微分積分学・同演習 A

演習問題 8

1. (1) $1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{12}+o(x^2)$ (2) $1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+o(x^2)$ (3) $1+x^2-\frac{x^3}{2}+o(x^3)$ (4) $1+\frac{x^2}{3}-\frac{x^4}{9}+o(x^4)$
   (考え方) (1) $e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)$ より $\frac{x}{e^x-1}=\frac{1}{1+(x/2+x^2/6+o(x^2))}$．ここで $\frac{1}{1+u}=1-u+u^2+o(u^2)$ を用いれば良い．(2) 公式 (教科書の定理 4.69) を用いる．または $\sqrt{1+x}=e^{\frac{1}{2}\log(1+x)}$ を用いても計算できる．(3) $(1+x)^x=e^{x\log(1+x)}=e^{x^2-x^3/3+o(x^3)}=1+(x^2-x^3/3+o(x^3))+(x^2-x^3/3+o(x^3))^2$ より．(4) (2),(3) と同様．ただし，$\log(1+x^2)=x^2-x^4/2+o(x^4)$ に注意．
2.[†] (1) $1+\frac{x^2}{2}+\frac{5x^4}{24}+o(x^4)$ (2) $1+\frac{x^2}{6}+\frac{7x^4}{360}+o(x^4)$ (3) $2+\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o(x^4)$
   (4) $x^2-\frac{x^4}{3}+\frac{2x^6}{45}+o(x^6)$ (5) $1-x^2+\frac{x^4}{3}+o(x^4)$ (6) [*1] $\frac{1}{x}-\frac{x}{3}-\frac{x^3}{45}+o(x^3)$
   (7) $x+\frac{x^3}{6}+\frac{3x^5}{40}+o(x^5)$ (8) $1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+o(x^2)$
   (考え方) (1) $\sec x$ は偶関数より $\sec x=a_0+a_2x^2+a_4x^4+o(x^4)$ とおける．そこで，$\sec x\cos x=1$ において $\sec x, \cos x$ それぞれに Taylor 展開したものを代入して，係数比較．また，$\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{1-(x^2/2-x^4/4!+o(x^4))}$ として，$\frac{1}{1-u}=1+u+u^2+o(u^2)$ を用いる方法もある．(4) $\sin x=x-x^3/6+x^5/5!+o(x^5)$ より $(x-x^3/6+x^5/5!+o(x^5))^2=x^2-2\cdot x^4/6+(2\cdot 1\cdot\frac{1}{5!}+(1/6)^2)x^6+o(x^6)$ (展開時，x^6 以上の項は $o(x^6)$ に吸収される) (7) $(\mathrm{Arcsin}\,x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ を利用する．$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=e^{-\frac{1}{2}\log(1-x^2)}=e^{-\frac{1}{2}(-x^2+x^4/2+o(x^4))}=1+(x^2/2+x^4/4)+(x^2/2+x^4/4)^2+o(x^4)=1+x^2/2+3x^4/8+o(x^4)$．これを積分すればよい．(8) 大問 1 (2) の結果に $\sin x=x-x^3/6+x^5/5!+o(x^5)$ を代入して整理する．
3. (1) $\frac{3x^5}{20}+o(x^5)$ (2) $2-\frac{x^2}{4}-\frac{5x^4}{64}+o(x^4)$
4. $x+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{2x^5}{15}+\dfrac{17x^7}{315}+\dfrac{62x^9}{2835}+o(x^9)$
   (考え方) $\sin x=x-x^3/3!+x^5/5!-x^7/7!+x^9/9!+o(x^9)$, $\cos x=1-x^2/2+x^4/4!-x^6/6!+x^8/8!+o(x^8)$ として，$\tan x\cos x=\sin x$ の恒等式を利用して，係数比較する．$\tan x$ は奇関数なので $\tan x=a_1x+a_3x^3+a_5x^5+a_7x^7+a_9x^9+o(x^9)$ として計算するとよい．
5.[†] (1) 1 (2) 1 (3) $\frac{1}{6}$ (4) ◯$\frac{1}{4}$; × $-\frac{1}{2}$ (5) $-\frac{9}{4}$

---

6 月 6 日分 (凡例：無印は基本問題，† は特に解いてほしい問題，∗ は応用問題)
講義用 HP: http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~h-nakashima/lecture/2017C.html
[*1] 出題ミスです．$\frac{x}{\tan x}$ でした．これは Laurent 級数展開と呼ばれるものになります．複素関数論で習うと思います．

