線形代数学・同演習 B

11 月 15 日分　小テスト

学籍番号：　　　　　　　　　　　　　　　　氏名：

$U = \mathbb{R}[x]_2, V = \mathbb{R}[x]_1$ とし，線形写像 $T\colon U \to V$ を

$$T(p(x)) = p'(x) + p(0)x$$

により定義する．このとき，次の U, V のそれぞれの基底に関する T の表現行列 B を求めよ．

$$U\colon [-x^2+2x+2,\, 8x^2-2x-5,\, -5x^2+5x+6] \quad V\colon [2x+5,\, x+3]$$

解) まず，基底の変換行列を求める．

$$[-x^2+2x+2,\, 8x^2-2x-5,\, -5x^2+5x+6] = [x^2,\, x,\, 1]\begin{pmatrix} -1 & 8 & -5 \\ 2 & -2 & 5 \\ 2 & -5 & 6 \end{pmatrix}$$
$$[2x+5,\, x+3] = [x,\, 1]\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

であるので，(講義中の記号を使えば)

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 8 & -5 \\ 2 & -2 & 5 \\ 2 & -5 & 6 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

である．基底 $[x^2,\, x,\, 1]$ および $[x,\, 1]$ に関する表現行列は $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ であったので (例題 6.3)，定理 6.4 より

$$\begin{aligned} B = Q^{-1}AP &= \tfrac{1}{6-5}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 8 & -5 \\ 2 & -2 & 5 \\ 2 & -5 & 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 11 & -4 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 35 & -17 \\ 4 & -59 & 30 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

よって，$B = \left(\begin{smallmatrix} -2 & 35 & -17 \\ 4 & -59 & 30 \end{smallmatrix}\right)$ となる．

※講義や講義内容に関して，意見・感想・質問等を自由に記述してください．