線形代数学・同演習 B

演習問題 10

多項式空間における標準内積を $(p\,|\,q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,dx$ とする.

1.† 与えれた二つの多項式と直交する多項式を $f(x)$ で表す.
(1) $f(x) = x$, (2) $f(x) = 3x^2 - 1$, (3) $f(x) = 5x^2 - 2x - 3$, (4) $f(x) = 5x^2 - 12x + 1$.

2. $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ と書けば $\langle A\,|\,B\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ij}$ となるので，あとは簡単な計算により確認することができる.

3. 内積の性質を満たすことは，例題と全く同様に示すことができる．後半は，例えば $p(x) = x$, $q(x) = x^2$ とすれば，$\langle p\,|\,q\rangle = 0$ であるのに対して，$\langle p\,|\,q\rangle_0 = 1/4$ であることなどから確認できる.

4.† ならない．例えば $f(x) = \begin{cases} 1 & (x=0), \\ 0 & (x\neq 0) \end{cases}$ とすると $f \neq 0$ (零関数) であるが，$\langle f\,|\,f\rangle = 0$ となってしまう.

解説) 内積の条件のうち (1)-(3) までは一般の関数空間でも成立するが，条件 (4) も成立するためには “連続性” が必要である．さて，連続関数の空間は条件 (4) を満たすことの証明を，厳密にやってみよう．条件 (4) は $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}_V$ ならば $\langle \boldsymbol{v}\,|\,\boldsymbol{v}\rangle > 0$ であった．関数における零元は ‘常に 0 である関数’ であったので，ある関数 f が零元でないとすると，$f(a) \neq 0$ となるような点 $a \in [-1, 1]$ がある．ここで $\langle f\,|\,f\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)^2\,dx$ について考える．被積分関数 $f(x)^2$ は連続関数であり，特に $x = a$ において $f(a)^2 > 0$ である．ε-δ 論法において，$\varepsilon = f(a)^2/2$ とすれば，ある正数 $\delta > 0$ が存在して

$$|x - a| < \delta \text{のとき } |f(x)^2 - f(a)^2| < \tfrac{1}{2}f(a)^2,\ \text{つまり}\quad \tfrac{1}{2}f(a)^2 < f(x)^2$$

となることがわかる．ここで $f(x)^2 \geq 0$ であることより

$$\int_{-1}^{1} f(x)^2\,dx \geq \int_{a-\delta}^{a+\delta} f(x)^2\,dx > \int_{a-\delta}^{a+\delta} \tfrac{1}{2}f(a)^2\,dx = \delta f(a)^2 > 0$$

であるので，結局 f が零関数でなければ $\langle f\,|\,f\rangle > 0$ となる.
以上のことは数学の厳密性についての紹介ですので，試験でこれを要求することはありません.

---

1 月 9 日分 (凡例：無印は基本問題，† は特に解いてほしい問題，$*$ は応用問題)
講義用 HP: http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~h-nakashima/lecture/2017LA.html

5.† (1) まず，零元 $\mathbf{0}_V$ は常に $\langle \mathbf{0}_V \,|\, \boldsymbol{v} \rangle = 0$ であることより，$\mathbf{0}_V \in W^\perp$ である．また，$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in W^\perp$ とすれば，内積の線形性から，任意の $\boldsymbol{w} \in W$ に対して

$$\langle \lambda\boldsymbol{u} + \mu\boldsymbol{v} \,|\, \boldsymbol{w} \rangle = \langle \lambda\boldsymbol{u} \,|\, \boldsymbol{w} \rangle + \langle \mu\boldsymbol{v} \,|\, \boldsymbol{w} \rangle = 0$$

となるので，$\lambda\boldsymbol{u} + \mu\boldsymbol{v} \in W^\perp$ である．よって，$W^\perp$ は V の部分空間となる．

(2) W および $W^\perp$ がともに部分空間であることから $W \cap W^\perp \supset \{\mathbf{0}_V\}$ は明らか．$\boldsymbol{w} \in W \cap W^\perp$ とする．このとき $\langle \boldsymbol{w} | \boldsymbol{w} \rangle$ を考える．左の $\boldsymbol{w}$ を $W^\perp$ の要素，右の $\boldsymbol{w}$ を W の要素と思えば，$\langle \boldsymbol{w} | \boldsymbol{w} \rangle = 0$ となることが分かる．内積の定義より，同じものの内積をとって 0 になるのは零元 $\mathbf{0}_V$ だけであったので，$\boldsymbol{w} = \mathbf{0}_V$ となる．これより $W \cap W^\perp \subset \{\mathbf{0}_V\}$ となり，結局 $W \cap W^\perp = \{\mathbf{0}_V\}$ を得る[*1]．

6.† (1) $\langle s_n \,|\, c_m \rangle = 0$, (2) $\langle s_n \,|\, s_m \rangle = \delta_{nm}$, (3) $\langle c_n \,|\, c_m \rangle = \delta_{nm}$ (δ_{nm} は Kronecker のデルタ).

(1) 被積分関数 $\sin nx \cos mx$ は奇関数なので.

(2), (3) 三角関数の和積の公式

$$\sin nx \sin mx = \frac{\cos(n-m)x - \cos(n+m)x}{2},$$
$$\cos nx \cos mx = \frac{\cos(n-m)x + \cos(n+m)x}{2}$$

と，次の積分を合わせると得られる：

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \, dx = \begin{cases} 0 & (k \text{ は } 0 \text{ でない整数}), \\ 2\pi & (k = 0). \end{cases}$$

[*1] 集合 A, B が等しいことを示すためには $A \subset B$ かつ $A \supset B$ を示す事が必要.