線形代数学・同演習 B

1 月 10 日分　演習問題[*1]

数ベクトル $\mathbb{R}^n$ の内積は標準内積により与えられているとする．また，多項式空間の内積は，特に断らない限り $(p\,|\,q) = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,dx$ により与えられているとする．

1. (1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, (2) $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$, (3) $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2.† 与えれた二つの多項式と直交する多項式を $f(x)$ で表す．
(1) $f(x) = x$, (2) $f(x) = 3x^2 - 1$, (3) $f(x) = 5x^2 - 2x - 3$, (4) $f(x) = 5x^2 - 12x + 1$.

3. $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ と書けば $(A\,|\,B) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ij}$ となるので，あとは簡単な計算により確認することができる．

4. 内積の性質を満たすことは，例題と全く同様に示すことができる．後半は，例えば $p(x) = x$, $q(x) = x^2$ とすれば，$(p\,|\,q) = 0$ であるのに対して，$(p\,|\,q)_0 = 1/4$ であることなどから確認できる．

5.† ならない．例えば $f(x) = \begin{cases} 1 & (x=0), \\ 0 & (x \neq 0) \end{cases}$ とすると $f \neq 0$ (零関数) であるが，$(f\,|\,f) = 0$ となってしまう．
解説) 内積の条件のうち (1)-(3) までは一般の関数空間でも成立するが，条件 (4) も成立するためには "連続性" が必要である．さて，連続関数の空間は条件 (4) を満たすことの証明を，厳密にやってみよう．条件 (4) は $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}_V$ ならば $(\boldsymbol{v}\,|\,\boldsymbol{v}) > 0$ であった．関数における零元は '常に 0 である関数' であったので，ある関数 f が零元でないとすると，$f(a) \neq 0$ となるような点 $a \in [-1, 1]$ がある．ここで $(f\,|\,f) = \int_{-1}^{1} f(x)^2\,dx$ について考える．被積分関数 $f(x)^2$ は連続関数であり，特に $x = a$ において $f(a)^2 > 0$ である．ε-δ 論法において，$\varepsilon = f(a)^2/2$ とすれば，ある正数 $\delta > 0$ が存在して

$$|x - a| < \delta \text{のとき} \ |f(x)^2 - f(a)^2| < \tfrac{1}{2}f(a)^2, \ \text{つまり} \quad \tfrac{1}{2}f(a)^2 < f(x)^2$$

となることがわかる．ここで $f(x)^2 \geq 0$ であることより

$$\int_{-1}^{1} f(x)^2\,dx \geq \int_{a-\delta}^{a+\delta} f(x)^2\,dx > \int_{a-\delta}^{a+\delta} \tfrac{1}{2}f(a)^2\,dx = \delta f(a)^2 > 0$$

であるので，結局 f が零関数でなければ $(f\,|\,f) > 0$ となる．
以上のことは数学の厳密性についての紹介ですので，試験でこれを要求することはありません．

6.† (1) まず, 零元 $\boldsymbol{0}_V$ は常に $(\boldsymbol{0}_V\,|\,\boldsymbol{v}) = 0$ であることより, $\boldsymbol{0}_V \in W^{\perp}$ である．また, $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in W^{\perp}$ とすれば，内積の線形性から，任意の $\boldsymbol{w} \in W$ に対して

$$(\lambda\boldsymbol{u} + \mu\boldsymbol{v}\,|\,\boldsymbol{w}) = (\lambda\boldsymbol{u}\,|\,\boldsymbol{w}) + (\mu\boldsymbol{v}\,|\,\boldsymbol{w}) = 0$$

となるので，$\lambda\boldsymbol{u} + \mu\boldsymbol{v} \in W^{\perp}$ である．よって，$W^{\perp}$ は V の部分空間となる．

[*1] 凡例：無印は基本問題，† は特に解いてほしい問題，$*$ は応用問題．

(2) W および $W^\perp$ がともに部分空間であることから $W \cap W^\perp \supset \{\mathbf{0}_V\}$ は明らか．$\boldsymbol{w} \in W \cap W^\perp$ とする．このとき $(\,\boldsymbol{w}\,|\,\boldsymbol{w}\,)$ を考える．左の $\boldsymbol{w}$ を $W^\perp$ の要素，右の $\boldsymbol{w}$ を W の要素と思えば，$(\,\boldsymbol{w}\,|\,\boldsymbol{w}\,) = 0$ となることが分かる．内積の定義より，同じものの内積をとって 0 になるのは零元 $\mathbf{0}_V$ だけであったので，$\boldsymbol{w} = \mathbf{0}_V$ となる．これより $W \cap W^\perp \subset \{\mathbf{0}_V\}$ となり，結局 $W \cap W^\perp = \{\mathbf{0}_V\}$ を得る[*2]．

7.[†] (1) $(\,s_n\,|\,c_m\,) = 0$, (2) $(\,s_n\,|\,s_m\,) = \delta_{nm}$, (3) $(\,c_n\,|\,c_m\,) = \delta_{nm}$ (δ_{nm} は Kronecker のデルタ).

(1) 被積分関数 $\sin nx \cos mx$ は奇関数なので.

(2), (3) 三角関数の和積の公式

$$\sin nx \sin mx = \frac{\cos(n-m)x - \cos(n+m)x}{2},$$
$$\cos nx \cos mx = \frac{\cos(n-m)x + \cos(n+m)x}{2}$$

と，次の積分を合わせると得られる：

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx\,dx = \begin{cases} 0 & (k \text{ は } 0 \text{ でない整数}), \\ 2\pi & (k = 0). \end{cases}$$

8.[*] 対称行列であり，かつ $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & c \end{smallmatrix}\right)$ とおいたときに $a > 0$ かつ $\det A > 0$ となること．言い換えると，正定値対称行列となること．

まず内積の条件 (3) から A は対称行列でなければならない．よって $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & c \end{smallmatrix}\right)$ とおける．次に条件 (4) について，$(\,\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{y}\,)_A$ を計算し，平方完成すれば

$$(\,\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{y}\,)_A = ax^2 + 2bxy + y^2 = a(x + \tfrac{b}{a}y)^2 + \frac{ac - b^2}{a}y^2$$

となる．これより，$a > 0$ かつ $ac - b^2 > 0$ とすれば，$\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ ならば常に $(\,\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{x}\,)$ が正となる．

[*2] 集合 A, B が等しいことを示すためには $A \subset B$ かつ $A \supset B$ を示す事が必要.