

# 線形代数学・同演習 A

4 月 12 日分 演習問題

1. 次の行列の式を計算をせよ .

$$(1) \begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 1 & 8 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 9 & -1 \\ -4 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad (2) \quad 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (4) \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$(5) \begin{pmatrix} -6 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad (6) \quad \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(7) \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (8) \quad \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 \end{pmatrix}$$

2. 実数  $a, b, c, d$  に対して , 次の等式を確認せよ .

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (ad - bc) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. 次の等号が成り立つように ,  $x, y, u, v$  の値を定めよ .

$$(1) \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & v \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad (2) \quad \begin{pmatrix} x+y & x-y \\ u-1 & 2v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

4.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$  であるとき , 次の式を計算せよ .<sup>\*1</sup>

$$(1) A + B \quad (2) AB - BA \quad (3) (A + B)(A - B)$$

$$(4) A^2 \quad (5) B^2 \quad (6) A^2 - B^2$$

5. 次の行列に逆行列があれば , それを求めよ . ただし ,  $a, d \neq 0$  で ,  $\theta$  は任意の実数とする .

$$(1) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (2) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad (3) \quad \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \quad (3) \quad \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

6. 講義中の補題 1.8 で挙げられている行列の諸性質を証明せよ . 行列のサイズは適切に指定すること . 例えば (1) では , 行列  $A, B, C$  をそれぞれ  $(m, n)$  型 ,  $(n, r)$  型 ,  $(r, s)$  型の行列とする , など .

7. 2 つの行列  $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & x \end{pmatrix}$  において ,  $P$  は逆行列  $P^{-1}$  を持つとする .  $B = P^{-1}AP$  とするとき ,  $B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$  となるように実数  $x, a, b$  の値を定めよ .

<sup>\*1</sup> (3) および (6) から ,  $(A + B)(A - B) \neq A^2 - B^2$  であることが確認できる . これは  $AB \neq BA$  であるため .