2020 年度　名古屋大学
理系基礎科目（文系） 数学入門

第 1 回

講義担当者：中島秀斗

2020 年 4 月 23 日

はじめに

- 授業形態：学習資料 (スライド・ノート) 配布
  - はじめはスライドに目を通してください.
  - ノートはスライドの要約になります．復習にご活用ください.
  - スライド内にある赤い枠で囲った演習問題は，実際に解いてもらうことを想定しています.
- 小テストについて
  - 小テストは NUCT で行われます.
  - 講義日の午前８時から日付が変わるまでの間に完了してください.
- レポートについて
  - 講義 3,4 回毎にレポートを課します.
  - 各回に出題する演習問題を解いたものを，pdf ファイルとして提出してもらいます.
  - 学習資料配布時のお知らせの中で通知します.

凡例

公式や定理など，講義において重要な情報は青の枠で囲む.

演習問題は赤の枠で囲む．実際に手を動かして解いてほしい.

コメントや注意すべき点などは緑の枠で囲む.

§1 関数の復習

- 高校のときに学んだ関数について復習をしておこう．この講義の目標の一つは，ここで紹介する初等関数についての微分および積分が計算できるようになることである．
- また，角度に対して，従来の度数法ではなく，弧度法という新しい角度の単位を導入する．これは三角関数の微分を考える際には非常に自然な単位になる．

今回の目標

- 初等関数およびそのグラフの概形を覚えること
- 合成関数と逆関数について理解すること
- 度数法と弧度法の違いを理解し，弧度法を扱えるようになること

§1.1 数列・関数

数列について

- まず数列について思い出そう．数列とは，

$$\begin{array}{ccccccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & \cdots & a_n & \cdots \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & 36 & \cdots & n^2 & \cdots \end{array}$$

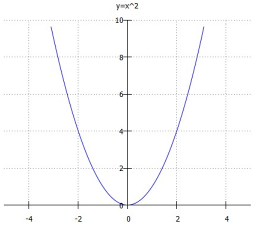
  のように，数が一列に並んでいるものである．
- n 番目の数が a_n と書けているときには，数列 $\{a_n\}_{n=1,2,3,\ldots}$ のように表す．今の例の場合は $a_n = n^2$ である．
- 少し見方を変えて「番号 n に対して数 a_n を対応させている」と思うこともできる．

関数について

- 関数とは，数 x に対して $f(x)$ というただ一つの数を対応させるものであり，関数 $y = f(x)$ などのように書く．
  - 数列において番号 n に対して定まっていたものが，数 x に対して定まるようになったものと思うこともできる．
- 例．$f(x) = x^2$ とすれば，

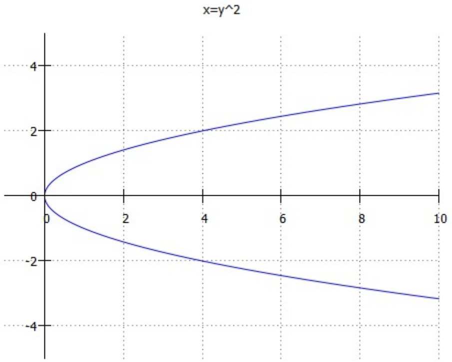
$$
\begin{aligned}
&f(1) = 1^2 = 1, \quad f(2) = 2^2 = 4, \\
&f(3) = 3^2 = 9, \quad f\left(\tfrac{1}{2}\right) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{4}
\end{aligned}
$$

- 関数は，以下のようにグラフとして描くことができる．



関数について

- 関数は，各 x に対して数 $f(x)$ を唯一つ対応させるものであった．これは，関数のグラフと y に平行な直線との交点は，多くても一つしかないことに対応している．
- したがって，関数のグラフは以下のような曲線になることはない．

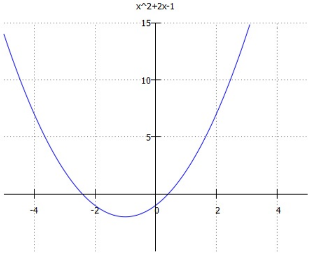


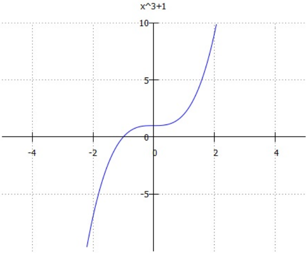
§1.2 種々の関数

種々の関数のグラフ

(1) 多項式．$f(x) = x^2 + 2x - 1$ や $g(x) = x^3 + 1$ などのように，x^k の形の関数をいくつか足し合わせて得られる関数のこと．

