微分積分学・同演習 A

演習問題 9

1.† ４月１８日分小テストの解答を参考のこと．

2. (1) 正しい．与えられた $x \in \mathbb{R}$ に対して，$y := -x$ とすればよい．

(2) 誤り．どんな $x \in \mathbb{R}$ に対しても，$x+1, x-1$ の少なくとも片方は 0 ではないから．

(3) 誤り．$x = 0$ とすれば，すべての $y \in \mathbb{R}$ に対して $xy = 0$.

(4) 正しい．$x = 0$ とすればよい．

3.† C^1 級とは 1 階導関数が存在して連続であること，C^2 級とは 2 階導関数が存在して連続であることである．$x \neq 0$ のとき $f(x)$ を微分すれば

$$f'(x) = 4x^3 \sin\frac{1}{x} - x^2 \cos\frac{1}{x}$$

であり，$x = 0$ における微分係数は

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} h^3 \sin\frac{1}{h} = 0$$

より $f'(0) = 0$ である．また，

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = \lim_{x \to 0} x^2 (4x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}) = 0$$

より，$f'(x)$ は $x = 0$ においても連続である (それ以外の点で連続であることは，連続関数の合成関数であることから明らか)．よって f は C^1 級である．2 階微分を調べる．$x \neq 0$ のとき，

$$f''(x) = 12x^2 \sin\frac{1}{x} - 6x \cos\frac{1}{x} - \sin\frac{1}{x}$$

であり，$x = 0$ における微分係数は

$$\lim_{h \to 0} \frac{f'(h) - f'(0)}{h} = \lim_{h \to 0} h(4h^2 \sin\frac{1}{h} - \cos\frac{1}{h}) = 0$$

より $f''(0) = 0$ である．しかし，$\lim_{x \to 0} f''(x)$ を考えると，第 3 項の $\sin\frac{1}{x}$ が $x \to 0$ のとき振動してしまい，収束しない．つまり，$f''(x)$ は $x = 0$ において連続でない．よって f は C^2 級の関数でない．

---

6 月 20 日分 (凡例：無印は基本問題，† は特に解いてほしい問題，$*$ は応用問題)
講義用 HP: http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~h-nakashima/lecture/2017C.html

4. (1) $\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$
(2) $\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$
(3) $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + o(x^4)$
(4) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{8} + o(x^4)$

5. (1) n が偶数のとき，$\alpha^{n-2}((\alpha^2x^2 + n^2 - n)\sinh\alpha x + 2\alpha nx\cosh\alpha x)$, n が奇数のとき，$\alpha^{n-2}((\alpha^2x^2 + n^2 - n)\cosh\alpha x + 2\alpha nx\sinh\alpha x)$
(2) $\alpha^{n-2}(((x^2-1)\alpha^2 - n(n-1))\cos(\alpha x + \frac{n\pi}{2}) + 2n\alpha x\sin(\alpha x + \frac{n\pi}{2}))$
(3) $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin(\alpha x + \frac{k\pi}{2}) = (\sqrt{2})^n\sin(\alpha x + \frac{n\pi}{4})$.
どれも Leibniz の公式を適用すればよい．(3) は $n = 1, 2$ の場合を計算して帰納法に持ち込むほうが賢いかもしれない.

6. (1) $\frac{3\pi}{4}$　(2) 出題ミスでした：$\mathrm{Arcsin}\,\frac{1}{4} + 2\,\mathrm{Arcsin}\,\frac{\sqrt{6}}{4}$ でした．この場合は $\frac{\pi}{2}$ です.
(3) $\frac{\pi}{4}$　(4) $\frac{\pi}{4}$
(1) $\frac{\pi}{4} \leq \mathrm{Arctan}\,2 \leq \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4} \leq \mathrm{Arctan}\,3 \leq \frac{\pi}{2}$ より，$\frac{\pi}{2} \leq \mathrm{Arctan}\,2 + \mathrm{Arctan}\,3 \leq \pi$ となることに注意.
(4) $\alpha = \mathrm{Arctan}(1/7)$, $\beta = \mathrm{Arctan}(3/79)$ としたとき，$\tan 2\alpha = 7/24$, $\tan 4\alpha = 336/527$, $\tan 5\alpha = 2879/3353$ および $\tan 2\beta = 237/3116$ となる．tan の加法定理の練習に.

7. (3) について考える ($m = 1, 2$ とすれば (1)，(2) と同じになる)．$f(x) = x^m$ とおく．区間 $[0, 1]$ を n 等分したとき，区分求積法による和を S_n と書けば,

$$S_n = \sum_{k=0} \frac{1}{n} * f(\frac{k}{n}) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^m = \frac{1}{n^{m+1}}\sum_{k=0}^{n}k^m.$$

ここで自然数の m 乗和 $\sum_{k=0}^{n}k^m$ は $\frac{1}{m+1}n^{m+1} + (n$ の m 次以下の多項式$)$ という形の多項式になることを踏まえる (次ページ参照) と,

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{m+1}n^{m+1} + (n \text{ の } m \text{ 次以下の多項式})}{n^{m+1}} = \frac{1}{m+1}.$$

よって $\int_0^1 x^m\,dx = \frac{1}{m+1}$.

8.† (1) $\sinh x$　(2) $\cosh x$　(3) $\mathrm{Arctan}\,x$　(4) $\mathrm{Arcsin}\,x$

自然数の m 乗和 $\sum_{k=0}^{n} k^m$ は $\frac{1}{m+1}n^{m+1} + (n$ の m 次以下の多項式$)$ という形の多項式になることについて．

自然数の m 乗和 $\sum_{k=0}^{n} k^m$ を S_m で表す．まず二項定理により，各自然数 k に対して

$$(k+1)^{m+1} - k^{m+1} = (m+1)k^m + \sum_{l=2}^{m+1} \binom{m+1}{l} k^{m+1-l}$$

が成り立つ．この両辺を $k=1$ から $k=n$ まで足し合わせると，

$$(n+1)^{m+1} - 1 = (m+1)\sum_{k=1}^{n} k^m + \sum_{l=2}^{m+1} \binom{m+1}{l} \sum_{k=1}^{n} k^{m+1-l}.$$

つまり，

$$(m+1)S_m = (n+1)^{m+1} - 1 - \sum_{l=2}^{m+1} \binom{m+1}{l} S_{m+1-l}$$

である．ここで帰納法を用いる．つまり，m より小さい数 r に対しては S_r を n に関して降べきの順に書いたときの最初の項が $\frac{1}{r+1}n^{r+1}$ であると仮定すると，上式の右辺の総和記号の中の n の最大次数は m であることがわかる (つまり $m+1$ 次の項は存在しない)．一方，$(n+1)^{m+1}$ があるので，これを二項展開すれば，右辺の n の最大次数は $m+1$ であることがわかる．これより，S_m を n に関して降べきの順に書いたときの最初の項が $\frac{1}{m+1}n^{m+1}$ であることがわかる．