微分積分学・同演習 A

演習問題 5

1.[†] $y = x^\alpha$ とすれば $\log y = \alpha \log x$ なので両辺を x で微分すると $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{\alpha}{x}$. よって $y' = \alpha y/x = \alpha x^{\alpha-1}$.

2. (1) $(1+x)^{m-1}(2-x)^{n-1}(2m-n-(m+n)x)$
(2) $e^{px}((p+q)\cos qx + (p-q)\sin qx)$
(3) $(\sin px)^{m-1}(\cos qx)^{n-1}(pm\cos px \sin qx - nq \sin px \sin qx)$

3. (1) $\dfrac{a^2-ax-x^2}{(a-x)^{1/2}(a+x)^{3/2}}$ (2) $\dfrac{2x(6x^2-1)}{3(1-x^2+3x^4)^{2/3}}$ (3) $\dfrac{a^2\cos x}{(a^2\cos^2 x + b^2 \sin^2 x)^{3/2}}$

4.[†] (1) 微分できない（右極限が $+1$, 左極限が -1）
(2) 微分できない（$+\infty$ に発散）
(3) 微分できない（右極限が $+1$, 左極限が -1）
(4) 微分できない（右極限が $+\pi/2$, 左極限が $-\pi/2$）

5. (1) $\dfrac{-(x+1)(5x^2+14x+5)}{8x+2)^4(x+3)^5}$ (2) $\dfrac{(a+b)(ab-x^2)}{(a+x)^{1/2}(b+x)^{1/2}(a-x)^{3/2}(b-x)^{3/2}}$
(3) $\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$ (4) $x^x(\log x + 1)$

6.[†] (1) 連続であることは講義中で示した．$\frac{f(h)-f(0)}{h} = \sin 1/h$ であるので $h \to 0$ としてもこれは収束しないので，f は $x=0$ における微分係数を持たない．
(2) $\lim_{x\to+0} \frac{e^{1/x}-e^{-1/x}}{e^{1/x}+e^{-1/x}} = 1$, $\lim_{x\to-0} \frac{e^{1/x}-e^{-1/x}}{e^{1/x}+e^{-1/x}} = -1$ であることより，$\lim_{x\to 0} x\frac{e^{1/x}-e^{-1/x}}{e^{1/x}+e^{-1/x}} = 0 = f(0)$ なので f は $x=0$ で連続であるが，$\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{e^{1/x}-e^{-1/x}}{e^{1/x}+e^{-1/x}}$ であるためこれは左右の極限値が一致せず，したがって微分係数を持たない．

7. (1) $\dfrac{dx-b}{-cx+a}$ [*1] (2) $\log(x+\sqrt{x^2+1})$ (3) $\dfrac{1}{2}\log\dfrac{1+x}{1-x}$ $(|x|<1)$

8. (1) $\dfrac{\pi}{3}$ (2) $\dfrac{\pi}{3}$ (3) $\dfrac{5\pi}{12}(=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{6})$

9. (1) 簡単のため $\alpha = \mathrm{Arctan}\,\frac{1}{2}$, $\beta = \mathrm{Arctan}\,\frac{1}{3}$ とおく．

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = 1$$

であり，$\tan \pi/4 = 1$ なので，$\mathrm{Arctan}\,\frac{1}{2} + \mathrm{Arctan}\,\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$.

---

5 月 16 日分 (凡例：無印は基本問題，† は特に解いてほしい問題，$*$ は応用問題)
講義用 HP: http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~h-nakashima/lecture/2017C.html

[*1] 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の逆行列と比較してみよ．

(2) 簡単のため $\alpha = \mathrm{Arctan}\,\frac{b}{a}$, $\beta = \mathrm{Arctan}\,\frac{a-b}{a+b}$ とおく.

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \frac{\frac{b}{a} + \frac{a-b}{a+b}}{1 - \frac{b}{a}\cdot\frac{a-b}{a+b}} = \frac{b(a+b) + a(a-b)}{a(a+b) - b(a-b)} = 1.$$