- 多項式において，x の最大べき数が k のとき，その多項式を k 次多項式という．例えば先述の $f(x)$ は 2 次多項式，$g(x)$ は 3 次多項式である．
- 多項式は最も基本的な関数である．以下は先に上げた多項式 $f(x)$ と $g(x)$ のグラフである．



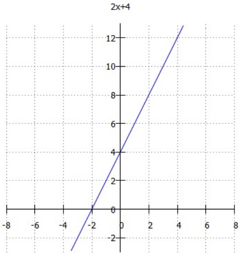


種々の関数のグラフ

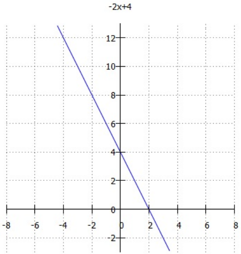
多項式のグラフは，その次数や係数によって様々な曲線になるので，一般的にこれが多項式のグラフであると言うことはできない．1 次，2 次，そして 3 次の多項式の典型的な形だけでも押さえておきたい．

- 1 次の多項式は，0 ではない数 a を用いて $ax+b$ の形に書ける．よく知られているように，この多項式のグラフは直線になり，a が正であるか負であるかによって，右上がりか右下がりになるかが決まる．b は y 軸との切片の値を表す．

$a>0$ のとき



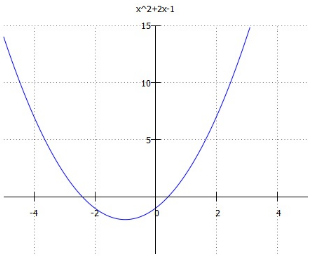
$a<0$ のとき



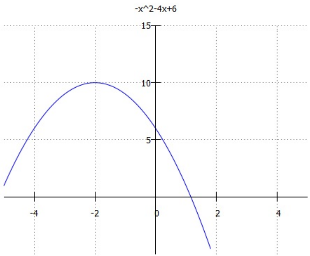
種々の関数のグラフ

- 2 次多項式は，0 ではない数 a を用いて $ax^2 + bx + c$ の形に書ける．つまり 2 次関数のことである．これもよく知られているように，a が正であるか負であるかによって，下に凸か上に凸かが決まる．後半の $bx + c$ によって，頂点の座標が決まる．
- ボールを斜め上に投げたとき，ボールは右図のような軌跡を描く．これより，2 次多項式のグラフは放物線とも呼ばれる．

$a > 0$ のとき



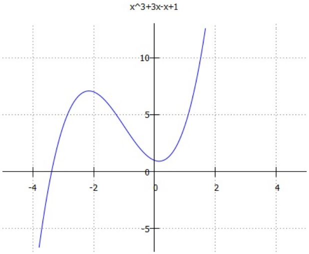
$a < 0$ のとき



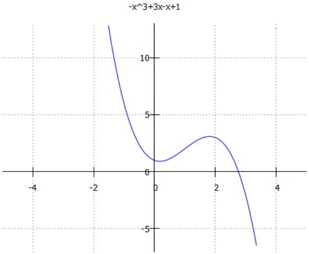
種々の関数のグラフ

- 3 次多項式は，0 ではない数 a を用いて ax^3+bx^2+cx+d の形に書ける．下図のように，a が正であるか負であるかによって，場合が分かれる．
- 3 次多項式（3 次関数ともいう）のグラフの描き方は，後の講義で紹介する．グラフにある「山」と「谷」の部分は，後半の bx^2+cx+d によって定まるが，先の $f(x)=x^3+1$ のように山も谷もない場合もある．

$a>0$ のとき



$a<0$ のとき

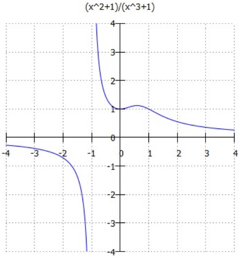


種々の関数のグラフ

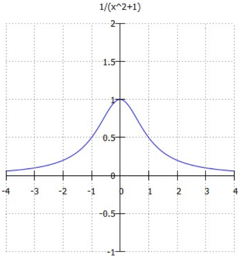
(2) 分数関数．2 つの多項式 $f(x)$, $g(x)$ を用いて $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ のように表される関数のこと．有理関数ともいう．

例えば，$h_1(x) = \dfrac{x^2+1}{x^3+1}$ や $h_2(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ などは分数関数である．
$h_1(x)$ と $h_2(x)$ のグラフはそれぞれ以下のような形になる．

