線形代数学・同演習 A

演習問題 6

1. 平面 P は $\langle \boldsymbol{a} | \boldsymbol{x} \rangle = d$ とかける．点 $\boldsymbol{x}_0$ は平面 P 上にあるので $\langle \boldsymbol{a} | \boldsymbol{x} \rangle = d$ をみたすので，これらを辺々引けば，内積の線形性より $\langle \boldsymbol{a} | \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0 \rangle = 0$ となる．
2. θ を 2 つのベクトルのなす角とする．
   (1) $\cos\theta = \frac{4}{5}$ (2) $\cos\theta = \frac{11}{14}$ (3) $\cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{3}$ (4) $\cos\theta = 0$ (直交している)
3. $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ($t \in \mathbb{R}$ はパラメータ)
4. $2y + z = 3$
5. (1) $x - 2y + z = 0$ (2) $y + z = 1$ (3) $8x + 14y + 9z = 29$ (4) $bcx + cay + abz = abc$
6. (a) 求める平面は $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ なので，標準形に戻せば $5x + 11y - 2z = -58$．(b) $5x + 11y - 2z = 3$ (求める平面は直線 l_1, l_2 と平行なので (a) と同じ法線ベクトルを持つ)．
7. 原点と平面との距離は $\frac{1}{3}$．
   平面において原点と直線との距離を与える方向は，直線と垂直になる方向であったように，3 次元空間において原点と平面との距離を与える方向は平面に沿う方向と垂直な方向である．[*1]それは問題 2 より法線ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ である．そこで，原点と平面との距離を d で表すと，空間上の点 $d \cdot \frac{\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|}$ は平面上にあるので，$\left\langle \boldsymbol{a} \middle| d \cdot \frac{\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|} \right\rangle = 1$ を満たす．これより $d = \frac{1}{\|\boldsymbol{a}\|} = \frac{1}{3}$．
8. $\sqrt{\frac{26}{3}}$．$x = 1 + s,\ y = -5 - s,\ z = 2 + s$ なので，$d(s) := (1+s)^2 + (-5-s)^2 + (2+s)^2$ が最小になるような s を求めればよい．
9. (1) $(0, -8, 0)$　(2) $(1, 1, -2)$　計算方法は次回の演習問題を参照のこと．
10. ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ に対して，$\rho(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix}$ とすれば，

$$\rho(\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}) = [\rho(\boldsymbol{x}), \rho(\boldsymbol{y})], \quad \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y} = \rho(\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}$$

などが成り立つ．他にも四元数とも関係があって，調べてみると面白い．

---

5 月 23 日分 (凡例：無印は基本問題，† は特に解いてほしい問題，∗ は応用問題)

講義用 HP: http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~h-nakashima/lecture/2017LA.html

[*1] 後期に微積分で習う偏微分を使っても求めることができる．