2020 年度　名古屋大学
理系基礎科目（文系） 数学入門

第 6 回

講義担当者：中島秀斗

2020 年 5 月 28 日

はじめに

- 授業形態：学習資料 (スライド・ノート) 配布
  - はじめはスライドに目を通してください.
  - ノートはスライドの要約になります．復習にご活用ください.
  - スライド内にある赤い枠で囲った演習問題は，実際に解いてもらうことを想定しています.
- 小テストについて
  - 小テストは NUCT で行われます.
  - 講義日の午前８時から日付が変わるまでの間に完了してください.
- レポートについて
  - 講義 3,4 回毎にレポートを課します.
  - 各回に出題する演習問題を解いたものを，pdf ファイルとして提出してもらいます.
  - 学習資料配布時のお知らせの中で通知します.

凡例

公式や定理など，講義において重要な情報は青の枠で囲む．

演習問題は赤の枠で囲む．実際に手を動かして解いてほしい．

コメントや注意すべき点などは緑の枠で囲む．

例題は黄色の枠で囲む．解答も用意されているが，計算量の多いものは実際に手を動かして一緒に解いてほしい．

前回の小テストの解説

$y = x^x$ を微分せよ.

解. $x^x = e^{x \log x}$ であることに注意すると,

$$
\begin{aligned}
y' &= \left(e^{x \log x}\right)' \\
&= (x \log x)' \cdot e^{x \log x} \\
&= \left\{(x)' \log x + x(\log x)'\right\} \cdot e^{x \log x} \\
&= e^{x \log x}(\log x + 1) \quad \square
\end{aligned}
$$

あるいは対数微分法を用いてもよい.

$$
\log|y| = x \log|x| \quad \text{両辺を微分すると} \quad \frac{y'}{y} = \log x + 1.
$$

よって

$$
y' = y(\log x + 1) = e^{x \log x}(\log x + 1)
$$

$y=\sin x^\circ$ (度数法) を微分せよ．

$x^\circ = \frac{\pi}{180}x$(rad) であるので，

$$\left(\sin x^\circ\right)' = \left(\sin\frac{\pi}{180}x\right)' = \frac{\pi}{180}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{180}x\right) = \frac{\pi}{180}\cos x^\circ \quad \square$$

三角関数の微分公式を導出するときに $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ という極限を計算し，その極限値が係数として現れた．この極限において分母の x と $\sin$ の引数の x が「同じ速度」で 0 に向かうことが重要である．今は $\sin$ の引数が度数法で与えられているので，それを弧度法に書き換えて極限をとる必要がある．

§6 微分法の応用

§6 微分法の応用

- 前回までにいろいろな関数の微分について学んだ．
- そのことを利用して，多くの関数のグラフを描くことができる．
- そのときに必要になる情報は
  - 定義域はどこか
  - 定義域の境界あるいは $\pm\infty$ での挙動
  - どこで増減が変わるか (極値)
  - どこで x 軸，y 軸と交わるか
  - 特異点の近くでの挙動

  である．ここで特異点とは，例えば分数関数における分母が 0 になる点である．

今回の目標

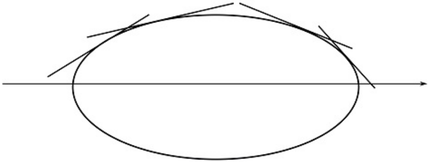
- 関数の極大・極小を理解する
- 関数のグラフを描けるようになる
- 関数の媒介変数表示について学ぶ

§6.1 関数の増減

- 関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は，$f(x)$ のグラフの傾きの情報を持つ関数である．
- それはすなわち，関数 $f(x)$ の増減に関する情報も持っているということである．実際，次の事が成り立つ．

> ある区間において
> - 常に $f'(x) > 0$ ならば $f(x)$ は増加していき，
> - 常に $f'(x) < 0$ ならば $f(x)$ は減少していく．

- これは直感的にもわかりやすい性質であるが，厳密に証明する際には「平均値の定理」が必要となる．



- 上図，増加している区間では接線の傾きは正，減少している区間では傾きは負である．

例題 6.1. 関数 $y = x + \dfrac{1}{x}$ の増減を調べよ.

