線形代数学・同演習 A

4 月 26 日分　演習問題

4. 最初に，直線の方程式は，内積を使って $(\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{a}) = c$ と書けることに注意する．ここで $\boldsymbol{a} = \left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$ は法線ベクトルである．

平面の一般の点 $\boldsymbol{x}$ と直線との距離 d を求める．それには，4 月 19 日の問題 8 より，$\boldsymbol{x}$ から法線ベクトルの方向に沿っての長さを測ればよい．$\boldsymbol{x} + d\frac{\boldsymbol{a}}{||\,\boldsymbol{a}\,||}$ が直線上にあるとすると，

$$\left(\boldsymbol{x} + d\tfrac{\boldsymbol{a}}{||\,\boldsymbol{a}\,||}\,\middle|\,\boldsymbol{a}\right) = c$$

なので (冒頭の注意)，

$$d = \frac{c - (\,\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{a}\,)}{||\,\boldsymbol{a}\,||}.$$

さて，鏡映写像 f は $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} + 2d\frac{\boldsymbol{a}}{||\,\boldsymbol{a}\,||}$ であるので (符号は d に入っている)，

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} + 2 \cdot \frac{c - (\,\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{a}\,)}{||\,\boldsymbol{a}\,||} \cdot \frac{\boldsymbol{a}}{||\,\boldsymbol{a}\,||}. \tag{1}$$

あとは式を整理すれば，$(\,\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{a}\,) = {}^t\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{a} = {}^t\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{x}$ を用いて，

$$f(\boldsymbol{x}) = (E_2 - \frac{2}{||\,\boldsymbol{a}\,||^2}\boldsymbol{a}\,{}^t\boldsymbol{a})\boldsymbol{x} + \frac{2c}{||\,\boldsymbol{a}\,||^2}\boldsymbol{a} = \frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} b^2 - a^2 & -2ab \\ -2ab & a^2 - b^2 \end{pmatrix}\boldsymbol{x} + \frac{2c}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

となる．もちろん，(1) のままでも計算できる．

平面に関する鏡映写像も，同じ考え方で計算できる．