線形代数学・同演習 A

7 月 12 日分　小テスト

学籍番号：　　　　　　　　　　　　　氏名：

次の n 次正方行列 A_n の行列式を計算せよ．計算過程も明記すること．

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

解) まず $n = 2, 3$ のときを計算する．

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3, \quad \det A_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & \boxed{2} \end{vmatrix} = 4.$$

$n = 3$ のとき，第 1 行に関して余因子展開したが，ここで，A_2 と A_1(第 2 項の四角で囲んだ部分) が出てきていることに注意しよう．これより，A_n に関しても第 1 行に関して余因子展開を行えば，A_{n-1} と A_{n-2} が出てくると予想できる．さて，$n \geq 3$ のとき，$\left| A_n \right|$ を計算する．先程述べたように，第 1 行に関して余因子展開を行うと，

$$\left| A_n \right| = 2 \cdot \overbrace{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}}^{n-1} - (-1) \overbrace{\left|\begin{array}{c|cccc} -1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{array}\right|}^{n-1}$$

$$= 2\left| A_{n-1} \right| - \left| A_{n-2} \right|.$$

後は漸化式 $\left| A_n \right| = 2\left| A_{n-1} \right| - \left| A_{n-2} \right|$ ($\left| A_2 \right| = 3, \left| A_3 \right| = 4$) を解けばよいが，

$$\left| A_n \right| - \left| A_{n-1} \right| = \left| A_{n-1} \right| - \left| A_{n-2} \right| = \cdots = \left| A_3 \right| - \left| A_2 \right| = 1$$

であるので，$\left| A_n \right| = n + 1$ となる．

※講義や講義内容に関して，意見・感想・質問等を自由に記述してください．