8　多変数関数における積分

積分の 2 変数関数への一般化には，「重積分」と「線積分」の二通りの可能性がある．いずれの場合においても積分する範囲 (積分区域) が，1 変数のときと比べて遥かに複雑である．本講義では重積分のみを扱う．

1 変数関数の積分は，関数のグラフと x 軸とで囲まれた図形の面積を，区間を分割して作った長方形たちの面積で近似し，その極限によって構成した．これを高次元に拡張するのだから 2 変数関数のグラフ (曲面) と xy 平面とで囲まれた体積とするのが自然であろう．つまり，底辺をなす図形を長方形で分割し立方体により近似して極限を取るのである．したがって，まずは図形の面積を定義するところから始めることになる．

8.1　図形の面積

まずは，基本となる次の領域を定義しておく．

定義 8.1. $I = \{(x,y);\ a_1 \le x \le b_1,\ a_2 \le y \le b_2\}$ を長方形領域と呼ぶ．その面積を $\mu(I)$ とすると，

$$\mu(I) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2).$$

与えられた集合 $D \subset \mathbb{R}^2$ に対し，x 軸および y 軸に平行な直線により D をメッシュ分割する (Δ で表す)．詳しい図は教科書 p.179 の図を参照のこと．ここで，

$$\mu_*(D;\Delta) := (D \text{ の中にある長方形の面積の総和}),$$
$$\mu^*(D;\Delta) := (D \text{ と接触する長方形の面積の総和})$$

とおく．このとき，明らかに $\mu_*(D;\Delta) \le \mu^*(D;\Delta)$ である．図を見れば分かるように，μ_* は内側から D の面積を近似しており，μ^* は外側から D の面積を近似している．さて，$|\Delta| \to 0$ のときの極限をそれぞれ $\mu_*(D)$, $\mu^*(D)$ とする．

定義 8.2. $\mu_*(D) = \mu^*(D)$ のとき D は**面積確定**という．この値 $\mu_*(D)$ を D の**面積**と呼び，単に $\mu(D)$ と書く[*1]．

定義 8.3. (1) ある閉区間 $[a,b]$ 上で，2 つの連続関数 $\varphi(x)$, $\psi(x)$ を用いて表される次の集合 D を**縦線領域**, (2) ある閉区間 $[c,d]$ 上で，2 つの連続関数 $\widetilde{\varphi}(y), \widetilde{\psi}(y)$ を用いて表される次の集合 $\widetilde{D}$ を**横線領域**という．

$$D = \{(x,y);\ a \le x \le b,\ \varphi(x) \le y \le \psi(x)\},$$
$$\widetilde{D} = \{(x,y);\ c \le y \le d,\ \widetilde{\varphi}(y) \le x \le \widetilde{\psi}(y)\}.$$

12 月 12 日.

[*1] 当然ながら，$\mu^*(D)$ とも等しい．

命題 8.4. 縦線領域 D は面積確定で，その面積は

$$\mu(D) = \int_a^b \{\psi(x) - \varphi(x)\}\,dx.$$

同様に，横線領域 $\widetilde{D}$ も面積確定で，

$$\mu(\widetilde{D}) = \int_c^d \{\widetilde{\psi}(y) - \widetilde{\varphi}(y)\}\,dy.$$

例題 8.5. 次の領域の面積を求めよ．

$$\widetilde{D} = \left\{(x,y);\ 0 \le y \le 1,\ -\frac{y}{y^2+1} \le x \le \frac{1}{y^2+1}\right\}.$$

(考え方) $\widetilde{D}$ は横線領域なので，$\displaystyle\int_0^1 \{\widetilde{\psi}(y) - \widetilde{\varphi}(y)\}\,dy$ を計算すればよい．答えは $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{2}\log 2$ になる．□

注意 8.6. $\Omega(D) := \mu^*(D) - \mu_*(D)$ を境界と交わる長方形の面積の総和とすれば，

$$D \text{ が面積確定} \Leftrightarrow \Omega(D) = 0.$$

つまり，面積を持つかどうかは境界に関する条件ともいえる．一般に，なめらかな曲線の面積は 0 になることが知られているので，通常扱う閉曲線で囲まれた図形はすべて面積確定である．

