

線形代数学・同演習 B

小テスト 5 (11 月 7 日分)

学籍番号：

氏名：

次の行列 A に対して，(1) 線形写像 T_A の階数と退化次元，(2) 部分空間 $\text{Im } T_A$ の基底を一組，それぞれ求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -4 \\ 2 & -1 & -7 & 4 \\ 1 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

(考え方) まず A を簡約化する．

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -4 \\ 2 & -1 & -7 & 4 \\ 1 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -5 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -4 \\ 0 & -3 & -15 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -5 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) 線形写像 T_A の階数 $\text{rank } T_A$ は A を簡約化したものの主成分の数に等しいので， $\text{rank } T_A = 3$ ．また T_A の退化次元は，次元公式より

$$\text{null } T_A = \dim U - \text{rank } T_A = 4 - 3 = 1$$

であるので， $\text{null } T_A = 1$ ．

(2) T_A においては $\text{Im } T_A$ は A の列ベクトルから生成される部分空間であるので，主成分に対応する列ベクトルが基底となる．よって， $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ， $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ， $\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ を選べば良い．

講義や講義内容に関して，意見・感想・質問等を自由に記述してください．