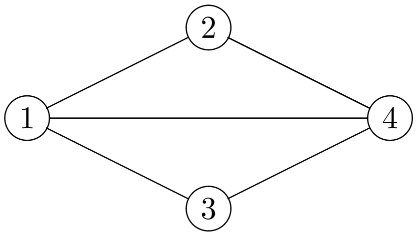
問題

次のような道があります．① から出発して 3 回移動したときに，再び ① に戻ってくる道の総数は何通りでしょうか．ただし，一度に移動できるのは線がつながっている所だけで，同じところに留まることはできません．より一般に，n 回移動したときに再び ① に戻ってくる道の総数はどうでしょうか．



① から 3 回移動して再び ① に戻ってくるのは ① → ② → ④ → ①, ① → ③ → ④ → ① とその逆順で計 4 通りです．今は 3 回と数が少なかったので虱潰しで解けますが，数が多くなってくると難しくなってしまいます．
実はこの問題，行列を使って解くことが出来ます．与えられた図 (グラフ) に対して，ⓘ と ⓙ が線でつながれていたら (i, j) 成分に 1，そうでなかったら 0 として行列を作ります (グラフの隣接行列と言います)．今の問題の場合では

$$M := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

です．このとき，ⓘ から n 回移動して ⓙ に到達する道の数は，実は M^n の (i, j) 成分にある数と一致します．例えば今の問題では M^3 を計算すると

$$M^3 = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 2 & 2 & 5 \\ 5 & 2 & 2 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

ですが，$(1, 1)$ 成分にある数字は確かに 4 になっています．この方法は，もっと一般の道 (グラフ) でも通用します．もう一つ面白いことがあります．この道に含まれる三角形の数は $\mathrm{tr}(M^3)/6$ 個です．興味ある方は先程の例で確認してみましょう．