線形代数学・同演習 A

7 月 12 日分　演習問題

1. 次の n 次正方行列の行列式を計算せよ．

(1) $\begin{pmatrix} 1+x^2 & -x & 0 & \cdots & 0 \\ -x & 1+x^2 & -x & \ddots & \vdots \\ 0 & -x & 1+x^2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -x \\ 0 & \cdots & 0 & -x & 1+x^2 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} \lambda & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ b_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_2 & 0 & c_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ b_{n-1} & 0 & \cdots & 0 & c_{n-1} \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda & -1 \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & \lambda+a_1 \end{pmatrix}$　(4) $\begin{pmatrix} 1+x_1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2+x_2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 3+x_3 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n+x_n \end{pmatrix}$

2. 次の連立方程式を Cramer の公式を用いて解け．

(1) $\begin{cases} -2x + y - 4z = 4 \\ 4x - 3y + 4z = -3 \\ -x + y - z = -1 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} 2x + 4y - 4z = -3 \\ x + 2y + z = 1 \\ x + 3y + 4z = -3 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} -3x + 2y + 3z = 2 \\ x + 2y + z = 3 \\ 2x + 4y - 3z = -4 \end{cases}$　(4) $\begin{cases} -2x + 3y + 2z + w = 0 \\ 2x + 3y + 2z - 2w = 2 \\ 4x + y + z - 2w = 0 \\ \quad - 4y + 2z + 3w = 2 \end{cases}$

3. 次の空間内の三点を通る平面の方程式の標準形を求めよ．

(1)　$(1,-2,2),\ (0,-1,-4),\ (-2,-6,5)$.　(2)　$(-2,5,2),\ (-2,-2,-1),\ (1,-3,-2)$.

(3)　$(5,-5,1),\ (-2,-1,-3),\ (-1,-1,-4)$.

4. (1) 2 次元平面上の同一直線上にない 3 点 (x_i, y_i) $(i=1,2,3)$ を通る円の方程式は次で与えられることを示せ．

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y & x^2+y^2 \\ 1 & x_1 & y_1 & x_1^2+y_1^2 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2^2+y_2^2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3^2+y_3^2 \end{vmatrix} = 0$$

(2) 次の 3 点を通る円の方程式を求めよ．

(a)　$(4,5),\ (4,4),\ (3,3)$　(b)　$(3,0),\ (5,0),\ (2,-3)$　(c)　$(2,-4),\ (1,-5),\ (5,2)$

(3) 3 点が同一直線上にあるとき，(1) の方程式はどうなるか．