

# 線形代数学・同演習 A

7 月 26 日分 演習問題

1. 次の行列の固有値と固有ベクトルを求めよ.

$$(1) \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & -2 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad (4) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (5) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$
$$(6) \begin{pmatrix} 1 & -8 & 26 \\ 0 & 8 & -18 \\ 0 & 3 & -7 \end{pmatrix} \quad (7) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (8) \begin{pmatrix} 13 & -8 & 24 \\ 24 & -15 & 48 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (9) \begin{pmatrix} 13 & 15 & 6 \\ -10 & -10 & -6 \\ -6 & -9 & -1 \end{pmatrix}$$

2. 次の行列の固有多項式を求めよ.

$$(1) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -3 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} -3 & 2 & -4 \\ -2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

3. 問題 1 の各行列  $A$  について, 固有値すべての和と  $\text{tr}(A)$  が一致すること, および固有値すべての積と  $\det(A)$  が一致することを確認せよ.

4. (1) 一般の 2 次正方行列  $A$  の固有多項式  $g_A(t)$  を計算せよ.

(2) 多項式  $g_A(t)$  の  $t$  を形式的に  $A$  に置き換えた  $g_A(A)$  を計算せよ.\*<sup>1</sup>

5.\* 次の行列の行列の固有多項式と固有値を求めよ.

$$(1) \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{pmatrix}$$

6.\* 問題 4 の結果を利用して, 以下の設問に答えよ.

(1)  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$  に対して, 次の  $S, T$  を  $A$  の一次多項式で表わせ.\*<sup>2</sup>

$$(i) S = 2A^4 - 12A^3 + 19A^2 - 29A + 37E_2 \quad (ii) T = S^{-1}$$

(2) 次の行列の  $n$  乗を求めよ.\*<sup>3</sup>

$$(i) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \quad (ii) \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \quad (iii) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (ad - bc = 0)$$

7.\* 問題 1 の (1)–(5) の各行列について, その  $n$  乗を計算せよ.

8.\* 問題 1 の (1)–(5) の各行列  $A$  について,  $\exp(A)$  を求めよ.

\*<sup>1</sup> この結果は Cayley–Hamilton の定理と呼ばれている.

\*<sup>2</sup> 多項式の除法を用いて次数下げを行う.

\*<sup>3</sup> 漸化式を作る.