2020年度　名古屋大学
理系基礎科目（文系）数学入門

第7回

講義担当者：中島秀斗

2020年6月4日

はじめに

- 授業形態：学習資料 (スライド・ノート) 配布
  - はじめはスライドに目を通してください．
  - ノートはスライドの要約になります．復習にご活用ください．
  - スライド内にある赤い枠で囲った演習問題は，実際に解いてもらうことを想定しています．
- 小テストについて
  - 小テストは NUCT で行われます．
  - 講義日の午前８時から日付が変わるまでの間に完了してください．
- レポートについて
  - 講義 3,4 回毎にレポートを課します．
  - 各回に出題する演習問題を解いたものを，pdf ファイルとして提出してもらいます．
  - 学習資料配布時のお知らせの中で通知します．

凡例

公式や定理など，講義において重要な情報は青の枠で囲む.

演習問題は赤の枠で囲む．実際に手を動かして解いてほしい.

コメントや注意すべき点などは緑の枠で囲む.

例題は黄色の枠で囲む．解答も用意されているが，計算量の多いものは実際に手を動かして一緒に解いてほしい.

§7 高次の導関数

- 我々がよく用いる関数は，その導関数もまた微分ができることが多い.
- 今回は関数を繰り返し微分して得られる関数（高次の導関数という）について学ぶ.

今回の目標

- 高次の導関数について理解する
- 初等関数の第 n 次導関数の公式を扱えるようになる
- 曲線の性質（上に凸，下に凸，変曲点）について理解する
- グラフの描き方を学ぶ

§7 高次の導関数

- 関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ をさらに微分した関数は第 2 次導関数と呼ばれ，$f''(x)$ のように表す．
- これをさらに微分したものは第 3 次導関数 $f'''(x)$ である．
- 一般に，関数 $y = f(x)$ を n 回微分してられる関数を $f(x)$ の第 n 次導関数といい，

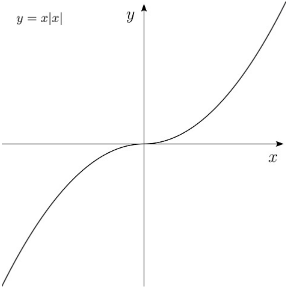
$$y^{(n)}, \quad f^{(n)}(x), \quad \frac{d^n y}{dx^n}, \quad \frac{d^n}{dx^n} f(x)$$

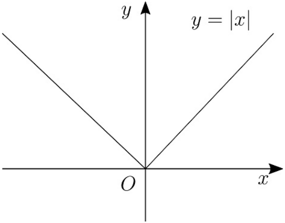
  などで表す．
- $n = 3$ くらいまでは $f''(x)$ や $f'''(x)$ などのように，$'$ を用いて表すことが多い．また $f^{(0)}(x) = f(x)$ と考える．2 次以上の導関数を高次導関数という．
- なお，第 n 次導関数のことを n 階導関数ということもある．

- 導関数 $f'(x)$ はいつでも微分可能になるとは限らないことに注意.
- 例えば $f(x) = x|x|$ とすれば,

$$f'(x) = 2|x|$$

であるので，これは原点において微分可能ではない.





問題. $f'(x) = 2|x|$ となることを確認せよ.

記号の定義

- 階乗 $n!$: 1 から n までの整数を掛け合わせたもの．すなわち

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$$

- 一般二項係数 $\binom{p}{r}$: 数 p から 1 ずつ引いたものを r 個掛け合わせたものを，階乗 $r!$ で割ったもの．すなわち

$$\binom{p}{r} = \frac{\overbrace{p(p-1)(p-2)\cdots(p-r+1)}^{r\ \text{個}}}{r!}$$

p が正の整数 $p = n$ ならば，$\binom{n}{r}$ は通常の二項係数 ${}_nC_r$ と一致する．

例題 7.1. $n = 1, 2, 3, 4$ に対して $\binom{\frac{1}{2}}{n}$ を計算せよ.

