線形代数学・同演習 B

11 月 7 日分 質問への回答

質問 固有値がよく分からないので上の問いが解けているか心配.

- 固有値がなんなのか分からなかった.
- 固有値がよく分からない

— 数年前までは高校の教育課程の中に行列が含まれていたので混乱は生じなかったですが，今はそうではないので，教える側も悩ましいです．線形のクラスで書いたコラムで固有値について大雑把に説明したものがありますので，それを次のページに載せています．参考になれば幸いです.

質問 今回は自分一人で最初から最後まで解けてとても嬉しかった。

— それはとても良いことです．微分積分の問題は計算が煩雑なことも多いですが，丁寧に計算すれば (出題ミスでない限り) 解けるので，少しずつ自力で解ける問題を増やしていきましょう.

質問 中間試験に小レポート内の前期の内容は含まれますか。

— 次回配布のプリントにも書きますが，含まれます．ただし，小レポート程度の難易度のものしか出題しません.

質問 (´‥ `) 卍卍三

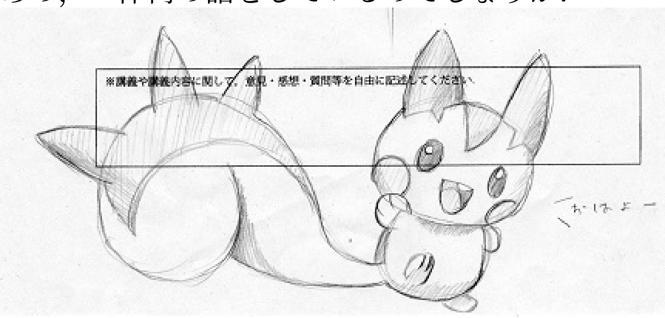
— 顔文字は TeX (普段使っている組版ソフト) ではうまく再現できないですね.

質問 紅葉の季節になりました．先生は何が紅葉しますか?

質問 好きです。

質問 素敵な息子さんですね.

— あの，一体何の話をしているのでしょうか.

質問 

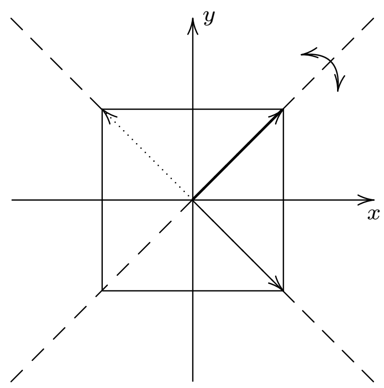
— 上手な絵をありがとうございます．ただ，スキャンして載せるのは大丈夫なのだろうかという疑問も.

固有値・固有ベクトルについて

そろそろ，他の講義で固有値・固有ベクトルが出てきてもおかしくないので，ここで簡単に解説しておきます．行列 A に対して

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$$

を満たすベクトル $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ が存在するとき，λ を固有値と呼び，この $\boldsymbol{x}$ を λ に対応する固有ベクトルといいます．λ が固有値であれば，$(\lambda E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を満たすので，方程式 $\det(tE - A) = 0$ の解が固有値となります．そして固有ベクトルは，連立一次方程式 $(\lambda E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解です．



具体例として $A = \left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$ で考えてみます．固有値は $\det(tE_2 - A) = t^2 - 1 = 0$ の解，つまり $\lambda = \pm 1$ になります．固有ベクトルは，$\lambda = 1$ のときは連立一次方程式 $\left(\begin{smallmatrix}1&-1\\-1&1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = \boldsymbol{0}$ の解，つまり $\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)$ であり，$\lambda = -1$ のときは，連立一次方程式 $\left(\begin{smallmatrix}1&1\\1&1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = \boldsymbol{0}$ の解，つまり $\left(\begin{smallmatrix}1\\-1\end{smallmatrix}\right)$ となります．

図形的にみると，行列 A の作用は直線 $y = x$ に関する折り返しであって，固有ベクトル $\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)$(太線のベクトル) はこの折り返しで変化しません．また固有ベクトル $\left(\begin{smallmatrix}1\\-1\end{smallmatrix}\right)$(単線のベクトル) は折り返しによって点線のベクトルに移りますが，これら二本のベクトルはいずれも同じ直線 $(y = -x)$ 上にあります．つまり，“固有ベクトルはその行列の作用によって方向を変えないベクトルである” ということになります．後期に学ぶベクトル空間の言葉を用いると，“固有ベクトルは行列の作用によって不変な部分空間の基底である” と明快に表現することができるようになります．