2020年度　名古屋大学
理系基礎科目（文系） 数学入門

第２回

講義担当者：中島秀斗

2020年4月30日

はじめに

- 授業形態：学習資料 (スライド・ノート) 配布
  - はじめはスライドに目を通してください.
  - ノートはスライドの要約になります．復習にご活用ください.
  - スライド内にある赤い枠で囲った演習問題は，実際に解いてもらうことを想定しています.
- 小テストについて
  - 小テストは NUCT で行われます.
  - 講義日の午前８時から日付が変わるまでの間に完了してください.
- レポートについて
  - 講義 3,4 回毎にレポートを課します.
  - 各回に出題する演習問題を解いたものを，pdf ファイルとして提出してもらいます.
  - 学習資料配布時のお知らせの中で通知します.

凡例

公式や定理など，講義において重要な情報は青の枠で囲む．

演習問題は赤の枠で囲む．実際に手を動かして解いてほしい．

コメントや注意すべき点などは緑の枠で囲む．

例題は黄色の枠で囲む．解答も用意されているが，計算量の多いものは実際に手を動かして一緒に解いてほしい．

前回の訂正

前回のスライドの最後にて誤りがありました.

$$\text{誤}\quad \sin X + \sin Y = 2\cos\left(\frac{X+Y}{2}\right)\sin\left(\frac{X-Y}{2}\right)$$

$$\text{正}\quad \sin X + \sin Y = 2\sin\left(\frac{X+Y}{2}\right)\cos\left(\frac{X-Y}{2}\right)$$

（右辺の sin と cos が逆になっている）

§2 数列の極限

- 項がどこまでも限りなく続く数列を無限数列という．今後単に数列といえば無限数列を意味するものとする．
- 無限数列においては，n が増大するに従って，その第 n 項がどのようになっていくかを知ることが重要である．
- 微分・積分を考える上で「極限」という概念は欠かせない．ここではまず数列の極限について学び，関数の極限については次回扱う．

今回の目標

- 数列の極限 (収束・発散) について理解する
- はさみうちの定理を含む数列の極限の計算ができるようになる

§2.1 収束と発散

次の数列を考える.

(a) $1,\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{4},\ \ldots,\ \dfrac{1}{n},\ \ldots$

(b) $1,\ 4,\ 9,\ 16,\ \ldots,\ n^2,\ \ldots,$

(c) $4,\ 1,\ -4,\ -11,\ \ldots,\ 5-n^2,\ \ldots,$

(d) $1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \ldots,\ (-1)^{n-1},\ \ldots$

n が大きくなるに従って，これらの数列はどのようになっていくだろうか．答えを見る前に予想してみてほしい．

(a) $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \ldots,\ \frac{1}{n},\ \ldots$ について

- この数列 $a_n = \dfrac{1}{n}$ を少数表示してみよう．

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 0.5, \quad a_3 = 0.333..., \quad a_4 = 0.25.$$

- さらに

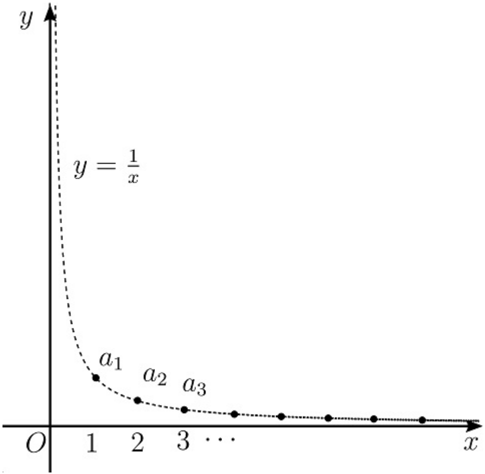
$$a_{100} = 0.01, \quad a_{1000} = 0.001, \quad a_{10000} = 0.0001, \quad a_{100000} = 0.00001,$$

- このように，この数列は n が大きくなるに従って，一定の値 $A = 0$ に近づいていく（次ページの図参照）．

このことを数列 a_n は $A = 0$ に収束するといい，以下のように表す．

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad \text{または} \quad n \to \infty \text{ のとき } a_n \to 0.$$

数列が収束しないとき，発散するという．



数列 $a_n = \frac{1}{n}$ は，曲線 $y = \frac{1}{x}$ の上に乗っており，$x = 1, 2, 3, \ldots$ に対応する点の y 座標と対応している．n が大きくなるにつれて，x 軸 $(y = 0)$ に近づいていっているのが分かる．

lim の下にある記号 ∞ は無限大を表す記号であり，その意味するところとしては「どんな数よりも大きい」という概念であって，数としては扱わない点に注意.

