微分積分学・同演習 A

演習問題 3

1.† 任意に $\varepsilon > 0$ が与えられたとする．

(1) $\delta = \min(\varepsilon/19, 1)$ とおくと，$0 < |x-2| < \delta$ のとき

$$|x^3 - 8| = |x-2| \cdot |(x-2)^2 + 6(x-2) + 12| < 19\delta \le \varepsilon.$$

(2) $\delta = \min(\varepsilon/6, 1)$ とおくと，$0 < |x-2| < 6$ のとき

$$|(x^2+x) - 6| = |(x-2)^2 + 5(x-2)| \le |x-2| \cdot |(x-2)+5| < 6\delta \le \varepsilon.$$

(3) $\delta = \varepsilon$ とおくと，$0 < |x-1| < \delta$ のとき $x \neq 1$ であるので，

$$\left| \frac{x^2-1}{x-1} - 2 \right| = |x-1| < \delta = \varepsilon.$$

2. (1) $\frac{7}{10}$ (2) $\frac{7}{2}$ (3) $-\frac{1}{5}$

(1) $\frac{2x^2-x-6}{3x^2-2x-8} = \frac{(2x+3)(x-2)}{(3x+4)(x-2)}$ より．(2) $\frac{x^2+5x-6}{x^2-1} = \frac{(x+6)(x-1)}{(x+1)(x-1)}$ より．

3. (1) 2 (2) $\frac{1}{2}$ (3) 1

$$\begin{aligned}(1)\ \sqrt{x^2+2x-3} - (x-1) &= \frac{(x^2+2x-3) - (x-1)^2}{\sqrt{x^2+2x-3} + (x-1)} \\ &= \frac{4 - 1/x}{\sqrt{1 + 2/x - 3/x^2} + (1 - 1/x)} \\ &\longrightarrow \frac{4}{1+1} = 2 \quad (x \to +\infty).\end{aligned}$$

$$(2)\ \frac{\sqrt{x^2+x+1} - 1}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} = \frac{x^2+x}{2x} \cdot \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{x^2+x+1} + 1} \longrightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{1+1}{1+1} = \frac{1}{2} \quad (x \to 0)$$

4.† (1) 連続．この関数は $f(x) = -x + 1/2$ $(0 \le x \le 1/2)$, $x - 1/2$ $(1/2 < x \le 1)$ とかける．まず区間 $[0, 1/2)$ および区間 $(1/2, 1]$ において．任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta = \varepsilon$ としたとき，$0 < |x-a| < \delta$ ならば $|f(x) - f(a)| = |x-a| < \delta = \varepsilon$ より，これらの区間で連続．また $a = 1/2$ のとき，$a - \delta < x < a$ において $|f(x) - f(1/2)| = |x - 1/2| < \varepsilon$, $a < x < a + \delta$ において $|f(x) - f(1/2)| = |x - 1/2| < \varepsilon$ であるので $\lim_{x \to 1/2+0} f(x) = \lim_{x \to 1/2-0} f(x) = 0 = f(1/2)$．これより f は $x = 1/2$ でも連続ゆえ区間 $[0, 1]$ で連続.

---

4 月 25 日分 (凡例：無印は基本問題，† は特に解いてほしい問題，$*$ は応用問題)

講義用 HP: http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~h-nakashima/lecture/2017C.html

(2) 連続でない．$\lim_{x\to 1/2+0} f(x) = +\infty$ となるため，$x = 1/2$ で連続でない．

(3) 連続．

$x \neq 3/4$ のときは $f(x) = 4x + 3$ なので連続．またこのとき $\lim_{x\to 3/4} f(x) = 6 = f(3/4)$ であるので，区間 $[0, 1]$ で連続である．

(4) 連続．問題となるのは $x = 0$ のときであるが，$|x\sin(1/x)| \leq |x| \to 0$ $(x \to +0)$ なので，$\lim_{x\to +0} f(x) = f(0)$.

(3) は (1) と同様なので省略．(4) は，定理 3.13 を使う．

5. (1) 有界でない ($x \to +0$ で発散する)

(2) 有界 (任意の x に対して $-1 \leq \sin x \leq 1$ であることより)

(3) 有界でない ($x \to +0$ で発散する)

(4) 有界 (問題となるのは $x \to +0$, $1-0$ のときであるが，それぞれ $f(x) \to 1$, $(\sin 1)/2$ となり，有界)

6. (1) $+\infty$ (2) $-\infty$ (3) 1 (4) 0

$\lim_{+0} e^{1/x} = +\infty$, $\lim_{x\to -0} e^{1/x} = 0$ より．

7. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$\delta = \min(\varepsilon/((|a|+1)^n - |a|^n), 1)$ とすると，$0 < |x-a| < \delta$ のとき

$$
\begin{aligned}
|x^n - a^n| &= \left|\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} a^k (x-a)^{n-k}\right| \\
&\leq |x-a| \cdot \left|\sum_{k=0}^{n1} \binom{n}{k} |a|\,|x-a|^{n-k-1}\right| \\
&\leq \delta \left|\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} |a|^k - |a|^n\right| \\
&= ((|a|+1)^n - |a|^n)\delta < \varepsilon.
\end{aligned}
$$

あとは多項式は $1, x, x^2, \ldots, x^n$ のスカラー倍と和でかけることより分かる．

8.* ある正の数 $\varepsilon > 0$ が存在して，どんな正の数 $\delta > 0$ に対しても $|x-a| < \delta$ かつ $|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$ となる．