2020 年度　名古屋大学
理系基礎科目（文系） 数学入門

第８回

講義担当者：中島秀斗

2020 年 6 月 11 日

はじめに

- 授業形態：学習資料 (スライド・ノート) 配布
  - はじめはスライドに目を通してください.
  - ノートはスライドの要約になります．復習にご活用ください.
  - スライド内にある赤い枠で囲った演習問題は，実際に解いてもらうことを想定しています.
- 小テストについて
  - 小テストは NUCT で行われます.
  - 講義日の午前８時から日付が変わるまでの間に完了してください.
- レポートについて
  - 講義 3,4 回毎にレポートを課します.
  - 各回に出題する演習問題を解いたものを，pdf ファイルとして提出してもらいます.
  - 学習資料配布時のお知らせの中で通知します.

凡例

公式や定理など，講義において重要な情報は青の枠で囲む．

演習問題は赤の枠で囲む．実際に手を動かして解いてほしい．

コメントや注意すべき点などは緑の枠で囲む．

例題は黄色の枠で囲む．解答も用意されているが，計算量の多いものは実際に手を動かして一緒に解いてほしい．

前回の訂正

定理 (誤). 2 回微分可能な関数 $f(x)$ が，$x = a$ において $f'(a) = 0$ となるとする．このとき
(1) $f''(a) > 0$ ならば $f(a)$ は極大値，
(2) $f''(a) < 0$ ならば $f(a)$ は極小値．

定理 (正). 2 回微分可能な関数 $f(x)$ が，$x = a$ において $f'(a) = 0$ となるとする．このとき
(1) $f''(a) > 0$ ならば $f(a)$ は極小値，
(2) $f''(a) < 0$ ならば $f(a)$ は極大値．

下の 2 つのグラフ (左) $y = x^2$ (右) $y = -x^2$ と比較して覚えるのがよい．

前回の小テストの補足

前回の小テストの問題 2

> 関数 $f(x)$ が多項式ならば、$f(x)$ は何回でも微分可能で、さらに自然数 n_0 よりも大きな自然数 n に対して常に $f_n(x) = 0$ となる。

ですが，若干言葉が足りませんでした．正確には

> 関数 $f(x)$ が多項式ならば、$f(x)$ は何回でも微分可能で、さらにある自然数 n_0 が存在して，n_0 よりも大きな自然数 n に対して常に $f^{(n)}(x) = 0$ となる。

のように書くべきでした．

§8 Taylor 級数展開

§8 Taylor 級数展開

- 初等関数は数学のみならず，多くの自然科学において自然に現れ，その関数値が必要になることも多い．
- 関数電卓で，たとえば $\sin 1$ や $\log 5$ などと入力すると，その近似値が少数表記で出力される．
- 一体どのようにしてこのような値を計算しているのだろうか．ここではその基礎となる関数の多項式による近似，すなわちTaylor（テイラー）級数展開およびMaclaurin（マクローリン）級数展開について学ぶ．

今回の目標

- 無限級数および無限等比級数を理解する
- Taylor 級数展開を理解する
- 初等関数の Taylor 級数展開を扱えるようになる

§8.1 無限級数

- 無限数列 $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ があったとき，各項を前から順に $+$ の記号で結んで得られる式

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

を無限級数という．この式を和の記号 $\sum$ を用いて

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

のように表すこともある．

- この式において a_1 を初項，a_n を第 n 項という．初項から第 n 項までの和を第 n 項までの部分和と呼ぶ

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n.$$

(再掲) 数列 $\{a_n\}$ に対して

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots \tag{8.1}$$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n.$$

- 部分和の作る数列 $\{S_n\}$ も無限数列であるのでその極限を考えることができるが，これが収束してその極限値が S であるとき，すなわち

  $$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

  となるとき，無限級数 (8.1) は「収束する」という.
- 極限値 S を無限級数 (8.1) の和といい，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$ と書き表す.
- 反対に無限数列 $\{S_n\}$ が発散するとき，無限級数 (8.1) は「発散する」という.