ちなみに lim は limit の略である.

(b) $1,\ 4,\ 9,\ 16,\ \ldots,\ n^2,\ \ldots,$について

- この数列 $b_n = n^2$ の項をいくつか具体的に書いてみよう．

$$b_1 = 1, \quad b_2 = 4, \quad b_3 = 9, \quad b_4 = 16.$$

- さらに

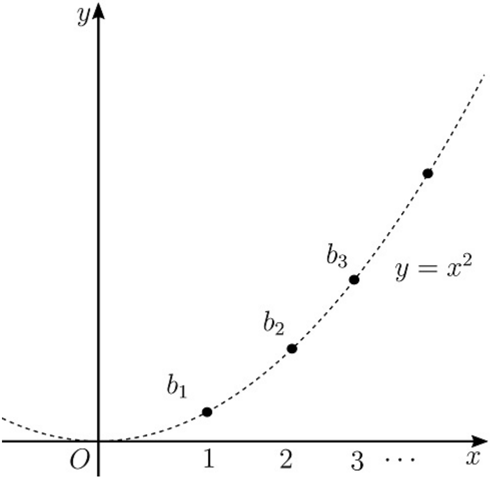
$$b_{100} = 10\,000, \quad b_{1000} = 1\,000\,000, \quad b_{10000} = 100\,000\,000.$$

- このように，この数列 b_n は n が大きくなるに従って，限りなく大きくなっていく．

このことを，数列 b_n は正の無限大に発散するといい，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \quad \text{または} \quad n \to \infty \text{ のとき } a_n \to +\infty$$

のように書く．



数列 $b_n = n^2$ は，曲線 $y = x^2$ の上に乗っており，$x = 1, 2, 3, \ldots$ に対応する点の y 座標と対応している．n が大きくなるにつれて，値が大きくなっていること，すなわち点は xy 平面の「上の方」に向かっている事がわかる．

(c) $4,\ 1,\ -4,\ -11,\ \ldots,\ 5-n^2,\ \ldots,$について

- この数列 $c_n = 5 - n^2$ の項をいくつか具体的に書いてみよう．

$$c_1 = 4, \quad c_2 = 1, \quad c_3 = -4, \quad c_4 = -11.$$

- さらに

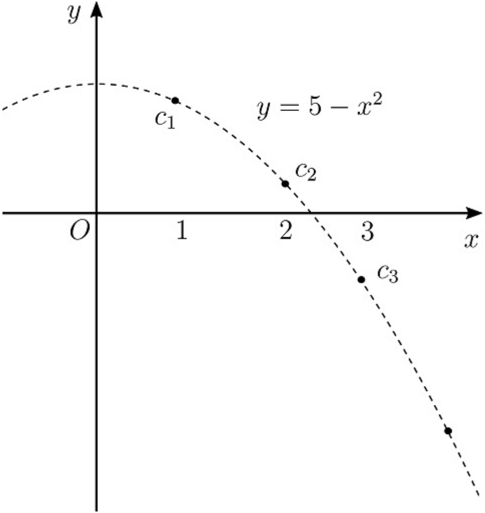
$$c_{100} = 5 - 10\,000 = -9\,995, \quad c_{1000} = 5 - 1\,000\,000 = -999\,995.$$

- このように，数列 c_n はあるところから先の項は負の数であり，n が大きくなるに従って，その絶対値 $|c_n|$ は限りなく大きくなっていく．

このことを，数列 c_n は負の無限大に発散するといい，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \text{ または } n \to \infty \text{ のとき } a_n \to -\infty$$