(考え方) 公式に当てはめるだけである.

$$
\begin{aligned}
\binom{\frac{1}{2}}{1} &= \frac{\frac{1}{2}}{1!} && = \frac{1}{2},\\
\binom{\frac{1}{2}}{2} &= \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!} = \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{2} && = -\frac{1}{8},\\
\binom{\frac{1}{2}}{3} &= \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!} = \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{6} && = \frac{1}{16},\\
\binom{\frac{1}{2}}{4} &= \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}-3\right)}{4!} = \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{2\cdot 3\cdot 4} && = -\frac{5}{128}.
\end{aligned}
$$

なお，一般の n に対しても

$$
\begin{aligned}
\binom{\frac{1}{2}}{n} &= \frac{\overbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}^{n\ \text{個}}}{n!} \\
&= \frac{(-1)\cdot(-3)\cdot(-5)\cdots(-2n+1)}{2^n\cdot n!} \\
&= (-1)^{n-1}\,\frac{3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n\cdot n!}
\end{aligned}
$$

のように計算できる．また，一つおき階乗 $n!!$ の記号を用いて

$$
\binom{\frac{1}{2}}{n} = (-1)^{n-1}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \qquad \left(\begin{array}{l} n!! = n(n-2)(n-4)\cdots \ \text{で，} \\ 1\ \text{か}\ 2\ \text{が現れるまで掛け合わせる．} \end{array}\right)
$$

や以下のようにも表現できる．

$$
\begin{aligned}
(-1)^{n-1}\,\frac{3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n\cdot n!} &= (-1)^{n-1}\,\frac{3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n\cdot n!}\cdot\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)} \\
&= (-1)^{n-1}\,\frac{(2n)!}{(2^n\cdot n!)^2}.
\end{aligned}
$$

定理 7.2. 初等関数の第 n 次導関数は以下の通り.

1. $\left(e^x\right)^{(n)} = e^x$
2. $\left(x^p\right)^{(n)} = p(p-1)(p-2)\cdots(p-n+1)x^{p-n}$
3. $\left(\sin x\right)^{(n)} = \sin\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$
4. $\left(\cos x\right)^{(n)} = \cos\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$
5. $\left(\log x\right)^{(n)} = (-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{x^n}$

証明. (1) $f(x)=e^x$ とすれば，$f'(x)=e^x$ なので，明らか.
(2) $f(x)=x^p$ とすれば $f'(x)=px^{p-1}$ なので，n 回微分を繰り返せば係数として

$$p(p-1)(p-2)\cdots(p-n+1)$$

が出てくる.
(3), (4) 三角関数 $\sin x$, $\cos x$ は一回微分すると $\frac{\pi}{2}$ だけずれるのであった．よって，n 回微分すると $\frac{\pi}{2}\times n$ だけずれることになる.
(5) $(\log x)'=\frac{1}{x}=x^{-1}$ なので，

$$\begin{aligned}
(\log x)^{(n)} &= \left(x^{-1}\right)^{(n-1)} \\
&= \overbrace{(-1)(-1-1)(-1-2)\cdots\bigl(-1-(n-1)+1\bigr)}^{n-1}\,x^{-1-(n-1)} \\
&= \overbrace{(-1)(-2)(-3)\cdots\bigl(-(n-1)\bigr)}^{n-1}\,x^{-n} \\
&= (-1)^{n-1}(n-1)!x^{-n} \quad \square
\end{aligned}$$

積の微分に関しては，n 回微分の公式がある．

定理 7.3 (Leibniz の公式).

$$\bigl(f(x)g(x)\bigr)^{(n)} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} f^{(n-j)}(x) g^{(j)}(x)$$

最初の数項は

$$f^{(n)}(x)g(x) + nf^{(n-1)}g'(x) + \frac{n(n-1)}{2} f^{(n-2)}(x)g''(x) + \cdots$$

である．これと二項定理とを比較するとよい．

$$(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j} b^j$$

解説.　簡単のため $f = f(x)$, $g = g(x)$ と書く ((x) を省略する).
すると，積の 2 回微分は

$$(fg)'' = (f'g + fg')' = (f''g + f'g') + (f'g' + fg'') = f''g + 2f'g' + fg''$$

であり，3 回微分は

$$\begin{aligned}(fg)''' &= (f''g + 2f'g' + fg'')' \\ &= (f'''g + f''g') + 2(f''g' + f'g'') + (f'g''') \\ &= f'''g + 3f''g' + 3f'g'' + fg'''\end{aligned}$$

である.

