2020年度　名古屋大学
理系基礎科目（文系）数学入門

第４回

講義担当者：中島秀斗

2020年5月14日

はじめに

- 授業形態：学習資料 (スライド・ノート) 配布
  - はじめはスライドに目を通してください.
  - ノートはスライドの要約になります．復習にご活用ください.
  - スライド内にある赤い枠で囲った演習問題は，実際に解いてもらうことを想定しています.
- 小テストについて
  - 小テストは NUCT で行われます.
  - 講義日の午前８時から日付が変わるまでの間に完了してください.
- レポートについて
  - 講義 3,4 回毎にレポートを課します.
  - 各回に出題する演習問題を解いたものを，pdf ファイルとして提出してもらいます.
  - 学習資料配布時のお知らせの中で通知します.

凡例

公式や定理など，講義において重要な情報は青の枠で囲む．

演習問題は赤の枠で囲む．実際に手を動かして解いてほしい．

コメントや注意すべき点などは緑の枠で囲む．

例題は黄色の枠で囲む．解答も用意されているが，計算量の多いものは実際に手を動かして一緒に解いてほしい．

これまでの小テストの解説

- 第 1 回から第 3 回までの小テストの解説をまとめて行います.
- 第 1 回に関しては特にありません.
- 第 2 回は計算に関してはよくできていました．一方で，正誤問題として出題した極限の性質についてはいまー歩でした.
- 第 3 回は基本的な計算についてはよくできていました．ただ，少し複雑にしたものは回答が分かれてしまいました.
- 次のページからいくつか解説をしています.

第 2 回 (問題 1). 2 つの収束する数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ が常に $a_n < b_n$ を満たすならば，その極限値についても同じ不等号が成立する．すなわち，$\lim_{n\to\infty} a_n < \lim_{n\to\infty} b_n$ が成り立つ．

例えば $a_n = 1 - \dfrac{1}{n}$, $b_n = 1$ としてみたら分かるように，

$$\text{常に } a_n < b_n \text{ でも } \lim_{n\to\infty} a_n < \lim_{n\to\infty} b_n \text{ とはならない (等号 = になる)}$$

ことが確かめられます．等号 = が付いているかどうかだけの差ですが，それは開集合と閉集合との違いでもあり，この差は非常に大きいのです．

第 2 回 (問題 2). 2 つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ が，$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ および $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$ を満たしているとする．このとき，$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = 0$ が成り立つ．

これは不定形のうち $0 \times \infty$ の型になります.「a_n が 0 にいく速さ」と「b_n が $+\infty$ にいく速さ」に応じて極限がかわります．例えば

$$a_n = \frac{1}{n} \text{ or } \frac{1}{n^2} \text{ と } b_n = n \text{ or } n^2$$

としてそれぞれの場合について $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n)$ を計算してみれば

	n	n^2
$\frac{1}{n}$	1	$+\infty$
$\frac{1}{n^2}$	0	1

となります.「同じ速さ」ならば収束して,「0 に向かうほうが速い」ときは 0,「$+\infty$ に向かうほうが速い」ときは $+\infty$ のようになります.

第 2 回 (問題 3). 2 つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ が，$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ および $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$ を満たしているとする．このとき，$\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$ が成り立つ．

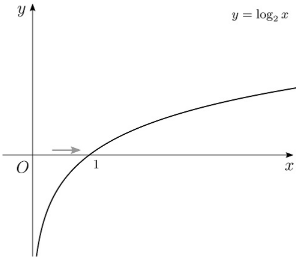
これは問題 2 と似ていますが，b_n を掛けるのではなく，割っています．極限を考える上で基本的ではあるけれども重要なものとして

$$\frac{1}{0} = \pm\infty, \quad \frac{1}{\pm\infty} = 0$$

があります．要するに小さいもので割ったら絶対値は大きくなるし，絶対値が大きいもので割ったら小さくなる，ということです．この例題では小さいものを絶対値が大きいもので割っているので，とても小さくなる $(= 0)$ になる，という感覚になります．

