1　多変数関数における微分

後期は多変数関数の微分と積分を扱う．講義では主に 2,3 変数関数のみを扱うことになるが，基本的にはそのまま n 変数関数に拡張できる．

キーワードは，偏微分・全微分，連鎖律，条件付き極値問題，重積分，多変数における変数変換公式．

前半は微分を扱う．1 変数のとき，微分は次の極限 $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ により定義された．さらに極限 $\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=\alpha$ は，次のように ε-δ 論法によって定義されていた．

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \text{s.t.}\ 0<|x-a|<\delta\ \Rightarrow\ |f(x)-\alpha|<\varepsilon.$$

よって，まずはこれを多変数に拡張する必要がある．

1.1　数ベクトル

$\mathbb{R}^2=\{\boldsymbol{x}=(x,y);\ x,y\in\mathbb{R}\}$ は 2 次元の数ベクトル空間, $\mathbb{R}^3=\{\boldsymbol{x}=(x,y,z);\ x,y,z\in\mathbb{R}\}$ は 3 次元の数ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ を表す．また, 零ベクトルは $\mathbf{0}=(0,0,0)$ と表す．

定義 1.1. $\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}'\in\mathbb{R}^3$ に対して, $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}':=xx'+yy'+zz'$ を内積, $\|\boldsymbol{x}\|:=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ をノルムという．

$\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}}$ が成り立っていることに注意.

命題 1.2. (1) $\|\boldsymbol{x}\|\geq 0$. 特に $\|\boldsymbol{x}\|=0\Leftrightarrow\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$, (2) $\|\alpha\boldsymbol{x}\|=|\alpha|\,\|\boldsymbol{x}\|$, (3) $|\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}|\leq\|\boldsymbol{x}\|\cdot\|\boldsymbol{y}\|$ (Schwartz の不等式)，(4) $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|\leq\|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{y}\|$ (三角不等式).

（証明略）

1.2　多変数関数の極限

定義 1.3. 2 変数関数 $f(x,y)$ に対し，$\displaystyle\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}f(\boldsymbol{x})=\alpha$ を,

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \text{s.t.}\ 0<\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|<\delta\ \Rightarrow\ |f(\boldsymbol{x})-\alpha|<\varepsilon$$

により定義する．

定義自体は 1 変数のときと大差がないが，その振る舞いは大きく異なる．それは $\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}$ に至る道筋が無数にあり，そのすべてで同一の極限になっていることが要請されているためである．

例題 1.4. 次の極限を求めよ．

$$(1)\ \lim_{\boldsymbol{x}\to\mathbf{0}}\frac{x^2y}{x^2+y^2}\qquad(2)\ \lim_{\boldsymbol{x}\to\mathbf{0}}\frac{x^2+2xy-3y^2}{x^2+y^2}$$

(考え方) 一般には極座標変換 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ を用いる．分子，分母ともに同次式ならば予想を立てやすい．（解答略）

(コメント) 分子，分母ともに同次式のときは $\Delta=$ (分子の次数) $-$ (分母の次数) を考えればよい．一般には $\Delta>0$ ならば 0 に収束，$\Delta\leq 0$ ならば収束しない.

注意 1.5. 極座標変換において，例えば $\theta=\operatorname{Arcsin}r$ のように，θ は r の関数になっている可能性がある[*1].

定義 1.6. (1) $\displaystyle\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}f(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{a})$ のとき，$f(\boldsymbol{x})$ が点 $\boldsymbol{a}$ で連続という．(2) また，$f(\boldsymbol{x})$ が集合 A の各点で連続であるとき，$f(\boldsymbol{x})$ は A で連続という．

1.3　偏微分

定義 1.7. 2 変数関数 $f(x,y)$ において，y を定数と思って x で微分することを，x に関して偏微分するといい,

$$f_x(x,y),\quad\frac{\partial f}{\partial x}(x,y),\quad\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)$$

などと書く．y に関する偏微分も同様に定義される．

例題 1.8. $f(x,y)=x^3+xy^2-3y^2$ を，x,y に関して偏微分せよ．

(解) $f_x(x,y)=3x^2+y^2$, $f_y(x,y)=2xy-6y$.

