線形代数学・同演習 B

11 月 22 日分　演習問題[*1]

1. 与えられた行列を A とおく．計算の仕方は，11 月 22 日分の小テストの解答を参考のこと．
   (1) $W(5,A)=\mathrm{Span}(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix})$, $W(-3,A)=\mathrm{Span}(\begin{pmatrix}-1\\7\end{pmatrix})$
   (2) $W(-1,A)=\mathrm{Span}(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix})$, $W(1,A)=\mathrm{Span}(\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix})$
   (3) $W(3,A)=\mathrm{Span}(\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix})$, $W(1,A)=\mathrm{Span}(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix})$
   (4) $W(2,A)=\mathrm{Span}(\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix})$, $W(-1,A)=\mathrm{Span}(\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix})$

2.† 与えられた行列を A とおく．
   (1) $W(3,A)=\mathrm{Span}(\begin{pmatrix}0\\-4\\1\end{pmatrix})$, $W(-2,A)=\mathrm{Span}(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix})$, $W(1,A)=\mathrm{Span}(\begin{pmatrix}6\\10\\1\end{pmatrix})$
   (2) $W(1,A)=\mathrm{Span}(\begin{pmatrix}7\\-1\\1\end{pmatrix})$, $W(0,A)=\mathrm{Span}(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix})$
   (3) $W(2,A)=\mathrm{Span}(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix})$, $W(-1,A)=\mathrm{Span}(\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix})$
   (4) $W(3,A)=\mathrm{Span}(\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix})$, $W(2,A)=\mathrm{Span}(\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix})$, $W(1,A)=\mathrm{Span}(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix})$
   (5) $W(2,A)=\mathrm{Span}(\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix})$, $W(1,A)=\mathrm{Span}(\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix})$
   (6) $W(-2,A)=\mathrm{Span}(\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix})$, $W(1,A)=\mathrm{Span}(\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix})$
   (7) $W(3,A)=\mathrm{Span}(\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix})$, $W(2,A)=\mathrm{Span}(\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix})$, $W(-1,A)=\mathrm{Span}(\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix})$
   (8) $W(-1,A)=\mathrm{Span}(\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix})$, $W(1,A)=\mathrm{Span}(\begin{pmatrix}-3\\-2\\2\end{pmatrix})$
   (9) $W(2,A)=\mathrm{Span}(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix})$, $W(-1,A)=\mathrm{Span}(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix})$

3.† 与えられた行列を A とおく．
   (1) $W(i,A)=\mathrm{Span}(\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix})$, $W(-i,A)=\mathrm{Span}(\begin{pmatrix}-i\\1\end{pmatrix})$
   (2) $W(1+i,A)=\mathrm{Span}(\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix})$, $W(1-i,A)=\mathrm{Span}(\begin{pmatrix}-i\\1\end{pmatrix})$
   (3) $W(2,A)=\mathrm{Span}(\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix})$, $W(0,A)=\mathrm{Span}(\begin{pmatrix}-i\\1\end{pmatrix})$

4. (1) $t^3-21t-68$, (2) $t^3+4t^2-4t-21=(t+3)(t^2+t-7)$, (3) $t^3+2t^2-7t-48$.

5. $g_A(t)=\det(tE_3-A)$ を地道に計算すればよい．t に関しての次数比較を行うと楽.

6.† $S=A+2E_2$, $T=(-A+8E_2)/23$.
   $p(t)=2t^2-12t^3+19t^2-29t+37$ とおく．$g_A(t)=t^2-6t+7$ であるが，$p(x)=(t^2-6t+7)(5+2t^2)+(2+t)$ であることより．また，S に関しては $S^2-10S+23E_2=O$ が成り立つので，$-23E_2=S(S-10E_2)$, つまり $S^{-1}=-(S-10E_2)/23=(-A+8E_2)/23$.

7. 与えられた行列を A とかく．(1) $A^{2k}=5^kE_2$, $A^{2k+1}=5^kA$, (2) $A^n=5^{n-1}A$ $(n\geq 1)$, $A^0=E_2$, (3) $A^n=3^{n-1}\begin{pmatrix}3-2n & 2n\\ -2n & 3+2n\end{pmatrix}$, (4) $A^n=f_nA+f_{n-1}E_2$ $(n\geq 2)$, ただし $\{f_n\}$ はフィボナッチ数列.
   (1),(2) はそのまま Cayley-Hamilton の定理より．(3),(4) は同定理より $A^n=a_nA+b_nE_2$ と書けることを踏まえ，$A^{n+1}=a_nA^2+b_nA$ において $A^2=\cdots$ を代入し漸化式をたてる.

[*1] 凡例：無印は基本問題，† は特に解いてほしい問題，$*$ は応用問題.