線形代数学・同演習 B

10 月 4 日分　演習問題[*1]

1. (1) $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (2) $\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -54 \\ -26 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ [*2]
2. (1) -1 (2) -12 (3) 223
3. 略.
4. (1) × (2) ◯ (3) ◯ (4) ×
5. (1) × (2) ◯

6.† $\Rightarrow$ は明らか (W はベクトル空間であり，条件 (i)〜(iii) はベクトル空間になるための条件に含まれるので).
($\Leftarrow$) 確認することは教科書 p.63 の脚注にある条件であるが，今考えている和とスカラー倍はベクトル空間 V のものなので，それらは V の元として成り立つことは明らか．よってそれらの演算が W からはみ出ないことを示せばよいが，条件 (i)〜(iii) より，それらはすべて W の元として成立することが分かる．よって，W は V の和とスカラー倍によりベクトル空間となるため，V の部分空間である.

7.† (1) 命題 1.9 の三条件を確認すれば良い．$\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in W_1 \cap W_2$ とする．このとき $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in W_1$ かつ $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in W_2$ である．$i = 1, 2$ に対して W_i は V の部分空間なので，$\boldsymbol{0} \in W_i$ かつ $\lambda\boldsymbol{u} + \mu\boldsymbol{v} \in W_i$ である．したがって，$\boldsymbol{0} \in W_1 \cap W_2$ かつ $\lambda\boldsymbol{u} + \mu\boldsymbol{v} \in W_1 \cap W_2$ なのでこれは部分空間.
(2) (1) と同様に $\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{0} \in W_1 + W_2$ である．また，$\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 \in W_1 + W_2$ ($\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{v}_i \in W_i$) とすれば,

$$\lambda(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2) + \mu(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) = (\lambda\boldsymbol{u}_1 + \mu\boldsymbol{v}_1) + (\lambda\boldsymbol{u}_2 + \mu\boldsymbol{v}_2)$$

であり，W_1, W_2 は部分空間なので，$W_1 + W_2$ も部分空間となる.
(3) 部分空間にならない．例えば，$V = \mathbb{R}^2$ とし，$W_1 = \{\left(\begin{smallmatrix} x \\ 0 \end{smallmatrix}\right) ; x \in \mathbb{R}\}$, $W_2 = \{\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ y \end{smallmatrix}\right) ; y \in \mathbb{R}\}$ とすれば明らかに W_1, W_2 は部分空間であり，$W_1 \cup W_2 = \{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) ; x = 0 \text{ 又は } y = 0\}$ となる．しかしながら，$\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \in W_1$, $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \in W_2$ であるが，$\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \notin W_1 \cup W_2$ である.

8.* 部分空間になるのは (1),(2) で，ならないのは (3),(4) である.

9.* (1) $O \in \mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$ は明らかで，$X, Y \in \mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$ のとき,

$${}^t(\lambda X + \mu Y)J + J(\lambda X + \mu Y) = \lambda({}^tXJ + JX) + \mu({}^tYJ + JY) = O$$

であることより.
(2) $X = \begin{pmatrix} X_1 & Y_1 \\ Y_2 & -{}^tX_1 \end{pmatrix}$，ただし X_1 は任意の n 次正方行列であり，Y_1, Y_2 は任意の n 次対称行列.
(求め方は，$X = \left(\begin{smallmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{smallmatrix}\right)$ と置いて，${}^tXJ + JX = O$ をブロック行列として計算する．)

---

*1 凡例：無印は基本問題，† は特に解いてほしい問題，$*$ は応用問題.

*2 修正前は解なしとしていました．これは問題作成段階において，1 番目の等式の z の係数の符号を間違えたためです．失礼いたしました.