2020 年度　名古屋大学

理系基礎科目（文系） 数学入門
第 2 回小テスト・解答

講義担当者：中島秀斗

問題 2.1

2 つの収束する数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ が常に $a_n < b_n$ を満たすならば，その極限値についても同じ不等号が成立する．すなわち，$\lim_{n\to\infty} a_n < \lim_{n\to\infty} b_n$ が成り立つ．

解答：誤り．（次ページの質問への回答を参照のこと）

問題 2.2

2 つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ が，$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ および $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$ を満たしているとする．このとき，$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = 0$ が成り立つ．

正解：誤り

"$0 \times (+\infty)$" は不定形で，a_n, b_n の収束/発散速度に応じて極限が変わる．第 2 回スライド 31 ページ参照．

問題 2.3

2 つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ が，$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ および $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$ を満たしているとする．このとき，$\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$ が成り立つ．

正解：正しい

まず $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n}$ を考えると，"$\frac{1}{\infty}$" で，1 を非常に大きい数で割ることになるので，その極限は 0 になる．よって，$\frac{a_n}{b_n} = a_b \times (\frac{1}{b_n})$ とみると，2 つの収束する数列 $\{a_n\}, \{\frac{1}{b_n}\}$ の積の極限なので第 2 回スライドの 25 ページにある定理 2.1 の (3) が使える．

問題 2.4

次の一般項を持つ数列の中で，収束するものをすべて選べ．

$$\text{(A)}\quad \sqrt{n} \qquad \text{(B)}\quad \frac{3n^2-1}{1+4n^2} \qquad \text{(C)}\quad \frac{1}{n}\cos\left(\frac{n\pi}{8}\right) \qquad \text{(D)}\quad \left(\frac{\pi}{3}\right)^n$$

正解：B,C

(C) ははさみうちの原理を用いる．(D) は $\pi > 3$ より $\frac{\pi}{3} > 1$ なので，等比数列の極限より発散する．

問題 2.5

一般項が $a_n = \dfrac{8^n - 3^{2n+1}}{9^n - 2^{3n}}$ で与えられる数列 $\{a_n\}$ の極限値はどれか．

(A) -3　(B) 0　(C) $+\infty$　(D) -1

正解：A

$a_n = \dfrac{8^n - 3\cdot 9^n}{9^n - 8^n} = \dfrac{(\frac{8}{9})^n - 3}{1-(\frac{8}{9})^n}$ のように変形する (一番大きい項で割る)．第 2 回スライドの例題 2.6（53 ページ）を参照のこと．

質問 講義の板書で質問があります。等比数列の極限で $r=1$ ならば極限は 1 とありましたが、正しくは a(初項) ではないでしょうか？

回答 これは失礼しました．ご指摘の通り，$r=1$ のときには $\lim_{n\to\infty}(ar^{n-1})=a$ です．

質問 経験則として、不定形を解消するときは問題の数列の中で 1 番速く無限大になる数で割れば上手くいくことが多いですか？

回答 極限を扱う際には，一番速く大きくなる（もしくは 0 に近づく）項の影響力が大きいので，その項を軸にして考えることがうまくいくことが多いです．ただし，例えば次のような極限

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{4^n-2^{n+1}}{3^{n+1}+2^n},$$

すなわち分子のほうが分母よりも速く無限大に行く場合は，分子における最大のもので割る方が扱いやすいです（全体の最大で割ると “$\frac{1}{0}$″ のようになって少し面倒．分子の最大だと “$\frac{\infty}{1}$” という形）．

質問 新たに名大で感染者が 1 人出てしまい、対面授業に行けない可能性があります。出席できない場合どうすればいいのでしょうか？先週も今週も、スライドとノートを見て小テストやレポートをの問題を解いています。

— 対面出れなくても大丈夫でしょうか？

回答 講義の出欠は NUCT を通して確認することにしていますし，講義で扱う内容はすべてスライド・ノートに含まれているので，その点においては遠隔のみでも問題ないかと思います．ただ，スライド・ノートのみでは要点が分かりづらいこともあるかと思いますので，質問欄等を通して積極的に質問してくれればと思います．

質問 1 問目ですが、2 つの収束する数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ が常に $a_n<b_n$ を満たすならば、$\lim_{n\to\infty}a_n<\lim_{n\to\infty}b_n$ は成り立ちますが、その前の、$\{a_n\}, \{b_n\}$ が常に $a_n<b_n$ を満たすならば，その極限値についても同じ不等号が成立する、というのは $\lim_{n\to\infty}a_n \leqq \lim_{n\to\infty}b_n$ も成立する場合があるため適さないと考えました。どちらで受け取って回答するのが正しいのか分かりませんでしたので、質問させていただきます。

回答 その考え方で合っています．第 2 回スライドの 43 ページにもあるように，すべての n に対して $a_n<b_n$ であっても，$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to+\infty}b_n$ となることがあります．実際，$a_n=0, b_n=\frac{1}{n}$ がその例を与えています．