線形代数学・同演習 B

演習問題 6

1. $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ のとき，以下の基底に関する T_A の表現行列をそれぞれ求めよ．
   (1) $\mathbb{R}^3$ の基底は $[\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}]$，$R^2$ の基底は $[\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}]$．
   (2) $\mathbb{R}^3$ の基底は $[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}]$，$R^2$ の基底は $[\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}]$．

2.[†] $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ とする．$\mathbb{R}^3$ の基底をいずれも次のものとするとき，この基底に関する T_A の表現行列をそれぞれ求めよ[*1]．

$$(1) \quad \left[\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \qquad (2) \quad \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$$

3. $U = \mathbb{R}[x]_3$, $V = \mathbb{R}[x]_2$ とし，写像 $T\colon U \to V$ を $T\colon p(x) \mapsto p'(2x+1)$ で定める[*2]．
   (1) T は線形写像となることを示せ．
   (2) U, V の標準基底 ($[x^2, x, 1]$ および $[x, 1]$) に関しての表現行列を求めよ．
   (3) U, V の基底がそれぞれ $[(x+1)^2, x+1, 1]$, $[x+1, 1]$ のとき，表現行列を求めよ．

4.[†] $V = \mathbb{R}[x]_2$ とし，その上の変換 T を $T\colon p(x) \longmapsto (x+1)^2 \cdot p\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ により定める．このとき，次の問いに答えよ．
   (1) 変換 T は線形になることを示せ．
   (2) V の基底 $[x^2, x, 1]$ に関する変換 T の表現行列 A を求めよ．
   (3) T の階数と退化次元を求めよ．

5.[*] 線形写像 $T\colon U \to V$ が全射・単射および全単射であることを次のように定義する：

全射 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 任意の V の元 $\boldsymbol{v}$ に対して $T(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{v}$ となる $\boldsymbol{u} \in U$ が存在する．
単射 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ U の任意の 2 元 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}'$ に対して $T(\boldsymbol{u}) = T(\boldsymbol{u}')$ ならば $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}'$ となる．
全単射 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ T が全射かつ単射

また T が全単射であるとき U と V は同型であるという．以下を示せ．

(1) T が全射 $\Leftrightarrow \dim \operatorname{Im} T = \dim V$　　(2) T が単射 $\Leftrightarrow \ker T = \{\boldsymbol{0}\}$
(3) 任意の n 次元実ベクトル空間 U は，n 次元数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ と同型になる．

---

11 月 14 日分 (凡例：無印は基本問題，† は特に解いてほしい問題，$*$ は応用問題)
講義用 HP: http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~h-nakashima/lecture/2017LA.html
[*1] つまり，$T_A\colon U \to V$ としたとき，$U = V$ なので，その基底として同じものをとる．
[*2] $p(x)$ を微分した $p'(x)$ において，$x \mapsto 2x+1$ としたもの．