(考え方) (1) $\sin x = x + o(x)$, $\cos x = 1 - x^2/2 + o(x^4)$ とすれば,

$$\begin{aligned}(1-\cos x)^{\sin x} &= (x^2/2 + o(x^2))^{x+o(x)} = (1/8(2x)^2)^{x+o(x)}(1+o(x^2))^{x+o(x)} \\ &= (1/8)^{x+o(x)} \cdot (2x)^{2x+o(x)}(1+o(x^2))^{x+o(x)}.\end{aligned}$$

ここで $x \to 0$ のとき，第 1 項は $\to 1$, 第 2 項は $\to 1$, 第 3 項も $\to 1$ であるので全体としても $\to 1$ となる．(2) $\sin x = x + o(x)$ なので $x^{x+o(x)} \to 1$．(3) $\sin x = x - x^3/6 + o(x^3)$ より $e^x - e^{\sin x} = e^x(1 - e^{-x^3/6+o(x^3)}) = e^x(x^3/6 + o(x^3))$．よって，$(e^x - e^{\sin x})/x^3 = \frac{1}{6}e^x(1+o(1)) \to \frac{1}{6}$. (3) $\sin x = x - x^3/6 + x^5/5! + o(x^5)$, $\operatorname{Arcsin} x = x + x^3/6 + 3x^5/40 + o(x^5)$ より $\operatorname{Arcsin} x + \sin x - 2x = (1/5! + 3/40)x^5 + o(x^5)$. また $\operatorname{Arctan} x = x - x^3/3 + o(x^3)$ なので $x^2(x - \operatorname{Arctan} x) = \frac{1}{3}x^5 + o(x^5)$．よって，$(\operatorname{Arcsin} x + \sin x - 2x)/(x^2(x - \operatorname{Arctan} x)) = 3 \cdot (1/5! + 3/40) = \frac{1}{4}$．(5) $\sec x = 1 + x^2/2 + 5x^4/24 + o(x^4)$, $\cos^2 x = 1 - x^2 + x^4/3 + o(x^4)$, $\sin^2 x = x^2 - x^4/3 + o(x^4)$ より $2\sec x - 2\cos^2 x - 3\sin^2 x = (5/12 - 2/3 + 1)x^4 + o(x^4)$．一方, $\log(1+2x) = 2x + o(x)$ なので $(\sin x - x)\log(1+2x)(-x^3/6 + o(x^3)) \cdot (2x + o(x)) = -\frac{1}{3}x^4(1 + o(x))$．以上より $(2\sec x - 2\cos^2 x - 3\sin^2 x)/((\sin x - x)\log(1+2x)) = ((5/12 - 2/3 + 1)x^4 + o(x^4))/(-\frac{1}{3}x^4(1+o(x))) = -3(5/12 - 2/3 + 1)(1 + o(x))/(1 + o(x)) \to -9/4$.

6.* (1) 0 (2) 極限は存在しない.

7.* ※ $(1+x)^\alpha \fallingdotseq 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2$ でした.

(1) 1.974 (2) 5.065797 (3) 2.99255

(考え方) (1) $\sqrt[5]{30} = \sqrt[5]{32-2} = 2(1-1/16)^{1/5}$ と見る．(2) $\sqrt[3]{130} = \sqrt[3]{125+5} = 5(1+1/25)^{1/3}$ と見る．(3) $\sqrt[5]{240} = 3\sqrt[5]{\frac{240}{243}} = 3(1+1/80)^{-1/5}$ と変形する．($\sqrt[5]{240} = \sqrt[5]{243-3} = 3(1-1/81)^{1/5}$ でもよい．) ちなみに少数第 30 位までの数値は

(1) 1.974350485834819842672836172 41

(2) 5.065797019100886269402410017 19

(3) 2.992555739477689477016204278 66

8.* (1) 0.4794 (2) 0.8775 (3) 0.5463 (4) 1.6487

いずれも Taylor 多項式を用いる．ちなみに少数第 30 位までの数値は

(1) 0.479425538604203000273287935216

(2) 0.877582561890372716116281582604

(3) 0.546302489843790513255179465780

(4) 1.648721270700128146848650787814