8　行列式の導入

2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して

$$\det A = ad - bc \quad (= |A| \text{ とも表す})$$

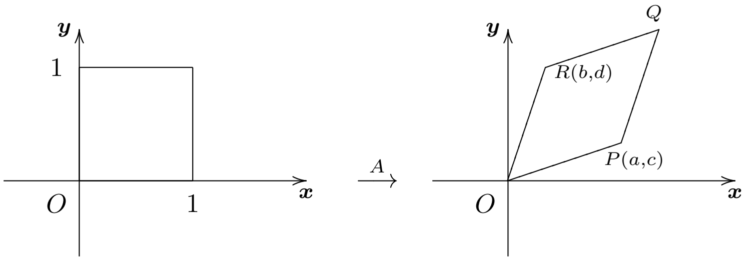
を A の行列式と呼んだ．これは

$$\det A \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ は正則}$$

という性質があった．これを一般の n 次正方行列に拡張する．

8.1　行列式の意味

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ は一般には正方形を平行四辺形にうつす．

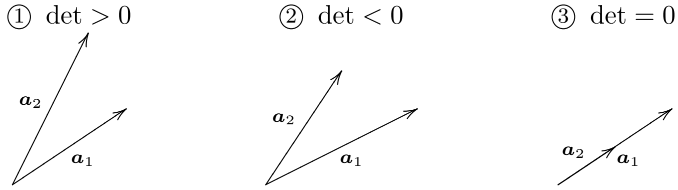


$\square OPQR$ の面積を計算する．

$$\begin{aligned}
|\square OPQR| &= 2|\triangle OPR| = 2 \cdot \frac{1}{2} |\overrightarrow{OP}|\,|\overrightarrow{OR}| \sin\theta = |\overrightarrow{OP}|\,|\overrightarrow{OR}| \sqrt{1 - \cos^2\theta} \\
&= |\overrightarrow{OP}|\,|\overrightarrow{OR}| \sqrt{1 - \left(\frac{\left\langle \overrightarrow{OP} \,\middle|\, \overrightarrow{OR} \right\rangle}{|\overrightarrow{OP}|\,|\overrightarrow{OR}|} \right)^2} = \sqrt{|\overrightarrow{OP}|^2 |\overrightarrow{OR}|^2 - \left\langle \overrightarrow{OP} \,\middle|\, \overrightarrow{OR} \right\rangle^2} \\
&= \sqrt{(a^2 + c^2)(b^2 + d^2) - (ab + cd)^2} \\
&= \sqrt{a^2 d^2 - 2abcd + b^2 c^2} = \sqrt{(ad - bc)^2} = |ad - bc|.
\end{aligned}$$

つまり，$A = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$ とかけば，$\det A$ は $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ を一辺とする平行四辺形の (符号付き) 面積に等しい．

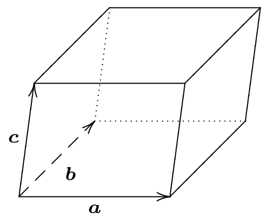
① $\det > 0$　　② $\det < 0$　　③ $\det = 0$



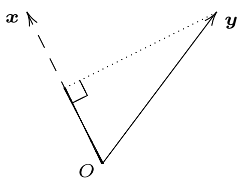
$\det A = 0$ のとき，図形がつぶれてしまっているため，元の状態を復元できない．これが $\det A = 0$ のとき逆行列を持たない理由．

8.2　3 次正方行列の行列式

$A = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ とし，3 つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ を辺とする平行六面体の体積を求める．



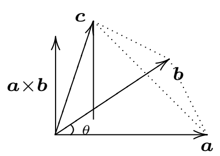
1. 内積 $\langle \boldsymbol{x} | \boldsymbol{y} \rangle$ について



$\langle \boldsymbol{x} | \boldsymbol{y} \rangle = \| \boldsymbol{x} \| \cdot \| \boldsymbol{y} \| \cos\theta$
もし $\| \boldsymbol{x} \| = 1$ ならば
$\langle \boldsymbol{x} | \boldsymbol{y} \rangle = \| \boldsymbol{y} \| \cos\theta$
$\to$ これはベクトル $\boldsymbol{y}$ の，$\boldsymbol{x}$ 方向成分の長さ．