$h_1(x)$



$h_2(x)$



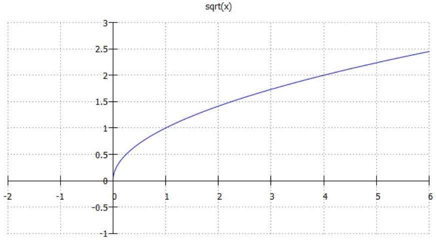
$f(x)$ と $g(x)$ の選び方によって形は様々である．

種々の関数

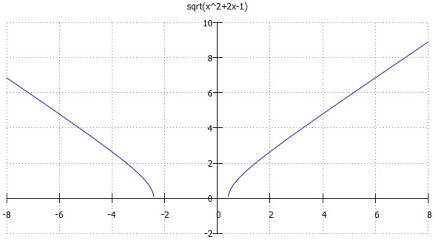
(3) 無理関数． $\sqrt{x}$ や $\sqrt{x^2+2x-1}$ などのように，多項式に根号をつけて表される関数のこと．

無理関数 $\sqrt{x}$ や $\sqrt{x^2+2x-1}$ のグラフはそれぞれ以下のようになる．

$\sqrt{x}$



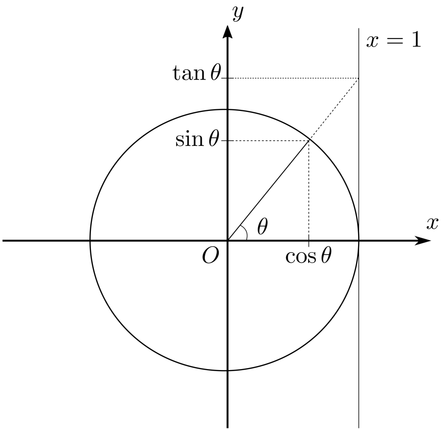
$\sqrt{x^2+2x-1}$



根号の中は正または 0 である必要があるので，すべての数で定義されるとは限らない．根号の中に来る多項式によって様々な形になりうる．

種々の関数

(4) 三角関数．角度 θ° に関する関数 $\sin\theta^\circ$, $\cos\theta^\circ$ および $\tan\theta^\circ$ のこと．その定義の図形的意味は下図を参照のこと．



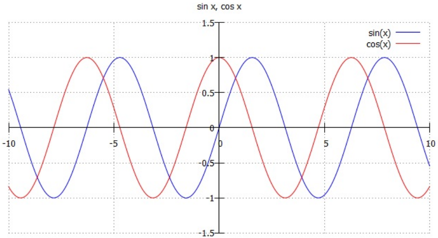
x 軸から角度 θ° にある点の，

- x 座標が $\cos\theta$，
- y 座標が $\sin\theta$．
- $\tan\theta$ は，原点とその点を通る直線と $x = 1$ という直線との交点の y 座標である．

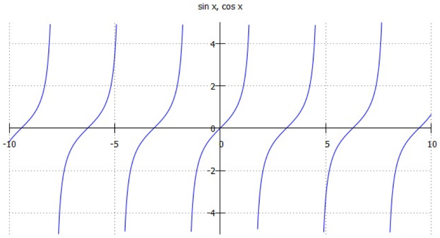
三角関数

三角関数のグラフは以下の通り．

$\sin x,\ \cos x$



$\tan x$



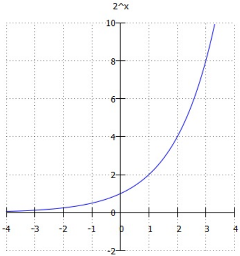
左図において，青線が $\sin x$，赤線が $\cos x$ である．

種々の関数

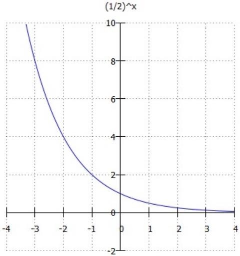
(4) 指数関数． 正の数 a を用いて $f(x) = a^x$ のようにかける関数のこと．