一般に fg を n 回微分するときに，毎回 f か g のいずれかを微分するのであるが，n 回の微分のうちに f を $n-j$ 回，g を j 回微分すると $f^{(n-j)}g^{(j)}$ が現れるが，その組み合わせは $\binom{n}{j} = {}_nC_j$ 通りであることより，公式が得られる.

例題. 次の関数の n 回微分を計算せよ.

$$y = x^2 e^x$$

帰納法を使ってもよいが，Leibniz の公式を使うのが楽である.

解.　Leibniz の公式において $f(x)=x^2$, $g(x)=e^x$ とする．このとき，

$$f'(x)=2x,\quad f''(x)=2,\quad f^{(k)}(x)=0\quad (k=3,4,\ldots,n)$$

であるので，Leibniz の公式において $f''(x)$ までを考えればよい．

$$g^{(l)}(x)=e^x\quad (l=0,1,\ldots,n)$$

であることを利用すれば

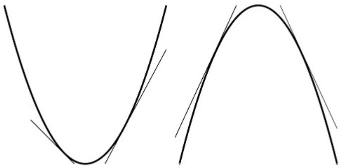
$$\begin{aligned}
(x^2e^x)^{(n)} &= \big(f(x)g(x)\big)^{(n)}\\
&= f(x)g^{(n)}(x)+\binom{n}{1}f'(x)g^{(n-1)}(x)+\binom{n}{2}f''(x)g^{(n-2)}(x)\\
&= x^2\cdot e^x+n\cdot 2x\cdot e^x+\frac{n(n-1)}{2}\cdot 2\cdot e^x\\
&= (x^2+2nx+n^2-n)e^x\quad\square
\end{aligned}$$

§7.1 グラフの概形２

- 関数が増加するといっても，$\nearrow$ のように増加するか，あるいは $\nearrow$ のように増加するかでその形は大きく変わってくる．
- グラフのそのような形状は，高次導関数を用いて調べることができる．

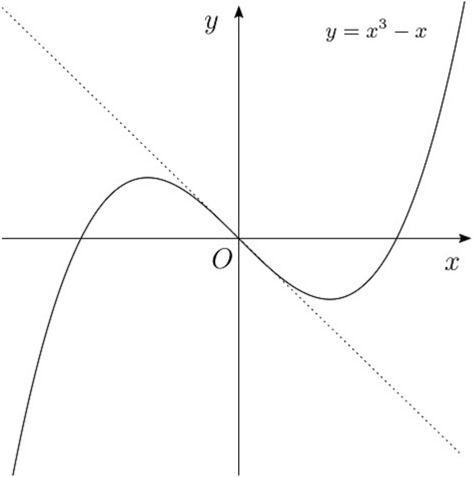
定義． 関数 $y = f(x)$ のグラフにおいて，$x = a$ に対する点で曲線の接線を引くとき，その近くでグラフがその接線の上側にあれば「上に凸」，下側にあれば「下に凸」という．その接点の前後でグラフの凹凸が変わるとき，その点を「変曲点」という．

下に凸な関数の代表例は $y = x^2$ であり，上に凸な関数の代表例は $y = -x^2$ である (下図参照).



