5　多変数関数の Taylor 展開と極値

なめらかな 1 変数関数は「多項式で近似」することができた．本節では，これを多変数の場合へ一般化する．

5.1　Taylor 展開

定義 5.1. $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2$ ($\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$) に対して，

$$(D_{\boldsymbol{v}} f)(\boldsymbol{a}) := \lim_{t \to 0} \frac{f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{a})}{t}$$

が存在するとき，これを点 $\boldsymbol{a}$ における f の $\boldsymbol{v}$ 方向の微分という．

注意 5.2. 関数に作用して別の関数に変化させるものを作用素というが，この $D_{\boldsymbol{v}}$ は作用素の一種である．

補題 5.3. $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$ とすると $D_{\boldsymbol{v}} f = v_1 \frac{\partial f}{\partial x} + v_2 \frac{\partial f}{\partial y}$.

$D^2_{\boldsymbol{v}} f = D_{\boldsymbol{v}} (D_{\boldsymbol{v}} f)$ のようにして計算する．例えば

$$D^2_{\boldsymbol{v}} f = v_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2v_1 v_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + v_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

定理 5.4 (Taylor の定理)**.** $n \in \mathbb{N}$ とする．なめらかな 2 変数関数 $f(x, y)$ に対して，次が成り立つ．

$$f(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} (D^k_{\boldsymbol{h}} f)(\boldsymbol{a}) + o(\| \boldsymbol{h} \|^n)$$

これを $f(\boldsymbol{x})$ の点 $\boldsymbol{a}$ における n 次の Taylor 展開という．

注意 5.5. $\boldsymbol{h} = (h_1, h_2)$ とすれば，$D^k_{\boldsymbol{h}} f(\boldsymbol{a})$ は h_1, h_2 に関する k 次同次の多項式になる．つまり，なめらかな多変数関数は (多変数の) 多項式によって近似できる．

$f(\boldsymbol{x})$ の点 $\boldsymbol{a}$ における 2 次の Taylor 展開は

$$f + \nabla f \cdot \boldsymbol{h} + \frac{1}{2} (h_1,\ h_2) \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + o$$

と書ける[*1]．ここで現れる行列が，1 変数関数における 2 階導関数に対応するものである．

定義 5.6. 対称行列 $H_f(\boldsymbol{x}) := \begin{pmatrix} f_{xx}(\boldsymbol{x}) & f_{xy}(\boldsymbol{x}) \\ f_{xy}(\boldsymbol{x}) & f_{yy}(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}$ を関数 $f(\boldsymbol{x})$ の **Hesse 行列**という．

例題 5.7. $f(x, y) = \sin(x + y)$ の，原点 $(0, 0)$ における 3 次の Taylor 展開を求めよ．

(考え方) 1 変数関数の Taylor 展開を利用する．解答略．

11 月 7 日．

[*1] スペースの関係で引数 $(\boldsymbol{a})$ を省略している．また o は $o(\| \boldsymbol{h}^2 \|)$ の略である．

5.2　多変数関数の極値

定義 5.8. 2 変数関数 $f(x, y)$ に対し，点 $\boldsymbol{a}$ に十分近いところでは常に $f(\boldsymbol{a}) > f(\boldsymbol{x})$ をみたすとき極大，常に $f(\boldsymbol{a}) < f(\boldsymbol{x})$ をみたすとき極小という．2 つを合わせて極値といい，また等号を許すときは広義の極値という．

<u>1 変数のとき</u> $x = a$ が極値ならば $f'(a) = 0$ であり，さらに極大 $\Leftrightarrow$ $f''(a) < 0$, 極小 $\Leftrightarrow$ $f''(a) > 0$ であった．ここで $f(a + h) = f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2} f''(a)h^2 + o(h^2)$ であることを思い出そう．極値であることの必要条件は Taylor 展開の 1 次の項の係数が関係しており，極大極小の情報は 2 次の項が関係している．

定義 5.9. $\nabla f(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$ となる $\boldsymbol{a}$ を f の停留点という[*2]．

命題 5.10. $f(\boldsymbol{x})$ が点 $\boldsymbol{a}$ で広義の極値ならば，$\boldsymbol{a}$ は f の停留点である．

注意 5.11. 停留点は極値の候補を与えるが，必ずしも極値になるとは限らない．また，$f(x, y) = x^2 - y^2$ のように，1 変数では見られなかった現象も起きるようになる．実際，$f_x = 2x$, $f_y = -2y$ なので停留点は原点のみ．この関数は原点において，x 軸上では極小になるが，y 軸上では原点は極大になる[*3]ので，$f(\boldsymbol{x})$ は極値を持たない．実は Hesse 行列を調べることで極値を判定できる．

