# 線形代数学・同演習 A

## 7 月 26 日分　小テスト

学籍番号：　　　　　　　　　　　　　　氏名：

次の行列 $A$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．計算過程も明示すること．

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

解) まず，固有多項式 $g_A(t)$ を求める．

$$g_A(t) = \left| \, tE_3 - A \, \right| = \begin{vmatrix} t-2 & 1 & 4 \\ 0 & t-1 & 0 \\ 1 & -2 & t+1 \end{vmatrix} = (t-1) \begin{vmatrix} t-2 & 4 \\ 1 & t+1 \end{vmatrix} = (t-1)(t+2)(t-3).$$

固有値は $g_A(t) = 0$ の解なので，$A$ の固有値は $\lambda = 1, -2, 3$. 次に固有ベクトルを計算する．

(i) $\lambda = 1$ のとき．

固有ベクトルは $(E_3 - A)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解なので，

$$E_3 - A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

これより，$\begin{cases} x + 2z = 0 \\ y - 6z = 0 \end{cases}$ の解，例えば $\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ が固有値 $\lambda = 1$ の固有ベクトルになる．

(ii) $\lambda = -2$ のとき．

$-2E_3 - A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ を簡約化すると，$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ なので，$\begin{cases} x-2z=0 \\ y=0 \end{cases}$ の解，例えば $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ が $\lambda = -2$ の固有ベクトル．

(iii) $\lambda = 3$ のとき．

$3E_3 - A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ を簡約化すると，$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ なので，$\begin{cases} x+4z=0 \\ y=0 \end{cases}$ の解，例えば $\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ が $\lambda = 3$ の固有ベクトル．

※講義や講義内容に関して，意見・感想・質問等を自由に記述してください．