のように表す．



数列 $c_n = 5 - n^2$ は，曲線 $y = 5 - x^2$ の上に乗っており，$x = 1, 2, 3, \ldots$ に対応する点の y 座標と対応している．n が大きくなるにつれて，値が負になって，その絶対値は大きくなっていること，すなわち点は xy 平面の「下の方」に向かっている事がわかる．

(d) $1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \ldots,\ (-1)^{n-1},\ \ldots$ について

- この数列 $d_n = (-1)^{n-1}$ の項をいくつか書いてみよう．

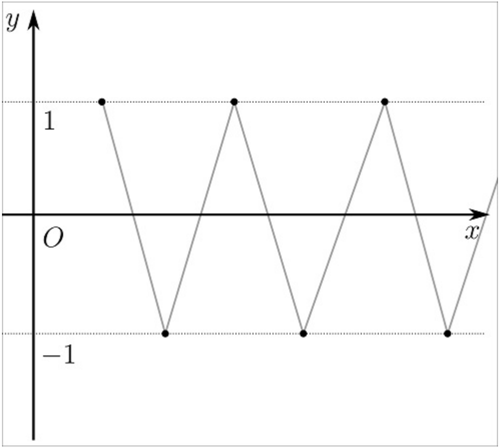
$$d_1 = 1, \quad d_2 = -1, \quad d_3 = 1, \quad d_4 = -1.$$

- さらに

$$d_{100} = -1, \quad d_{101} = 1, \quad d_{1000} = -1, \quad d_{1001} = 1.$$

- このように，数列 d_n は 1 と -1 が交互に現れ，項が一定の値に近づかないので発散する．しかし，正・負の無限大に発散するわけでもない．

このようなとき，数列 d_n に極限はない，あるいは振動するという．



数列 $d_n = (-1)^{n-1}$ は，1 と -1 とを繰り返している．これが一定の値（=極限値）に収束しないことはわかりやすい．

例題. 一般項が次の式で表される数列の極限を調べよ.

$$\text{(a)}\quad 2^{n-1} \quad \text{(b)}\quad 3n - n^2 \quad \text{(c)}\quad (-1)^n - 1 \quad \text{(d)}\quad \frac{(-1)^n}{n}$$

（考え方）　一般項が簡単なものならば，$n = 4, 5$ くらいまで書き下してみて判断してもよい.

(a) $a_n = 2^{n-1}$ として $n = 5$ まで書いてみると

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_3 = 4, \quad a_4 = 8, \quad a_5 = 16$$

とどんどん大きくなる．よって $\lim_{n\to\infty} 2^{n-1} = +\infty$.

(b) $b_n = 3n - n^2$ として $n = 5$ まで書いてみれば

$$b_1 = 2, \quad b_2 = 2, \quad b_3 = 0, \quad b_4 = -4, \quad b_5 = -10$$

と，負の数でその絶対値はどんどん大きくなっている．よって $\lim_{n\to\infty}(3n - n^2) = -\infty$.

(c) $c_n = (-1)^n - 1$ として $n = 5$ まで書き下してみれば

$$c_1 = -2, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = -2, \quad c_4 = 0, \quad c_5 = -2$$

のように -2 と 0 を繰り返す．よって $\lim_{n\to\infty}((-1)^n - 1)$ は存在しない．

(d) $d_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ として $n = 5$ まで計算すれば

$$d_1 = -1, \quad d_2 = \tfrac{1}{2} = 0.5, \quad d_3 = -\tfrac{1}{3} = -0.333..., $$
$$d_4 = \tfrac{1}{4} = 0.25, \quad d_5 = -\tfrac{1}{5} = -0.2$$

となり，符号は各項で入れ替わっていっているが，その絶対値はどんどん 0 に近づいている．よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$.

