11　多変数関数における広義積分

11.1　復習

1 変数のときの広義積分には，① 有界区間上での非有界関数の積分，② 非有界区間上の関数の積分，という 2 つのパターンあった．

$$① \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to+0}\left[2\sqrt{x}\right]_\varepsilon^1 = 2,$$

$$② \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{R\to+\infty}\int_1^R \frac{dx}{x^2} = \lim_{R\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^R = 1.$$

どちらの場合も，まず問題が生じない区間で積分を計算し，その後で極限を取っている．

今までの多変数での積分は「面積確定な D が有界かつ閉集合のとき，連続関数 $f(x,y)$ は D で有界で，可積分」であった．この条件は厳しすぎて，例えば $D=\mathbb{R}^2$ や有理関数 (二つの多項式の比) といった重要なものも除外されてしまう．そこで，もう少しだけ一般化する．

11.2　非有界な関数の積分

D が有界でも閉集合でなければ連続関数 $f(x,y)$ は必ずしも有界とは限らない．$D=\left\{(x,y);\ x^2+y^2<1\right\}$ で $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ などがその例を与える．

さて，$D\subset$ を有界集合とし，$f(x,y)$ を D 上連続とする．また，簡単のため $f(x,y)\geq 0$ とする．D に含まれる 閉 集合 K 上では $f(x,y)$ は有界ゆえ可積分可能で，したがって

$$I(K)=\int_K f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}$$

が定まる．今 $f(\boldsymbol{x})\geq 0$ としているので，D 内の どんな 閉集合 K に対しても $I(K)\leq \displaystyle\int_D f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}$ である[*1]．

定義 11.1. D 内の**任意の**面積確定な閉集合 K に対して $\displaystyle\int_K f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}$ が有界であるとき，連続関数 $f(x,y)$ は D で広義積分可能といい，D 上での積分は次で定義する．

$$\int_D f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} := \sup_K \int_K f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}$$

ただし，右辺の sup は D 内の閉集合全体を動く．

例題 11.2. 次の広義積分を計算せよ．

$$I=\int_D \frac{d\boldsymbol{x}}{\sqrt{xy}},\quad D=\left\{(x,y);\ \begin{array}{l}0<x\leq 1\\ 0<y\leq 1\end{array}\right\}.$$

(考え方) まず領域を図示し，どこで問題が生じているかを確認する．そして，その箇所を避けるように「閉集合列」K_n を ($\displaystyle\lim_{n\to+\infty} K_n = D$ となるように) 構成し，$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_{K_n} f(x,y)\,d\boldsymbol{x}$ を計算する．

11.3　非有界集合上の関数の積分

非有界集合の例 (1) $\mathbb{R}^2$ 全体　(2) 第 1 象限の点全体
(3) $D=\{(x,y);\ x\geq 1,\ 0\leq xy\leq 1\}$.

定義 11.3. D を非有界な集合とする．D 内の**任意の**面積確定な有界閉集合 K に対して $\displaystyle\int_K f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}$ が有界であるとき，連続関数 $f(x,y)$ は D で広義積分可能といい，

$$\int_D f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} := \sup_K \int_K f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}$$

と定義[*2]．右辺の sup は D 内の有界閉集合全体を動く．

例題 11.4. 次の重積分を計算せよ．

$$\int_D e^{-x-y}\,d\boldsymbol{x},\quad D=\{(x,y);\ x,y\geq 0\}.$$

(考え方) 例題 12.3 と同じである．

注意 11.5. $\mathbb{R}^2$ を近似する閉集合列としては，$K_n=[-n,n]\times[-n,n]$ や円 $B_n=\left\{(x,y);\ \sqrt{x^2+y^2}<n\right\}$ がよく使われる．

重要な定積分 次の定積分は 2 変数関数の広義積分を用いることで計算できる．

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx=\sqrt{\pi}.$$

(略証) $I=\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,d\boldsymbol{x}$ を 2 通りの方法で計算する．
① まずは先述の正方形 K_n を用いる．$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} K_n=\mathbb{R}^2$ であり，$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I(K_n)=\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx\right)^2$.
② 円板 B_n なら $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} B_n=\mathbb{R}^2$ で，$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I(B_n)=\pi$.
③ 上の二つを合わせると，$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx=\sqrt{\pi}$ となる．

まとめ (1) 多変数の場合においても広義積分を考えることができる．(2) D に含まれる閉集合の列 K_n で $\lim K_n = D$ となるものを構成し，$\lim I(K_n)$ を計算する．(3) うまく利用すれば，普通には計算できない 1 変数の定積分も計算できる．

---

1 月 16 日．

*1 D 上の積分を定義していないので，このように書くのは実際には不適切である．

*2 定義 12.2 とほぼ同じである．

演習問題 11

問題 1. 次の広義積分を求めよ．

(1) $D = \{(x,y);\ 0 \le x \le 1,\ y^2 \le x\}$ のとき

$$\int_D \frac{d\boldsymbol{x}}{\sqrt{x-y^2}}$$

(2) $D = \{(x,y);\ x, y \ge 0\}$ のとき

$$\int_D \frac{d\boldsymbol{x}}{(x+y+1)^3}$$

(3) $D = \{(x,y);\ x^2+y^2 \le 1\}$ のとき

$$\int_D \frac{d\boldsymbol{x}}{(x-a)^2+y^2} \quad (0 < a \le 1)$$

問題 2. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}/2$ を利用して，次の広義積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^\infty x^2 e^{-x^2}\,dx$ (2) $\displaystyle\int_0^\infty \sqrt{x}e^{-x^2}\,dx$

(3) $\displaystyle\int_0^1 \left(\log\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} dx$ (4) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x\log(1/x)}}$

(5) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)}\,d\boldsymbol{x}$ $(a, ac-b^2 > 0)$

期末試験のアナウンスをする時期になりました．試験日は 2 月 6 日 (火) の予定ですが，正確な情報は各自掲示板で確認ください．

出題範囲．

1. 前期の内容のうち，連鎖律か Lagrange の未定乗数法のいずれか．
2. 重積分の計算 (累次積分，変数変換，広義積分，3 変数以上の重積分)

講義で扱った例題や小レポート，演習問題を中心に出題します．判定基準は前期よりも厳しくなります (むしろ前期が非常に甘かった)．

小レポート

次の広義積分を求めよ．

(1) $D_1 = \{(x,y);\ x^2+y^2 < 1\}$ のとき

$$\int_{D_1} \frac{d\boldsymbol{x}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

(2) $D_2 = \{(x,y);\ 0 < x \le 1,\ 0 < y \le x\}$ のとき

$$\int_{D_2} \frac{x+y}{x^2+y^2}\,d\boldsymbol{x}$$

(3) $D_3 = \mathbb{R}^2$ のとき

$$\int_{D_3} \frac{d\boldsymbol{x}}{(x^2+y^2+1)^2}$$

注意． どの箇所で問題が生じているかを明確にすること．いずれも極座標変換で計算ができる．もちろん，他の方法で計算してもよい．

小レポートについて． 次回の講義の際に提出すること．原則として期限を過ぎての提出は認めないが，やむを得ない事情がある際は，必ずその旨を**期限日までにメールにより**連絡すること．