線形代数学・同演習 B

1 月 17 日分　演習問題[*1]

1. 次の $\mathbb{R}^2$ の基底 $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$ を Gram–Schmidt の直交化法により直交化せよ．

$$(1)\ \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \quad (2)\ \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad (3)\ \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (4)\ \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

2.†　次の $\mathbb{R}^3$ の基底 $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)$ を Gram–Schmidt の直交化法により直交化せよ．

$$(1)\ \begin{pmatrix} 1 & -6 & 3 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad (2)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3)\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (4)\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.†　次の $\mathbb{R}[x]_2$ の基底を Gram–Schmidt の直交化法により直交化せよ．ただし内積は $(\,f\,|\,g\,) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$ とする．
   (1) $p_1(x) = 1,\ p_2(x) = x,\ p_3(x) = x^2$.
   (2) $q_1(x) = x^2,\ q_2(x) = x,\ q_3(x) = 1$.
   (3) $r_1(x) = -x,\ r_2(x) = -x^2 + x,\ r_3(x) = -x^2 + x - 1$.

4. $\mathbb{R}^2$ の正規直交基底は次の形のもので尽くされることを示せ．

$$(1)\ \boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix},\ \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \qquad (2)\ \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \end{pmatrix}$$

5. 2 次の直交行列をすべて求めよ．

6.†　任意の 3 次正則行列 A は，ある直交行列 P と上三角行列 U を用いて $A = PU$ という積でかけることを示せ[*2].

7.*　整数 $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ に対して $H_n(x) := (-1)^n e^{x^2} \left(\frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \right)$ とおく[*3]．また，二つの多項式 f, g に対して $(\,f\,|\,g\,)_H := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)e^{-x^2}\,dx$ とする[*4].
   (1) $n = 0, 1, 2, 3, 4$ に対して $H_n(x)$ を求めよ．
   (2) 各 $H_n(x)$ は n 次の多項式となることを示せ．
   (3) $(\cdot|\cdot)_H$ は $\mathbb{R}[x]_n$（n は任意の自然数）の内積を定めることを示せ．
   (4) この内積 $(\cdot|\cdot)_H$ に関して，多項式 $H_n(x)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ は直交していることを示せ．

8.*　n 次直交行列全体のなす集合を $O(n)$ とするとき，$O(n)$ は群になることを示せ．すなわち，以下の 3 つが成り立つことを確かめよ．
   (1) $E_n \in O(n)$,
   (2) $P, Q \in O(n) \Rightarrow PQ \in O(n)$,
   (3) $P \in O(n) \Rightarrow P^{-1} \in O(n)$.

[*1] 凡例：無印は基本問題，† は特に解いてほしい問題，∗ は応用問題．
[*2] ヒント：Gram–Schmidt の直交化法．これは任意の n 次正則行列で成り立つ．
[*3] この多項式を Hermite 多項式という．
[*4] 重み e^{-x^2} を持つ積分である．