問題

次の数列はある法則に従っています．この数列の次の数は何でしょう？

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, ...$$

見るからに Fibonacci 数列なので答えは 13 だと考える人がほとんどでしょう．でも，果たしてそうなのでしょうか．Fibonacci 数列とは異なる法則で，最初の数項が上記の数列になるものを作れないでしょうか.

実際にそのような数列を作ってみましょう．簡単のため，$c_1, \ldots, c_6$ を上記の数列として α は任意の数とします．目標は，一般項が n に関する多項式で与えられる数列 a_n で，$a_i = c_i$ $(i = 1, \ldots, 6)$, $a_7 = \alpha$ となるものを構成することです．もし，多項式 $q_i(x)$ $(i = 1, \ldots, 7)$ で

$$q_i(n) = \delta_{in} \quad (n = 1, \ldots, 7); \quad \text{つまり } q_i(n) = 1 \ (i = n), \quad q_i(n) = 0 \ (i \neq n)$$

を満たすものが存在したとすると，それらの線形結合をとったもの

$$a_n := c_1 q_1(n) + c_2 q_2(n) + \cdots + c_6 q_6(n) + \alpha q_7(n) \tag{1}$$

は確かに n に関する多項式で，しかも $a_i = c_i$ $(i = 1, \ldots, 6)$ と $a_7 = \alpha$ を満たします．問題はどうやって $q_i(x)$ たちを構成するかですが，例えば $q_1(x)$ ならば,

$$\begin{aligned} q_1(x) &:= \frac{(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)}{(1-2)(1-3)(1-4)(1-5)(1-6)(1-7)} \\ &= \frac{1}{6!}(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)(x-7) \end{aligned}$$

とすればよいのです[1)]．このように，始めの数項は Fibonacci 数列と同じであるような数列を作ることができるのです.

因みに，式 (1) はベクトル空間 $\mathbb{R}[x]_6$ の基底として $q_1, \ldots, q_7$ を選んだものになっています．この基底を選ぶことにより，$x = 1, 2, \ldots, 7$ での値が簡単に計算できるようになっており，基底を取り替えることの便利さが感じられるかと思います[2)].

1) この手法は Lagrange の補間公式と呼ばれるものになります．これは，与えられた $n+1$ 個の点で指定した値を取るような 1 変数 n 次多項式を求めるための手法です.

2) 同じ数列を，連立一方程式 $p(i) = c_i$ $(i = 1, \ldots, 7)$，ただし $p(x)$ は 6 次多項式，を解くことにより得ることもできますが，計算が大変です.