線形代数学・同演習 A

演習問題 8

1. (1) 7　(2) 36　(3) -12　(4) -10
2. (1) a^2+b^2　(2) 0　(3) $1+a^2+b^2+c^2$
3. (1) $(c-b)(c-a)(b-a)$ (2) $(a+b+c)(ab+bc+ca-a^2-b^2-c^2)$
   (3) $(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$
4. (1) $\begin{pmatrix} -7 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 11 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} -10 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}$
5. $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ を任意の $\mathbb{R}^n$ のベクトルとし，実数 t を任意にとる．このとき，ベクトル $t\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ を考える．ノルム $\|\cdot\|$ の定義および内積 $\langle \cdot | \cdot \rangle$ の双線形性から

$$0 \leqslant \| t\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \|^2 = \langle t\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \,|\, t\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \rangle = \| \boldsymbol{x} \|^2 \cdot t^2 + 2\langle \boldsymbol{x} \,|\, \boldsymbol{y} \rangle \cdot t + \| \boldsymbol{y} \|^2.$$

   つまり，t に関する 2 次関数 $\| \boldsymbol{x} \|^2 \cdot t^2 + 2\langle \boldsymbol{x} \,|\, \boldsymbol{y} \rangle \cdot t + \| \boldsymbol{y} \|^2$ が常に ≥ 0 である事がわかる．これより，この二次多項式の判別式は常に ≤ 0 となるので，

$$(2\langle \boldsymbol{x} \,|\, \boldsymbol{y} \rangle)^2 - 4\| \boldsymbol{x} \|^2 \cdot \| \boldsymbol{y} \|^2 \leq 0,$$

   これより $|\langle \boldsymbol{x} \,|\, \boldsymbol{y} \rangle| \leq \| \boldsymbol{x} \| \cdot \| \boldsymbol{y} \|$ を得る．
6. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおいて計算するだけ．
7. 成立しない．例えば $A=B=E_2$ としても $\mathrm{tr}(E_2)=2$ より

$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(E_2) = 2 \neq 4 = \mathrm{tr}(A)\,\mathrm{tr}(B)$$

   である．
8. 求める体積 V は $\big|\langle \boldsymbol{b}-\boldsymbol{a} \,|\, (\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}) \times (\boldsymbol{d}-\boldsymbol{a}) \rangle\big|/6$ なので，$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) := \langle \boldsymbol{x} \,|\, \boldsymbol{y} \times \boldsymbol{z} \rangle$ という記号を導入すれば，

$$V = \frac{\big|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) - (\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}) + (\boldsymbol{c},\boldsymbol{d},\boldsymbol{a}) - (\boldsymbol{d},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\big|}{6}$$

   となる．

---

6 月 13 日分 (凡例：無印は基本問題，† は特に解いてほしい問題，∗ は応用問題)
講義用 HP: http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~h-nakashima/lecture/2017LA.html