2. ベクトル積 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ の性質
   (a) $\| \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \| = \| \boldsymbol{a} \| \cdot \| \boldsymbol{b} \| \sin\theta$
   (b) ベクトル $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ と直交する．
   (c) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ -a_1b_3 + a_3a_1 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$

(1) まず $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ を辺とする三角錐の体積 $\widetilde{V}$ の体積を求める．



・$S = \frac{1}{2}\| \boldsymbol{a} \| \cdot \| \boldsymbol{b} \| \sin\theta = \frac{1}{2}\| \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \|$
・$h = \left| \left\langle \frac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{\| \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} \|} \middle| \boldsymbol{c} \right\rangle \right|$：ベクトル $\boldsymbol{c}$ の $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ 方向成分の長さ．
すると，

$$\widetilde{V} = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\| \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \| \cdot \left| \left\langle \frac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{\| \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} \|} \middle| \boldsymbol{c} \right\rangle \right| = \frac{1}{6} \left| \langle \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} | \boldsymbol{c} \rangle \right|.$$

平行六面体の体積 V は $\widetilde{V}$ の 6 倍なので，

$$\begin{aligned} V &= |\langle \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} | \boldsymbol{c} \rangle| \\ &= |(a_2b_3 - a_3b_2)c_1 + (-a_1b_3 + a_3a_1)c_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)c_3| \\ &= |a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1|. \end{aligned}$$

定義 8.1. $A = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ の行列式 $\det A$ を $\det A = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1$ により定める．

$$\begin{array}{cccccc} \left(\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{matrix}\right. & & \left.\right) & \begin{matrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{matrix} & \begin{matrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{matrix} & \\ - \quad - \quad - & & + & + & + & \end{array}$$

注意 8.2. これを使えば，ベクトル積は形式的に

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

とかける．

考察

1. $\det E = 1$
2. 項の数は $n = 2$ のときは 2 コ，　$n = 3$ のときは 3 コ．
3. 各項について同じ行・列の成分は 1 つずつ
4. すべての組み合わせが現れている

8.3 一般の場合

定義 8.3. $A = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ に対して，$\boldsymbol{a}, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ を辺とする平行 $2n$ 面体の "(符号付き) 体積" を行列 A の行列式とよび，$\det A$ で表す．符号は $\det E_n = 1$ となるように定める．

注意 8.4. この定義のままだと計算しにくい．次回は行列式の公式を与える．

9　行列式の公式

- $\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$
- $\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$

添字の現れ方は？ $a_{1\bigcirc}a_{2\bigcirc}a_{3\bigcirc}$ としたときの $\bigcirc$ を調べる．

$\underline{n=2\text{ のとき}}$		1 2	符号
	1.	(1 2)	$+$
	2.	(2 1)	$-$

$\underline{n=3\text{ のとき}}$		1 2 3	符号
	1.	(1 2 3)	$+$
	2.	(2 3 1)	$+$
	3.	(2 3 1)	$+$
	4.	(3 2 1)	$-$
	5.	(1 3 2)	$-$
	6.	(2 1 3)	$-$

$\to$ 順列が現れてくる．

行列式の公式 正方行列 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ に対して

$$\det A = \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)}.$$

ここで S_n は順列に関するもの，sgn はこれから定義をしていくもの．

9.1　置換群 S_n

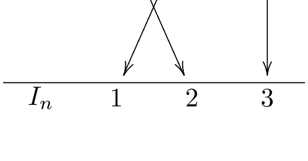
$I_n := \{1, 2, \ldots, n\}$

定義 9.1. I_n からそれ自身への１対１写像全体を S_n で表す．

$$S_n := \{\sigma\colon I_n \to I_n\colon \text{１対１}\}.$$

$\sigma \in S_n$ を置換という．

例 9.2. $n = 3$ のとき．



$$\begin{cases} \sigma(1) = 2 \\ \sigma(2) = 1 \\ \sigma(3) = 3 \end{cases} \quad \text{とすれば } \sigma \in S_3.$$