$a > 1$ か $a < 1$ かに従って，グラフが右上がりになるか右下がりになるかが変わる．

$a > 1$ のとき



$a < 1$ のとき



種々の関数

(5) 対数関数． 指数関数の逆関数 $\log_a x$ のこと．

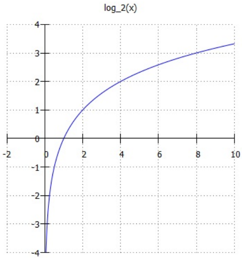
- 逆関数は後ほど改めて定義するが，

$$a^{\log_a x} = x, \quad \log_a a^x = x$$

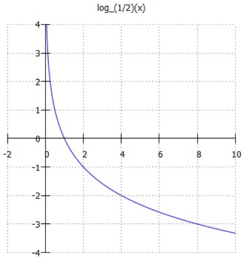
という性質を持つような関数である．

- これも $a > 1$ か $a < 1$ かに応じてグラフの概形が変わる．

$a > 1$ のとき



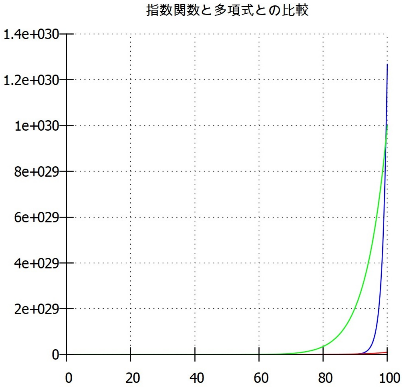
$a < 1$ のとき



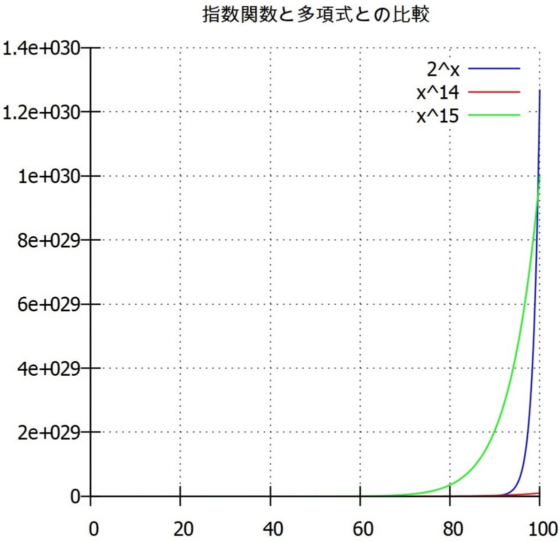
ここで紹介した関数は，まとめて初等関数と呼ばれている．これらはいずれも，数学に限らず多くの自然科学で自然に現れてくる，非常に重要な関数である．

§コラム・指数関数について

数が爆発的に増えていくことを指数的に増えていく，ということがあります．教科書の図などでは 2 次関数も指数関数も増大の差がないように見えてしまいますが，それは間違いです．
次の図は 3 つの関数 $f(x) = x^{14}$, $g(x) = x^{15}$, $h(x) = 2^x$ のグラフを描いたものですが，どれがどれになるでしょうか．少し考えてみてください．



正解は　赤: $f(x) = x^{14}$,　緑: $g(x) = x^{15}$,　青: $h(x) = 2^x$　です.



- x があまり大きくないときは多項式のほうがずっと大きいですが，あるところから先は，指数関数が急激に大きくなっていき，あっという間に多項式を超えていきます．このグラフではとても小さく見える $f(x) = x^{14}$（赤線のグラフ）の $x = 100$ の値でさえも，

$$100^{14} = 10^{28} = 10,000,000,000,000,000,000,000,000,000$$

ですので，漢数字で表せば「1 穣」という，とてつもない数なのです．

- 最近，ある記事で，爆発的に増えるという意味であろうところに「対数的に増える」という表現を見ましたが，これは真逆の意味になってしまっています．実際，$\log_2 100 = 6.643856...$ とまだ 1 桁です．
- 読みが「大数的」のような響きだからといって，数の増え方も同じではありません．

