線形代数学・同演習 A

5 月 31 日分　演習問題

1. A を任意の n 次正方行列とする．以下を示せ．
   (1) $\frac{1}{2}(A + {}^tA)$ は対称行列,　　(2) $\frac{1}{2}(A - {}^tA)$ は交代行列,
   (3) $A = X_A + Y_A$ となる対称行列 X_A と交代行列 Y_A が存在する．
2. n 次正方行列 A, B および $m \times n$ 行列 $C = (c_{ij})$ に対して，以下を示せ．[*1]
$$(1) \quad \mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA), \qquad (2) \quad \mathrm{tr}(C\,{}^tC) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^2$$
3. 4 次正方行列 $N := (\delta_{i,j+1})$ はベキ零行列となることを示せ．
4. 次を計算せよ．
$$(1)\ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} ij \qquad (2)\ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i^2 \qquad (3)\ \sum_{1\le i\le j\le n} ij \qquad (4)\ \sum_{1\le i\le j\le n} (i+j)^2$$
5. 二つの多項式 $\displaystyle\sum_{i=0}^{m} a_i x^{m-i}$, $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} b_j x^{n-j}$ の積における x^k の係数を求めよ．
6. $e(x) := \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ とおく．このとき，$e(x+y) = e(x)e(y)$ が成り立つことを示せ．[*2]
7. $\displaystyle\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_{ij}\delta_{jk}a_{ki}\delta_{ij}$ を簡単にせよ．ただし，δ_{ij} は Kronecker のデルタを表す．
8. $\displaystyle\binom{n}{i} = {}_nC_i = \frac{n!}{i!(n-i)!}$ を二項係数とする．このとき，$\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i$ を計算せよ．
9. 自然数の k 乗和を $C_k(n) := \displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^k = 1^k + 2^k + \cdots + n^k$ とおくとき，以下に答えよ．
   (1)　$(n+1)^{k+1} = 1 + \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left((i+1)^{k+1} - i^{k+1}\right)$ を示せ．
   (2)　$(n+1)^{k+1} = 1 + \displaystyle\sum_{j=0}^{k}\binom{k+1}{j}C_j(n)$ を示せ．
   (3)　$C_k(n)$ に関する次の漸化式が成り立つことを示せ: [*3]
$$C_k(n) = \frac{(n+1)^{k+1} - 1}{k+1} - \frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k-1}\binom{k+1}{j}C_j(n).$$
   (4)　(3) を利用して，$C_4(n), C_5(n)$ を求めよ．

[*1] tr は正方行列のトレースと呼ばれるもので，対角成分をすべて足したもの，つまり $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ のことです．

[*2] これは無限級数であるが，この場合は総和記号の順番の入れ替え等は自由に行ってよいものとする．

[*3] この公式からいろいろなことが分かります．例えば，N 次の公式が欲しかったら $(N-1)$ 次までの $C_k(n)$ が分かれば求められるということや，$C_k(n)$ の最高次の次数は $k+1$ であること，およびそこでの係数は $\frac{1}{k+1}$ であることなども分かります．興味がある人に，J. H. Silverman 著，鈴木治郎訳「はじめての数論」(第 39 章) を紹介しておきます．