第 3 回 (問題 3). 次の極限を求めよ． $\displaystyle\lim_{x\to 1-0}\frac{1}{\log_2 x}$

すこし複雑ですが，まず $\log_2 x$ のグラフを思い出してみると



となります．x が 1 に左から近づいていくと，$\log_2 x$ は負の値を取りながら 0 に近づいていくのがわかります．ですので，与えられた極限は

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{1}{\log_2 x}=\left(\frac{1}{-0}=\right)=-\infty$$

というように計算できます．

第 3 回 (問題 5). 関数 $f(x)$ について，$\lim\limits_{x \to a} f(x)$ が存在していて，なおかつ $x = a$ で定義されていれば，$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ が成り立つ．

これは単語の定義の問題になります.「関数」と聞いて連続でなめらかな関数を連想するかもしれませんが，本講義で「関数」といえば,「数 x に対してただ一つの数 $f(x)$ が定まるもの」という定義を与えています．ここには近い点同士の関係性については全く情報がない点に注意してください.

§4 関数の微分

§4 関数の微分

- 関数 $f(x)$ の点 $x = a$ における微分係数 $f'(a)$ は，点 $x = a$ における変化率の極限により定義された：

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

- $f(x) = x^n$ のとき $f'(x) = nx^{n-1}$ であることは高校で学んだと思うが，今回は微分計算の基本について学ぶ．

今回の目標

- 積と商の微分を用いた計算ができるようになること
- 合成関数の微分について理解すること
- 逆関数の微分を計算できるようになること

§4.1 積と商の微分

定理 4.1. 関数 $f(x)$ について，

$$\text{微分可能} \quad \begin{array}{c}\Rightarrow \\ \not\Leftarrow\end{array} \quad \text{連続}$$

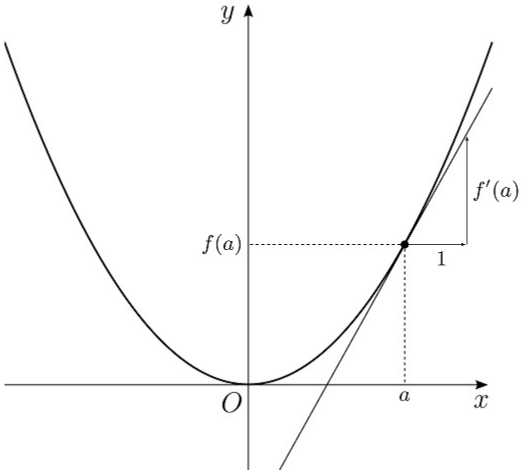
微分可能な点というのは，次のページに見るように，グラフにおいて「接線が引ける」点である．接線が引けるためには繋がっていないといけないし (連続)，さらにグラフが尖っていてもいけない (以降の例を参照のこと).

連続な関数は単に「グラフが繋がっている」という状況であったが，微分可能な関数は「グラフがなめらかに繋がっている」というイメージである．

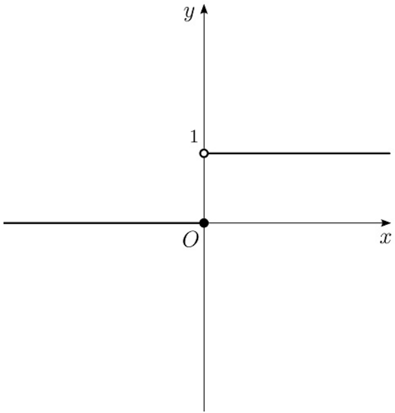
$f(x)$ が点 $x = a$ において微分可能であるとき，

$$y = f'(a)(x-a) + f(a) \quad 「点\ (a, f(a))\ を通る傾き\ f'(a)\ の直線」$$

は関数 $f(x)$ の点 $x = a$ における接線になる．

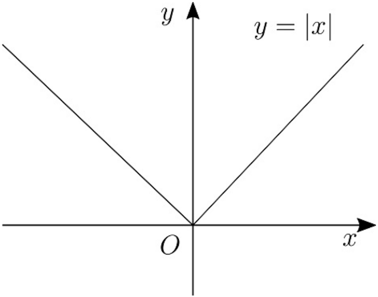


- 連続でない関数の微分に関する例



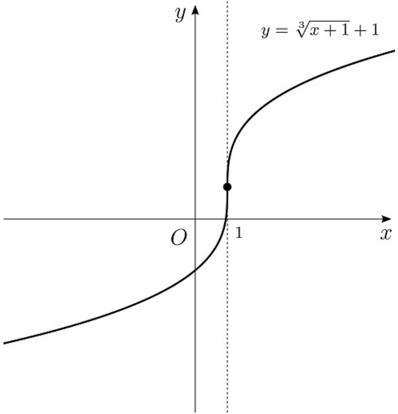
この関数は原点で不連続な関数である．この場合は，原点において左からの極限は 0 になるが，右からの極限はどんどん大きくなっていく．このように，不連続な点においては微分が左右で一致せず，微分係数を定める極限が収束しないので，この点では微分可能ではない．