定義 5.12. 対称行列 $T = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & c \end{smallmatrix}\right)$ に対して，

(1) 正定値 $\Leftrightarrow$ 固有値がすべて正 $\Leftrightarrow$ $a > 0, \det T > 0$
(2) 負定値 $\Leftrightarrow$ 固有値がすべて負 $\Leftrightarrow$ $a < 0, \det T > 0$
(3) 不定符号 $\Leftrightarrow$ 正負の固有値を持つ $\Leftrightarrow$ $\det T < 0$

定理 5.13. f の停留点 $\boldsymbol{a}$ に対して，(1) $H_f(\boldsymbol{a})$ が正定値 $\Leftrightarrow$ 点 $\boldsymbol{a}$ で極小，(2) $H_f(\boldsymbol{a})$ が負定値 $\Leftrightarrow$ 点 $\boldsymbol{a}$ で極大，(3) $H_f(\boldsymbol{a})$ が不定符号 $\Leftrightarrow$ 点 $\boldsymbol{a}$ は鞍点となる．ただし，$\det H_f(\boldsymbol{a}) = 0$ のときは何もわからない．

例題 5.14. $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ の極値を求めよ．

(考え方) まず $\nabla f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ ($f_x = f_y = 0$) を解き，極値の候補 (停留点) を求める．そして，それらの各点に対して $H_f(\boldsymbol{a})$ を調べ，判定する．解答略．

<u>**まとめ**</u> (1) なめらかな多変数関数は Taylor 展開を持つ．(2) 多変数関数の極値問題では 1 変数にはなかった現象 (**鞍点**) が起こる．(3) 極値判定には **Hesse 行列**を使う．

[*2] つまり $f_x(\boldsymbol{a}) = f_y(\boldsymbol{a}) = 0$ となる点．

[*3] このような点を**鞍点**という．

演習問題 5

問題 1. 次の関数の原点における Taylor 展開を，4 次の項まで求めよ．

(1) $e^x \log(1+y)$　(2) $e^{2x}\cos x$

(3) $\sqrt{1-x^2-y^2}$　(4) $\sin x \cos y$

問題 2.† 次の関数の停留点を求めよ．また，Hesse 行列も求め，その行列式を計算せよ．

(1) $x^3+y^3-3axy \quad (a \in \mathbb{R})$　(2) x^y

(3) $\sin\dfrac{y}{x}+\sin(xy)$　(4) $\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

問題 3. 次の関数の極値を求めよ．

(1) $x^2+xy+y^2-4x-2y$

(2)† $e^{-x^2-y^2}(2x^2+y^2)$

(3)† $xy+\dfrac{8}{x}+\dfrac{8}{y}$

(4)* $\sin x+\sin y+\cos(x+y)$
$(-\pi \le x, y \le \pi)$

(5)* $x^2+xy+y^2+\dfrac{3(x+y)}{xy}$

問題 4.* n 次同次多項式 $f(x,y)$ に対し，次を示せ．

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=nf.$$

鞍点という単語は，英語の a saddle point の直訳です．サドルといえば，今の時代は自転車が連想されますが，元々は乗馬用の鞍（くら）を意味する単語でした．普段は使われなくなった言葉も，このような専門用語に残っていると考えると何か不思議な感じがします．

私が数学用語から存在を知った単語に「箙」というものがあります．英語の a quiver の訳で，日本語としての意味は “矢を入れて背に負う道具” になります．さて，この漢字の読み方はわかりますか？

小レポート

(1) 次の関数の原始関数を一つ求めよ．

$$f_1(x)=\frac{1}{x^2+1},\quad f_2(x)=\frac{2x}{x^2+1},$$
$$f_3(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad f_4(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

(2) 2 変数関数 $f(x,y)=x^3+y^3-3x-3y$ に対して，極値および鞍点を求めよ．

注意． (1) f_2 以外は逆三角関数，双曲線関数に関する積分である．(2) 例題 4.11 の解法を参照のこと．

小レポートについて． 次回の講義の際に提出すること．原則として期限を過ぎての提出は認めないが，やむを得ない事情がある際は，必ずその旨を**期限日までにメールにより**連絡すること．

事務連絡 11 月 28 日は講義担当者の出張のため休講になります．そしてその次の週の 12 月 5 日に中間試験を実施します．