これを $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ と表す．(普通は矢印は書かないが，行列と混同するのを避けるため，本講義では矢印を明記する．)

注意 9.3. 大事なのは上下の組み合わせ．これを変えないのならば，順番は自由．また，動かさない文字は省略してもよい．

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \downarrow & \downarrow \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{など}.$$

定義 9.4. $\sigma, \tau \in S_n$ に対して，その積 $\sigma \circ \tau \in S_n$ を

$$(\sigma \circ \tau)(k) = \sigma(\tau(k)) \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

により定義する．

例題 9.5. $n = 4$ のとき，次の σ, τ の積 $\sigma \circ \tau$ を計算せよ．

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

解) τ を先に計算することに注意．σ の上段を τ の下段にそろえると

$$\sigma = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

すると，

$$\sigma\circ\tau \quad \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \tau \\ 2 & 3 & 4 & 1 & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \sigma \\ 3 & 1 & 2 & 4 & \end{array}$$

なので，$\sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

定義 9.6. 1. S_n を置換群という．

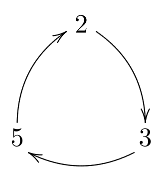
2. 単位置換 $\varepsilon \cdots \varepsilon(k) = k$ $(k = 1, \ldots, n)$
3. 逆置換

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{pmatrix}$ に対して $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_n \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$ を σ の逆置換という．これは次を満たす．

$$\sigma \circ \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \circ \sigma = \varepsilon.$$

定義 9.7. (i) $1, 2, \ldots, n$ のうち，$k_1, \ldots, k_r$ 以外は動かさずに，$k_1 \to k_2$, $k_2 \to k_3, \ldots, k_{r-1} \to k_r$, $k_r \to k_1$ と順にずらす置換を巡回置換といい，$(k_1\, k_2\, \ldots\, k_r)$ とかく．

$$\text{ex.} \quad \sigma = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} = (2\,3\,5) \quad (= (3\,5\,2)).$$



(ii) 2 文字の巡回置換を，特に互換という．

例題 9.8. 次の $\sigma \in S_n$ を巡回置換の積で表せ.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 4 & 1 & 6 & 2 & 7 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

解) まず，1 がどう移っていくかを調べる.

$$1 \to 4 \to 2 \to 1$$

よって $(1\,4\,2)$ が現れる．次に $1, 2, 4$ を除いた中で最小の 3 について

$$3 \to 6 \to 5 \to 7 \to 3$$

なので $(3\,6\,5\,7)$ も現れる．1〜7 がすべて現れたので

$$\sigma = (1\,4\,2) \circ (3\,6\,5\,7).$$

注意 9.9. (i) 任意の置換は，この方法で巡回置換の積として表せる.

(ii) 巡回置換は，互換の積で表せる.

$$(k_1\,k_2\,\ldots\,k_r) = (k_1\,k_r) \cdots (k_1\,k_3)(k_1\,k_2).$$

これより特に任意の置換は互換の積で表せる (ただし，一意的ではない).

定義 9.10. $\sigma \in S_n$ が m コの 互換 の積で表せるとき,

$$\mathrm{sgn}(\sigma) := (-1)^m$$

と定義し，σ の符号という．また，$\mathrm{sgn}(\sigma) = 1$ となるものを偶置換，$\mathrm{sgn}(\sigma) = -1$ となるものを奇置換という.

注意 9.11. σ の互換への分解の仕方は複数通りあるが，その分解に現れる互換の数の偶奇は変わらない.

補題 9.12. (1) $\mathrm{sgn}(\varepsilon) = 1$.

(2) $\mathrm{sgn}(\sigma \circ \tau) = \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot \mathrm{sgn}(\tau)$.

(3) $\mathrm{sgn}(\sigma^{-1}) = \mathrm{sgn}(\sigma)$.

