1　行列式の応用

1.1　平面の方程式

$\mathbb{R}^3$ の三点 (x_i, y_i, z_i) $(i = 1, 2, 3)$ に対して次の方程式を考える．

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{1}$$

第１行に関して余因子展開すれば，$ax + by + cz - d = 0$ の形 (符号も $a, \ldots, d$ の中に入れる)．しかも，$(x, y, z) = (x_i, y_i, z_i)$ ならば $(1) = 0$. つまり式 (1) は三点 (x_i, y_i, z_i) $(i = 1, 2, 3)$ を通る平面の方程式.

1.2　文字の入った行列式

行列式の公理を使えば，簡単に計算できる場合がある．

例題 1.1.

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b & c+d \\ 1 & b & c & d+a \\ 1 & c & d & a+b \\ 1 & d & a & b+c \end{vmatrix}$$

解) ２列目，３列目を４列目に加えると，共通因子 $a + b + c + d$ を作れる．

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b & a+b+c+d \\ 1 & b & c & a+b+c+d \\ 1 & c & d & a+b+c+d \\ 1 & d & a & a+b+c+d \end{vmatrix} = (a+b+c+d) \begin{vmatrix} 1 & a & b & 1 \\ 1 & b & c & 1 \\ 1 & c & d & 1 \\ 1 & d & a & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

階数が大きな行列の行列式も計算できる．

定義 1.2. $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n$. この Π はギリシャ文字 π の大文字 (Product から).

Vandermonde(ヴァンデルモンド)の行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i).$$

0 が多いときは余因子展開を使って漸化式に持ち込む.

例題 1.3. 次のような n 次正方行列の行列式を求めよ．

$$\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & b \\ b & a & \ddots & & 0 \\ 0 & b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & b & a \end{vmatrix}$$

例題 1.4. 次のような n 次正方行列の行列式を求めよ．

$$P_n = \begin{pmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & x & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{pmatrix}$$

1.3 Cramer（クラーメル）の公式

A: n 次の正則行列

定理 1.5 (Cramer の公式)**.** $A = (\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n)$, $\boldsymbol{x} = {}^t(x_1, \dots, x_n)$ とかく．$\det A \neq 0$ である．連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解 $\boldsymbol{x}$ の第 i 成分 x_i は

$$x_i = \frac{\det(\boldsymbol{a}_1, \dots, \overset{i}{\check{\boldsymbol{b}}}, \dots, \boldsymbol{a}_n)}{\det A}$$

で与えられる．

例題 1.6. 次の連立一次方程式を，Cramer の公式を用いて解け．

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$