線形代数学・同演習 B

小テスト 4　(10 月 31 日分)

学籍番号：　　　　　　　　　　　　　　氏名：

ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ および行列 A を次のように定めるとき，次の問題に答えよ．

$$A = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ -4 & 1 & 5 & 4 \\ -2 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) $\mathbb{R}^3$ の部分空間 $W_1 := \mathrm{Span}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4)$ の次元と，その基底を一組求めよ．

(2) 行列 A に関する解空間 $W_2 := \ker A$ の次元と，その基底を一組求めよ．

(考え方) まず与えられた行列を簡約化する．**(1)** 与えられた列ベクトルの中で線形独立なものを探す; 簡約化した行列で，主成分がある列に対応するベクトルを持ってくればよい．**(2)** 与えられた行列を係数行列に持つ連立一次方程式を解けばよい．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ -4 & 1 & 5 & 4 \\ -2 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) 簡約化した行列の主成分に数は 2 本なので，$\dim W_1 = 2$．主成分がある列は 1 列目と 2 列目なので，W_1 の基底として $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ がとれる．

(2) 連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を解く．$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ とする．A の簡約化は既に計算しており，次の方程式に簡約化される; $x - z - w = 0$, $y + z = 0$．ここでパラメータ s, t を導入し，$z = s$, $w = t$ とすれば $x = s + t$, $y = -s$ なので，この方程式の解は

$$\begin{pmatrix} s+t \\ -s \\ s \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (s, t \in \mathbb{R})$$

である．パラメータの数が 2 なので解空間の次元は $\dim W_2 = 2$ であり，W_2 の基底として $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ がとれる．

※講義や講義内容に関して，意見・感想・質問等を自由に記述してください．