(考え方) 関数の増減の情報は導関数が持っているので，まず微分をしてから，導関数の符号を調べる．増減表を作ると，関数の増減の様子がよく分かる.

解.与えられた関数を微分すれば

$$y' = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$$

である． $y' = 0$ となる点は

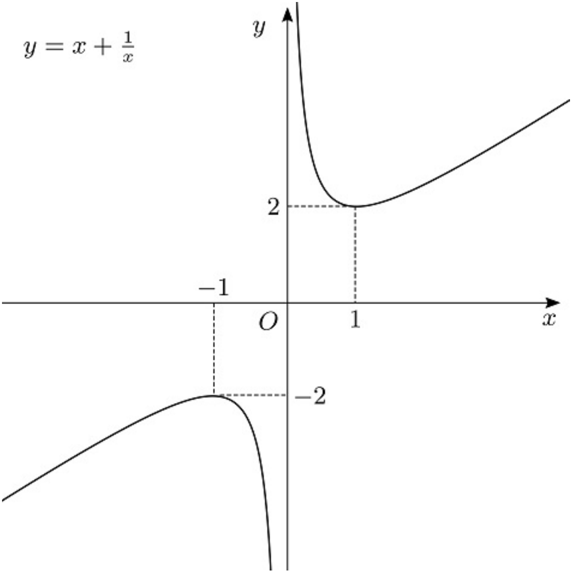
$$y' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2-1}{x^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(x+1)(x-1)}{x^2} = 0$$

より $x = 1$ および -1 である．
これより以下のような増減表を得る (y' が正ならば増加，負ならば減少)．

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	$\times$	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$\times$	$\searrow$	2	$\nearrow$

ここで $\times$ は関数が定義できないことを表す（特異点）.

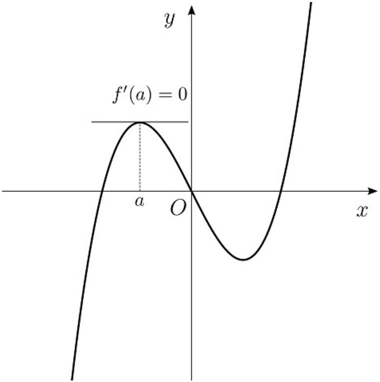
なお $y=x+\dfrac{1}{x}$ のグラフは以下のようになる.



§6.2 関数の極大と極小

- $f(x)$ をある区間で連続な関数とする (微分は仮定しない).
- a をその区間内の 1 点とする.
- $x = a$ を含む十分小さい開区間において，$x \neq a$ ならばいつでも $f(a) > f(x)$ となるとき，$f(x)$ は $x = a$ で極大であるといい，そのときの f の値 $f(a)$ を極大値という.
- 直感的には「局所的に最大」であることである.
- 同様に極小および極小値も定義される.
- これらをまとめて極値という.

下図において，左側の山の頂上に当たる点が極大点であり，右側の谷の底に当たる点が極小点である．

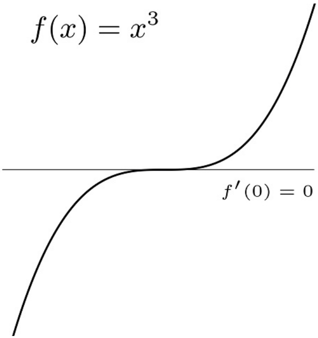


先程の図の極値での様子をみてもわかるように，微分ができる場合は

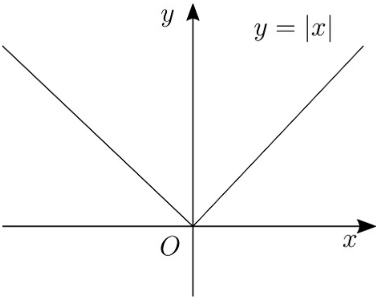
$x=a$ で極値をとるならば，$f'(a)=0$

でなければならない．ただし，$f(x)=x^3$ の $x=0$ を考えればわかるように，その逆は成り立たない．極値となるのは，

$x=a$ の前後で $f'(x)$ の符号が変わるときである．



また，$y = |x|$ を考えれば分かるように，微分ができない点が極値になることもある.



