線形代数学・同演習 B

11 月 22 日分　小テスト

学籍番号：　　　　　　　　　　　　氏名：

次の行列 A の固有値と，対応する固有空間を求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 6 \\ 6 & 1 & -6 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

解）まず A の固有多項式 $g_A(t)$ を求める．

$$g_A(t) = \det(tE_3 - A) = \det\left\{\left(\begin{smallmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \end{smallmatrix}\right) - \left(\begin{smallmatrix} -5 & 0 & 6 \\ 6 & 1 & -6 \\ -3 & 0 & 4 \end{smallmatrix}\right)\right\} = \begin{vmatrix} t+5 & 0 & -6 \\ -6 & t-1 & 6 \\ 3 & 0 & t-4 \end{vmatrix}$$
$$= (t-1)\begin{vmatrix} t+5 & -6 \\ 3 & t-4 \end{vmatrix} = (t-1)\big((t+5)(t-4)+18\big) = (t-1)(t^2+t-2).$$

ここで，第 2 列に関する余因子展開を利用した．よって，$g_A(t) = (t-1)^2(t+2)$ である．固有値は $g_A(t) = 0$ の解であるため，A の固有値は $\lambda = 1, -2$ となる．

(i) $\lambda = 1$ に対する固有空間

連立一次方程式 $(1 \cdot E_3 - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解を求めればよい．係数行列 $1 \cdot E_3 - A$ を簡約化すれば，

$$1 \cdot E_3 - A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -6 \\ -6 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

である．次元公式より，解のパラメータの個数 $= 3 - 1 = 2$ 個である[1]．主成分がない列に関する変数 ($\boldsymbol{x} = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)$ とすれば，y と z) をパラメータとすれば，この方程式の解は

$$x - z = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となるので，固有ベクトルは $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ および $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ であり，固有空間は固有ベクトルで生成される空間であるので，

$$W(1;\, A) = \mathrm{Span}\left(\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\right)$$

となる．

---

[1] 間違えている人が多かったので，赤字で書いています．

(ii) $\lambda = -2$ に対する固有空間

連立一次方程式 $(-2E_3 - A)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解を求めればよい．係数行列 $-2E_3 - A$ を簡約化すれば，

$$-2E_3 - A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -6 \\ -6 & -3 & 6 \\ 3 & 0 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

である．パラメータの数は $3 - 2 = 1$ 個で，主成分がない列に関する変数 z をパラメータと思えば，この方程式の解は

$$\begin{cases} x - 2z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となるので，固有ベクトルは $\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ であり，固有空間は

$$W(-2;\, A) = \mathrm{Span}\left(\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\right)$$

となる．

以上より，A の固有値は $\lambda = 1, -2$ であり，それぞれに対応する固有空間は

$$W(1;\, A) = \mathrm{Span}\left(\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\right), \quad W(-2;\, A) = \mathrm{Span}\left(\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\right)$$

となる．