もちろん，一般にはこのように最初の数項だけを見て判断することはできない．

収束する数列同士の演算の性質

極限の計算で，次の性質はよく用いられる．

定理 2.1. 2つの収束する数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ に対して，次が成り立つ．

1. $$\lim_{n\to\infty} ka_n = k\lim_{n\to\infty} a_n \quad (k \text{ は定数})$$
2. $$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$$
3. $$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)\left(\lim_{n\to\infty} b_n\right)$$
4. $$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} \quad \left(\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0 \text{ のとき}\right)$$

2つとも収束する場合には，普通の数の足し算や掛け算のような感じで極限を操作できる，ということ．なお，1と2を合わせることによって，引き算に関しても同様に計算できる点に注意．

例題. 次の極限を計算せよ． $$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n-2}$$

（考え方） 与えられた分数式において，分子分母にある数列はどちらも正の無限大に発散する．しかし分数は，分子分母に同じ数を掛けたり割ったりしても変わらないという性質がある．それを用いる．

解．分子分母をともに n で割れば

$$\frac{2n+1}{n} = 2 + \frac{1}{n} \quad \to \quad 2, \quad \frac{3n-2}{n} = 3 - \frac{2}{n} \quad \to \quad 3 \quad (n \to \infty)$$

これより

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{3n-2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n}}{3-\frac{2}{n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(2+\frac{1}{n})}{\lim\limits_{n\to\infty}(3-\frac{2}{n})} = \frac{2}{3}. \quad \square$$

この解において，数列 $\dfrac{1}{n}$ が 0 に収束するという事実を暗に利用している点に注意．このように，複雑な数列であっても，基本的なものの組み合わせと見ることで極限を決定できることも多い．

§2.2 極限の不定形

- 先程は 2 つの数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ が収束する場合について，それらの四則演算で得られる数列の極限の性質を扱った．
- では片方，あるいは両方が発散する場合はどうなるだろうか．

- まず $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$ の場合．この場合は

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = +\infty, \quad \lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = +\infty$$

  となることは直感的に明らかであろう（大きくなるものと大きくなるものを足したり掛けたりしたらもっと大きくなる）．
- また，和においては片方が収束していても問題はない．
- しかし，積においては注意が必要である．

a_n が収束し，b_n が正の無限大に発散する場合を考える．

- 例 1. $a_n = 1 + \frac{1}{n}$, $b_n = n$ のとき．積は

$$a_n b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) n = n + 1$$

となるので，$\lim_{n \to \infty} (a_n b_n) = +\infty$ である．

- 例 2. $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = n$ のとき．積は

$$a_n b_n = \frac{1}{n} \times n = 1$$

なので，$\lim_{n \to \infty} (a_n b_n) = 1$ となる．

このように，収束する数列の極限値が 0 でなければ定理 2.1 の (3) が成り立つが，極限値が 0 のときは成り立つとは限らない．

- ほかにも，
$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) \quad \text{や} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$$
についてもいろいろな場合がある．
- 標語的には以下のように極限を持つ場合は，考える数列によって極限値はいろいろである．
$$(+\infty)-(+\infty),\quad 0\times(+\infty),\quad \frac{+\infty}{+\infty},\quad \frac{0}{0}$$
- このような場合を不定形という．不定形の場合であっても，次の例題のように若干の工夫によってその極限値を求めることが可能であることも多い．

例題 2.2. 次の極限値を求めよ．

$$(1)\quad \lim_{n\to\infty}(4n^2 - n^3) \qquad (2)\quad \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

（考え方） いずれも $(+\infty) - (+\infty)$ のタイプの不定形である．(1) のように次数が異なる場合は，大きい方で括ればうまくいくことが多い．(2) は同じ次数なので (1) と同様の手法は使えないが，「有理化」の逆の操作に気がつけば極限が計算できる．

(1) 先程も述べたように，$(+\infty)-(+\infty)$ のタイプの不定形である．与えられた数列を

$$4n^2-n^3=n^3\left(\frac{4}{n}-1\right)$$

のように，次数が一番大きいものを括りだしてみれば，括弧の中の数列は収束してくれる．よって $(+\infty)\times$ (収束する数列) の形になったので，

$$\lim_{n\to\infty}(4n^2-n^3)=\lim_{n\to\infty}\left(n^3\left(\frac{4}{n}-1\right)\right)=(+\infty)\times(-1)=-\infty \quad \square$$