§1.3 関数同士の演算

合成関数

- 2 つの関数 $f(x), g(x)$ が与えられたとき，その 2 つを用いて新たな関数を作ることができる．たとえば，和や積を使って

$$和\ s(x) = f(x) + g(x)\ や，積\ m(x) = f(x)g(x)$$

とすれば，新しい関数 $s(x)$ と $m(x)$ を作ることができる．

- この他に，次のようにして新しい関数を構成することができる．

$$h(x) = f\big(g(x)\big).$$

このような形で定義される関数を合成関数と呼ぶ．

合成関数について

- 例えば $\sin(x^2+1)$ は，$f(x)$ および $g(x)$ を以下のようにしたときの $f\bigl(g(x)\bigr)$ である．

$$f(x) = \sin x, \quad g(x) = x^2 + 1.$$

- 気持ちとしては，$\sin(x^2+1)$ は少し複雑なので，$X = x^2 + 1$ と $\sin X$ とに分けて考えましょう，ということである．

一般に，$f\bigl(g(x)\bigr) \neq g\bigl(f(x)\bigr)$ であることに注意．実際，今の例の場合においても，

$$g\bigl(f(x)\bigr) = (\sin x)^2 + 1$$

となり，$\sin(x^2+1)$ とは異なる．

逆関数について

- 関数 $f(x)$ が与えられたとき，次の条件を満たす関数 $g(x)$ について考える．
$$f\big(g(x)\big) = g\big(f(x)\big) = x.$$
- そのような関数はいつでも存在するとは限らないが，存在するときには $g(x)$ のことを $f(x)$ の逆関数といい，$f^{-1}(x)$ という記号で表す．
- 例．$y = 3x + 1$ とする．これを $x = \cdots$ の形に書き直せば，
$$x = \frac{1}{3}(y - 1).$$
この式において x と y を入れ替えたもの，すなわち
$$y = \frac{1}{3}(x - 1)$$
が $y = 3x + 1$ の逆関数になる．

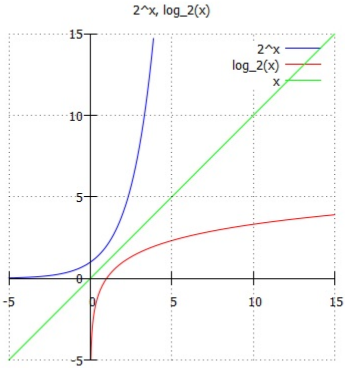
演習問題: $f(x) = 3x + 1$, $g(x) = \frac{1}{3}(x-1)$ とおく．
(1) ここで求めたものが逆関数であることを確認せよ．すなわち，

$$f\big(g(x)\big) = x, \quad g\big(f(x)\big) = x$$

が成り立つことを確かめよ．
(2) $f(x) = 3x + 1$, $g(x) = \frac{1}{3}(x-1)$ のグラフを描け．

逆関数について

- 図で言えば，$y = f(x)$ のグラフを直線 $y = x$ で折り返したものになる．例えば，$f(x) = 2^x$ とすれば，$f^{-1}(x) = \log_2 x$ であるが，これら 2 つのグラフを描けば，



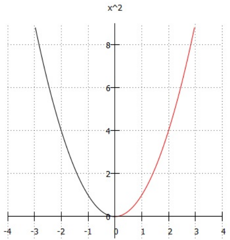
逆関数について

全体では逆関数が定義できなくても，考える区間を狭めることにより，逆関数を定義できる場合もある．

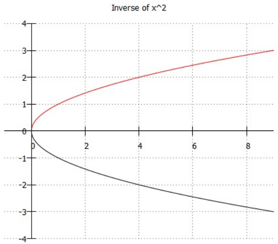
そのための必要十分条件は，考える区間の上で 1 対 1 となっていることである．これは，関数のグラフが，その区間の上では x 軸と平行な直線との交点が多くても 1 つだけになっていることと対応している．

逆関数について

- 関数 $f(x) = x^2$ は，$f(x) = f(-x)$ を満たすので，グラフを直線 $y = x$ で折り返したとき，y 軸と平行な直線との交点が 2 つ存在するので，そのままでは関数とはならない．
- そこで，考える区間を $x \geq 0$ に制限する (下図の赤線のみを考える) と，グラフを直線 $y = x$ で折り返したとき，y 軸と平行な直線との交点が 1 つ以下となる．



$\longrightarrow$



§1.4 弧度法

弧度法について

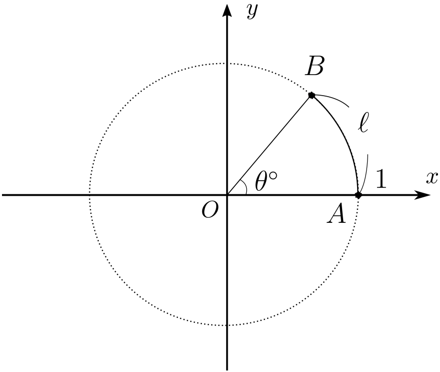
- これまでは，30° などのように，角度の単位として度数法を用いていたが，これからは弧度法を用いることにする．
- その理由の一つとして，三角関数を微分する際に，公式が綺麗に書ける点が挙げられる．

