線形代数学・同演習 B

演習問題 9

1. (1) $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, (2) 対角化できない,

(3) $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, (4) 対角化できない,

(5) $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, (6) 対角化できない,

(7) $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, (8) $D = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

2.† $D = \left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{smallmatrix}\right)$, $P = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ とおく．$PD = AP$ の各成分を比較する．

$$PD = \begin{pmatrix} \lambda a & \mu b \\ \lambda c & \mu d \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix} = AP.$$

$(2,1)$ 成分を比較すると，$\lambda = 1$ または $c = 0$ でなければならないことが分かる．ここで $c = 0$ とすれば $(1,1)$ 成分の比較で $\lambda a = a$ であるが，P は正則なので $a = c = 0$ にはなりえない．よって，いずれの場合も $\lambda = 1$ となる．同様に $(2,2)$ 成分と $(1,2)$ 成分を見ることにより $\mu = 1$ となることが分かる．しかし，$(1,1)$ 成分と $(1,2)$ 成分を見ると，$c = d = 0$ でなければならないが，これは P が正則であることと矛盾する．よって，$A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ は対角化することができない．

3.† (1) $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, (2) 対角化できない,

(3) $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4. (1) 行列のトレースの次の性質 $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ を用いる．$A = PDP^{-1}$ (D は対角行列で，λ_1 が m_1 個，$\cdots \lambda_r$ が m_r 個並んでいるもの) と書けるが，

$$\mathrm{tr}A = \mathrm{tr}(PDP^{-1}) = \mathrm{tr}(P^{-1}PD) = \mathrm{tr}(D)$$

---

12 月 20 日分 (凡例：無印は基本問題，† は特に解いてほしい問題，$*$ は応用問題)

講義用 HP: http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~h-nakashima/lecture/2017LA.html

となることより．

(2) これも $\det(AB) = \det(BA)$ となることを用いれば，(1) と同様に示すことができる．

5.†　A の固有多項式は $g_A(t) = t^2 - t - 1$．$g_A(t) = 0$ の 2 解を α, β とする．ただし $\alpha > \beta$ とする．α, β は A の固有値であるが，対応する固有ベクトルはそれぞれ $\left(\begin{smallmatrix}\alpha\\1\end{smallmatrix}\right)$，$\left(\begin{smallmatrix}\beta\\1\end{smallmatrix}\right)$ となる．そこで $P = \left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\1 & 1\end{smallmatrix}\right)$ とおけば，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{\alpha-\beta}\begin{pmatrix}1 & -\beta\\ -1 & \alpha\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1 & -\beta\\ -1 & \alpha\end{pmatrix}$$

となる．これより

$$A^n = P\begin{pmatrix}\alpha^n & 0\\ 0 & \beta^n\end{pmatrix}P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}\alpha^{n+1}-\beta^{n+1} & \alpha^n-\beta^n\\ \alpha^n-\beta^n & \alpha^{n-1}-\beta^{n-1}\end{pmatrix}$$

となる．さて，$\left(\begin{smallmatrix}f_{n+1}\\f_n\end{smallmatrix}\right) = A^{n-1}\left(\begin{smallmatrix}f_2\\f_1\end{smallmatrix}\right)$ であることより，

$$\begin{pmatrix}f_{n+1}\\ f_n\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}\alpha^n-\beta^n & \alpha^{n-1}-\beta^{n-1}\\ \alpha^{n-1}-\beta^{n-1} & \alpha^{n-2}-\beta^{n-2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}\\ \alpha^n-\beta^n\end{pmatrix}$$

となるので，結局 f_n は以下のようになる：

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

なお，以上の変形では $\alpha\beta = -1$ や $\alpha^2 = \alpha + 1$ などのような関係式を用いている．

6.　固有値 λ_i の重複度を m_i で表す．定義より $\sum_i m_i = n$ である．A は対角化可能なので，適当な正則行列 P により $D = P^{-1}AP$ を対角行列とすることができる．この D の対角成分は各固有値 λ_i が m_i 個ずつ並んでいる．さて，$P = (\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n)$ とおけば，

$$AP = PD \quad\Longleftrightarrow\quad A\boldsymbol{p}_j = \lambda_{i_j}\boldsymbol{p}_j$$

であるので，P の各列はある固有値に対する A の固有ベクトルになっている．これより特に，固有値 λ_i に対する固有ベクトルは m_i 本ちょうどあることが分かる．固有空間の次元は，線形独立な固有ベクトルの本数であったことを思い出せば，$\dim W(\lambda_i;\, A) = m_i$ であることがわかり，したがって $\sum_{i=1}^r \dim W(\lambda_i;\, A) = n$ となることがわかる．

7.*　$n_i = \dim W(\lambda_i;\, T)$ とし，$W(\lambda_i;\, T)$ の基底を $[\boldsymbol{u}_1^{(i)}, \ldots, \boldsymbol{u}_{n_i}^{(i)}]$ とする．次のベクトルの組が線形独立であればよい：

$$[\boldsymbol{u}_1^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{u}_{n_1}^{(1)}, \boldsymbol{u}_{n_2}^{(2)}, \ldots\ldots, \boldsymbol{u}_1^{(r)}, \ldots, \boldsymbol{u}_{n_r}^{(r)}]. \tag{1}$$

線形独立かどうかを確かめるために，上のベクトルの組の線形結合を考える：

$$a_1^{(1)}\boldsymbol{u}_1^{(1)} + \cdots + a_{n_1}^{(1)}\boldsymbol{u}_{n_1}^{(1)} + a_1^{(2)}\boldsymbol{u}_{n_2}^{(2)} + \cdots\cdots + a_1^{(r)}\boldsymbol{u}_1^{(r)} + \cdots + a_{n_r}^{(r)}\boldsymbol{u}_{n_r}^{(r)} = \mathbf{0}.$$

簡単のため $\boldsymbol{w}^{(i)} = a_1^{(i)}\boldsymbol{u}_1^{(i)} + \cdots + a_{n_i}^{(i)}\boldsymbol{u}_{n_i}^{(i)}$ とおけば，上式は

$$\boldsymbol{w}^{(1)} + \cdots + \boldsymbol{w}^{(r)} = \mathbf{0} \tag{2}$$

となる．ここで講義中の補題 9.1 より各固有空間同士の共通部分は $\{\mathbf{0}\}$ のみである．したがって同じく講義中の補題 9.2 を適用することができて，式 (2) より各 i に対して

$$\mathbf{0} = \boldsymbol{w}^{(i)} = a_1^{(i)}\boldsymbol{u}_1^{(i)} + \cdots + a_{n_i}^{(i)}\boldsymbol{u}_{n_i}^{(i)}$$

となる．ここで $[\boldsymbol{u}_1^{(i)}, \ldots, \boldsymbol{u}_{n_i}^{(i)}]$ は $W(\lambda_i; T)$ の基底であるので，上式を満たす $a_1^{(i)}, \ldots, a_{n_i}^{(i)}$ は ‘すべて 0’ しかありえない．よって，式 (1) のベクトルの組は線形独立であることが示された．次元とはその空間における線形独立なベクトルの最大個数であったため，少なくとも $n_1 + \cdots + n_r = \sum_{i=1}^{r} \dim W(\lambda_i; T)$ 以上であることがわかる．