この例題にあるように，多項式の極限は，一番次数が大きい項が極限を支配している．

(2) この問題も $(+\infty)-(+\infty)$ のタイプの不定形である．しかし，(1) と同様の議論は使えない（その理由はなぜか）．そこで「分母の有理化」を思い出そう．例えば

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

のようにして分母にある無理数を追い出すものであった．これの逆（分母の無理化，もしくは分子の有理化）を考えてみる．2 つの数 a, b に対して $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ が成り立つことを思い出せば，

$$\begin{aligned}\sqrt{n+1}-\sqrt{n}&=(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\times\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\\&=\frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\\&=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\end{aligned}$$

この操作により，$(+\infty)-(+\infty)$ という形の極限が，分母に移ったとはいえ $(+\infty)+(+\infty)$ という形に置き換わった．これより，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\\ &= \frac{1}{\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} \quad \left(=\frac{1}{\infty}\right)\\ &= 0\end{aligned}$$

なので，

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=0$$

である． □

コラム・有理数と無理数について

無理数とは $\sqrt{2}$ や π などのように整数を用いた分数で表せない数のことでした．今回はその名前の由来について紹介します．その前に有理数という言葉もあり，これは整数を用いた分数で表せる数のことです．

有理数は英語で rational number で，この rational には合理的という意味があり，翻訳する際にこの意味を採用して有理数となり，無理数はその否定ということで，このように名付けられたようです．

しかし，元の英語は ratio （比）が語源です．つまり rational number は比で表される数という意味であり，その一方で無理数 irrational number は比で表されない数ということになっていて，まさに名は体を表しています．

数学用語の日本語訳は優れたものが多いと思っていますが，時々このような齟齬が生じたりしている例もあります．

はさみうちの定理

定理 2.3.　収束する 2 つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ について，その極限値を $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim_{n\to\infty} b_n = B$ とするとき，

1. すべての n に対して $a_n \leqq b_n$ ならば，$A \leqq B$,
2. 数列 $\{c_n\}$ がすべての n に対して

$$a_n \leqq c_n \leqq b_n$$

を満たしていて，さらに $A = B$ ならば，数列 $\{c_n\}$ も収束して

$$\lim_{n\to\infty} c_n = A.$$

この定理 2.3 の (2) ははさみうちの定理と呼ばれる．その図形的な意味は次のスライド参照．

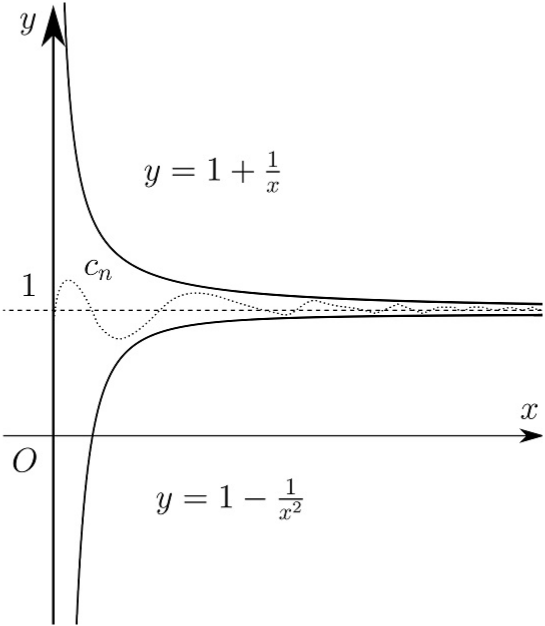
右図は定理 2.3 (2) の状況を以下の具体例で表したものである．

$$a_n = 1 - \frac{1}{n^2},\ b_n = 1 + \frac{1}{n}$$

これらはそれぞれ関数

$$y = 1 - \frac{1}{x^2},\ y = 1 + \frac{1}{x}$$

の曲線上に乗っている．数列 c_n はこの 2 つの曲線の間にあるので，n が大きくなるに従って，a_n, b_n の同一の極限値に近づいていかざるを得ない．



定理 2.3 は元の数列の大小関係は，極限をとっても「基本的には」保存されるという主張である．基本的，という言葉を添えたのは，

$$\text{すべての } n \text{ に対して } a_n < b_n \text{ であるが，} \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n \text{ となる}$$

