線形代数学・同演習 A

7 月 18 日分　小テスト

学籍番号：　　　　　　　　　　　　　　氏名：

次の n 次正方行列 A_n の行列式 $|A_n|$ を計算せよ．計算過程も省略せずに書くこと．

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \text{例えば} \quad \begin{cases} A_1 = 2, \\ A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \end{cases} \quad \text{など.}$$

(ヒント：漸化式を立てる)

解) まず $\det A_1 = 2$, $\det A_2 = 4 - 1 = 3$ である．$n \geq 3$ のとき，第 1 列に関して余因子展開すれば,

$$\det A_n = 2 \det A_{n-1} - (-1) \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \det A_{n-1} - \det A_{n-2}.$$

よって漸化式 $\det A_1 = 2$, $\det A_2 = 3$, $\det A_n = 2 \det A_{n-1} - \det A_{n-2}$ を解けばよい．ここで，この漸化式は

$$\det A_n - \det A_{n-1} = \det A_{n-1} - \det A_{n-2} = \cdots = \det A_2 - \det A_1 = 1$$

であるので簡単に求まり，$\det A_n - \det A_1 = n - 1$，すなわち

$$\det A_n = n + 1$$

となる．

※講義や講義内容に関して，意見・感想・質問等を自由に記述してください．