(4) $\mathrm{sgn}\left((k_1\,k_2\,\ldots\,k_r)\right) = (-1)^{r-1}$.

例題 9.13. 例題 9.8 の σ の符号を求めよ.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 4 & 1 & 6 & 2 & 7 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

解) まず巡回置換の積に分解する.

$$\sigma = (1\,4\,2) \circ (3\,6\,5\,7).$$

ここで補題 9.12 を用いると

$$\mathrm{sgn}(\sigma) = \mathrm{sgn}(1\,4\,2)\ \ \mathrm{sgn}(3\,6\,5\,7) = (-1)^{3-1} \cdot (-1)^{4-1} = -1.$$

よって $\mathrm{sgn}(\sigma) = -1$ である.

10　行列式の公式 I

$A=(a_{ij})_{n\times n}$ のとき，$\det A=|A|$ は

$$\det A=\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)}.$$

- $n=2$ のとき.

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$$
$$S_2=\{\varepsilon,\ (1\,2)\}\quad\Rightarrow\quad\det A=1\cdot a_{11}a_{22}+(-1)\cdot a_{12}a_{21}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

10.1　行列式の性質

命題 10.1.

(1)
$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=a_1\cdot\begin{vmatrix}a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

(2) A,D が正方行列のとき
$$\begin{vmatrix}A & B\\ O & D\end{vmatrix}=\left|\ A\ \right|\cdot\left|\ D\ \right|$$

証明. (1) $A=(a_{ij})_{n\times n}$ とすれば $a_{21}=\cdots=a_{n1}=0$.
$\sigma\in S_n$ が $\sigma(1)\neq 1$ をみたすならば，$\sigma(k)=1$ となる $k\neq 1$ がある ($\because\ \sigma$ は 1 対 1 なので)
このとき $\sigma_{k\sigma(k)}=\sigma_{k1}=0$ なので
$$\sigma_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots\sigma_{n\sigma(n)}=0.$$

よって

$$\begin{aligned}\det A&=\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)a_{1\sigma(1)}\cdots a_{n\sigma(n)}\\ &=\sum_{\sigma\in S_n,\ \sigma(1)=1}\mathrm{sgn}(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)}+\sum_{\sigma\in S_n,\ \sigma(1)\neq 1}\mathrm{sgn}(\sigma)a_{1\sigma(1)}\cdots a_{n\sigma(n)}\\ &=a_{11}\sum_{\sigma\in S_n,\ \sigma(1)=1}\mathrm{sgn}(\sigma)a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)}\\ &=a_1\cdot\begin{vmatrix}a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}.\end{aligned}$$

(2) も同様に示せる. □

ex.
$$\begin{vmatrix}2 & 7 & 13 & 5\\ 5 & 3 & 8 & 2\\ 0 & 0 & 9 & 4\\ 0 & 0 & -2 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 7\\ 5 & 3\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}9 & 4\\ -2 & 1\end{vmatrix}=(6-35)\cdot(9+7)=-29\cdot 17=-493.$$

命題 10.2. $\det{}^tA=\det A$.

証明. $A = (a_{ij})_{n\times n}$, ${}^tA = (b_{ij})_{n\times n}$ とすると，$b_{ij} = a_{ji}$ なので,

$$\det {}^{|,t}A = \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) b_{1\sigma(1)} \cdots b_{n\sigma(n)} = \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n}.$$

第 3 項を $a_{1*}a_{2*}\cdots a_{n*}$ に並び替える.
$a_{\sigma(k)k}$ において，$\sigma(k) = i$ ならば $k = \sigma^{-1}(i)$ なので

$$a_{\sigma(k)k} = a_{i\sigma^{-1}(i)}.$$

また，$\sigma \in S_n$ は 1 対 1 なので $\{\sigma(1), \ldots, \sigma(n)\} = \{1, \ldots, n\}$．よって