ことがあるからである．

演習問題. すべての n に対して $a_n < b_n$ であるが，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$ となる数列の組を一例挙げよ．

例題 2.4. 極限値 $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{6}$ を求めよ．

（考え方） $\sin \frac{n\pi}{6}$ をそのまま扱おうとすると面倒だが，$\sin x$ は，すべての x について次の不等式

$$-1 \leqq \sin x \leqq 1$$

を満たしている．これより，はさみうちの定理が使えそうである．

解.　考え方の項で述べた不等式を使えば，すべての n について

$$-1 \leqq \sin\frac{n\pi}{6} \leqq 1.$$

与えられた数列を作るために，各辺に $\dfrac{1}{n}$ を掛ければ

$$-\frac{1}{n} \leqq \frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{6} \leqq \frac{1}{n}.$$

ここで $\dfrac{1}{n}$ は正の数なので，不等号の向きが変わらないことに注意する．

左右にある数列の極限値は $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right) = 0$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ と一致しているので，はさみうちの定理が使える．したがって，与えられた数列の極限は

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{6} = 0 \quad \square$$

§2.3 等比数列 $a_n = ar^{n-1}$ の極限について

- 数 a に，一つの数 r を繰り返して掛けていくことで得られる数列を等比数列という．たとえば，

$$a_1 = 2, \quad a_2 = 2 \times 3 = 6, \quad a_3 = 6 \times 3 = 18, \quad a_4 = 18 \times 3 = 54$$

という数列である．この数列の一般項は以下のようになることは明らかであろう．

$$a_n = 2 \times 3^{n-1}$$

- 等比数列の一般項は

$$a_n = ar^{n-1}$$

で与えられる．この講義では簡単のために $a_n = ar^n$ として考えることも多い．

定理 2.5. 簡単のため $a > 0$ とする.
定数 r が与えられたとき，等比数列 $a_n = ar^{n-1}$ の極限は

1) $r > 1$ ならば $\lim_{n\to\infty} ar^{n-1} = +\infty$,
2) $r = 1$ ならば $\lim_{n\to\infty} ar^{n-1} = a$,
3) $-1 < r < 1$ ならば $\lim_{n\to\infty} ar^{n-1} = 0$,
4) $r \leqq -1$ ならば $\lim_{n\to\infty} ar^{n-1}$ は極限を持たない.

$a < 0$ のときは (1) の極限が $-\infty$ になる．$a = 0$ ならば場合分けは必要なく，当然ながらその極限値は 0 になる（すべての項が 0 なので）.

- 雑な説明をすれば，正の数 r が 1 よりも大きかったら，r を掛ける毎にどんどん大きくなっていくし，逆に 1 よりも小さかったら，r を掛ける毎にどんどん小さくなっていく，ということ.
- $r = 1$ のときは当然数列の値はずっと変わらないが，大きくなるか小さくなるかの分水嶺となっている.
- r が負の数のときは，§2.1 の d_n のように振動していて，絶対値が 1 よりも小さければ振動しつつ 0 に収束していくが，1 以上だったら収束できないことは想像しやすい.
- 次ページからその証明のアイデアを簡単に述べる.

