線形代数学・同演習 B

演習問題 10

多項式空間における標準内積を $(p\,|\,q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,dx$ とする．

1.† 次の $\mathbb{R}[x]_2$ の 2 本の多項式と直交する多項式を，それぞれ一つずつ求めよ．

(1) $p(x) = 4x^2+1,\quad q(x) = x^2.$ (2) $p(x) = x-1,\quad q(x) = x.$

(3) $p(x) = 2x-1,\quad q(x) = x^2.$ (4) $p(x) = 2x+3,\quad q(x) = x^2+x+1.$

2. n 次正方行列全体のなすベクトル空間 $M(n,\mathbb{R})$ において，$\langle A\,|\,B\rangle := \mathrm{tr}({}^t\!A\,B)$ $(A, B \in M(n,\mathbb{R}))$ とするとき，$\langle\cdot|\cdot\rangle$ は内積の性質を満たすことを確認せよ．

3. $V = \mathbb{R}[x]_2$ とし，内積の定義において積分範囲を $[0,1]$ に変更したものを考える：

$$\langle p\,|\,q\rangle_0 := \int_0^1 p(x)q(x)\,dx \quad (p, q \in V).$$

このとき，$\langle\cdot|\cdot\rangle_0$ も内積の性質を満たすことを確認せよ．また多項式 p, q に対して，標準内積での値 $\langle p\,|\,q\rangle$ と，この内積での値 $\langle p\,|\,q\rangle_0$ が異なることを確認せよ．

4.† 区間 $[-1,1]$ 上の (連続とは限らない) 実数値関数全体のなす空間 V はベクトル空間となる．このとき，次で定義される $\langle\cdot|\cdot\rangle$ は V の内積となるか：

$$\langle f\,|\,g\rangle := \int_{-1}^1 f(x)g(x)\,dx \quad (f, g \in V).$$

5.† 内積空間 V の部分空間 W に対して，V の部分集合 $W^\perp$ を次のように定義する：

$$W^\perp := \{\boldsymbol{v} \in V;\ \text{すべての } \boldsymbol{w} \in W \text{ に対して } \langle \boldsymbol{v}\,|\,\boldsymbol{w}\rangle = 0\}.$$

(1) $W^\perp$ は V の部分空間となることを示せ[*1]． (2) $W \cap W^\perp = \{\mathbf{0}_V\}$ を示せ．

6.† $I = [-\pi, \pi]$ とする．I 上の滑らかな関数全体のなすベクトル空間 $C^\infty(I)$ において，$\langle f\,|\,g\rangle := \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx$ は内積になる．整数 $n, m \geq 1$ に対して $s_n(x) := \sin nx$, $c_m(x) := \cos mx$ とおくとき，次の内積の値を計算せよ[*2]．

(1) $\langle s_n\,|\,c_m\rangle$ (2) $\langle s_n\,|\,s_m\rangle$ (3) $\langle c_n\,|\,c_m\rangle$

---

1 月 9 日分 (凡例：無印は基本問題，† は特に解いてほしい問題，∗ は応用問題)

講義用 HP: http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~h-nakashima/lecture/2017LA.html

[*1] この $W^\perp$ を，W の V における直交補空間という．

[*2] (2), (3) は $n = m$ かどうかで場合分けが必要．