$$\begin{aligned}
\det {}^tA &= \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma^{-1}(1)} a_{2\sigma^{-1}(2)} \cdots a_{n\sigma^{-1}(n)} \\
&= \sum_{\sigma^{-1}\in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma^{-1}) a_{1\sigma^{-1}(1)} a_{2\sigma^{-1}(2)} \cdots a_{n\sigma^{-1}(n)} \\
&\quad (\because\ \sigma \text{ と } \sigma^{-1} \text{ は 1 対 1 に対応しているので}) \\
&= \sum_{\tau\in S_n} \mathrm{sgn}(\tau) a_{1\tau(1)} a_{2\tau(2)} \cdots a_{n\tau(n)} \\
&\quad (\tau = \sigma^{-1} \text{と変数変換}) \\
&= \det A.
\end{aligned}$$

□

命題 10.3. 列（行）ごとに加法的．つまり

$$\det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_i + \boldsymbol{a}'_i, \ldots, \boldsymbol{n}) = \det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{n}) = \det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}'_i, \ldots, \boldsymbol{n}).$$

たとえば,

$$\begin{vmatrix} a & b+b' \\ c & d+d' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b' \\ c & d' \end{vmatrix}.$$

証明. 行に関して示す．$i = 1$ として考える．

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)(a_{1\sigma(1)} + a'_{1\sigma(1)}) a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\
&= \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} + \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a'_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\
&= (\text{右辺}).
\end{aligned}$$

□

命題 10.4. 列（行）ごとに 1 次同次．つまり,

$$\det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \lambda\boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = \lambda \det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_n).$$

証明. Prop10.3 と同様. □

命題 10.5. 列（行）を入れ替えると符号が変わる．つまり

$$\det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \lambda\boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = \det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \lambda\boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_n).$$

たとえば

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}.$$

証明. 行に関して示す．$i=1, j=2$ として考える．

$$(*)\ \det(\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n)=\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}(\sigma)a_{2\sigma(1)}a_{1\sigma(2)}a_{3\sigma(3)}\cdots a_{n\sigma(n)}.$$

ここで $\sigma=\tau\circ(1\,2)$ という変数変換を考える．

$$\sigma(1)=\tau(2),\quad \sigma(2)=\tau(1),\quad \sigma(k)=k\quad (k\geq 3),\quad \operatorname{sgn}(\sigma)=\operatorname{sgn}(\tau)\cdot(-1)$$

なので

$$(*)=\sum_{\tau\in S_n}(-1)\operatorname{sgn}(\tau)a_{2\tau(2)}a_{1\tau(1)}a_{3\tau(3)}\cdots a_{n\tau(n)}=-\det(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\dots,\boldsymbol{a}_n).$$

□

注意 10.6. Prop10.3–10.5 は行列式の公理と呼ばれる (これらの性質を満たす関数は det の定数倍のみ).

命題 10.7. (1) 等しい列（行）があれば $\det=0$.
(2) ある列（行）に他の列（行）の λ 倍を加えても det は変わらない.

$$\det(\boldsymbol{a}_1,\dots,\overset{i}{\boldsymbol{a}_i+\lambda\boldsymbol{a}_j},\dots,\boldsymbol{a}_n)=\det(\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_i,\dots,\boldsymbol{a}_n).$$

<u>**行列式の計算方法．**</u>

1. $n=2,3$ のときは全展開式
2. 行（列）に関する基本変形
ただし, 行（列）を λ で割ったら det を λ で割る
行（列）を入れ替えたら符号が変わる
3. 次の公式を用いる
$$\begin{vmatrix} A & B \\ O & D \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A & O \\ C & D \end{vmatrix}=|\,A\,|\cdot|\,D\,|.$$
4. 同じ行（列）があれば $\det=0$.