- 連続であるが微分可能でない関数の例



この関数は連続であるが原点においてグラフが「尖っている」関数である．このような場合も左右からの極限が一致せず，微分係数を定める極限が収束しないので，この点において微分可能ではない．

傾きが発散するタイプの微分可能でない例



この関数は原点において，その微分係数を定義する極限が発散するために微分可能ではない例である．
この例の場合は，接線自体は存在している点に注意．実際，直線 $x=1$ がその接線になっている．

関数の微分を計算する上で，次の定理は基本的である．

定理 4.2. 関数 $f(x)$, $g(x)$ が微分可能ならば，

1. 積の微分については

$$\bigl(f(x)g(x)\bigr)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),$$

2. 商の微分については，$g(x) \neq 0$ である点において

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2},$$

3. 特に，(2) で $f(x) = 1$ とすれば

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{g(x)^2}.$$

証明

まず定義通りに書いてみると

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)+f(x)g(x)}{h}$$

を計算することになる．このままだとどうすればよいかわからないが，

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$$

となることは知っている．よって，まずはこの式を無理矢理作り出してみることを考える．

(続く)

$$(\text{式 } 1) = \frac{f(x+h)g(x+h)+f(x)g(x)}{h}$$

$$= \frac{\{f(x+h)-f(x)\}g(x+h)+f(x)g(x+h)+f(x)g(x)}{h}$$

赤の項が $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ を作り出すために追加した項であり，青の項はそれを打ち消すために現れた項である．すると，青の項と最後の項が $f(x)$ で括れることに気がつけば，

$$(\text{式 } 1) = \frac{\{f(x+h)-f(x)\}g(x+h)+f(x)\{g(x+h)+g(x)\}}{h}$$
$$= \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot g(x+h)+f(x)\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

のように変形できる．　(続く)

$$(\text{式 }1) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \cdot g(x+h) + f(x) \cdot \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \quad (\text{再掲})$$

この式は

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad \longrightarrow \quad f'(x) \quad (h \to 0)$$

を用いるために変形したのであるが，第 2 項を見てみると，都合よく

$$\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \quad \longrightarrow \quad g'(x) \quad (h \to 0)$$

も利用できる形になっている．さらに，

$$g(x+h)$$

が第 1 項にいるが，$g(x)$ は微分可能なので特に連続なので

$$g(x+h) \quad \longrightarrow \quad g(x) \quad (h \to 0)$$

である．

(続く)

後は「収束している場合は，和・積の極限を個別に計算してよい」ことを用いればよい.

$$
\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)+f(x)g(x)}{h}\\
&\quad=\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot g(x+h)+f(x)\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right)\\
&\quad=\left(\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)\left(\lim_{h\to 0}g(x+h)\right)\\
&\qquad\quad+f(x)\cdot\left(\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right)\quad\text{(極限を個別に計算)}\\
&\quad=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\quad\square
\end{aligned}
$$

商の微分に関しては，先に (3) の

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{g(x)^2}$$

を示す．そうすれば，(2) は

$$\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \times \frac{1}{g(x)}$$

とみることにより，積の微分と (3) から得られることになる．
さて，考えるべき極限は

$$\lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{1}{g(x+h)} - \dfrac{1}{g(x)}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)} \right)$$

である．

(続く)

$$(\text{式 }2) = \frac{1}{h}\left(\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}\right)$$

とおく．今使える道具としては

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = g'(x) \qquad \cdots\text{(a)}$$

