1　関数の復習

高校のときに学んだ関数について復習をしておこう．この講義の目標の一つは，ここで紹介する関数の微分・積分を計算できるようになることである．また，三角関数については，従来の度数法ではなく，弧度法という新しい角度の単位を導入する．これは三角関数の微分を考える際には非常に自然な単位になる．

1.1　数列・関数

数列とは $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ のように数字が並んでいるものであり，n 番目に数 a_n があるという対応が分かっているときには $\{a_n\}_{n=1,2,\ldots}$ と書く．

関数とは，数 x に対して $f(x)$ というただ一つの数を対応させるものであり，関数 $y = f(x)$ などのように書く．関数をグラフとして描写したとき，y 軸と平行な直線との交点は多くても一つしか持たない．

1.2　種々の関数

ここではよく用いられる関数をいくつか紹介する．

多項式:　$f(x) = x^2 + 2x - 1$ や $g(x) = x^3 + 1$ などのように，x^k の形の関数をいくつか足し合わせて得られる関数のこと．

分数関数:　2 つの多項式 $f(x)$, $g(x)$ を用いて

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

のようにかける関数のこと．有理関数ともいう．

無理関数:　$\sqrt{x}$ や $\sqrt{x^2 + 2x - 1}$ などのように，多項式に根号 $\sqrt{\ }$ をつけて表される関数のこと．

三角関数:　半径 1 の円の，角度 $\theta°$ に当たる点の x 座標が $\cos\theta°$，y 座標が $\sin\theta°$ である．また，直線 $x = 1$ と原点とこの点をつなぐ直線との交点の y 座標が $\tan\theta°$ である (図 1 参照)．

指数関数:　0 でない数 a を用いて $f(x) = a^x$ のように書ける関数のこと (図 2 参照)．

対数関数:　指数関数の逆関数 $\log_a(x)$ のこと．これは，$a^{\log_a x} = x$, $\log_a a^x = x$ を満たす (図 2 参照)．

ここで紹介した関数は，まとめて**初等関数**と呼ばれている．これらはいずれも，数学に限らず多くの自然科学で自然に現れてくる，非常に重要な関数である．

1.3　関数同士の演算

2 つの関数 $f(x), g(x)$ が与えられたとき，その 2 つを用いて新たな関数を作ることができる．たとえば，和 $f(x) + g(x)$ や，積 $f(x)g(x)$ などである．この他に，$h(x) = f\bigl(g(x)\bigr)$ のようにして新しい関数を構成することができる．このような形で定義される関数を**合成関数**と呼ぶ．例えば $\sin(x^2 + 1)$ は，$f(x) = \sin x$, $g(x) = x^2 + 1$ としたときの $f\bigl(g(x)\bigr)$ である．一般に，$f\bigl(g(x)\bigr) \neq g\bigl(f(x)\bigr)$ であることに注意．実際，今の例の場合においても，$g\bigl(f(x)\bigr) = (\sin x)^2 + 1 = \sin^2 x + 1$ となり，$\sin(x^2 + 1)$ とは異なる．

ここで関数 $f(x)$ が与えられたとき，

$$f\bigl(g(x)\bigr) = g\bigl(f(x)\bigr) = x$$

となるような関数 $g(x)$ について考える．そのような関数はいつでも存在するとは限らないが，存在するときには $g(x)$ のことを $f(x)$ の逆関数といい，$f^{-1}(x)$ という記号で表す．図で言えば，$y = f(x)$ のグラフを直線 $y = x$ で折り返したものになる (図 1 参照)．

考える区間を狭めることにより，逆関数を定義できる場合もある．そのための必要十分条件は，考える区間の上で 1 対 1 となっていることである．

1.4　三角関数

これまでは度数法 ($30°$ など) を用いていたが，今後は**弧度法**を用いることにする．半径 r の円を考え，弧 $\overset{\frown}{AB}$ の長さを l_r とすれば，比 $\dfrac{l_r}{r}$ は r に関わらずに一定の値になる ($\because$ 相似)．そこで，角度 $\theta°$ を表すために数 $\dfrac{l_r}{r}$ を用いることにする．これは，半径 1 の円を考えたときには，角度 $\theta°$ に対応する弧の長さと一致する．単位は**ラジアン**というが，単位ラジアンは省略して書かれることが多い．例えば，

$$180° = \pi \text{ ラジアン}, \quad 90° = \frac{\pi}{2} \text{ ラジアン}, \quad 60° = \frac{\pi}{3}.$$