- $r = 1$ のとき．これは明らか．
- $r > 1$ のとき．このとき，$r = 1 + h$, $h > 0$ と書ける．二項定理を思い出せば (記述の簡単のために $n-1$ ではなく n で計算する),

$$r^n = (1+h)^n = 1 + nh + \frac{n(n+1)}{2}h^2 + \cdots + h^n.$$

nh 以降の項は複雑ではあるが，正の数であることは分かっているので，この項が無いもののほうが小さい．つまり,

$$r^n = (1+h)^n \geqq 1 + nh \quad (\to +\infty \quad n \to \infty \text{ のとき})$$

r^n よりも小さい数列が正の無限大に発散するので，r^n も正の無限大に発散する．

- $0 < r < 1$ のとき．$r' = \dfrac{1}{r}$ とすれば，$r' > 1$ なので $\lim_{n\to\infty} (r')^{n-1} = +\infty$．また

$$a_n = ar^{n-1} = a\left(\frac{1}{r'}\right)^{n-1} = \frac{a}{(r')^{n-1}}$$

なので，

$$\lim_{n\to\infty} ar^{n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{(r')^{n-1}} = \frac{a}{\lim_{n\to\infty} (r')^{n-1}} = 0.$$

- $r < 0$ のとき．$r = -r'$ と書けば，

$$a_n = ar^{n-1} = (-1)^{n-1} \times a(r')^{n-1}$$

なので，$0 < r' < 1$ のときははさみうちの定理を使えばよい．$r' \geqq 1$ のときは振動して極限がないことは明らかであろう．

例題 2.6. 次の極限を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n + 2^{n+1}}{2^{2n} - 3^n}$$

（考え方） 基本的には分数関数と同様の考え方をすればよい．つまり，極限は「一番大きい項」に支配されるので，一番大きいもので分子分母を割ってみる．

解.　まず与えられた数列にある等比数列の項を，ar^n の形に書き換える．$2^{2n} = (2^2)^n = 4^n$ に注意する．

$$\frac{3^n + 2^{n+1}}{2^{2n} - 3^n} = \frac{3^n + 2 \cdot 2^n}{4^n - 3^n}$$

ここに現れる等比数列の中で一番大きいものは 4^n である．よって分子分母を 4^n で割ってみれば，

$$\frac{3^n + 2 \cdot 2^n}{4^n - 3^n} = \frac{(3^n + 2 \cdot 2^n) \div 4^n}{(4^n - 3^n) \div 4^n} = \frac{(\frac{3}{4})^n + 2 \cdot (\frac{1}{2})^n}{1 - (\frac{3}{4})^n}$$

$\frac{3}{4}$ と $\frac{1}{2}$ はどちらも 1 よりも小さいので

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0, \quad \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0.$$

これより，

$$\lim_{n \to \infty} \frac{3^n + 2^{n+1}}{2^{2n} - 3^n} = \lim_{n \to \infty} \frac{(\frac{3}{4})^n + 2 \cdot (\frac{1}{2})^n}{1 - (\frac{3}{4})^n} = \frac{\lim_{n \to \infty} \left((\frac{3}{4})^n + 2 \cdot (\frac{1}{2})^n\right)}{\lim_{n \to \infty} \left(1 - (\frac{3}{4})^n\right)} = \frac{0}{1} = 0$$

例題 2.7. $a_1 = 0$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}a_n + 1$ によって定義される数列 $\{a_n\}$ の極限値を求めよ．

（考え方） この数列のように，n 番目の値が $n-1$ 番目の値によって決まる関係式のことを漸化式という．等比数列 $a_n = ar^{n-1}$ の漸化式は

$$a_{n+1} = ra_n, \quad a_1 = a$$

である．逆に，この漸化式から等比数列 $a_n = ar^{n-1}$ の一般項が得られる．$a_{n+1} = \alpha a_n + \beta$ の形の漸化式は，$\alpha \neq 1$ ならば等比数列，$\alpha = 1$ ならば等差数列を用いて表されることが知られている．今の場合は $\alpha = \frac{1}{2} \neq 1$ なので，等比数列が現れる．

解.　まず漸化式を解く．考え方でも述べたように，

$$A_{n+1} = \frac{1}{2}A_n \quad \Rightarrow \quad A_n = A_1 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

そこで与えられた漸化式を

$$(a_{n+1} - X) = \frac{1}{2}(a_n - X)$$

の形で書ければ，漸化式が解ける．実際，$a_n - X = A_n$ と思って先程の式に代入すれば

$$a_n - X = (a_1 - X)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad \Leftrightarrow \quad a_n = (a_1 - X)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + X$$

