線形代数学・同演習 A

演習問題 11

1.* $A = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$, $B = (b_{ij}) = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ のように表す．また，$AB = (c_{ij}) = (\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_n)$ とおく．さて，$AB = (A\boldsymbol{b}_1, \ldots, A\boldsymbol{b}_n)$ であるので，$\boldsymbol{c}_j = A\boldsymbol{b}_j = \sum_{i_j=1}^{n} b_{i_j j}\boldsymbol{a}_{i_j}$ とかける．よって

$$\det(AB) = \det(\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_n) = \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_n=1}^{n} b_{i_1 1} b_{i_2 2} \cdots b_{i_n n} \det(\boldsymbol{a}_{i_1}, \boldsymbol{a}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{a}_{i_n})$$

である．ここで，$\det(\boldsymbol{a}_{i_1}, \boldsymbol{a}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{a}_{i_n})$ は $i_1, i_2, \ldots, i_n$ がすべて異なるとき以外は 0 になるので，det が 0 にならずに残る場合は，i_k は置換 $\sigma \in S_n$ を用いて $i_k = \sigma(k)$ と表されることができることに注意する．これより

$$\det(AB) = \sum_{\sigma \in S_n} b_{\sigma(1)1} b_{\sigma(2)2} \ldots b_{\sigma(n)n} \det(\boldsymbol{a}_{\sigma(1)}, \boldsymbol{a}_{\sigma(2)}, \ldots, \boldsymbol{a}_{\sigma(n)})$$

であるが，$\det(\boldsymbol{a}_{\sigma(1)}, \boldsymbol{a}_{\sigma(2)}, \ldots, \boldsymbol{a}_{\sigma(n)}) = \mathrm{sgn}(\sigma)\det(A)$ なので，

$$\det(AB) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) b_{\sigma(1)1} b_{\sigma(2)2} \ldots b_{\sigma(n)n} \cdot \det(A) = \det(A)\det({}^tB)$$

を得る．$\det({}^tB) = \det B$ であるので，$\det(AB) = \det(A)\det(B)$ となる．

2.† (1) 2 (2) 8 (3) 20 (4) -1 (5) 2 (6) 6 (7) 7 (8) 24 (9) -9

3.† (a) 右辺を計算すれば左辺になる．

(b) 行列式の積公式と (a) を用いる．

4. (1) $i = 1, \ldots, n$ に対して，$n+i$ 行の λ 倍を i 行目に加える行基本変形を行えばよい．

(2) はじめに (1) の結果は列に関しても成り立つことに注意する．

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+B & B+A \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+B & (B+A)-(A+B) \\ B & A-B \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} A+B & O \\ B & A-B \end{vmatrix} = |\,A+B\,|\,|\,A-B\,|.$$

5.* まず n が奇数のとき．このときは行列式の性質から

$$\det(X) = \det(-{}^tX) = (-1)^n \det({}^tX) = -\det(X)$$

7 月 4 日分 (凡例：無印は基本問題，† は特に解いてほしい問題，$*$ は応用問題)

講義用 HP: http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~h-nakashima/lecture/2017LA.html

なので，$\det(X)=0$ となることが分かる．さて，$n=2p$ (偶数) のとき．このときは，問題 3 を用いると計算が楽である (単純に基本変形を用いても同様にできる)．X を n 次の交代行列とし，それを

$$X=\begin{pmatrix} aJ & {}^tB \\ B & Y \end{pmatrix};\qquad a\in\mathbb{R},\quad J=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\quad \begin{cases} B \text{ は } (n-2)\times 2 \text{ 行列} \\ Y \text{ は } n-2 \text{ 次の交代行列} \end{cases}$$

のようにブロック分割する．$n=2$ ならば交代行列 X は $X=aJ$ の形であり，このとき $\det(X)=a^2$ なので確かに (多項式)^2 の形をしている．ここで $J^{-1}={}^tJ=-J$ であることに注意しよう．さて，問題 3 より

$$\det X=\det(aJ)\det(Y-B(aJ)^{-1}\,{}^tB)=a^{2-2p}\det(aY-BJ\,{}^tB)\qquad (n=2p)$$

となる．$Z:=aY-BJ\,{}^tB$ とおけば，Z は交代行列となるため，帰納法の仮定より $\det(Z)=\mathrm{Pf}'(Z)^2$ となる多項式 $\mathrm{Pf}'(Z)$ がある．これを用いれば，

$$\det(X)=(a^{1-p}\mathrm{Pf}'(Z))^2$$

であるため，あとは $\mathrm{Pf}(X):=a^{1-p}\mathrm{Pf}'(Z)$ が多項式であることを示せばよい．ここで左辺 $(=\det(X))$ は当然多項式である．一方で，$\mathrm{Pf}(X)$ がもし多項式関数ではない有理関数[*1]ならば，その自乗も多項式関数ではない有理関数になっているはずである．これが多項式と等しいということなので，$\mathrm{Pf}(X)$ 自体が多項式でなければならない．

6.† $\mathrm{Pf}(A)=af-be+cd.$

[*1] 有理関数とは，二つの多項式 $f(x),g(x)$ を用いて $\frac{f(x)}{g(x)}$ と表わされる関数のこと．