微分積分学・同演習 A

4 月 18 日分　小テスト

学籍番号：　　　　　　　　　　　　　　氏名：

$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ とするとき，ε-N 論法を用いて次が成り立つことを示せ.

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \alpha + \beta.$$

準備． 使えるものは $\forall \varepsilon_1 > 0\ \exists N_1$ s.t. $|a_n - \alpha| < \varepsilon_1$ かつ $|b_n - \beta| < \varepsilon_1$.
与えられた $\varepsilon > 0$ に対して $n \geq N$ ならば $|(a_n + b_n) - (\alpha + \beta)| < \varepsilon$ を満たす N を見つけたい．三角不等式を用いると $n \geq N_1$ のとき

$$|(a_n + b_n) - (\alpha + \beta)| = |(a_n - \alpha) + (b_n - \beta)| < |a_n - \alpha| + |b_n - \beta| < 2\varepsilon_1$$

なので，$\varepsilon_1 = \varepsilon/2$ とすればよさそう.
証明． 任意に $\varepsilon > 0$ をとる．このとき仮定よりある番号 N_1 があって，そこから先の n については

$$|a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |b_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2}$$

となる．このとき $n \geq N_1$ ならば

$$|(a_n + b_n) - (\alpha + \beta)| = |(a_n - \alpha) + (b_n - \beta)| < |a_n - \alpha| + |b_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

なので，$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \alpha + \beta$ が成り立つ.

※講義や講義内容に関して，意見・感想・質問等を自由に記述してください.