となって，確かに a_n を n の式として表現できている．

$$a_{n+1} - X = \frac{1}{2}(a_n - X) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{1}{2}a_n - \frac{1}{2}X + X \\ &= \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}X. \end{aligned}$$

これが与えられた漸化式に等しいので，

$$\frac{1}{2}X = 1 \quad \text{すなわち} \quad X = 2.$$

これを先程の式に代入すれば，$a_1 = 0$ であることを思い出して

$$\begin{aligned} a_n &= (a_1 - X)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + X \\ &= (0 - 2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 2 \\ &= -2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 2 \end{aligned}$$

よって与えられた数列は

$$a_n = -2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 2$$

であることがわかった．ここに現れている等比数列の公比は $\frac{1}{2} < 1$ なので，この等比数列の極限値は 0 である．したがって

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(-2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 2\right) = 0 + 2 = 2 \quad \square$$

極限値を求めるだけなら，$\lim_{n\to\infty} a_n$ が存在するならば

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n$$

のはずなので，その同一の極限値を X と書けば，与えられた漸化式の両辺で極限を取って

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} a_n + 1 \right)$$

$$\Rightarrow \quad X = \frac{1}{2} \cdot X + 1 \qquad \Rightarrow \quad X = 2$$

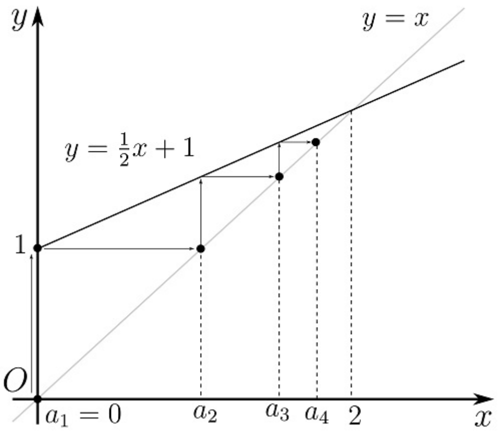
という計算から $\lim_{n\to\infty} a_n = X$ となる．

応用上はこのようなおおらかな方法でも問題はないことも多いが，厳密にはよくない．その理由は，この解法では

$$「\lim_{n\to\infty} a_n \text{ が存在するならば」}$$

という仮定のもとで計算を行っているので，その極限値が存在することを別に証明する必要があるのである．

この漸化式は，次のような2 直線の間の点の動きとして考えることもできる．つまり，直線 A: $y = \frac{1}{2}x + 1$ と直線 B: $y = x$ を考え，原点からまず垂直に直線 A に向かい，ぶつかったら今度は水平に直線 B に向かう．今度は垂直に直線 A に…と繰り返していくのである．数列 a_n は直線 B とぶつかった点の x 座標に相当する．その極限値は，2 つの直線の交点の x 座標となることも見て取れる．



演習問題

(1) すべての n に対して $a_n < b_n$ であるが，$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$ となる数列の組を一例挙げよ．

(2) 一般項が次の式で表される数列の極限を調べよ．

$$(a)\ \frac{2n-1}{5n+1} \quad (b)\ \frac{2n^2+n}{n^2-6} \quad (c)\ \frac{7n-3}{3n^2+4n}$$

(3) 一般項が次の式で表される数列の極限を調べよ．

$$(a)\ 2n^3-4n \quad (b)\ \sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}$$

(4) 次の無限等比数列の極限を調べよ．

$$\text{(a) } 3, 9, 27, 81, \ldots \quad \text{(b) } -\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, -\frac{8}{27}, \ldots \quad \text{(c) } 8, -12, 18, -27, \ldots$$

(5) 一般項が次の式で表される数列の極限を調べよ．

$$(a)\ \frac{5^n-2^n}{3^n} \quad (b)\ \frac{2^{2n+1}}{3^n+4^n} \quad (c)\ \frac{(-2)^n+3^n}{3^n-(-2)^n}$$

(6) $r \neq -1$ のとき，数列 $\dfrac{r^n}{1+r^n}$ の極限を調べよ．