変曲点の例

$y = x^3 - x$ の原点は変曲点になる．関数のグラフが，$x > 0$ では接線の上側に，$x < 0$ では接線の下側にあることが見て取れる．



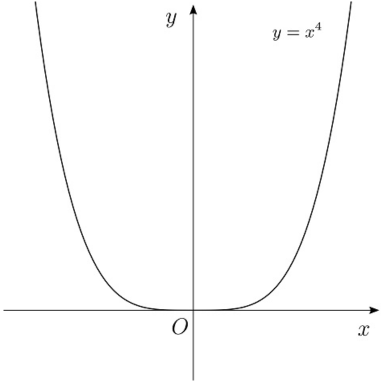
曲線の凸性というのは，曲線をユークリッド変換，すなわち回転と平行移動により移動させても曲線と接線の位置関係は変わらないので，曲線のある種の内在的な性質と思うことができる．一階導関数で分かる性質「関数が増加/減少する」というのは，この変換では保存されない点に注意.

「凸性」は凸解析や最適化理論などで用いられているなど，重要な概念である.

定理 7.4. 関数 $f(x)$ はある区間で 2 回微分可能であり，$f''(x)$ が連続であるとする．このとき，
(1) 常に $f''(x) > 0$ ならば $y = f(x)$ は下に凸，
(2) 常に $f''(x) < 0$ ならば $y = f(x)$ は上に凸，
(3) 変曲点においては，$f''(x) = 0$

この定理の証明は，Taylor 級数展開を使うのがよいので，後ほど改めて行う．直感的には，$f'' > 0$ は傾き$=f'$ が大きくなっていく，ということなので「下に凸」，$f'' < 0$ は傾き f' が小さくなっていく，ということなので「上に凸」ということである．$y = \pm x^2$ のグラフと見比べてみるのがよい．

- $f''(a) = 0$ であっても，$x = a$ が変曲点になるとは限らない．
- 例えば $f(x) = x^4$ の $x = 0$ がその例になる．下図を見ても明らかに分かるように，この関数は $x = 0$ で極小となり，変曲点にはならない．



- $x = a$ の前後で $f''(x)$ の符号が変わるならば，そのときは変曲点になる．

定理. 2 回微分可能な関数 $f(x)$ が，$x = a$ において $f'(a) = 0$ となるとする．このとき
(1) $f''(a) > 0$ ならば $f(a)$ は極大値，
(2) $f''(a) < 0$ ならば $f(a)$ は極小値．

これも証明は先送りする．丸暗記するのではなく，二次関数 $y = ax^2$ と比較して考えるのがよい．

例題 7.5. 関数 $y = -x^3 + 6x^2 - 9x + 1$ の増減，極値，凹凸，変曲点を調べてグラフを描け.

(考え方) 基本的にはグラフを描く際と同じ考え方でよいが，極値や凹凸・変曲点も調べるので与えられた関数の第 2 次導関数まで計算を行う.

- まず第 2 次導関数まで計算する．

$$
\begin{aligned}
y' &= -3x^2 + 12x - 9 = &-3(x-1)(x-3) \\
y'' &= -6x + 12 = &-6(x-2)
\end{aligned}
$$

- 極値の候補は $y' = 0$ となる点であるので，$x = 1$, $x = 3$ の 2 点である．これらの点における第 2 次導関数の正負を調べると

$$f''(1) = 6 > 0, \quad f''(3) - 6 < 0$$

  なので，$x = 1$ で極小，$x = 3$ で極大となる．
- 変曲点の候補は $y'' = 0$ となる点なので $x = 2$ である．この点の前後で y'' の符号が異なっているので，$x = 2$ は変曲点になる．

(続く)

- 次にグラフを描くための情報を調べる.
- 凹凸・変曲点以外は前回と変わらない.
- まずは $\pm\infty$ における挙動．最高次の項の係数は -1 と負なので,

$$\lim_{n\to+\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{n\to-\infty} f(x) = +\infty.$$

- 次に軸との交点．y 軸との交点は $f(0) = 1$.
- 一方 x 軸との交点は計算が難しいので省略する (無理に求めなくてもよい).
- 極値・変曲点での値はそれぞれ

$$\begin{aligned} f(1) &= -1 + 6 - 9 + 1 = -3, \\ f(3) &= -27 + 6 \times 9 - 9 \times 3 + 1 = 1, \\ f(2) &= -8 + 6 \times 4 - 9 \times 2 + 1 = -1 \end{aligned}$$

- また，この関数は特異点を持たない.

