8　行列式の導入

2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して

$$\det A = ad - bc \quad (= |A| \text{ とも表す})$$

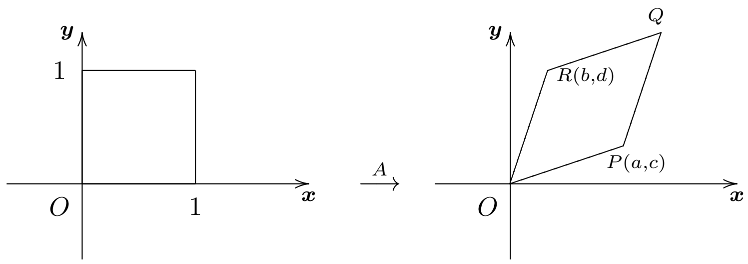
を A の行列式と呼んだ．これは

$$\det A \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ は正則}$$

という性質があった．これを一般の n 次正方行列に拡張する．

8.1　行列式の意味

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ は一般には正方形を平行四辺形にうつす．

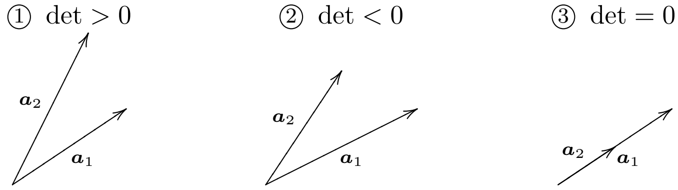


$\square OPQR$ の面積を計算する．

$$\begin{aligned}
|\square OPQR| &= 2|\triangle OPR| = 2 \cdot \frac{1}{2}|\overrightarrow{OP}|\,|\overrightarrow{OR}|\sin\theta = |\overrightarrow{OP}|\,|\overrightarrow{OR}|\sqrt{1-\cos^2\theta} \\
&= |\overrightarrow{OP}|\,|\overrightarrow{OR}|\sqrt{1-\left(\frac{\left\langle \overrightarrow{OP} \,\middle|\, \overrightarrow{OR} \right\rangle}{|\overrightarrow{OP}|\,|\overrightarrow{OR}|}\right)^2} = \sqrt{|\overrightarrow{OP}|^2|\overrightarrow{OR}|^2 - \left\langle \overrightarrow{OP} \,\middle|\, \overrightarrow{OR} \right\rangle^2} \\
&= \sqrt{(a^2+c^2)(b^2+d^2)-(ab+cd)^2} \\
&= \sqrt{a^2d^2-2abcd+b^2c^2} = \sqrt{(ad-bc)^2} = |ad-bc|.
\end{aligned}$$

つまり，$A = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$ とかけば，$\det A$ は $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ を一辺とする平行四辺形の (符号付き) 面積に等しい．

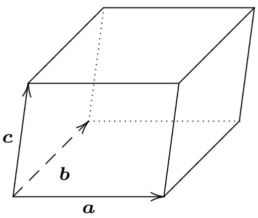
① $\det > 0$　　② $\det < 0$　　③ $\det = 0$



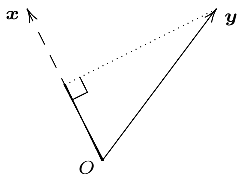
$\det A = 0$ のとき，図形がつぶれてしまっているため，元の状態を復元できない．これが $\det A = 0$ のとき逆行列を持たない理由．

8.2　3 次正方行列の行列式

$A = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ とし，3 つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ を辺とする平行六面体の体積を求める．



1. 内積 $\langle \boldsymbol{x} | \boldsymbol{y} \rangle$ について



$\langle \boldsymbol{x} | \boldsymbol{y} \rangle = \| \boldsymbol{x} \| \cdot \| \boldsymbol{y} \| \cos\theta$

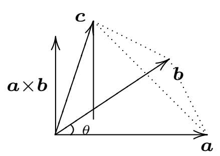
もし $\| \boldsymbol{x} \| = 1$ ならば

$\langle \boldsymbol{x} | \boldsymbol{y} \rangle = \| \boldsymbol{y} \| \cos\theta$

$\to$ これはベクトル $\boldsymbol{y}$ の，$\boldsymbol{x}$ 方向成分の長さ．

2. ベクトル積 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ の性質
   (a) $\| \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \| = \| \boldsymbol{a} \| \cdot \| \boldsymbol{b} \| \sin\theta$
   (b) ベクトル $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ と直交する．
   (c) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ -a_1 b_3 + a_3 a_1 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$

(1) まず $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ を辺とする三角錐の体積 $\widetilde{V}$ の体積を求める．



・$S = \frac{1}{2} \| \boldsymbol{a} \| \cdot \| \boldsymbol{b} \| \sin\theta = \frac{1}{2} \| \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \|$

・$h = \left| \left\langle \frac{\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}}{\| \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \|} \middle| \boldsymbol{c} \right\rangle \right|$： ベクトル $\boldsymbol{c}$ の $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ 方向成分の長さ．

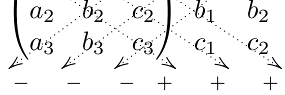
すると，

$$\widetilde{V} = \frac{1}{3} Sh = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \| \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \| \cdot \left| \left\langle \frac{\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}}{\| \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \|} \middle| \boldsymbol{c} \right\rangle \right| = \frac{1}{6} \left| \langle \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} | \boldsymbol{c} \rangle \right|.$$

平行六面体の体積 V は $\widetilde{V}$ の 6 倍なので，

$$\begin{aligned} V &= |\langle \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} | \boldsymbol{c} \rangle| \\ &= |(a_2 b_3 - a_3 b_2) c_1 + (-a_1 b_3 + a_3 a_1) c_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) c_3| \\ &= |a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1|. \end{aligned}$$

定義 8.1. $A = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ の行列式 $\det A$ を $\det A = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1$ により定める．



注意 8.2. これを使えば，ベクトル積は形式的に

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

とかける．

考察

1. $\det E = 1$
2. 項の数は $n=2$ のときは 2 コ，　$n=3$ のときは 3 コ．
3. 各項について同じ行・列の成分は 1 つずつ
4. すべての組み合わせが現れている

8.3 一般の場合

定義 8.3. $A = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ に対して，$\boldsymbol{a}, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ を辺とする平行 $2n$ 面体の "(符号付き) 体積" を行列 A の行列式とよび，$\det A$ で表す．符号は $\det E_n = 1$ となるように定める．

注意 8.4. この定義のままだと計算しにくい．次回は行列式の公式を与える．