

# 線形代数学・同演習 B

11 月 22 日分 演習問題\*<sup>1</sup>

1. 次の行列の固有値および対応する固有空間を求めよ．

$$(1) \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & -2 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad (4) \begin{pmatrix} 8 & 9 \\ -6 & -7 \end{pmatrix}$$

2.<sup>†</sup> 次の行列の固有値および対応する固有空間を求めよ．

$$\begin{aligned} (1) & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} & (2) & \begin{pmatrix} 8 & -8 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} & (3) & \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ (4) & \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} & (5) & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} & (6) & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 9 \\ -1 & -7 & -9 \end{pmatrix} \\ (7) & \begin{pmatrix} 7 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 4 \\ -8 & -2 & -6 \end{pmatrix} & (8) & \begin{pmatrix} -7 & 6 & -6 \\ -4 & 3 & -4 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix} & (9) & \begin{pmatrix} 7 & -8 & -5 \\ 6 & -7 & -6 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3.<sup>†</sup> 次の行列の固有値および対応する固有空間を求めよ．

$$(1) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$$

4. 次の行列の固有多項式を求めよ．

$$(1) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -3 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} -3 & 2 & -4 \\ -2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

5. 3 次正方行列  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3}$  の固有多項式は、次の形をしていることを示せ．

$$g_A(t) = t^3 - (a_{11} + a_{22} + a_{33})t^2 + (|A_{11}| + |A_{22}| + |A_{33}|)t - \det A.$$

ただし、 $A_{ii}$  は  $i$  行  $i$  列に関する  $A$  の余因子である．

6.<sup>†</sup>  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$  について、次の  $S, T$  を  $A$  の一次多項式で表わせ\*<sup>2</sup>．

$$(1) S = 2A^4 - 12A^3 + 19A^2 - 29A + 37E_2 \quad (2) T = S^{-1}$$

7. Cayley-Hamilton の定理を用いて、次の行列の  $n$  乗を求めよ．

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \quad (4) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

\*<sup>1</sup> 凡例：無印は基本問題、<sup>†</sup> は特に解いてほしい問題、\* は応用問題．

\*<sup>2</sup> ヒント：Cayley-Hamilton の定理．