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x.$$

- 弧度法とは,「弧の長さを使って角度を表現」する手法である．

弧度法について

- 中心 0，半径 1 の円を xy 平面上に描く．A を点 $(1, 0)$ とする．
- x 軸から角度 θ° にある点を B とするとき，弧 $\overset{\frown}{AB}$ の長さ ℓ は角度 θ° によって決まる．
- そこで，この長さ ℓ を使って角度に対応させるのである．



$\theta^\circ = 0^\circ$ のときは $\ell = 0$,
$\theta^\circ = 360^\circ$ のときは $\ell = 2\pi$ である．
角度 θ° と弧の長さ ℓ は比例するので，

$$\theta^\circ : 360^\circ \;=\; \ell : 2\pi$$

である．これより

$$\ell \;=\; 2\pi \times \frac{\theta^\circ}{360^\circ}$$

という変換公式が得られる．

弧度法について

- 弧度法の単位はラジアンというが，単位ラジアンは省略して書かれることが多い．例えば
  - $180^\circ = 2\pi \times \dfrac{180^\circ}{360^\circ} = 2\pi \times \dfrac{1}{2} = \pi$ ラジアン
  - $90^\circ = 2\pi \times \dfrac{90^\circ}{360^\circ} = 2\pi \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{\pi}{2}$ (ラジアン)
  - $60^\circ = 2\pi \times \dfrac{60^\circ}{360^\circ} = 2\pi \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{\pi}{3}$

  などのように書かれる．
- よく使われる角度における対応は次の通り．

度数法	0°	30°	45°	60°	90°	180°	360°
弧度法	0	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{2}$	π	2π

演習問題: 次の角を，度数は弧度に，弧度は度数に，それぞれ書き直せ.

$$(a)\ 15^\circ \quad (b)\ -60^\circ \quad (c)\ \frac{8}{5}\pi \quad (d)\ -\frac{5}{12}\pi$$

演習問題の解答例

(考え方) 角度 θ° を弧度 x ラジアンで表したいときは，比

$$\frac{\pi}{180^\circ} = \frac{x}{\theta^\circ}$$

から x の式として表せばよい．逆に弧度 x ラジアンから角度 θ° を知りたいときは，同じ式を θ について解けばよい．

(a) 与えられているのは度数なので，上の式において $\theta = 15$ として，

$$\frac{\pi}{180^\circ} = \frac{x}{15^\circ} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot 15^\circ = \frac{\pi}{12}$$

よって，$15^\circ = \dfrac{\pi}{12}$ ラジアン である．

三角関数の性質

三角関数の加法定理

ここで，三角関数の基本的な性質について復習をしよう．

(ド・モアブルの定理) i を虚数単位とすれば，

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos(nx) + i \sin(nx).$$

また，次のような積公式も成り立っている．

$$(\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y) = \cos(x+y) + i \sin(x+y)$$

この式の左辺を展開して両辺を比較すれば，加法定理が導かれる．

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

和積の公式

加法定理を使って，次の積を和に変換する公式が得られる．

$$\sin A \sin B = -\frac{1}{2}\left(\cos(A+B) - \cos(A-B)\right)$$

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2}\left(\cos(A+B) + \cos(A-B)\right)$$

$$\sin A \cos B = \frac{1}{2}\left(\sin(A+B) + \sin(A-B)\right)$$

あるいは

$$\sin X + \sin Y = 2\cos\left(\frac{X+Y}{2}\right)\sin\left(\frac{X-Y}{2}\right)$$

という，和を積に変換する公式も得られる．

演習問題

1. 次の分数式を約分せよ.

$$(a)\ \frac{x^2-3x-4}{x^2+3x+2} \quad (b)\ \frac{x^2-1}{x^3-1}$$

2. 次の関数の逆関数を求めよ.

$$(a)\ y=-\frac{1}{3}x+4 \quad (b)\ y=3x-1$$

3. 次の関数の逆関数を求めよ.

$$(a)\ y=x^2 \quad (b)\ y=2^x \quad (c)\ y=\log_{10}x$$

4. 次の角を，度数は弧度に，弧度は度数に，それぞれ書き直せ.

$$(a)\ 15^\circ \quad (b)\ -60^\circ \quad (c)\ \frac{8}{5}\pi \quad (d)\ -\frac{5}{12}\pi$$

5. $f(x)=x+1$, $g(x)=\sqrt{x^2+1}$, $h(x)=\log_2(x)$ のとき，次の合成関数を x の式で表せ.

$$(a)\ f\big(g(x)\big) \quad (b)\ g\big(f(x)\big) \quad (c)\ h\big(g(x)\big)$$