例題 10.8. 次の行列式を計算せよ.

$$(1)\ \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & -7 \\ 2 & 3 & 4 & -4 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & -5 \end{vmatrix}\qquad (2)\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 6 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

11 行列式の性質 II

11.1 行列式の積公式

命題 11.1. $A = (a_{ij})_{n\times n}$ が三角行列ならば，$\det A = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$. 特に $\det E_n = 1$ である．

定理 11.2. n 次正方行列 A, B に対して，$\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

証明. $2n$ 次正方行列 $\begin{pmatrix} A & O \\ -E_n & B \end{pmatrix}$ を二通りの方法で計算する． □

11.2 余因子展開

定義 11.3. $A = (a_{ij})_{n\times n}$ の第 i 行と第 j 列を取り除いて得られる $n-1$ 次の正方行列を余因子と呼び，A_{ij} とかく．

$A = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ において，

$$\boldsymbol{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} = a_{ij}\boldsymbol{e}_1 + \cdots + a_{rj}\boldsymbol{e}_n$$

なので，行列式は列ごとに加法的であることを用いると

$$\det = \det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{n}) = \sum_{i=1}^{n} \det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \overset{j\text{ 列目}}{a_{ij}\boldsymbol{e}_i}, \ldots, \boldsymbol{a}_n).$$

ここで i 番目のものを計算すると，

$$\det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \overset{j\text{ 列目}}{a_{ij}\boldsymbol{e}_i}, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = \left|\begin{array}{ccc|c|ccc} a_{11} & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ \hline a_{i1} & \cdots & \cdots & a_{ij} & \cdots & \cdots & a_{in} \\ \hline \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{array}\right| \quad A_{ij}\text{ があることに注意.}$$

$$= (-1)^{i-1} \left|\begin{array}{ccc|c|ccc} a_{i1} & \cdots & \cdots & a_{ij} & \cdots & \cdots & a_{in} \\ \hline a_{11} & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{array}\right| \quad \begin{array}{l}1\text{ つ上との入れ替えを繰り返して} \\ i\text{ 行目を一番上にする.}\end{array}$$

(↑ 行の並びは $i, 1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n$ の順)

$$= (-1)^{i1} \cdot (-1)^{j-1} \left|\begin{array}{c|cccc} a_{ij} & a_{i1} & \cdots & \cdots & a_{in} \\ \hline 0 & & & & \\ \vdots & & & & \\ & & A_{ij} & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{array}\right| \quad 1\text{ つ左との入れ替えを繰り返す.}$$

(↑ 列の並びは $j, 1, 2, \ldots, j-1, j+1, \ldots, n$ の順)

$$= (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}.$$

これより，

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$$

が成り立つことがわかる．これを $\det A$ の第 j 列に関する**余因子展開**という．

例.

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 & \boxed{4} \\ 3 & 2 & \boxed{0} \\ 1 & 5 & \boxed{3} \end{vmatrix} = (-1)^{1+3} \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= 4(15-2) - 0 \cdot (10-7) + 3(3-21) = 1.$$

注意 11.4. (1) 余因子展開に現れる符号は市松模様:

$$\begin{vmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \cdots \\ + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}$$

(2) 行に関する余因子展開もできる：

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}.$$

(3) 0 が多い列 (行) でやると効果的.

例題 11.5. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -8 & 11 & 4 \\ 9 & -6 & -2 \end{vmatrix}$ を計算せよ.

解) まず基本変形を施して 0 を増やしてから余因子展開を利用するとよい.

12　行列式の応用

12.1　平面の方程式

$\mathbb{R}^3$ の三点 (x_i, y_i, z_i) $(i = 1, 2, 3)$ に対して次の方程式を考える.

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{1}$$

第 1 行に関して余因子展開すれば，$ax + by + cz - d = 0$ の形 (符号も $a, \ldots, d$ の中に入れる)．しかも，$(x, y, z) = (x_i, y_i, z_i)$ ならば (1) = 0. つまり式 (1) は三点 (x_i, y_i, z_i) $(i = 1, 2, 3)$ を通る平面の方程式.

12.2　文字の入った行列式

行列式の公理を使えば，簡単に計算できる場合がある.

例題 12.1.

