線形代数学・同演習 B

小テスト 13　(1 月 30 日分)

学籍番号：　　　　　　　　　　　　　　氏名：

実対称行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ を直交行列により対角化せよ．

(考え方) まずは通常の行列と同様に対角化する．その後で，固有ベクトルの組に対して Gram–Schmidt の直交化法を適用して直交行列を構成する．

解． 前回の小テストより，固有値は $1, 4$ である．$\lambda = 1$ のとき，固有ベクトルは

$$1 \cdot E_3 - A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

退化次元が 2 なので，固有ベクトルは 2 本ある:$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$．$\lambda = 4$ のとき，固有ベクトルは

$$4 \cdot E_3 - A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

退化次元が 1 なので，固有ベクトルは 1 本: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

ベクトルの組 $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を並べたものが対角化を与える正則行列になるので，これを直交化する．すると，

$$P = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

となり (計算は小レポート 11 を参照)，これを使って次のように対角化できる．

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

※講義や講義内容に関して，意見・感想・質問等を自由に記述してください．