に対して，$(\boldsymbol{a}|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = 0$ が成り立つことを示せ．[*1]
3. 次の 2 本のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ のなす角度 θ を求めよ ($\cos\theta$ を計算するだけでよい)．[*2]

   (1) $\boldsymbol{x} = {}^t(1,2),\ \boldsymbol{y} = {}^t(2,1)$　(2) $\boldsymbol{x} = {}^t(1,-2,3),\ \boldsymbol{y} = {}^t(2,-3,1)$
   (3) $\boldsymbol{x} = {}^t(1,1,1),\ \boldsymbol{y} = {}^t(-1,-2,1)$　(4) $\boldsymbol{x} = {}^t(1,-1,1),\ \boldsymbol{y} = {}^t(-1,2,3)$

4. 空間の点 $(1,2,3)$ を通り，方向 $(0,2,1)$ を持つ直線の方程式を求めよ．
5. 空間の点 $(1,0,3)$ を通り，法線ベクトル $(0,2,1)$ を持つ平面の方程式を求めよ．
6. 次の空間の三点を通る平面の方程式を求めよ．

   (1)　$(1,1,1),\ (1,2,3),\ (3,2,1)$　(2)　$(1,1,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)$
   (3)　$(2,-1,3),\ (-1,2,1),\ (3,1,-1)$　(4)　$(a,0,0),\ (0,b,0),\ (0,0,c)$

7. l_1, l_2 を以下で与えられるような直線とする:

$$l_1\colon \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad l_2\colon \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

   次の平面の方程式を求めよ．
   (a) 点 $(1,-5,4)$ を通り，直線 l_1, l_2 に平行な平面，
   (b) 直線 l_1 を含み，直線 l_2 に平行な平面．

8. 原点と平面 $2x + y - 2z = 1$ との距離を求めよ．[*3]
9. 3 次元空間において，原点 O と直線 $l\colon \boldsymbol{x} = {}^t(1,-5,2) + s\,{}^t(1,-1,1)$ との距離を求めよ．[*4]
10. 次の空間内の 2 本のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対して，その外積 $\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}$ を求めよ．[*5]

   (1) $\boldsymbol{x} = {}^t(2,0,0),\ \boldsymbol{y} = {}^t(0,0,4)$.　(2) $\boldsymbol{x} = {}^t(1,1,1),\ \boldsymbol{y} = {}^t(1,-1,0)$.

11.* 次の 2 平面の交線を求めよ．
   (a) $P_1\colon 2x - y + z = 3, \quad P_2\colon 3x - 5y + 2z = 1.$
   (b) $P_1\colon 2x + 2y - 2z = 3, \quad P_2\colon x + 2y + 3z = 5.$
   (c) $P_1\colon x - 2y + 5z = 0, \quad P_2\colon x - y + z = -2.$

[*1] $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0$ は平面 P に沿ったベクトルなので，これより平面 P の法線ベクトルとは “平面 P と直交しているベクトル” であることが分かる．$\mathbb{R}^2$ における直線の法線ベクトルも同様である．

[*2] ${}^t(1,2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ という意味．縦のスペースをとるので，文書ではこのように書くことも多い．

[*3] 原点と平面上の点との距離の最小値を求めよ，という問題．実は，法線ベクトル $\boldsymbol{a}$ が関わってくる．

[*4] 問題 8 と同様，原点と直線上の点との距離の最小値を求めよ，という問題．

[*5] 次週，ここ (演習問題) で簡単な計算方法を紹介する．