例題 6.2. 関数 $f(x) = \dfrac{4x+3}{x^2+1}$ の極値を求めよ.

(考え方) 極値となる点の候補は，$y' = 0$ になる点であった．よって，まずは微分して $y' = 0$ を解く．ここで求めた解は必ずしも極値とはならないので，y' の候補点の前後の符号を調べ，異なっていれば極値である.

解. まず $y=f(x)$ を微分する.

$$y' = \frac{4(x^2+1)-(4x+3)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2(2x^2+3x-2)}{(x^2+1)^2} = \frac{-2(2x-1)(x+2)}{(x^2+1)^2}$$

極値の候補となる点は $y'=0$ の解であったので，これを解くと $x=\frac{1}{2}$ と $x=-2$ の 2 点を得る．y' の分母は常に正であるので，y' の符号は分子のものと等しくなることに注意して増減表を書けば，以下のようになる.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$

これより，2 つの極値の候補点の前後で y' の符号が変わっているのでこれらはいずれも極値であり，その増減の仕方から $y=f(x)$ は

$$x=-2 \text{ で極小値 } f(-2)=-1,\ x=\frac{1}{2} \text{ で極大値 } f(\tfrac{1}{2})=4$$

をとることが分かる. □

例題 6.3. 関数 $f(x) = \dfrac{4x+3}{x^2+1}$ のグラフの概形を描け.

(考え方) グラフを描く際に必要になるのは

- 定義域はどこか
- 定義域の境界あるいは $\pm\infty$ での挙動
- どこで増減が変わるか (極値)
- どこで x 軸，y 軸と交わるか
- 特異点の近くでの挙動

であるので，一つ一つ調べていく．この例題の関数は例題 6.2 のものと同一なので，例題 6.2 の結果も用いる.

- 定義域はどこか: この関数には特に定義域の制限はない.
- 定義域の境界あるいは $\pm\infty$ での挙動: この例題の場合は定義域は全体なので，$\pm\infty$ での挙動を調べる.

$$\frac{4x+3}{x^2+1} = \frac{\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}$$

なので，$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ などに注意すれば

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4x+3}{x^2+1}=0, \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{4x+3}{x^2+1}=0.$$

- どこで増減が変わるか (極値): これは例題 6.2 で既に調べている.

$x=-2$ で極小値 $f(-2)=-1$，$x=\frac{1}{2}$ で極大値 $f(\frac{1}{2})=4$

(続く)

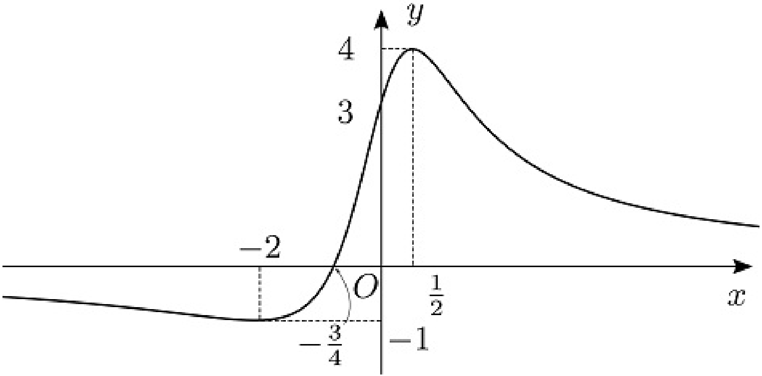
- どこで x 軸，y 軸と交わるか: y 軸との交点は $x=0$ での値を見ればよく，x 軸との交点は方程式 $f(x)=0$ を解けばよい:

$$f(0)=\frac{4\cdot 0+3}{0^2+1}=3,\quad \frac{4x+3}{x^2+1}=0 \text{ より } x=-\frac{3}{4}.$$

- 特異点の近くでの挙動: この関数は特異点（分母が 0 になる点）を持たないので調べる必要はない．
- 以上のことを増減表にまとめる．

x	$-\infty$	$\cdots$	-2	$\cdots$	$-\frac{3}{4}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$+\infty$
y'		$-$	0			$+$			0	$-$	
y	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	3	$\nearrow$	4	$\searrow$	0

