線形代数学・同演習 B

11 月 15 日分　演習問題[*1]

1. $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ とする．このとき，以下の基底に関する T_A の表現行列をそれぞれ求めよ．

   (1) R^2 の基底は $[\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}]$，$\mathbb{R}^3$ の基底は $[\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}]$

   (2) R^2 の基底は $[\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}]$，$\mathbb{R}^3$ の基底は $[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}]$

2.† $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ とする．$\mathbb{R}^3$ の基底をいずれも次のものとするとき，この基底に関する T_A の表現行列をそれぞれ求めよ[*2]．

$$(1)\ [\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}] \qquad (2)\ [\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}]$$

3.† $U = \mathbb{R}[x]_3$, $V = \mathbb{R}[x]_2$ とし，写像 $T\colon U \to V$ を $T\colon p(x) \mapsto p'(2x+1)$ で定める[*3]．

   (1) T は線形写像となることを示せ．

   (2) U, V の標準基底 ($[x^2, x, 1]$ および $[x, 1]$) に関しての表現行列を求めよ．

   (3) U, V の基底をそれぞれ $[(x+1)^2, x+1, 1]$, $[x+1, 1]$ としたときの表現行列を求めよ．

4.* 線形写像 $T\colon U \to V$ が全射・単射および全単射であることを以下のように定義する：

   T が全射 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 任意の V の元 $\boldsymbol{v}$ に対して $T(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{v}$ となる $\boldsymbol{u} \in U$ が存在する．

   T が単射 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ U の任意の二元 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}'$ に対して $T(\boldsymbol{u}) = T(\boldsymbol{u}')$ ならば $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}'$ となる．

   T が全単射 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ T が全射かつ単射

   また T が全単射であるとき U と V は同型であるという．以下を示せ．

   (1) T が全射 $\Leftrightarrow \dim \operatorname{Im} T = \dim V$　　(2) T が単射 $\Leftrightarrow \ker T = \{\boldsymbol{0}\}$

   (3) 任意の n 次元実ベクトル空間 U は，n 次元数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ と同型になる．

・以下は旧課程における大学入試問題です．講義の記号に合わせて文章を変えています．

5.* (2009 年京都大学 (理系・前期) より)

   $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2, \mathbb{R})$ を $\det A = 1$ を満たす行列とする．自然数 n に対して平面上の点 $\boldsymbol{x}_n \in \mathbb{R}^2$ を $\boldsymbol{x}_n = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ により定める．$||\,\boldsymbol{x}_1\,|| = ||\,\boldsymbol{x}_2\,|| = 1$ であるとき，すべての n に対して $||\,\boldsymbol{x}_n\,|| = 1$ であることを示せ．[*4]

6.* (2008 年大阪大学 (理系・前期) より)

   O を 2 次の零行列，E を 2 次の単位行列とする．また 2 次の正方行列 A_i $(i = 0, 1, 2, \dots)$ を

$$A_0 := O, \quad A_n := B + A_{n-1}C \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

   で定める．ただし，B と C は 2 次の正方行列である．

   (1) $A_n(E - C)$ を B と C を用いて表わせ．

   (2) $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ とするとき，A_{3n} を求めよ．

[*1] 凡例：無印は基本問題，† は特に解いてほしい問題，$*$ は応用問題．

[*2] つまり，$T_A\colon U \to V$ としたとき，$U = V$ なので，その基底として同じものをとる．

[*3] $p(x)$ を微分した $p'(x)$ において，$x \mapsto 2x+1$ としたもの．

[*4] ヒント：回転行列と Cayley-Hamilton の定理．ここで $\boldsymbol{x} = {}^t(x, y)$ に対して $||\,\boldsymbol{x}\,|| := \sqrt{x^2 + y^2}$ である．