

線形代数学・同演習 B

後期中間レポート (12 月 13 日出題分)

レポートの書き方についての注意事項

1. 学籍番号および氏名を忘れずに書くこと。
2. レポート用紙は自由です。市販のレポート用紙でなくても、普段使っているルーズリーフでもよいです。ただし、ばらばらにならないようにステープラー等で綴じるようにしてください。
3. 丁寧に書くよう心掛けてください。時々、解読に時間が掛かるものがあったりします。レポートはあくまでも他人に見てもらうものですので、最低限読めるように書いてください。
4. 用紙を使い惜しまないようにしてください。一頁にむりやり詰め込んで書いてしまうと、どの問題について記述しているのかを判別することが難しくなります。
5. ノート・教科書などを参考にしないで構いません。

1 A を 3 次の (実) 正方行列とし、その固有値の一つが $\lambda \in \mathbb{R}$ であるとする。また、固有値 λ に対する A の固有空間を $W(\lambda; A)$ とする。

- (1) $W(\lambda; A)$ の定義を書け。
- (2) ベクトル空間 V の部分集合 W が、 V の部分空間となるための条件を書け。
- (3) $W(\lambda; A)$ は \mathbb{R}^3 の部分空間となることを示せ。

2 \mathbb{R}^4 において 5 本のベクトル a_1, \dots, a_5 を次のように定めるとき、以下の問いに答えよ。

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad a_4 = \begin{pmatrix} 13 \\ 1 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad a_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

- (1) 行列 $A = (a_1, \dots, a_5)$ を簡約化せよ。
- (2) ベクトルの組 a_1, \dots, a_5 における線形独立なものの最大個数 r と、それを与える線形独立なベクトルの組を一組求めよ。
- (3) 行列 A の核 $\ker(A)$ の基底を一組求めよ。

3 $V = \mathbb{R}[x]_2$ とし、その上の線形変換 T を $T: p(x) \mapsto p'(x) + p(0)x$ により定める。

- (1) V の基底 $[x^2, x, 1]$ に関する線形変換 T の表現行列 A を求めよ。
- (2) T の階数と退化次元を求めよ。
- (3) 多項式の組 $[x^2 + x, x^2 + 2x + 1, x + 2]$ は V の基底になることを示せ。
- (4) 線形変換 T の (3) の基底に関する表現行列 B を求めよ。

4 次の行列に対して、(i) 固有多項式、(ii) 固有値および対応する固有空間、をそれぞれ求めよ。

$$(1) \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$