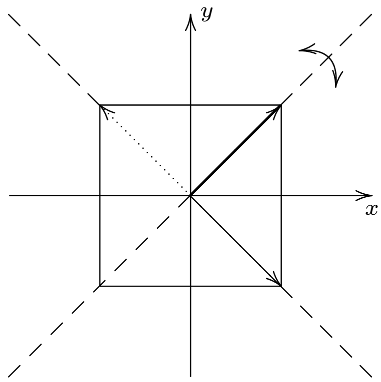
固有値・固有ベクトルについて

そろそろ，他の講義で固有値・固有ベクトルが出てきてもおかしくないので，ここで簡単に解説しておきます．行列 A に対して

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$$

を満たすベクトル $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ が存在するとき，λ を固有値と呼び，この $\boldsymbol{x}$ を λ に対応する固有ベクトルといいます．λ が固有値であれば，$(\lambda E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を満たすので，方程式 $\det(tE - A) = 0$ の解が固有値となります．そして固有ベクトルは，連立一次方程式 $(\lambda E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解です．

具体例として $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ で考えてみます．固有値は $\det(tE_2 - A) = t^2 - 1 = 0$ の解, つまり $\lambda = \pm 1$ になります．固有ベクトルは，$\lambda = 1$ のときは連立一次方程式 $\left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \boldsymbol{0}$ の解，つまり $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ であり，$\lambda = -1$ のときは，連立一次方程式 $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \boldsymbol{0}$ の解，つまり $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ となります．



図形的にみると，行列 A の作用は直線 $y = x$ に関する折り返しであって，固有ベクトル $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$(太線のベクトル) はこの折り返しで変化しません．また固有ベクトル $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$(単線のベクトル) は折り返しによって点線のベクトルに移りますが，これら二本のベクトルはいずれも同じ直線 $(y = -x)$ 上にあります．つまり，“固有ベクトルはその行列の作用によって方向を変えないベクトルである” ということになります．後期に学ぶベクトル空間の言葉を用いると，“固有ベクトルは行列の作用によって不変な部分空間の基底である” と明快に表現することができるようになります．

来週は中間試験です．

場所：1302 教室

試験範囲：行列の基本演算，連立一次方程式，平面・空間の幾何，線形写像．