線形代数学・同演習 B

小テスト 1　(10 月 10 日分)

学籍番号：　　　　　　　　　　　　　　氏名：

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ とするとき，次の集合は $V = \mathbb{R}^3$ の部分空間になるか調べよ．

(1)　$W_1 = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3;\ A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \right\}$　　(2)　$W_2 = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3;\ A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

解) 講義中の命題 1.8 を用いる．

(1) $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in W_1$ とすると，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, $A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ である．$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ に対して $\lambda\boldsymbol{x} + \mu\boldsymbol{y} \in W_1$ を調べる．

$$A(\lambda\boldsymbol{x} + \mu\boldsymbol{y}) = \lambda(A\boldsymbol{x}) + \mu(A\boldsymbol{y}) = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 = 0.$$

よって $\lambda\boldsymbol{x} + \mu\boldsymbol{y} \in W_1$ である．また $\mathbb{R}^3$ の零元は零ベクトル $\boldsymbol{0}$ であり, 明らかに $A\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$ であるので $\boldsymbol{0} \in W_1$．以上より W_1 は $\mathbb{R}^3$ の部分空間となることが分かる．

(2) $\boldsymbol{x} \in W_2$ とすると，$A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ である．$\lambda\boldsymbol{x}$ に対して $\lambda\boldsymbol{x} \in W_2$ を調べる．

$$A(\lambda\boldsymbol{x}) = \lambda(A\boldsymbol{x}) = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 2\lambda \end{pmatrix}.$$

よって $\lambda \neq 1$ ならば $\lambda\boldsymbol{x} \notin W_2$ であるので，W_2 は $\mathbb{R}^3$ の部分空間でない．

※講義や講義内容に関して，意見・感想・質問等を自由に記述してください．