がある．これを意識して (式 2) を変形していく．

$$\begin{aligned}
(\text{式 }2) &= \frac{1}{h}\cdot\frac{g(x)-g(x+h)}{g(x+h)g(x)} && \text{(通分)}\\
&= -\frac{1}{g(x+h)g(x)}\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h} && \text{((a) を作る)}
\end{aligned}$$

(続く)

後は先程と同様に，極限を個別に計算すれば

$$
\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{1}{g(x+h)}-\dfrac{1}{g(x)}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\left(-\frac{1}{g(x+h)g(x)}\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right) \\
&= -\frac{1}{g(x)}\left(\lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x+h)}\right)\left(\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right) \\
&= -\frac{1}{g(x)}\cdot\frac{1}{g(x)}\cdot g'(x) \\
&= -\frac{g'(x)}{g(x)^2} \qquad \square
\end{aligned}
$$

演習問題. 積の微分と (3) を用いて (2) を導出せよ．

例題 4.3.　次の関数を微分せよ．

$$(1)\quad y = (2x+1)(x^2-3) \qquad (2)\quad y = \frac{x}{x^2+1}$$

（考え方）　(1) は展開して計算してもよいが，$2x+1$ および x^2-3 をまとめて扱うほうが計算が楽である．(2) は商の微分を用いる．

解. (1) $u=2x+1$, $v=x^2-3$ とおけば,

$$u'=2, \quad v'=2x$$

なので，積の微分を用いると

$$\begin{aligned}(uv)' &= u'v+uv' = 2\cdot(x^2-3)+(2x+1)\cdot(2x) \\ &= 6x^2+2x-6 \quad \square\end{aligned}$$

定理では $f(x)$ や $g(x)$ を用いたが，実計算ではこの例題のように u, v を用いるほうが楽である (つまり “(x)” を省略する).

解. (2) 分数関数の微分を用いる．今の例題においては

$$f(x) = x, \quad g(x) = x^2 + 1$$

である．このとき

$$f'(x) = 1, \quad g'(x) = 2x$$

なので

$$\begin{aligned}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} = \frac{1 \cdot (x^2+1) - x \cdot (2x)}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} \quad \square\end{aligned}$$

例題. 自然数 n に対して，次の等式を示せ.

$$\left(x^n\right) = nx^{n-1}.$$

二項定理を用いて示してもよいが，ここでは積の微分と帰納法を組み合わせて証明する.

証.　帰納法を用いるので，まず $n = 1$ のときを考える．この場合，$x^1 = x$ なので

$$(x)' = 1, \quad 1 \cdot x^{1-1} = 1 \cdot x^0 = 1$$

となり確かに成り立っている．

次に $n = k$ のときに成立していると仮定して $n = k + 1$ の場合に成り立つことを示す．よって帰納法の仮定である

$$(x^k)' = kx^{k-1}$$

は用いてよい．

$x^{k+1} = x \cdot x^k$ であることに注意すれば

$$
\begin{aligned}
(x^{k+1})' &= \left(x \cdot x^k\right)' \\
&= (x)' \cdot x^k + x \cdot \left(x^k\right)' \quad \text{(積の微分)} \\
&= 1 \cdot x^k + x \cdot kx^{k-1} \qquad \text{(帰納法の仮定)} \\
&= x^k + kx^k \\
&= (k+1)x^k \\
&= (k+1)x^{(k+1)-1}
\end{aligned}
$$

となり，確かに $n = k+1$ のときも成立している．これより任意の n に対して $(x^n)' = nx^{n-1}$ が成り立つことが示された．

二項定理

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + b^n$$

を用いても，以下のように証明できる．

$$\begin{aligned}(x+h)^n &= x^n + nx^{n-1}h + \tfrac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + h^n \\ &= x^n + nx^{n-1}h + h^2 \times P(x,h)\end{aligned}$$

ここで $P(x,h)$ は x と h を用いて表される多項式である．よって微分の定義より

$$(x^n)' = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0}(nx^{n-1} + h\cdot P(x,h)) = nx^{n-1} \quad \square$$

この証明に現れた $P(x,h)$ なる多項式は具体的に記述することもできるが，ここではその必要はない．重要なのは $(x+h)^n$ の展開における第 3 項目以降が h^2 を必ず含む，つまり h で割ったあとで $h \to 0$ としたら消えてくれる ($= 0$ になる) ということである．