面積を持たない図形の例．
$Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \le x, y \le 1,\ x, y \in \mathbb{Q}\}$ とすると，

$$\mu_*(Q) = 0, \quad \mu^*(Q) = 1, \quad \Omega(Q) = 1$$

となり，Q は面積確定でないことがわかる．

※次の関数は，集合を関数を使って表せるという点で非常に便利なものである．次回，重積分の定義の際に用いる．

定義 8.7. 集合 $D \subset \mathbb{R}^2$ に対して，

$$\chi_D(\boldsymbol{x}) := \begin{cases} 1 & (\boldsymbol{x} \in D), \\ 0 & (\boldsymbol{x} \notin D) \end{cases}$$

を D の定義関数という．

まとめ (1) 2 変数関数の積分は「底面積」×「高さ」を撚り集めたものにしたい．(2) **面積確定**な集合．

演習問題 8

問題 1. 次の集合の図を描け.

(1) $D_1 = \{(x,y);\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x\}$

(2) $D_2 = \left\{(x,y);\ 1 \leq y \leq \sqrt{3},\ y \leq x \leq y^2\right\}$

(3) $D_3 = \{(x,y);\ 0 \leq x \leq y \leq 4x,\ 1 \leq xy \leq 2\}$

(4) $D_4 = \left\{(x,y);\ 1 \leq xy \leq 2,\ x^2 \leq y \leq 2x^2\right\}$

(5) $D_5 = \left\{(x,y);\ 2x \leq x^2 + y^2 \leq 4,\ x, y \leq 0\right\}$

問題 2. 横線領域**でない**縦線領域を一つ構成せよ.

問題 3.* 面積確定**でない**集合を構成せよ.

中間試験へのコメント. 平均は 69.6 点でした.

$\boxed{1}$ 平均は 10.8 点です. 前期の復習ということで小レポートからの出題でしたが, 満点を取れた人が数名しかいませんでした.

$\boxed{2}$ 平均は 15.1 点です. 極座標変換の基本的な性質の問題でしたが, 意外とできていませんでした.

$\boxed{3}$ 平均は 10.6 点です. 連鎖律の問題です. これは微積で抑えておくべき内容ですので, できなかった方はしっかりと復習してください.

$\boxed{4}$ 平均は 12.1 点です. (1) で確認することは, 偏導関数 f_x, f_y が**連続である**ことです. そのことに触れていないものは不十分としています.

$\boxed{5}$ 平均は 21.1 点です. (3) まではよく出来ていましたが, Lagrange の未定乗数法の問題はあまりよくはありませんでした. これは多変数関数の微分のゴールの一つなので, しっかりと復習しておいてください. また (1) の図形を描く問題で既に間違えている人が意外と多かったのが気になりました.

小レポート

(1) 次の有理関数の不定積分を計算せよ.

$$\int \frac{x^5 + 1}{x^3 + x}\, dx$$

(2) 次の集合の図を描け.

(i) $D_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x, y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 1\right\}$

(ii) $D_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x, y \geq 0,\ 1 \leq xy \leq 2\right\}$

(iii) $D_3 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ -2 \leq x \leq 2,\ x^2 \leq y \leq 4\right\}$

注意. (1) まず分子の次数を分母よりも小さくしてから, 部分分数分解を行う.

小レポートについて. 次回の講義の際に提出すること. 原則として期限を過ぎての提出は認めないが, やむを得ない事情がある際は, 必ずその旨を**期限日までにメールにより**連絡すること.

レポート課題

中間試験で 60 点未満の方にはレポートを課します. 中間試験のすべての大問 (大問 1 に関しては間違えたところのみ) を解き直し, **1 月 9 日 (火) までに**提出ください.

レポートの書き方についての注意事項

1. 学籍番号および氏名を忘れずに書くこと.
2. レポート用紙は自由です. 市販のレポート用紙でなくても, 普段使っているルーズリーフでもよいです. ただし, ばらばらにならないようにステープラー等で綴じるようにしてください.
3. 丁寧に書くよう心掛けてください. レポートの見易さも評価対象とします. 時々, 解読に時間が掛かるものがあります. レポートは飽くまでも他人に見てもらうものですので, 最低限読めるように書いてください.
4. 用紙を使い惜しまないようにしてください. 一頁にむりやり詰め込んで書いてしまうと, どの問題について記述しているのかを判別することが難しくなります.
5. レポートは, 試験と違ってノート・教科書なども参考にして構いません. ただし, 解答をそのまま書き写すことがないようにしてください. また, 参考にしたものはレポートに記載するようにしてください.