# 線形代数学・同演習 A

6 月 27 日分 質問への回答

**質問** 基本変形がよく分かりません。

— 以前のノートあるいは教科書 (〔斎藤〕では p.48,〔三宅〕では p.23) をよく見直して，復習しておいてください．

**質問** 基本変形で引くときに下を「1」にする理由がよく分からなかった。上の方を「1」にしたらだめなのか。

— 説明不足でした．例えば次の行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

に対して 1 行目をピボットに選択して基本変形を施す際に，

$$A \xrightarrow{(2\text{ 行目})-(1\text{ 行目})} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{rrrrl} & 1 & -1 & -1 & (2\text{ 行目}) \\ -) & 1 & 1 & 1 & (1\text{ 行目}) \\ \hline & 0 & -2 & -2 & \end{array}$$

のように計算してくださいという意味でした．下に持ってきて云々というのは，上式の右の筆算を念頭に置いたものです．ここで引く順番を逆にすると

$$A \xrightarrow{(1\text{ 行目})-(2\text{ 行目})} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{rrrrl} & 1 & 1 & 1 & (1\text{ 行目}) \\ -) & 1 & -1 & -1 & (2\text{ 行目}) \\ \hline & 0 & 2 & 2 & \end{array}$$

となって，行列式の符号が違ってきてしまいます．簡約化の際にはどちらで変形しても問題ないのですが，行列式の場合は符号が変わってしまうので気をつけなければならないポイントです．

**質問** これまでサイトにアップロードされていたノートをまとめて閲覧することはできないでしょうか

— 忘れていました．この更新に合わせて見られるようにしておきます．

**質問** 固有値と固有ベクトルの有用性について教えて下さい．

— 固有値・固有ベクトルは正方行列に付随して定義されるものです．一般に，$n$ 次正方行列は，数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ からそれ自身への (線形) 写像と対応しています[*1]．線形写像 (つまり行列) を固定して数ベクトル空間を調べるとき，この写像に応じて扱いやすい ‘基底’[*2]を取れば見通しよく計算できるようになります．その扱いやすい基底を与えるのが固有ベクトルであって，固有値はその座標軸方向に対する拡大率を表します．したがって，例えば 2 次正方行列 $A$ は (殆どの場合) 固有値 $\lambda_j$ と対応する固有ベクトル $\boldsymbol{v}_j$ $(j = 1, 2)$ を用いて

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P^{-1}, \quad P = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$$

と書くことができます．一旦こう書いてしまえば，$A$ の冪乗 $A^n$ や指数写像 $\exp A$ などは簡単に計算ができるようになります．また，写像の基底に依らない概念 (例えば行列式や階数など) は，先述の扱いやすい基底を考えることで，固有値を調べれば決定できることがわかります．つまり，固有値は写像 (行列) の持つ重要な情報をすべて含んでいるのです．以上の説明は，後期に扱うベクトル空間の知識があるとより深く理解できるようになります．

---

[*1] あるいは $\mathbb{C}^n$.

[*2] 基底とは座標軸を一般化したものです.