微分積分学・同演習 A

6 月 6 日分　小テスト

学籍番号：　　　　　　　　　　　　　　氏名：

$\sin x$, $\cos x$ の Taylor 展開を利用して，$\tan x$ の Taylor 多項式を 5 次の項まで求めよ．(ヒント：$\tan x$ は奇関数なので $\tan x = a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + o(x^5)$ とかける．ここで $\tan x \cos x = \sin x$ にそれぞれの Taylor 多項式を代入して係数比較を行う．)

解) まず $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$ および $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$ であることに注意．$\tan x \cos x$ の Taylor 展開を計算すると，

$$\begin{aligned}\tan x \cos x &= (a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + o(x^5)) \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right) \\ &= a_1 x + \left(\frac{a_1}{2} + a_3\right) x^3 + \left(\frac{a_1}{4!} - \frac{a_3}{3!} + a_5\right) x^5 + o(x^5)\end{aligned}$$

となる．これが $\sin x$ の Taylor 展開と等しいので，$\sin x$ の Taylor 展開と係数比較することにより，

$$a_1 = 1, \qquad \frac{a_1}{2} + a_3 = -\frac{1}{6}, \qquad \frac{a_1}{4!} - \frac{a_3}{3!} + a_5 = \frac{1}{5!}$$

となる．これを解けば $a_1 = 1$, $a_3 = \frac{1}{3}$, $a_5 = \frac{2}{15}$ となるので，

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5).$$

次ページに $o(x^n)$ についての解説有り．

※講義や講義内容に関して，意見・感想・質問等を自由に記述してください．

$o(x^n)$ **の計算について．**

講義でも述べましたが，$o(x^n)$ は普通の関数と扱い方が異なります．イメージとしては，x^n よりも速く 0 に収束する関数をまとめて $o(x^n)$ と書くというもので，関数というよりも，関数群[*1]やあるいはいっそのこと集合だと思うと理解しやすいかもしれません．なので，先程の小テストの問題で現れた

$$o(x^5) + \frac{a_3x^7}{4!} - \frac{a_5x^7}{2} + \frac{a_5x^9}{4!} + o(x^9)$$

などは，各項はすべて x^5 よりも速く 0 に行く関数であるので，これらをまとめて

$$o(x^5)$$

と書いてしまうわけです ($o(x^5)$ に吸収される)．$o(x^5)$ という記号を用いるときに想定するのは x^5 で割ったときに $x \to 0$ とすることなので，精度の良い項 ($o(x^{10})$ など) があっても，比較するのは x^5 なので，それよりも精度が良くても仕方がないわけです．大事なのは x^5 と比較したときに 0 に行くかどうかなので，x^5 と比較したときに 0 に行くものをまとめて $o(x^5)$ と書くことにするのです．

[*1] 数学用語の群ではなく，‘むれ’ というニュアンスで．