演習問題 4

問題 1.[†] (1) $J_{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, $\det J_{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{x}) = 1$.

(2) $J_{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} e^x\cos y & -e^x\sin y \\ e^x\sin y & e^x\cos y \end{pmatrix}$, $\det J_{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{x}) = e^{2x}$.

(3) $J_{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \sinh x\cos y & -\cosh x\sin y \\ \cosh x\sin y & \sinh x\cos y \end{pmatrix}$, $\det J_{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{x}) = \sinh^2 x + \sin^2 y$.

(4) $J_{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{x}) = \dfrac{1}{(x^2+y^2)^2}\begin{pmatrix} y^2-x^2 & -2xy \\ -2xy & x^2-y^2 \end{pmatrix}$, $\det J_{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{x}) = \dfrac{-1}{(x^2+y^2)^2}$.

定義に従って計算するだけです.

問題 2.[†] $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ とすると

(1) $J_{\boldsymbol{F}^{-1}}(\boldsymbol{u}) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$,

(2) $J_{\boldsymbol{F}^{-1}}(\boldsymbol{u}) = \begin{pmatrix} e^{-x}\cos y & e^{-x}\sin y \\ -e^{-x}\sin y & e^{-x}\cos y \end{pmatrix} = \dfrac{1}{u^2+v^2}\begin{pmatrix} u & v \\ -v & u \end{pmatrix}$,

(3) $J_{\boldsymbol{F}^{-1}}(\boldsymbol{u}) = \dfrac{1}{\sinh^2 x + \sin^2 y}\begin{pmatrix} \sinh x\cos y & \cosh x\sin y \\ -\cosh x\sin y & \sinh x\cos y \end{pmatrix}$,

(4) $J_{\boldsymbol{F}^{-1}}(\boldsymbol{u}) = \begin{pmatrix} y^2-x^2 & -2xy \\ -2xy & x^2-y^2 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{(u^2+v^2)^2}\begin{pmatrix} v^2-u^2 & -2uv \\ -2uv & u^2-v^2 \end{pmatrix}$.

問題 1 で求めたものの逆行列を考えても，直接逆変換を作って Jacobi 行列を計算しても良いです．ただし，(3) は $\boldsymbol{u}$ で書くのは難しいです．そのような場合でも Jacobian が ($\boldsymbol{x}$ でになりますが) 計算できる点が前者の計算法のメリットになります.

問題 3. $J_{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{x}) = {}^t\!A$, $\det J_{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{x}) = \det A$.

問題 4.[*] $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とすれば，この変換で得られる平行四辺形はベクトル $\overrightarrow{OP} = (a,b)$, $\overrightarrow{OQ} = (c,d)$ を辺とするものである．よって求める面積は三角形 OPQ の面積の 2 倍であるが，三角形の面積の公式 $S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{OP}|\cdot|\overrightarrow{OQ}|\sin\theta$ (θ は 2 ベクトルのなす角) であることと，内積は角度の情報を持つこと ($\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ} = |\overrightarrow{OP}|\cdot|\overrightarrow{OQ}|\cos\theta$) より,

$$2S = |\overrightarrow{OP}|\cdot|\overrightarrow{OQ}|\sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{|\overrightarrow{OP}|^2|\overrightarrow{OQ}|^2 - (\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ})^2} = |ad-bc|.$$

問題 5.[*] $A = (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$ とする．平行六面体の体積は，3 本のベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ を辺とする三角錐の体積の 6 倍であるので，まずはこの三角錐の体積を求める．三角錐の体

積は「底面積 $\times$ 高さ $\div 3$」である．さて，2 ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の張る三角形の面積は $\frac{1}{2}\|\boldsymbol{a}\| \cdot \|\boldsymbol{b}\| \sin\theta$ であるが，これを $\frac{1}{2}\|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\|$ と見る．次に高さであるが，これはベクトル $\boldsymbol{c}$ の，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ とは垂直な方向 ($=\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ の方向) の成分の長さと一致する．これは，内積を用いて $\left|\boldsymbol{c} \cdot \left(\frac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\|}\right)\right|$ と表せる．したがって三角錐の体積は $\frac{1}{2}\|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\| \cdot \left|\boldsymbol{c} \cdot \left(\frac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\|}\right)\right| \div 3 = \frac{1}{6}\left|\boldsymbol{c} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})\right|$ となる．成分表示して計算すれば，これが $\det A/6$ と一致していることが分かる．

小レポート 4

(1) 積分の計算です.