例題 8.1. 次の無限級数の収束・発散について調べ，収束すればその和を求めよ．

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}+\cdots$$

定義に従って S_n を計算し，極限を考える．第 n 項は $\dfrac{1}{n(n+1)}$ であるが，これは以下のように分解できることを利用する．

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

解.　第 n 項は $\dfrac{1}{n \cdot (n+1)}$ であるが，これは

$$\frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

のように分解できる．したがって，第 n までの和 S_n は

$$\begin{aligned} S_n &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

となるので，

$$\lim_{n \to \infty} S_n = 1 \quad \square$$

次に等比数列の極限について考える．

定理 8.2. $a \neq 0$ とし，数列 a_n を等比数列 $a_n = ar^{n-1}$ とする．
$|r| < 1$ ならば無限級数 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ は収束して，その和は

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots = \frac{a}{1-r}$$

となる．一方，$|r| \geqq 1$ ならば発散する．

等比数列の第 n 項までの和の公式

$$\sum_{i=0}^{n-1} ar^i = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

を知っていれば，等比数列の極限公式と合わせて直ちに定理を得る．
$r = 1$ のときは $S_n = na$ であり，この場合は発散することはすぐに分かる．

念の為，等比数列の第 n 項までの和の公式を示す．$r \neq 1$ とする．

$$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$$

であるが，両辺に r をかけ合わせると，

$$rS_n = r(a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}) = ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n$$

である．この 2 つを辺々引くことを考える．

$$\begin{array}{rrcccccccccccc}
 & S_n & = & a & + & ar & + & ar^2 & + & \cdots & + & ar^{n-1} & & \\
-) & rS_n & = & & & ar & + & ar^2 & + & \cdots & + & ar^{n-1} & + & ar^n \\
\hline
 & S_n - rS_n & = & a & + & 0 & + & 0 & + & \cdots & + & 0 & - & ar^n
\end{array}$$

よって

$$(1-r)S_n = a(1-r^n) \qquad \Leftrightarrow \qquad S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \quad \square$$

注意. 無限級数において,「和の順番」は大事である. 実際, 同じ数が現れる無限数列であっても, 足す順番を変えると, 別の極限値に収束する例もある. 例えば,

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots$$

$$\frac{3}{2}\log 2 = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots$$

いずれも $a_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ が一回ずつ現れる数列である. 前者は a_n が番号の小さい順に並べたものであるが, 後者は a_n を値が正のものと負のものとに分けて, 番号が小さい順に, 正のものを 2 個, 負のものを 1 個, を繰り返して得られる数列である.

§8.2 Taylor 級数展開

- 定理 8.2 において，$a = 1$, $r = x^2$ としてみると，

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + \cdots \quad (|x| < 1)$$

となっていて，

$$\text{関数} = \text{無限級数}$$

の形になっている．この式において $x = 0.1$ とすると

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= 1.010101010101... \\ (\text{右辺の } x^6 \text{までの和}) &= 1.01010101 \end{aligned}$$

のようになる．

- 途中までで打ち切っていても，右辺の値は本来の値 (左辺) と十分近い値になっている．
- このように，関数を x^n の和で表すことができれば，x^n は計算が容易であるので，近似値が計算できるのである．

文脈に応じて必要なだけ微分が可能な関数は，なめらかな関数と呼ばれることが多い．

定理 8.3. なめらかな関数 $f(x)$ は，$x = 0$ の周りで x^n を用いた無限級数として以下のように表される:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \\
&= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \cdots
\end{aligned}
$$

- 定理 8.3 このように，与えられたなめらかな関数を，高次導関数の $x = a$ での値 $f^{(n)}(a)$ と $(x-a)^n$ を用いた無限級数で展開したものを「Taylor（テイラー）級数展開」という．
- 特に $a = 0$ である場合は「Maclaurin（マクローリン）展開」と呼ばれることが多い．
- この定理の要点は，なめらかな関数は，高次導関数のある点での値を係数とする「多項式」によって近似できるという点である．多項式は数ある関数の中でも最も扱いやすい関数なのである．

問題.　なめらかな関数 $f(x)$ が $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ のように記述できること，および「微分と無限級数との入れ替えができる」ことも分かっているとしよう．そのとき，係数 a_n を決定せよ．

「微分と無限級数との入れ替え」は無条件では出来ない点に注意．

- 注意 1．ここの記述にはごまかしが入っている．本来はまず「平均値の定理」を用いて高次導関数 $f^{(n)}(a)$ を係数とする n 次の多項式と剰余項に分解できることを示し (Taylor 展開)，その剰余項が $n \to \infty$ のときに 0 に収束する場合に Taylor 級数展開可能であるというのである．
- すべての関数がこのように Taylor 級数展開ができるとは限らない．例えば次の関数は原点 $x = 0$ において何回でも微分可能であるが，対応する定理 8.3 の和は 0 になってしまう．