ちなみに，二項定理を示すのに帰納法を用いるのが一般的であるので，やはり帰納法自体は用いていることになる．

§4.2 合成関数の微分

合成関数とは，例えば $f(x) = x^4$, $g(x) = x^2 + 1$ としたときに

$$h(x) = f\bigl(g(x)\bigr) = (x^2 + 1)^4$$

のように表される関数のことであった．このような関数の微分については，次の定理が便利である．

定理 4.4. 関数 $f(x)$, $g(x)$ がそれぞれ微分可能であって，合成関数 $F(x) = f\bigl(g(x)\bigr)$ が定義できるとき，$F(x)$ も微分可能であって

$$F'(x) = f'\bigl(g(x)\bigr) \cdot g'(x).$$

$y = f\bigl(g(x)\bigr)$ のとき，$u = g(x)$ および $y = f(u)$ とみて，上の定理を適用すれば，次ように書くこともできる．

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

定理の説明

※証明ではなく説明である点に注意.

考える極限は

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f\bigl(g(x+h)\bigr)-f\bigl(g(x)\bigr)}{h}$$

である．使える道具は

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(A+h)-f(A)}{h} = f'(A), \quad \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = g'(x)$$

である ($f(x)$ の方で x とすると，引数に来る $g(x)$ の x と紛らわしいので A としている).

(続く)

そこで無理に $g(x)$ の微分を作ろうとすれば

$$\frac{f\big(g(x+h)\big)-f\big(g(x)\big)}{h}=\frac{f\big(g(x+h)\big)-f\big(g(x)\big)}{g(x+h)-g(x)}\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

となる．ここで右辺の積の第１項は $y=x+h$ および $A=g(x)$ とすれば

$$\frac{f\big(g(y)\big)-f\big(A\big)}{g(y)-A}$$

である．$X=g(y)$ とおくと，X は h に依存して変化していくもので，$h\to 0$ のとき $y\to x$ となることと $g(x)$ が連続であることより，$h\to 0$ のとき $B\to A=g(x)$ となる．つまり，

$$\lim_{h\to 0}\frac{f\big(g(y)\big)-f\big(A\big)}{g(y)-A}=\lim_{B\to A}\frac{f\big(B\big)-f\big(A\big)}{B-A}=f'(A)=f'\big(g(x)\big)$$

と変形できる．

(続く)

$$\lim_{h\to 0}\frac{f\bigl(g(y)\bigr)-f\bigl(A\bigr)}{g(y)-A}=\lim_{B\to A}\frac{f\bigl(B\bigr)-f\bigl(A\bigr)}{B-A}=f'(A)=f'\bigl(g(x)\bigr)\quad\text{(再掲)}$$

ここで２つ目の等号は，極限の書き換えを用いて微分係数の定義を

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

のように $x+a+h$ として書き換えたものである．あとは極限を個別に取ることにより

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\frac{f\bigl(g(x+h)\bigr)-f\bigl(g(x)\bigr)}{h}\\
&\quad=\lim_{h\to 0}\left(\frac{f\bigl(g(x+h)\bigr)-f\bigl(g(x)\bigr)}{g(x+h)-g(x)}\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right)\\
&\quad=\left(\lim_{h\to 0}\frac{f\bigl(g(y)\bigr)-f\bigl(A\bigr)}{g(y)-A}\right)\left(\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right)\\
&\quad=f'\bigl(g(x)\bigr)\cdot g'(x)\quad\square
\end{aligned}$$

定理の理解としてはこのような形の証明でも十分ではあるが，厳密に言えばこの手法には穴があって証明になっていない．その問題点とは，最初の式変形において $g(x+h)-g(x)$ で割り算をしたけれども，これが 0 にならないという保証がどこにもない点にある．実際，$g(x)=x^2\sin\frac{1}{x}\ (x\neq 0)$, $g(0)=0$ という関数はすべての自然数に対して $g\left(\frac{1}{n\pi}\right)=g(0)=0$ となっている．

(参考文献：野村隆昭著「微分積分学講義」 33 頁)

