線形代数学・同演習 A

演習問題 2

1.† $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ とおく．$\det A = ad - bc$, $\det B = xw - yz$ なので

$$\det A \det B = (ad-bc)(xw-yz) = adxw - adyz - bcxw + bcyz$$

である．一方，$AB = \begin{pmatrix} ax+by & ay+bw \\ cx+dz & cy+dw \end{pmatrix}$ なので,

$$\begin{aligned} \det(AB) &= (ax+bz)(cy+dw) - (ay+bw)(cx+dz) \\ &= (acxy + adxw + bcyz + bdzw) - (acxy + adyz + bcxw + bdzw) \\ &= adxw + bcyz - adyz - bcxw. \end{aligned}$$

二つを比較すれば $\det A \det B = \det(AB)$ となることが分かる．

2.† $A^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+dc & bc+d^2 \end{pmatrix}$ なので,

$$\begin{aligned} &A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E_2 \\ &= \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+dc & bc+d^2 \end{pmatrix} - (a+d)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + (ad-bc)E_2 \\ &= \begin{pmatrix} (a^2+bc)-(a+d)a+(ad-bc) & (ab+bd)-(a+d)b \\ (ac+dc)-(a+d)c & (bc+d^2)-(a+d)d+(ad-bc) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3. (1) $\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

4. (1) $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ (2) 逆行列を持たない (3) $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

5. (1) $a \neq 0$ (2) $a \neq \frac{3}{2}$ (3) $a \neq 0$

6. a, b, c, d は実数とする．

上三角行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ 　下三角行列 $\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$

対称行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ 　交代行列 $\begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$

---

4 月 18 日分 (凡例：無印は基本問題，† は特に解いてほしい問題，$*$ は応用問題)

講義用 HP: http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~h-nakashima/lecture/2017LA.html

7. a, b, c, d, e, f は実数とする．

対角行列 $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ 上三角行列 $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$ 下三角行列 $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{pmatrix}$

対称行列 $\begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix}$ 交代行列 $\begin{pmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{pmatrix}$

8.† $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}.$

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおき，${}^tAA = E_2$ を考える．すると

$$(1)\ a^2 + c^2 = 1, \quad (2)\ ab + cd = 0, \quad (3)\ b^2 + d^2 = 1$$

となる．ここで (1) より $a = \cos\theta, b = \sin\theta$ とおける．(2) より, (b, d) は $(\cos\theta, \sin\theta)$ と直交しており，さらに (3) よりその大きさは 1 である事がわかるので，$(b, d) = (-\sin\theta, \cos\theta)$ or $(\sin\theta, -\cos\theta)$ でなければならないことが分かる．

9. (1) 0 (2) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

10.† (1) たとえば $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (2) 存在しない.[*1] (3) たとえば $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

[*1] 問題の E_3 は誤りで，正しくは E_2 です．