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \quad (x \neq 0), \quad f(0) = 0, \quad f^{(n)}(0) = 0.$$

問題．上記の $f(x)$ の，原点における微分係数 $f'(0)$ を計算せよ．

定義に従って計算を行う:$f'(0) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(h) - f(0)}{h}$

定理 8.4. 初等関数の $x = 0$ の周りにおける Taylor 級数展開は以下の通り (総和記号表示).

$$\begin{aligned}
&(1) & e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \\
&(2) & \sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \\
&(3) & \cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \\
&(4) & (1+x)^p &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{p}{n} x^n \\
&(5) & \log(1+x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n
\end{aligned}$$

定理 8.4. 初等関数の $x=0$ の周りにおける Taylor 級数展開は以下の通り (総和記号を展開した場合).

$$(1)\qquad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

$$(2)\qquad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

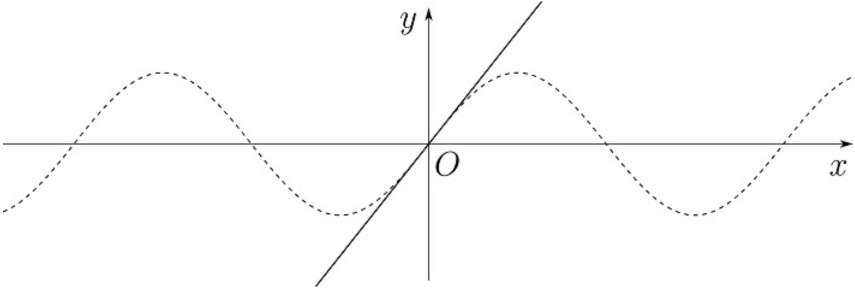
$$(3)\qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

$$(4)\qquad (1+x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2}x^2 + \cdots + \binom{p}{n} x^n + \cdots$$

$$(5)\qquad \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n + \cdots$$

- これらはいずれも定理 8.3 と前回の定理 7.2 を用いればすぐに得られる．
- それを確認することは演習問題とする．
- (1)–(3) の無限級数はすべての x について収束する．
- ただし (4) は $-1 < x < 1$，(5) は $-1 < x \leqq 1$ の範囲でしか収束しない．
- (4),(5) がそれぞれ x^p, $\log x$ でないのは，これら 2 つは原点の周りで Taylor 級数展開を持たないためである．その原因は変数の範囲を複素数にまで拡張させて，初めて理解することができる．
- 奇関数は奇数ベキのみが，偶関数は偶数ベキのみが現れる．実際，三角関数もそのようになっている．

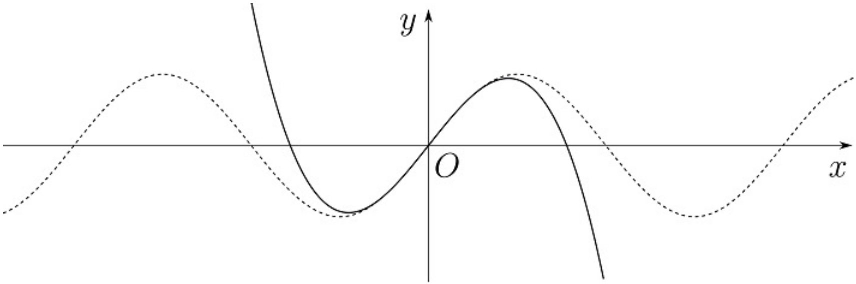
Taylor 級数展開の近似の様子 ($\sin x$ の場合)



$n = 1$ までの近似

$$S_1(x) = x$$

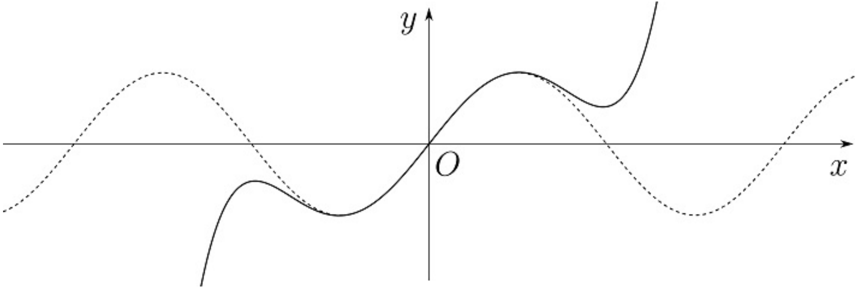
Taylor 級数展開の近似の様子 ($\sin x$ の場合)



