線形代数学・同演習 B

10 月 4 日分　演習問題[*1]

1. 次の連立一次方程式を解け．

$$
(1)\ \begin{cases} x + 3y + 5z + w = 2 \\ 3x + y + 7z + 3w = 14 \\ 5x - y + 9z + w = 22 \end{cases}
\qquad
(2)\ \begin{cases} x - y + 7z + w = -10 \\ 5x - 11y - 23z - 7w = 22 \\ x - 4y - z - 5w = 8 \end{cases}
$$

2. 次の行列の行列式を求めよ．

$$
(1)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}
\quad
(2)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 5 & 3 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}
\quad
(3)\begin{pmatrix} -8 & 1 & -3 \\ -7 & 7 & 8 \\ -1 & 7 & 7 \end{pmatrix}
$$

3. 高々 3 次の多項式全体のなす集合 $V = \mathbb{R}[x]_3$ がベクトル空間になることを確認せよ．

4. ベクトル空間 $V = \mathbb{R}[x]_3$ において，次のような部分集合は，V の部分空間となるか．
   (1) ちょうど 2 次の多項式全体,　(2) $(x-1)$ で割り切れるような多項式全体,
   (3) 定数項が 0 である多項式全体,　(4) 各係数の和が 1 であるような多項式全体.

5. $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ とおくとき，次の集合は $\mathbb{R}^3$ の部分空間となるか．

$$
(1)\ W_1 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \,;\, A\boldsymbol{x} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -3 \end{smallmatrix}\right)\}, \quad (2)\ W_2 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \,;\, A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}.
$$

6.† 講義における命題 1.9 を示せ．すなわち，以下が同値になることを示せ．

$$
W \subset V \text{ が部分空間 } \Leftrightarrow \begin{cases} \text{(i)} & \boldsymbol{0} \in W, \\ \text{(ii)} & \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in W \Rightarrow \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in W, \\ \text{(iii)} & \lambda \in \mathbb{K}, \boldsymbol{v} \in W \Rightarrow \lambda \cdot \boldsymbol{v} \in W. \end{cases}
$$

7.† V をベクトル空間とし，W_1, W_2 をその部分空間とする．このとき次に答えよ．
   (1) $W_1 \cap W_2 := \{\boldsymbol{u} \in W \,;\, \boldsymbol{u} \in W_1$ かつ $\boldsymbol{u} \in W_2\}$ は V の部分空間であることを示せ,
   (2) $W_1 + W_2 := \{\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 \in W \,;\, \boldsymbol{u}_1 \in W_1,\ \boldsymbol{u}_2 \in W_2\}$ は W の部分空間であることを示せ,
   (3) $W_1 \cup W_2 := \{\boldsymbol{u} \in W \,;\, \boldsymbol{u} \in W_1$ または $\boldsymbol{u} \in W_2\}$ は部分空間かどうか.

8.* ベクトル空間 $V = M(2, \mathbb{R})$ の以下のような部分集合は，V の部分空間となるか？

$$
\begin{array}{llll}
(1) & \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) := \{A \in V \,;\, \mathrm{tr}(A) = 0\}, & (2) & \mathfrak{so}(2,\mathbb{R}) := \{B \in V \,;\, B + {}^tB = O\}, \\
(3) & SL(2,\mathbb{R}) := \{C \in V \,;\, \det C = 1\}, & (4) & SO(2,\mathbb{R}) := \{D \in V \,;\, D\,{}^tD = E_2\}.
\end{array}
$$

9.* $V = M(2n, \mathbb{R})$ の次のような部分集合 $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$ に対して，以下の設問に答えよ．

$$
\mathfrak{sp}(n,\mathbb{R}) := \{X \in V \,;\, {}^tXJ + JX = O\}, \quad J := \begin{pmatrix} O_n & E_n \\ -E_n & O_n \end{pmatrix}.
$$

   (1) $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$ は V の部分空間となることを示せ．
   (2) $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$ の元はどのような形をしているか？ブロック行列を用いて表現せよ．

[*1] 凡例：無印は基本問題，† は特に解いてほしい問題，$*$ は応用問題．