例題 4.5.　次の関数を微分せよ．

$$(1)\quad y=(x^2+1)^4 \qquad\qquad (2)\quad y=\frac{1}{(x^2+4)^3}$$

（考え方）　(1) は展開してから微分してもよいがそれだと手間である．(2) は分数関数の微分を用いるが，分母の関数を微分する際に合成関数の微分を用いると速い．

解. (1) $u = x^2 + 1$ とすれば $y = (x^2+1)^4 = u^4$ である．このとき

$$\frac{du}{dx} = 2x, \quad \frac{dy}{du} = 4u^3$$

なので

$$y' = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 4u^3 \cdot 2x = 8x(x^2+1)^3 \quad \square$$

(2) $u = x^2 + 4$ とおけば $y = \dfrac{1}{u^3}$ である．このとき

$$u' = \frac{du}{dx} = 2x$$

なので

$$y' = -\frac{u'}{u^2} = -\frac{2x}{(x^2+4)^2} \quad \square$$

§4.3 逆関数の微分

逆関数とは，関数 $f(x)$ が与えられたときに

$$f\bigl(g(x)\bigr) = x, \quad g\bigl(f(x)\bigr) = x$$

となるような関数 $g(x)$ のことであった．これを $f^{-1}(x)$ と表す．
合成関数の微分を用いれば，逆関数の微分も計算できる．

定理 4.6. 関数 $y = f(x)$ の逆関数 $y = f^{-1}(x)$ の微分は

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{f'\bigl(f(x)\bigr)}$$

で与えられる．記号的に書けば以下のようになる．

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

証明

逆関数は，その定義から

$$f\left(f^{-1}(x)\right) = x$$

を満たす．この両辺を x で微分する．左辺については，$g(x) = f^{-1}(x)$ として合成関数の微分を用いると

$$\Big(f\left(g(x)\right)\Big)' = f'\left(g(x)\right) \cdot g'(x) = f\left(f^{-1}(x)\right) \cdot \left(f^{-1}(x)\right)'$$

である．右辺については

$$(x)' = 1$$

なので，$y = f^{-1}(x)$, $y' = \left(f^{-1}(x)\right)'$ とおけば

$$f'(y) \cdot y' = 1 \quad \Leftrightarrow \quad y' = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{f'\left(f(x)\right)}$$

となる． $\square$

例題 4.7. 関数 $y = \sqrt{x}$ を微分せよ．

解． $y = \sqrt{x}$ は関数 $f(x) = x^2$ の逆関数である．すなわち $x = y^2$ なので，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{2y} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}.$$

演習問題

(1) 次の関数を微分せよ.

(a) 積・商の微分を用いるもの

$$\text{(i)}\ (x-3)(x^2+2x+2) \quad \text{(ii)}\ (x^2+1)(x^2-4)$$

$$\text{(iii)}\ \frac{1}{x^2+1} \quad \text{(iv)}\ \frac{2x^2+3}{x} \quad \text{(v)}\ \frac{3x}{x^2-9}$$

(b) 合成関数の微分を用いるもの

$$\text{(i)}\ (x^4+2x+1)^3 \quad \text{(ii)}\ \frac{1}{(x^3-2)^2}$$

$$\text{(iii)}\ \sqrt{2-3x} \quad \text{(iv)}\ \sqrt{x^2+1}$$

(c) 逆関数の微分を用いるもの

$$\text{(i)}\ \sqrt[3]{x} \quad \text{(ii)}\ \sqrt[5]{x}$$

(2) 次の関数を微分せよ.

$$\text{(i)}\ \sqrt[4]{9-x^2} \quad \text{(ii)}\ \frac{1}{x^2} \quad \text{(iii)}\ \frac{1}{x^3} \quad \text{(iv)}\ \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\text{(v)}\ (3x+1)^2 \quad \text{(vi)}\ \sqrt{x^3} \quad \text{(vii)}\ (x^3-1)(x^2-2)$$

(3) 次の問いに答えよ.

(a) n を負の整数とするとき，次の等式を示せ.

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

(b) 正の整数 n に対して，次が成り立つことを示せ.

$$\left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$$

(c) n, m を（互いに素な）自然数とするとき，次の等式を証明せよ.

$$\left(x^{\frac{m}{n}}\right)' = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}$$

(4) $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ を微分可能な関数とするとき，次の関数の導関数を求めよ.

$$y = f(x)g(x)h(x)$$