線形代数学・同演習 B

演習問題 8

1. (1) $W(1;\,A)=\mathrm{Span}(\begin{pmatrix}-1\\-2\\-1\\1\end{pmatrix})$, $W(-1;\,A)=\mathrm{Span}(\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix})$

(2) $W(2;\,A)=\mathrm{Span}(\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\1\end{pmatrix})$, $W(-1;\,A)=\mathrm{Span}(\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\\1\end{pmatrix})$

2.† (1) ◯ (2) × (3) ◯ (4) ×

(1) $\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}'\in\mathrm{Im}(T)$ とすると，$\mathrm{Im}(T)$ の定義より，$\boldsymbol{v}=T(\boldsymbol{u})$, $\boldsymbol{v}'=T(\boldsymbol{u}')$ となる $\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}'\in V$ が存在する．このとき，T の線形性から

$$T(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}')=T(\boldsymbol{u})+T(\boldsymbol{u}')=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}',\quad T(\lambda\boldsymbol{u})=\lambda T(\boldsymbol{u})=\lambda\boldsymbol{v}$$

なので，$\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}'\in\mathrm{Im}(T)$, $\lambda\boldsymbol{v}\in\mathrm{Im}(T)$ である．また，$\mathbf{0}_V=T(\mathbf{0}_V)$ であることより $\mathbf{0}_V\in\mathrm{Im}(T)$ なので，$\mathrm{Im}(T)$ は V の部分空間となる．

(2) $\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}'\in\mathrm{Ker}(T)$ とすると，定義より $T(\boldsymbol{v})=\mathbf{0}_V$, $T(\boldsymbol{v}')=\mathbf{0}_V$ となる．このとき，T の線形性から

$$T(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}')=T(\boldsymbol{v})+T(\boldsymbol{v}')=\mathbf{0}_V,\quad T(\lambda\boldsymbol{v})=\lambda T(\boldsymbol{v})=\mathbf{0}_V$$

なので，$\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}'\in\mathrm{Ker}(T)$, $\lambda\boldsymbol{v}\in\mathrm{Ker}(T)$ である．また，$T(\mathbf{0}_V)=\mathbf{0}_V$ であることより $\mathbf{0}_V\in\mathrm{Ker}(T)$ なので，$\mathrm{Ker}(T)$ は V の部分空間となる．

(3) $p(x),q(x)\in W$ とすると，$T(p(x))=x$, $T(q(x))=x$ である．しかし，T の線形性より $T(p(x)+q(x))=x+x=2x\neq x$ であるので，$p(x)+q(x)\notin W$ である．よって，W に属する多項式の和が W に属さないので，W は部分空間ではない．

3. (i) (1) $g_{T_1}(t)=t(t-1)$,　(2) $g_{T_2}(t)=(t+1)(t-1)$.

(ii) (1) $W(0;\,T_1)=\mathrm{Span}(1)$,　$W(1;\,T_1)=\mathrm{Span}(x)$

(2) $W(1;\,T_2)=\mathrm{Span}(x+1)$,　$W(-1;\,T_2)=\mathrm{Span}(-x+1)$

4. 固有値について (1) $1,a$,　(2) $1,a,a^2$,　(3) a^i $(i=0,1,\dots,n)$．固有空間は

(1) $W(1;\,T_1)=\mathrm{Span}(1)$, $W(a;\,T_1)=\mathrm{Span}(x+\frac{b}{a-1})$

(2) $W(1;\,T_2)=\mathrm{Span}(1)$, $W(a;\,T_2)=\mathrm{Span}(x+\frac{b}{a-1})$, $W(a^2;\,T_2)=\mathrm{Span}((x+\frac{b}{a-1})^2)$

(3) $W(a^i;\,T_n)=\mathrm{Span}((x+\frac{b}{a-1})^i)$ $(i=0,1,\dots,n)$

5.† 次の通り．

---

12 月 12 日分 (凡例：無印は基本問題，† は特に解いてほしい問題，$*$ は応用問題)

講義用 HP: http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~h-nakashima/lecture/2017LA.html

(1) $W(1;\,T) = \mathrm{Span}(-3x^2 - 5x + 1)$,
$W(-2;\,T) = \mathrm{Span}(x)$,
$W(3;\,T) = \mathrm{Span}(-2x^2 - 3x + 1)$.

(2) $W(1;\,T) = \mathrm{Span}(-2x^2 + 3x + 1)$,
$W(-2;\,T) = \mathrm{Span}(-x^2 + 2x + 1)$,
$W(4;\,T) = \mathrm{Span}(-2x^2 + x)$.

(3) $W(1;\,T) = \mathrm{Span}(x^2 + 5x,\ x^1 + 1)$,
$W(2;\,T) = \mathrm{Span}(x^2 - x + 1)$.

6. $\det(XY) = \det(YX)$ を用いる.

$$\begin{aligned} g_{AB}(t) &= \det(tE - AB) = \det\bigl(A(tA^{-1} - B)\bigr) \\ &= \det\bigl((tA^{-1} - B)A\bigr) = \det(tE - BA) = g_{BA}(t). \quad \square \end{aligned}$$