弧度法を導入するメリットの一つとして，三角関数の微分の公式が綺麗になることが挙げられる．

$$\bigl(\sin x\bigr)' = \cos x, \quad \bigl(\cos x\bigr)' = -\sin x.$$

虚数単位を i とすれば，次のような公式 (**ド・モアブルの定理**) が成り立つ．

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos(nx) + i \sin(nx)$$

また，次のような積公式も成り立っている．

$$
\begin{aligned}
&(\cos a + i \sin a)(\cos b + i \sin b) \\
&\qquad = \cos(a+b) + i \sin(a+b)
\end{aligned}
$$

ここから三角関数の加法定理が導かれる．

定理 1.1

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

1.5　まとめ

- 初等関数とそのグラフの概形
- 合成関数と逆関数
- 度数法と弧度法

1.6　演習問題

(1) 次の分数式を約分せよ．

$$(a)\ \frac{x^2-3x-4}{x^2+3x+2} \quad (b)\ \frac{x^2-1}{x^3-1}$$

(2) 次の関数の逆関数を求めよ．

$$(a)\ y = -\frac{1}{3}x + 4 \quad (b)\ y = 3x - 1$$

(3) 次の関数の逆関数を求めよ．

$$(a)\ y = x^2 \quad (b)\ y = 2^x \quad (c)\ y = \log_{10} x$$

(4) 次の角を，度数は弧度に，弧度は度数に，それぞれ書き直せ．

$$(a)\ 15^\circ \quad (b)\ -60^\circ \quad (c)\ \frac{8}{5}\pi \quad (d)\ -\frac{5}{12}\pi$$

(5) $f(x) = x + 1$, $g(x) = \sqrt{x^2+1}$, $h(x) = \log_2(x)$ のとき，次の合成関数を x の式で表せ．

$$(a)\ f\bigl(g(x)\bigr) \quad (b)\ g\bigl(f(x)\bigr) \quad (c)\ h\bigl(g(x)\bigr)$$

1.6.1　ヒント

(1) 通常の数と同じように，分数式の分母と分子をその共通の因子で割ること (約分) ができる．例えば,

$$\frac{x^3+1}{x^2-x-2} = \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x+1)(x-2)} = \frac{x^2-x+1}{x-2}$$

(2), (3) 与えられた関数を $x = \cdots$ の形にしてから x と y を入れ替える．

(4) 角度 θ° を弧度 x ラジアンで表したいときは，比

$$\frac{\pi}{180^\circ} = \frac{x}{\theta^\circ}$$

から x の式として表せばよい．逆に弧度 x ラジアンから角度 θ° を知りたいときは，同じ式を θ について解けばよい．

1.7　関数のグラフなど

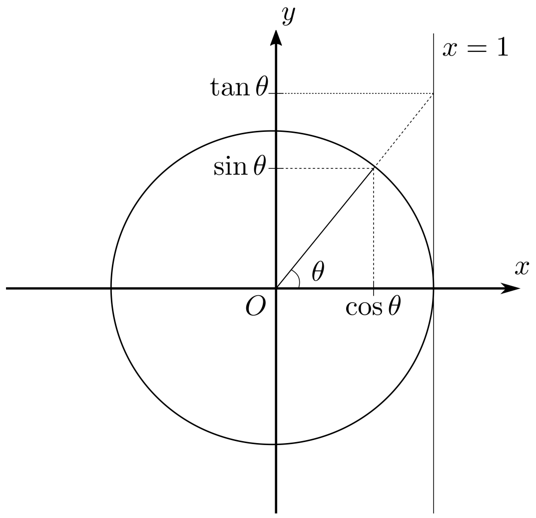

図 1　三角関数の定義

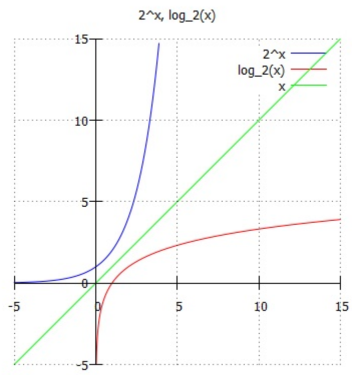

図 2　逆関数