線形代数学・同演習 B

小テスト 10　(1 月 9 日分)

学籍番号：　　　　　　　　　　　　　　氏名：

$V = \mathbb{R}[x]_2$ とする．2 つの多項式 $p(x) = x^2$, $q(x) = x$ と直交する (零多項式ではない) 多項式 $f(x)$ を一つ求めよ．ただし，V の内積は次で与えられているとする．

$$(\,f\,|\,g\,) := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx \quad (f, g \in V).$$

(考え方) 求める多項式を $f(x) = ax^2 + bx + c$ とおく．これが $p(x)$ と $q(x)$ と直交するので，次の 2 つの条件を満たす: $(\,f\,|\,p\,) = 0$, $(\,f\,|\,q\,) = 0$. これは a, b, c に関する連立一次方程式なので，それを解けばよい．

解． $f(x) = ax^2 + bx + c$ とすれば，

$$(\,f\,|\,p\,) = \int_{-1}^{1} (ax^2 + bx + c)x^2\,dx = \left[\frac{ax^5}{5} + \frac{bx^4}{4} + \frac{cx^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{5}\,a + \frac{2}{3}\,c,$$

$$(\,f\,|\,q\,) = \int_{-1}^{1} (ax^2 + bx + c)x\,dx = \left[\frac{ax^4}{4} + \frac{bx^3}{3} + \frac{cx^2}{2}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3}\,b.$$

よって，次の連立一次方程式の非自明な解を求めればよい (適当に定数倍をしている).

$$3a + 5c = 0, \quad b = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

これより，例えば $s = 1$ とした次の多項式が求める多項式になる ($s \neq 0$ ならばよい).

$$f(x) = 5x^2 + 0 \cdot x + (-3) = 5x^2 - 3. \quad \square$$

※講義や講義内容に関して，意見・感想・質問等を自由に記述してください．