線形代数学・同演習 B

演習問題 12

1. $(x\cos\theta - y\sin\theta)^2 + (x\sin\theta + y\cos\theta)^2 = x^2 + y^2$ を確かめればよい．

2.† (1) $\times$ (固有値は $1, 2, -1$) (2) ◯ (固有値は $4, 4, 1$) (3) $\times$ (固有値は $7, -2, -2$)
下の問題 5 より，正定値ならば対角成分は常に正になることがわかるので，対角成分が負ならば正定値にはなれない．

3. (1) エルミート内積を $(\cdot|\cdot)$ とする．交代行列 X の固有値を μ，固有ベクトルを $\boldsymbol{x}$ とすれば,

$$\mu\,(\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{x}) = (\,X\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{x}\,) = \big(\boldsymbol{x}\,|\,{}^tX\boldsymbol{x}\big) = (\,\boldsymbol{x}\,|\,-X\boldsymbol{x}\,) = -\overline{\mu}\,(\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{x})$$

なので $\mu = -\overline{\mu}$，つまり μ は純虚数 (もしくは 0) である．
(2) λi に対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x}$ とすると $X\boldsymbol{x} = \lambda i\boldsymbol{x}$ であり，この式の両辺の複素共役をとることにより

$$\overline{X\boldsymbol{x}} = \overline{\lambda i\boldsymbol{x}} \quad \Leftrightarrow \quad X\overline{\boldsymbol{x}} = -\lambda i\overline{\boldsymbol{x}}.$$

(3) (1) より交代行列の固有値は純虚数か 0 であるが，(2) より 0 でない純虚数は $\pm$ が必ず対となる．したがって，n が奇数ならば少なくとも 1 つは固有値 0 を持つことになる．一方，行列式は固有値の積として得られるので，奇数次の交代行列の行列式は必ず 0 になる．

4.† (1)$\Rightarrow$(2) A の固有多項式は $g_A(t) = t^2 - (a+c)t + (ac - b^2)$ であるので，固有値は

$$\lambda = \frac{(a+c) \pm \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}}{2} \tag{1}$$

となる．これが正なのだから

$$(a+c)^2 - ((a-c)^2 + 4b^2) = 4(ac - b^2) > 0,$$

つまり $ac - b^2 > 0$ を得る．これより特に a と c は同符号であるが，式 (1) より $a > 0$ がわかる．(2)$\Rightarrow$(1) は逆を辿ればよい．

5.† $L = \begin{pmatrix} \sqrt{a} & 0 \\ b/\sqrt{a} & \sqrt{(ac-b^2)/a} \end{pmatrix}$.
$L = \left(\begin{smallmatrix} x & 0 \\ y & z \end{smallmatrix}\right)$ とおいたとき，$L\,{}^tL = \left(\begin{smallmatrix} x^2 & xy \\ xy & y^2+z^2 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & c \end{smallmatrix}\right)$ なので，x, y, z を a, b, c で表せばよい．問題 4 より $a > 0$, $ac - b^2 > 0$ なので根号を取れることに注意．

---

1 月 24 日分 (凡例：無印は基本問題，† は特に解いてほしい問題，$*$ は応用問題)
講義用 HP: http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~h-nakashima/lecture/2017LA.html

6. ${}^t(AX) = {}^tX\,{}^tA = -XA$ であることより

$$\mathrm{tr}(AX) = \mathrm{tr}({}^t(AX)) = -\mathrm{tr}(XA).$$

ここで $\mathrm{tr}(AX) = \mathrm{tr}(XA)$ であることを用いると，$2\mathrm{tr}(AX) = 0$ を得る．

7.* (1) 例題 10.3 とほぼ同様．正値性条件も $\langle \boldsymbol{x} \,|\, \boldsymbol{x} \rangle_0 = \lambda x^2 + \mu y^2$ であることより明らかであろう．

(2) $\widetilde{X} = \left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{smallmatrix}\right)^{-1} {}^tX \left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{smallmatrix}\right)$.

$D = \left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{smallmatrix}\right)$ とおいたとき，$\langle \boldsymbol{x} \,|\, \boldsymbol{y} \rangle = (x, y) D \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ とかけることより

$$\langle X\boldsymbol{x} \,|\, \boldsymbol{y} \rangle = (x, y)^t X D \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x, y) D \cdot \underline{D^{-1}\,{}^tXD} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

(3) ${}^tP \left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{smallmatrix}\right) P = \left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{smallmatrix}\right)$.

条件は $\widetilde{P}P = E_2$ であるが，(2) よりこれは $D^{-1}\,{}^tPD \cdot P = E_2$ となるので．

8.* Jacobian を J とすれば，$J = |\det A|$ となる．したがって，A が直交行列ならば $J = 1$ である．