$n = 3$ までの近似

$$S_3(x) = x - \frac{x^3}{6}$$

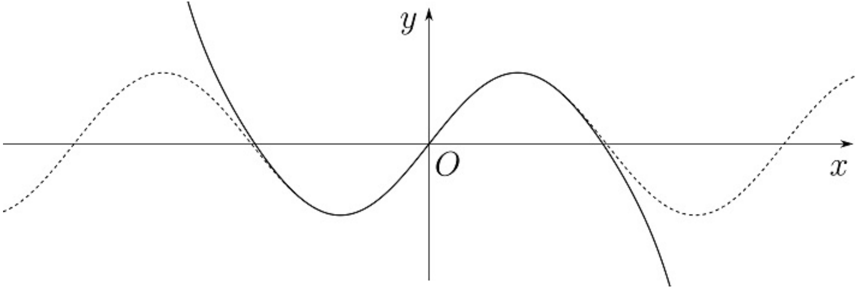
Taylor 級数展開の近似の様子 ($\sin x$ の場合)



$n = 5$ までの近似

$$S_5(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

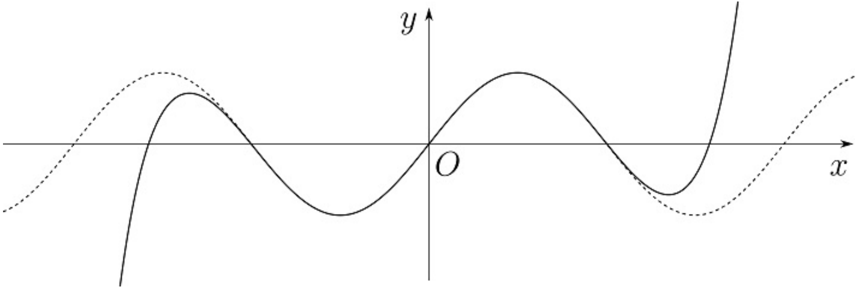
Taylor 級数展開の近似の様子 ($\sin x$ の場合)



$n = 7$ までの近似

$$S_7(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040}$$

Taylor 級数展開の近似の様子 ($\sin x$ の場合)



$n = 9$ までの近似

$$S_9(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \frac{x^9}{362880}$$

例題 8.5. $\sqrt{1+x}$ の $x=0$ の周りにおける Taylor 級数展開を第 4 次の項まで求めよ.

$\sqrt{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{2}}$ であるので，初等関数の Taylor 級数展開の (4) において $p=\frac{1}{2}$ とすればよい.

前回の例題 7.1 より

$$
\begin{aligned}
\binom{\frac{1}{2}}{1} &= \frac{\frac{1}{2}}{1!} && = \frac{1}{2}, \\
\binom{\frac{1}{2}}{2} &= \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!} = \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{2} && = -\frac{1}{8}, \\
\binom{\frac{1}{2}}{3} &= \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!} = \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{6} && = \frac{1}{16}, \\
\binom{\frac{1}{2}}{4} &= \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}-3\right)}{4!} = \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{2\cdot 3\cdot 4} && = -\frac{5}{128}.
\end{aligned}
$$

なので，

$$
\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + o(x^4) \quad \square
$$

ここで，$o(x^4)$ は x^5 以降の項をまとめたものである．

簡単な関数の極限であれば，Taylor 級数展開を利用して求めることができる場合もある．

例題． 次の極限を求めよ．

$$(1)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right) \qquad (2)\ \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}-\frac{\log(1+x)}{x}\right)$$

定理 8.3 にある Taylor 級数展開を用いる．

$$\sin x = x-\frac{x^3}{6}+o(x^3), \quad (1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1-\frac{x}{2}+\frac{3x^2}{8}+o(x^2),$$
$$\log(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$$

(1) $$f(x) = \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x} = \frac{(x + \sin x)(x - \sin x)}{x^2 \sin^2 x}$$

ここで問題になるのは $x - \sin x$ である．$\sin x$ に関する極限として
$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$ があるので，これを利用できるように式変形を行う．

$$f(x) = \frac{x}{\sin x} \cdot \left(\frac{x}{\sin x} + 1\right) \cdot \frac{x - \sin x}{x^3}$$