(続く)

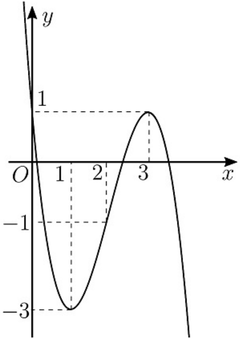
以上の議論より，増減表は

x	$-\infty$	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$	3	$\cdots$	$+\infty$
y'	$-$		0	$+$			0	$-$	
y''	$+$				0	$-$			
y	$+\infty$	$\searrow$	極小	$\nearrow$	変曲点	$\nearrow$	極大	$\searrow$	$-\infty$

となる．ここで $\searrow$, $\nearrow$ は下に凸で減少/増加を，$\nearrow$, $\searrow$ は上に凸で増加/減少を表している．

(続く)

よって，関数 $y=f(x)$ のグラフの概形は以下のようになる．



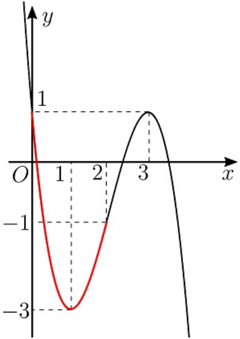
最大値・最小値

- 限られた区間で関数の最大値・最小値を考える場合がある.
- 考える区間が「閉区間」ならば，連続関数は必ず最大値・最小値を持つ. これは連続関数の基本的性質であるが，その証明は実数の性質に踏み込まなければならないので，現時点では認めて話を進めることにする.
- 最大 (最小) になりうる点は，下記のいずれかになる.
  1. $f'(x) = 0$ である点（極値）
  2. 区間の端点
  3. 微分不可能な点
- よって，これらを調べてそこでの関数の値を比較して，最も大きい (小さい) ものをとればよい.

例題 7.6. 関数 $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 1$ の $0 \leqq x \leqq 2$ という区間における最大値と最小値を求めよ.

(考え方) グラフ（増減表）をかいて，どこが一番大きい（小さい）かを判断する．今の例題の場合は，例題 7.5 で描いたグラフが利用できる.

与えられた関数の，区間 $0 \leqq x \leqq 2$ において取りうる値は，下記のグラフの赤い箇所である．



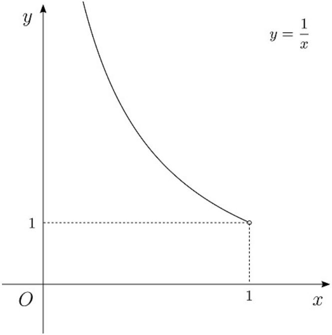
よって，$f(x)$ は $x=0$ で最大値 1，$x=1$ で最小値 -3 を取る． $\square$

なお，考える区間が「開区間」である場合は，必ずしも最大値・最小値が存在しないことに注意．例えば $y = \dfrac{1}{x}$ $(0 < x < 1)$ の場合，グラフは以下のようになるが，最大値・最小値ともに存在しない．

最大値が存在しないのは $\displaystyle\lim_{x\to+0} \frac{1}{x} = +\infty$ になることより分かる．最小値が存在しないことは背理法によっても確かめられる．もし最小値 m_0 が存在すると仮定すると，$m_0 = \frac{1}{x_0}$ となる $x_0 < 1$ が存在するはずである．ところが，$x_1 = (x_0 + 1)/2$ とすれば $x_1 < 1$ かつ

$$\frac{1}{x_1} = \frac{2}{x_0 + 1} < \frac{2}{x_0 + x_0} = \frac{1}{x_0} = m_0$$