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b & c+d \\ 1 & b & c & d+a \\ 1 & c & d & a+b \\ 1 & d & a & b+c \end{vmatrix}$$

解) 2列目，3列目を4列目に加えると，共通因子 $a+b+c+d$ を作れる．

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b & a+b+c+d \\ 1 & b & c & a+b+c+d \\ 1 & c & d & a+b+c+d \\ 1 & d & a & a+b+c+d \end{vmatrix} = (a+b+c+d) \begin{vmatrix} 1 & a & b & 1 \\ 1 & b & c & 1 \\ 1 & c & d & 1 \\ 1 & d & a & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

階数が大きな行列の行列式も計算できる．

定義 12.2. $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n$. この Π はギリシャ文字 π の大文字 (Product から).

ヴァンデルモンド
Vandermondeの行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i).$$

0 が多いときは余因子展開を使って漸化式に持ち込む.

例題 12.3. 次のような n 次正方行列の行列式を求めよ.

$$\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & b \\ b & a & \ddots & & 0 \\ 0 & b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & b & a \end{vmatrix}$$

例題 12.4. 次のような n 次正方行列の行列式を求めよ.

$$P_n = \begin{pmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & x & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{pmatrix}$$

12.3 Cramerの公式

(クラーメル)

A: n 次の正則行列

定理 12.5 (Cramer の公式)**.** $A = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$, $\boldsymbol{x} = {}^t(x_1, \ldots, x_n)$ とかく．$\det A \neq 0$ である．連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解 $\boldsymbol{x}$ の第 i 成分 x_i は

$$x_i = \frac{\det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \overset{i}{\check{\boldsymbol{b}}}, \ldots, \boldsymbol{a}_n)}{\det A}$$

で与えられる.

例題 12.6. 次の連立一次方程式を，Cramer の公式を用いて解け.

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

13　正則行列

復習． A: n 次正方行列

$$A \text{ が正則} \Leftrightarrow \text{逆行列 } A^{-1} \text{ を持つ}.$$

命題 13.1. (1) A が正則のとき，逆行列はただひとつに決まる．
(2) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

証明. (1) B, C がともに A の逆行列とすると，

$$BAC = B(AC) = BE_n = B.$$

一方，

$$BAC = (BA)C = E_nC = C.$$

よって，$B = C$.
(2) $(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}E_nB = B^{-1}B = E_n$. よって (1) より $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. □

13.1　余因子行列

$A = (a_{ij})_{n\times n}$
復習． 各 j 列について $\det A = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}|A_{ij}|$ (余因子展開)
これは $\det A = det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \overset{j}{\boldsymbol{a}_j}, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ の j 列目を展開して得られた.

定義 13.2. $A = (a_{ij})_{n\times n}$ に対して

$$\widetilde{a}_{ij} := (-1)^{i+j}|A_{ji}|$$

と置いたとき，$\widetilde{A} = (\widetilde{a}_{ij})_{n\times n}$ を A の余因子行列という.

例． $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ とすると，$A_{11} = d$, $A_{12} = c$, $A_{21} = b$, $A_{22} = a$ なので，

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} (-1)^2A_{11} & (-1)^3A_{21} \\ (-1)^3A_{12} & (-1)^4A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

よって $A\widetilde{A} = \widetilde{A}A = (ad - bc)E_2 = (\det A)E_2$.

命題 13.3. A を任意の n 次正方行列とするとき，$A\widetilde{A} = \widetilde{A}A = (\det A)E_n$.

定理 13.4. (1) A が正則 $\Leftrightarrow \det A \neq 0$.
(2) $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\widetilde{A}$.
(3) $AB = E_n \;\Rightarrow\; BA = E_n$.

例題 13.5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ の余因子行列と逆行列を求めよ.

注意 13.6. この方法もやはり実用的なのは $n = 2$ のときのみ．$n \geq 3$ のときは掃き出し法のほうが有効.

定理 13.7. n 次正方行列 A に対し，次は同値.

(1) A は正則行列,

(2) A は逆行列 A^{-1} を持ち，$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\widetilde{A}$,

(3) $\det A \neq 0$,

(4) A の簡約化は E_n,

(5) $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ はただ 1 つの解を持つ.