ここで $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ を利用すれば

$$\frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{x - (x - \frac{x^3}{6} + o(x^3))}{x^3} = \frac{\frac{1}{6}x^3 - o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{6} - o(1) \to \frac{1}{6}.$$

ここで $o(1)$ は $x \to 0$ のときに 0 に収束するものである．よって，

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1 \cdot (1 + 1) \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \quad \square$$

$$(2)\quad (1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} + o(x^2),$$
$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

より，

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1+x}} - \frac{\log(1+x)}{x} &= \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8}\right) - \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right) + o(x^2) \\ &= \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8}\right) - \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3}\right) + o(x^2) \\ &= \frac{x^2}{24} + o(x^2).\end{aligned}$$

よって，

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}} - \frac{\log(1+x)}{x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \cdot \left(\frac{x^2}{24} + o(x^2)\right) = \frac{1}{24} \quad \square$$

何度か用いた $o(x^n)$ という記号はLandou（ランダウ）の記号といい，無限小を扱う際に非常に便利な記号である．正確な定義は

連続関数 $f(x)$ が $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^n}=0$ であるとき $f(x)=o(x^n)$ と表す．

で，x^n よりも速く 0 に収束する関数をまとめて $o(x^n)$ と書きましょう，ということである．定義より，

$$\frac{o(x^m)}{x^p}=o(x^{m-p})$$

などのように計算できる．慣れればとても便利な記号法である．

おまけ

対数の近似値計算について

- 定理 8.4 にあるように，対数関数の Taylor 展開は
$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + \cdots$$
である．
- 定理の後にも注意したように，右辺の無限級数は $-1 < x \leqq 1$ の範囲でしか収束しないので，この公式を用いて $\log(1+x)$, $x > 1$ の値の近似値を計算することは出来ないが，ちょっとした工夫でできるようになる．
- $|x| < 1$ としておく．上記の式で x を $-x$ に置き換えると
$$\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} - \cdots$$
- この 2 つの等式を辺々引けば，$\log a - \log b = \log \frac{a}{b}$ なので
$$\log\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^n}{n} + \cdots\right)$$

- $f(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$ とおき，$-1 < x < 1$ における f の値域を考える．

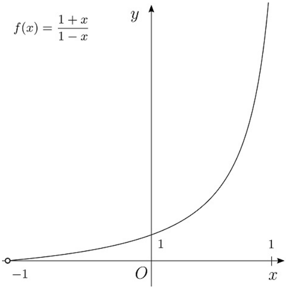
$$f'(x) = \frac{1 \cdot (1-x) - (1+x) \cdot (-1)}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^2} > 0.$$

- 境界すなわち $x = \pm 1$ 付近での挙動は

$$\lim_{x \to -1+0} f(x) = 0, \quad \lim_{x \to 1-0} f(x) = +\infty$$

- したがって増減表およびグラフは以下のようになる．

x	-1	$\cdots$	1
f'		$+$	
f	0	$\nearrow$	$+\infty$



- よって，与えられた任意の正数 $a > 0$ に対して，$a = f(x)$ となる $|x| < 1$ がただ一つ見つかる．具体的には

$$x = \frac{a-1}{a+1}$$

- それより任意の正数の自然対数の近似値が計算できるようになるわけである．
- 例えば $a = 2$ とすれば対応する x は $x = \frac{1}{3}$ なので，$n = 7$ まで計算すれば

$$\begin{aligned}\log 2 &\fallingdotseq 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5 + \frac{1}{7}\left(\frac{1}{3}\right)^7\right)\\ &= 0.693134757332288\ldots\end{aligned}$$

- なお関数電卓で $\ln 2$ (自然対数 $\log 2$ のこと) を入力すると次の数が返ってくる．

$$0.693147180559945309417232121458 18$$

演習問題

1. 次の等比数列からなる無限級数の収束・発散を調べ，収束する場合はその和を求めよ．

$$\text{(a)}\quad \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \qquad \text{(b)}\quad \left(-\frac{2}{3}\right)^{n} \qquad \text{(c)}\quad \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

2. 次の数列を第 n 項に持つ無限級数の収束・発散を調べ，収束する場合はその和を求めよ．

$$\text{(a)}\quad \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \qquad\qquad \text{(b)}\quad \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

3. $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ の $x=0$ の周りにおける Taylor 級数展開を第 4 次の項まで求めよ．