線形代数学・同演習 B

演習問題 4

1. 次のベクトルで生成される部分空間の次元と，その基底を一組求めよ．

$$(1)\quad \begin{pmatrix}-1\\5\\-3\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\-1\\-2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-1\\4\\-5\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}6\\-6\\3\end{pmatrix}\qquad (2)\quad \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-4\\-7\\1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\3\\-9\end{pmatrix}$$

2.† 次の多項式の組で生成される $V=\mathbb{R}[x]_3$ の部分空間の次元と基底を求めよ*1．

$$(1)\quad \begin{cases} f_1(x)=x^3-x^2+1\\ f_2(x)=-2x^3+2x^2+x-1\\ f_3(x)=x^3-x^2+x+2\end{cases}\qquad (2)\quad \begin{cases} g_1(x)=x^3-2x^2-x+1\\ g_2(x)=2x^3-4x^2-5x+2\\ g_3(x)=3x^3-6x^2+4x+3\\ g_4(x)=2x^3+6x^2+6x+4\\ g_5(x)=4x^3-3x^2+x+5\end{cases}$$

$$(3)\quad H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right)\ (n=0,1,2,3)$$

3.† 次の行列の①解空間，② 像空間について，それぞれの次元とその基底を求めよ．

$$(1)\quad A=\begin{pmatrix}1&-3&1\\3&1&13\end{pmatrix}\qquad (2)\quad B=\begin{pmatrix}-1&1&-1&4\\3&-3&1&-6\\-1&1&2&-5\end{pmatrix}$$

4. 次の二組の基底 $[\boldsymbol{u}]$, $[\widetilde{\boldsymbol{u}}]$ に関する変換行列 P を求めよ．*2

$$(1)\quad [\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2]=\begin{pmatrix}1&2\\2&5\end{pmatrix},\qquad [\widetilde{\boldsymbol{u}},\widetilde{\boldsymbol{u}}_2]=\begin{pmatrix}10&-3\\-3&1\end{pmatrix}$$

$$(2)\quad [\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3]=\begin{pmatrix}1&-3&3\\-3&10&-11\\3&-11&14\end{pmatrix},\quad [\widetilde{\boldsymbol{u}}_1,\widetilde{\boldsymbol{u}}_2,\widetilde{\boldsymbol{u}}_3]=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&2&-1\\1&-1&2\end{pmatrix}$$

5. 基底の変換行列 P が必ず正則になることを示せ．*3

6.† W をベクトル空間 V の部分空間とする．このとき，次の二つの命題を証明せよ．

(1) $\dim W\le\dim V$, (2) $\dim W=\dim V$ ならば，$W=V$ となる．

---

10 月 31 日分 (凡例：無印は基本問題，† は特に解いてほしい問題，$*$ は応用問題)

講義用 HP: http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~h-nakashima/lecture/2017LA.html

*1 (3) の多項式を Hermite 多項式とよぶ.

*2 $[\widetilde{\boldsymbol{u}}]=[\boldsymbol{u}]P$ となる正則行列 P を求める．

*3 ヒント：P の列ベクトルたちが線形独立となることを示せばよい.