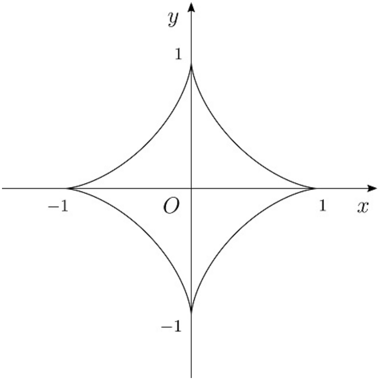
となり，m_0 が最小値であることと矛盾する．



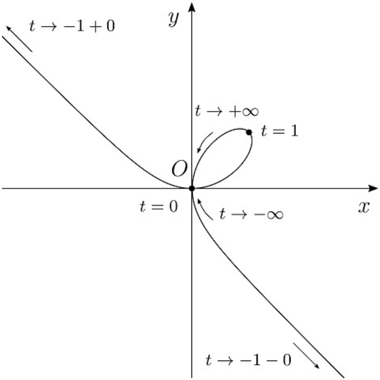
おまけ

前回の演習問題 (3) の媒介変数表示が描くグラフは以下のようになります.

(a)



(b)



おまけ２

次のような問題を考えてみます．

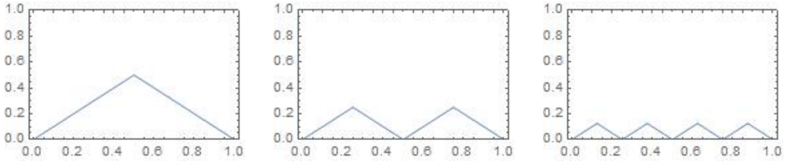
問題． 区間 $[0,1]$ 上で連続であるが，その区間上のいかなる点においても微分ができないような関数を構成せよ．

なかなか想像ができない感じですが，実はそのような関数は存在します．例えば

$$T(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s(2^n x)}{2^n} \quad (x \in [0,1];\ s(\alpha) = \min_{n \in \mathbb{N}} |n - \alpha|).$$

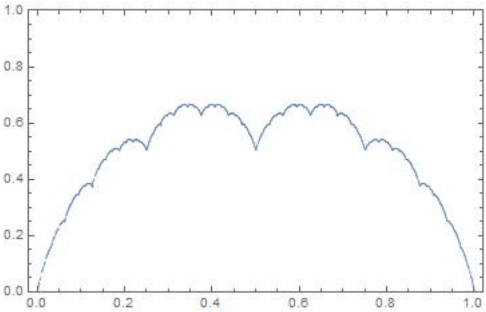
と定義すると，これが連続であるが至る所で微分ができないような関数の例を与えます．

式だけだと少しわかりにくいですが，次のような関数たち



を次々に足していって関数を構成するのです．なおこの関数は無限級数で定義されているので，収束することや連続性を確認する必要があります．特に $x = m/2^k$ $(m, k$ は整数$)$ の点は微分できないことがわかります．$x = m/2^k$ という形の点が区間 $[0, 1]$ に稠密に存在することから，至る所で微分できないということになるわけです．

因みにこの関数のグラフは次のような形になります.



この関数は高木関数という名前が付いていて，高木貞治氏によって発見されました．驚くべきことに，連続関数の中において，このような関数が大多数を占めているのです．つまり，我々が普段扱っている関数は，連続関数の中では非常に特殊なものを扱っていることになります.

演習問題

1. 次の関数について，第 4 次導関数まで計算せよ.

$$\text{(a)}\ \tan x \quad \text{(b)}\ \mathrm{Arcsin}\, x \quad \text{(c)}\ \sqrt{1+x} \quad \text{(d)}\ e^x \cos x$$

2. 関数 $y = e^x \sin x$ について第 2 次導関数までを計算し，関係式 $y'' + 2y' + 2y = 0$ を満たすことを確認せよ.
3. 次の関数について，与えられた区間における極値，凹凸および変曲点を調べ，そのグラフの概形を描け.

   (a) $y = x + 2\sin x \quad (0 \leqq x \leqq 2\pi)$

   (b) $y = x^2 e^{-x} \quad (x \geqq 0)$