(コメント) 偏微分は，実際には 1 変数の微分と何ら変わりない.

注意 1.9. 1 変数の場合だと「微分可能ならば連続」であったが，多変数だと**偏微分可能であっても連続であるとは限らない**．例えば $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ $(\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0})$, $f(0,0)=0$ がその例を与える．実際，原点での偏微分は簡単な計算から $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$ であるので[*2], $f(x,y)$ は原点において偏微分可能である．しかしながら，$f(x,y)$ において極座標変換を考えると,

$$\frac{xy}{x^2+y^2}=\frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}=\cos\theta\sin\theta$$

となり，$f(x,y)$ は原点で連続でない.

まとめ (1) 多変数の極限は 1 変数と場合と振る舞いが大きく異なる．(2)「**偏微分**」の導入．(3) 偏微分は 1 変数における微分の多変数化とは言えない (注意 1.9 より).

10 月 10 日.

[*1] もちろん，必ずそうなっているわけではない．重要なのは，θ は固定されているわけではないということである．

[*2] 実際に計算してみること．

演習問題 1

問題 1 命題 1.2 を証明せよ．

問題 2 次の関数 $f(x,y)$ について $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)$, $\displaystyle\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)$ を調べよ．

$$(1)\quad \frac{x-y}{x+y} \qquad (2)\quad \frac{x^2+y^2}{x^2-xy+y^2}$$
$$(3)\quad \frac{x-y^2}{x^2-y} \qquad (4)\quad \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

問題 3† 次の極限を調べよ．

(1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

(2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2+xy+y^2)^{3/2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$

問題 4 $(x,y)=(0,0)$ のときは $f(0,0)=0$ で，$(x,y)\neq(0,0)$ のときは次式で定義される関数 $f(x,y)$ の，$(x,y)=(0,0)$ における $f(x,y)$ の連続性を調べよ．

$$(1)\ \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \qquad (2)\ xy\log(x^2+y^2)$$

問題 5† 次の関数の x,y に関する偏微分を計算せよ．

(1) $f(x,y)=e^{-x^2-y^2}\sin(x^2+y^2)$

(2) $g(x,y)=x^y y^x$

(3) $h(x,y)=\log(x^2+y^2-xy)$

問題 6† 次の関数 $f(x,y)$ の原点における偏微分係数 $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$ を求めよ．

(1) $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$

(2) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$

(3) $f(x,y)=\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad f(0,0)=0.$

この微分積分学 A・B の講義の目標は，多変数関数の微分・積分を自在に扱えるようになることです．後期は，その主題である多変数関数を扱っていきます．当然ながら，その基礎には 1 変数関数の微分積分学がありますので，しっかりと復習し，きちんとできるようになっておいてください．

　この場所では講義の要約や補足，あるいは関連する話題を取り留めもなく書いていくつもりです．必ずしも役に立つ情報があるとは限りませんが，一読いただけますと幸いです．

小レポート

(1) 次の関数の $x=0$ における Taylor 展開を，最初の 4 項目まで書き下せ．ただし，$\alpha\in\mathbb{R}$ である．

$$e^x,\quad \sin x,\quad \cos x,\quad \log(1+x),$$
$$\mathrm{Arctan}\,x,\quad \mathrm{Arcsin}\,x,\quad (1+x)^\alpha.$$

(2) 2 変数関数 $f(x,y)$ を次で定める．

$$f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}\quad (\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}),\quad f(0,0)=0.$$

(i) $f(x,y)$ の x,y に関する偏微分をそれぞれ計算せよ．(ii) 直線 $y=x$ 上から点が $\boldsymbol{0}$ に近づくときの極限値を求めよ．(iii) 直線 $y=-x$ 上から点が $\boldsymbol{0}$ に近づくときの極限値を求めよ．

注意． (i) $(x,y)=(0,0)$ かどうかで場合分けが必要．(ii) $(x,y)=(h,h)$ として $h\to 0$ を考えたときの $f(x,y)$ の極限を求めよ，ということ．(iii) も同様である．

小レポートについて． 次回の講義の際に提出すること．原則として期限を過ぎての提出は認めないが，やむを得ない事情がある際は，必ずその旨を**期限日までにメールにより**連絡すること．