これより，グラフの概形は以下のようになる．



§6.3 媒介变数方程式

- 変数 t に関する関数 $f(t),\ g(t)$ を用いて

$$(x, y) = \big(f(t),\ g(t)\big)$$

  のように表される点 $P(x, y)$ を考える．

- これは t が変化するに従って xy 平面上で一つの曲線を描く．例えば

$$(x, y) = (\cos t,\ \sin t)$$

  とすれば，半径 1，中心原点の円になる．

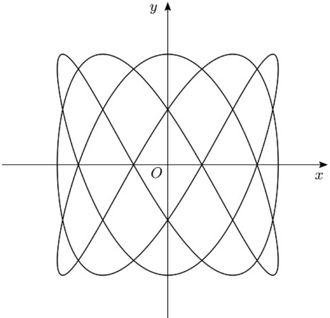
- このようにして，新たなパラメータ t を用いて曲線の x, y 座標を表して曲線を表示することを曲線の媒介変数（パラメータ）表示という．

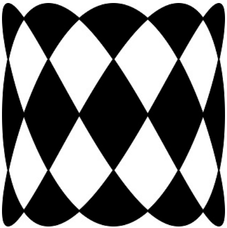
- なお，半径 1，中心原点の円は $(x, y) = (\sin t,\ \cos t)$ としても表すことができる．このように，1 つの図形を媒介変数を用いて表示する仕方はたくさんある．

- 通常の関数 $y = f(x)$ は，$(x, y) = \bigl(t, f(t)\bigr)$ と見ることで媒介変数表示ができる．
- 媒介変数表示のメリットの一つとして，関数のグラフよりも多くの種類の曲線を描くことができるという点がある．例えば先程の円であっても，関数を使って描こうとすれば

$$f_1(x) = \sqrt{1 - x^2}, \quad f_2(x) = -\sqrt{1 - x^2}$$

  と 2 つの関数に分けなければならない．
- プログラミングを用いて曲線や図形を描画する際にも非常に有効である．下の右図は，左図に現れる曲線で囲まれた領域を市松模様風に塗ったものである．





曲線の媒介変数表示が与えられたとき，関係式をうまく使ってパラメータを消去できるときがある．例えば先程の円ならば $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ なので

$$x^2 + y^2 = 1$$

という表示を得る（曲線の「陰関数」表示という）．

例題. 次の媒介変数表示について，t を消去することにより，曲線の陰関数表示を求めよ．

$$(x, y) = \left(\frac{1}{\cos t}, \tan t\right).$$

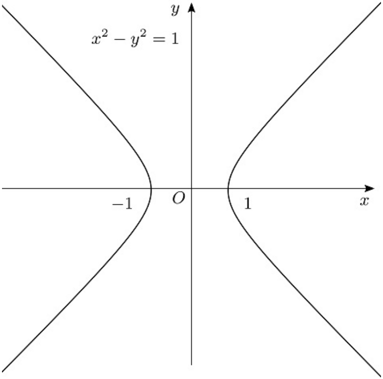
(考え方) 三角関数は関係式が多いので少し迷うが，今は $\tan t$ と $\cos t$ なので $\tan^2 t + 1 = \frac{1}{\cos^2 t}$ を用いるとよい．

解.考え方で述べたことを利用すれば

$$y^2 = \tan^2 t = \frac{1}{\cos^2 t} - 1 = x^2 - 1$$

となる．式を整理すれば

$$x^2 - y^2 = 1 \quad \square$$



演習問題

(1) 次の関数の極値を調べよ.

$$\text{(a) } (1+\cos x)\sin x \quad \text{(b) } \sqrt{4-9x^2} \quad \text{(c) } e^{-x^2}$$

$$\text{(d) } \frac{xe^x}{x-1} \quad \text{(e) } x^2\log x \quad \text{(f) } 3x^4+4x^3+1$$

(2) (1) の関数について，グラフの概形を描け.

(レポート時はグラフの選択問題に切り替え)

(3) 次の媒介変数表示を，陰関数表示に書き換えよ.

$$\text{(a)} \quad (\cos^3 t,\, \sin^3 t) \qquad \text{(b)} \quad \left(\frac{3t}{t^3+1}, \frac{3t^2}{t^3+1}\right)$$