

# 線形代数学・同演習 A

6 月 20 日分 小テスト

学籍番号：

氏名：

置換  $\sigma, \tau \in S_6$  を次で定義する．

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

(1)  $\sigma \circ \tau$  および  $\tau \circ \sigma$  を計算せよ．

(2)  $\sigma$  および  $\tau$  を巡回置換の積で表わせ．また  $\text{sgn}(\sigma)$ ,  $\text{sgn}(\tau)$  を求めよ．

解) (1)  $\sigma, \tau$  の上段を, それぞれの下段に合わせると

$$\sigma = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 & 1 & 6 & 2 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 4 & 6 & 5 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 5 & 4 & 1 & 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

なので,

$$\sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 4 & 6 & 5 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \tau \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 5 & 4 & 1 & 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

ここで, 後ろ側にある方を先に計算することに注意する．

(2) 例題 9.8 の方法を用いると, それぞれ,

$$\sigma: 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 1,$$

$$\tau: 1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1, \quad 2 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 2$$

なので,

$$\sigma = (123456), \quad \tau = (134) \circ (256).$$

$r$  文字の巡回置換の符号は  $(-1)^{r-1}$  であることと符号は各置換に分解できることより,

$$\text{sgn}(\sigma) = (-1)^5 = -1, \quad \text{sgn}(\tau) = (-1)^2 \cdot (-1)^2 = 1.$$

講義や講義内容に関して, 意見・感想・質問等を自由に記述してください．