- $f_1(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$; $\mathrm{Arctan}\, x$ の微分が $\dfrac{1}{x^2+1}$ なので，$\displaystyle\int f_1(x)\,dx = \mathrm{Arctan}\, x.$ $\square$
- $f_2(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$;
  $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \log|f(x)|$ を使うと，$\displaystyle\int f_2(x)\,dx = \int \frac{(x^2+1)'}{x^2+1}dx = \log(x^2+1).$ $\square$
- $f_3(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $\mathrm{Arcsin}\, x$ の微分が $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ なので，$\displaystyle\int f_2(x)\,dx = \mathrm{Arcsin}\, x.$ $\square$
- $f_4(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$; 「$\sqrt{x^2-1}$」が入っている積分は $u = \sqrt{x^2-1}+x$ とおいて計算するのがよい[*1]．このとき，$du = \frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}}dx$ より $\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{du}{u}$ なので，

$$\int f_4(x)\,dx = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{du}{u} = \log|u| = \log|\sqrt{x^2-1}+x|. \quad \square$$

(2) (i) 極座標変換 $\boldsymbol{F}\colon x = r\sin\theta\,\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\,\sin\varphi,\ z = r\cos\theta$ の Jacobi 行列は

$$J_{\boldsymbol{F}}(r,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} x_r & x_\theta & x_\varphi \\ y_r & y_\theta & y_\varphi \\ z_r & z_\theta & z_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\,\cos\varphi & r\cos\theta\,\cos\varphi & -r\sin\theta\,\sin\varphi \\ \sin\theta\,\sin\varphi & r\cos\theta\,\sin\varphi & r\sin\theta\,\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}.$$

Jacobian は上の行列の行列式なので，全展開式より $\det J_{\boldsymbol{F}}(r,\theta,\varphi) = r^2\sin\theta.$ $\square$

(ii) (i) の逆行列 $(J_{\boldsymbol{F}}(r,\theta,\varphi))^{-1}$ を計算すると，

$$\frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{pmatrix} r^2\sin^2\theta\cos\varphi & r^2\sin^2\theta\sin\varphi & r^2\cos\theta\sin\theta(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi) \\ r\sin\theta\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\cos\theta\sin\varphi & -r\sin^2\theta(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi) \\ -r(\sin^2\theta+\cos^2\theta)\sin\varphi & r(\sin^2\theta+\cos^2\theta)\cos\varphi & 0 \end{pmatrix}$$

なので，

$$(J_{\boldsymbol{F}}(r,\theta,\varphi))^{-1} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \frac{\cos\theta\cos\varphi}{r} & -\frac{\cos\theta\sin\varphi}{r} & -\frac{\sin\theta}{r} \\ -\frac{\sin\varphi}{r\sin\theta} & \frac{\cos\varphi}{r\sin\theta} & 0 \end{pmatrix}.$$

これを x, y, z で表すと，次のようになる.

$$\begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \frac{xz}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{yz}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2+z^2} \\ -\frac{y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} & 0 \end{pmatrix}.$$

[*1] もちろん，$s = \sqrt{x^2-1}$ とおいても計算できる．あるいは $c = \cosh x$ とおくのがよいかもしれない.

ここでは，以下の関係式を用いた．

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \cos\theta = \frac{z}{r}, \quad \sin\theta = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{r},$$
$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$