$y = f(x)$ の微分を表す記号の一つに $\frac{dy}{dx}$ があります．これはLeibniz(ライプニッツ)[1]が導入した記号で，以来 300 年間ずっと使われてきました．独立変数 x が微小量 dx だけ増加したときとすると，従属変数 y もそれに応じて dy だけ変化しますが[2]，多くの場合 dx と dy の比は有限の値になります[3]．たとえば $f(x) = x^2$ のときは

$$f(x + dx) = x^2 + 2x\,dx + dx^2$$

なので $dy = 2x\,dx + dx^2$ となり

$$\frac{dy}{dx} = 2x + dx = 2x$$

という具合です．最後の等号は dx は x に比べて非常に小さいので dx を 0 と思う事によります．このように，微分積分学の黎明期には，dx と dy には微小変化量という確固とした意味があったのです．もちろん，現代数学の立場では厳密性に欠けるためこのような議論は認められず，$\frac{dy}{dx}$ には形式的な意味しか与えられていませんが，当時の記号が今でも生きているのです．

---

1) Leibniz (1646–1716): 17 世紀に活躍したドイツの哲学者・数学者・政治家．数学では，微分積分法の発見 (Newton とは独立) で有名．現在使われている微分や積分の記号などの多くは彼の発明であるものが多い．

2) というよりも，変化した量 $f(x + dx) - f(x)$ を dy と表す．

3) 多項式関数や三角関数，指数関数などの初等関数ではもちろん成り立つ．ただし，$y = \sqrt{1 - x^2}$ における $x = 1$ などのように，常に成り立つわけではない．

前回の小テストの解答例．

関数 $\sqrt{x}$ が単調増加であることより，$\{a_n\}$ が単調増加になることは明らか．λ を方程式 $x = \sqrt{k + x}$ の解とする．すなわち，$\lambda = (1 + \sqrt{4k + 1})/2$ である．このとき任意の自然数 n に対して $a_n \leq \lambda$ となる．実際，

$$a_{n+1} = \sqrt{k + a_n} \leq \sqrt{k + \lambda} = \lambda$$

である．以上より数列 $\{a_n\}$ は上に有界な単調増加数列であるので収束し，方程式 $x = \sqrt{k + x}$ の解 (で $1 \leq x \leq \lambda$ の範囲にあるもの) がその極限値になる．すなわち，$\lim_{n\to\infty} a_n = \lambda = (1 + \sqrt{4k + 1})/2$.