演習問題 5

問題 1. (1) $(x+y)+(-\frac{y^2}{2}+xy)+(\frac{y^3}{3}-\frac{xy^2}{2}+\frac{x^2y}{2})+(-\frac{y^4}{4}+\frac{xy^3}{3}-\frac{x^2y^2}{4}+\frac{x^3y}{6})+o$

(2) 問題で誤植がありました．誤: $e^{2x}\cos x$，正: $e^{2x}\cos y$.

$1+2x-(\frac{y^2}{2}+2x^2)+(-xy^2+\frac{4}{3}x^3)+(\frac{y^4}{24}-x^2y^2+\frac{2}{3}x^4)+o$

(3) $1-\frac{1}{2}(x^2+yr)-\frac{1}{8}(x^4+2x^2y^2+y^4)+o$

(4) $x-\frac{xy^2}{2}-\frac{x^3}{6}+o$

(考え方) いずれも 1 変数の関数の Taylor 展開を利用する．(1),(2),(4) はそれぞれを Taylor 展開した後，普通の多項式と思って 5 次以下の部分を書き出せばよい．

(3) は $X=x^2+y^2$ とおき，X の関数と思って Taylor 展開した後で X を元に戻す．

問題 2.† (1) 停留点は $(0,0)$, (a,a), $H_f(\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix}6x & -3a\\ -3a & 6y\end{pmatrix}$, $\det H_f(\boldsymbol{x})=9(4xy-a^2)$.

(2) 停留点は $(1,0)$ のひとつのみ, $H_f(\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix}y(y-1)x^{y-2} & x^{y-1}(1+y\log x)\\ x^{y-1}(1+y\log x) & x^y(\log x)^2\end{pmatrix}$,

$\det H_f(\boldsymbol{x})=-x^{2y-2}(1+2y\log x+y(\log x)^2)$

(3) 出題ミスです．グラフを描かせてみたところ，非常に多くの極値を持っていました．参考までにウェブページに上げておきます．

(4) 停留点を持たない．$H_f(\boldsymbol{x})=\dfrac{3xy}{(x^2+y^2)^{5/2}}\begin{pmatrix}-y^2 & xy\\ xy & -x^2\end{pmatrix}$, $\det H_f(\boldsymbol{x})=0$.

(1) $f_x=3x^2-3ay$, $f_y=3y^2-3ax$．a に関して場合分けが必要．$f_x=f_y=0$ とすると (いずれの場合も)$(x,y)=(0,0),(a,a)$ を得る．a の正負に応じて極大か極小かが変わってくることに注意．(2) 煩雑だが計算するだけ．この点は鞍点になる．(4) $f_x=f_y=0$ を解くと $x=y=0$ が出てくるが，この関数は原点において定義されていない．また，もし連続になるように原点での値を決めたとしても，原点において微分可能ではないので，やはりこの点は停留点にはなれない．

問題 3. (1) 点 $(2,0)$ で極小値 -4 をとる．(2) 点 $(0,0)$ で極小値 0 をとり，点 $\pm(1,0)$ で極大値 $2/e$ をとる．また，点 $\pm(0,1)$ で鞍点をとる．(3) 点 $(2,2)$ で極小値 12 をとる．(4) 点 $(-\pi/2,-\pi/2)$ で極小値 -3，点 $(\pi/6,\pi/6)$, $(5\pi/6,5\pi/6)$ で極大値 $3/2$, 点 $(\pi/2,\pi/2)$, $(\pi/2,-\pi/2)$, $(-\pi/2,\pi/2)$ で鞍点をとる．(5) 点 $(1,1)$ で極小値 9 をとる．

(2) 計算は煩雑だが，ちゃんと計算できる．$f_x=-2x(2x^2+y^2-2)e^{-x^2-y^2}$, $f_y=-2y(2x^2+y^2-1)e^{-x^2-y^2}$ なので，停留点は $(0,0)$, $\pm(1,0)$, $\pm(0,1)$ の 5 個 (図を描くと分かりやすくなる)．また Hesse 行列は次のようになるので，極値の判定

もできる．

$$H_f(\boldsymbol{x}) = 2e^{-x^2-y^2}\begin{pmatrix} 4x^4+2x^2y^2-10x^2-y^2+2 & 2xy(2x^2+xy-2) \\ 2xy(2x^2+xy-2) & 4x^2y^2+y^4-5y^2-2x^2+1 \end{pmatrix}.$$

(3) 計算するだけ．候補として $x=0$ が出てくるが，これは関数が定義できないので不適である．

(4) $f_x = \cos x - \sin(x+y)$, $f_y = \cos y - \sin(x+y)$ である．$\cos x = \cos y$ なので，$x=y$ か $x=-y$ かで場合分けを行う．停留点は $\pm(\pi/2, \pi/2)$, $(\pi/6, \pi/6)$, $(5\pi/6, 5\pi/6)$ および $\pm(\pi/2, -\pi/2)$ の 6 個．Hesse 行列は

$$H_f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} -\sin x - \cos(x+y) & -\cos(x+y) \\ -\cos(x+y) & -\sin y - \cos(x+y) \end{pmatrix}$$

なので，各点の極値の判定ができる．

(5) $f_x = 2x+y-\frac{3}{x^2}$, $f_y = x+2y-\frac{3}{y^2}$ である．$f_x = f_y = 0$ とすれば $2x^3+x^2y = 3$, $xy^2+2y^2=3$ であり，これを辺辺引けば $(x-y)(2x^2+3xy+2y^2)=0$ である．$2x^2+3xy+2y^2>0$ なので $x=y$ でなければならない．後は簡単な計算である．

問題 4.* 微分作用素は線形であるので，単項式 $x^{n-k}y^k$ に対して示せば十分．$x\frac{\partial}{\partial x}\left(x^{n-k}y^k\right) = (n-k)x^{n-k}y^k$, $y\frac{\partial}{\partial y}\left(x^{n-k}y^k\right) = kx^{n-k}y^k$ なので,

$$x\frac{\partial}{\partial x}\left(x^{n-k}y^k\right) + y\frac{\partial}{\partial y}\left(x^{n-k}y^k\right) = nx^{n-k}y^k. \quad \square$$

小レポート 5

(1) 手違いで先週分と同じ問題を出題していました．

(2) $f_x = 3x^2-3$, $f_y = 3y^2-3$ なので，$f_x = f_y = 0$ をみたす点は $\pm(1,1)$, $\pm(1,-1)$ の 4 点．Hesse 行列は $H_f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix}$ なので，極値判定も容易にできる．点 $(1,1)$ で極小値 -4 をとり，点 $(-1,-1)$ で極大値 4 をとる．また，点 $(1,-1)$ および $(-1,1)$ で鞍点になる．