微分積分学・同演習 A

演習問題 4

1. (1) $a_n > 0$ であり，

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_n(\sqrt{a_n^2+1}+1)} \leq \frac{a_n}{2} \leq \frac{a_1}{2^n} \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty)$$

より，$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

(2) 簡単のため $A_n := 2^{n+1}a_n$ とおく．単調減少することは

$$A_{n+1} = \frac{2}{\sqrt{a_n^2+1}+1} A_n \leq A_n$$

となることから分かる．0 でない実数に収束することを確認するために，$\log A_n$ が収束することを確認する ($A_n > 0$ は下に有界な単調減少列ゆえ収束することは分かっており，もし $\log A_n$ が発散すればそれは A_n が 0 に収束するときしか起こり得ないので．) そのために，次の事実「Cauchy 列は必ず収束する」を利用する[*1]．まず，

(1) $\log x$ は $x > 0$ で単調増加な関数である，
(2) $x > 1$ ならば $\sqrt{x} < x$ である，
(3) $\log(2+x) \leq \log 2 + x/2$ $(x > -2)$ である，
(4) $\log A_{n+1} - \log A_n = \log 2 - \log(\sqrt{a_n^2+1}+1)$ である

ことに注意する．さて，$\varepsilon > 0$ を任意にとり，自然数 N を $1/2^N < \varepsilon$ となるようにとる．任意の二つの整数 $m, n \geq N$ $(m \geq n)$ に対して，

$$\begin{aligned}
|\log A_m - \log A_n| &= \left| \sum_{k=n}^{m-1} \left(\log 2 - \log(\sqrt{a_k^2+1}+1) \right) \right| \\
&= \sum_{k=n}^{m-1} \left(\log(\sqrt{a_k^2+1}+1) - \log 2 \right) \\
&\leq \sum_{k=n}^{m-1} \bigl(\log(2 + a_k^2/2) - \log 2 \bigr) \\
&\leq \frac{1}{2} \sum_{k=n}^{m-1} a_k^2 \leq \frac{1}{2} \sum_{k=n}^{m-1} \frac{1}{2^k} \leq \frac{1}{2} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2^k} \\
&\leq \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2^l} = \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2^N} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

---

5 月 9 日分 (凡例：無印は基本問題，† は特に解いてほしい問題，$*$ は応用問題)

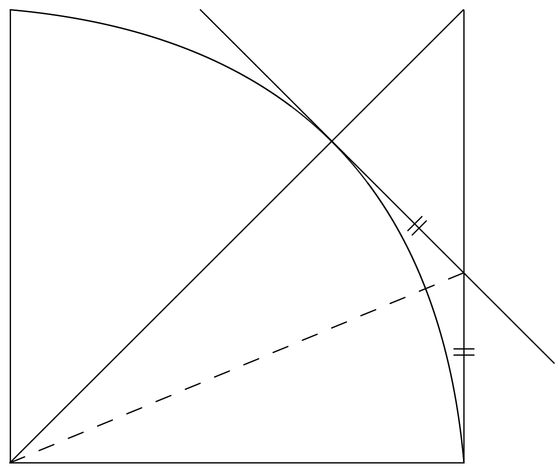
講義用 HP: http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~h-nakashima/lecture/2017C.html

[*1] Cuachy 列の定義などは教科書 p.30 の問題 3.22 を参照のこと．

これより $\log A_n$ は Cauchy 列であることがわかり，したがって収束するので，元の数列 A_n は 0 でない実数に収束することが分かる．
(3) $\lim_{n\to\infty} A_n = \pi$ である．この漸化式は $\tan x$ $(0 < x < \pi/2)$ の半角公式

$$\tan\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{\tan^2 x + 1} - 1}{\tan x}$$

から来ており，初項は $x = \pi/4$ に対応する．では A_n は何かというと，円周の半弧を外から近似する列になっている．



2. (1) 2 ($a_1 = \sqrt{2}$ が正しい初期値) (2) 2 (3) $\sqrt{2}$ (4) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
(3), (4) は偶数の部分列が上に有界な単調増加列，奇数の部分列が下に有界な単調減少列になることをまず示し，その収束先をそれぞれ l, l' として

$$l = 1 + \frac{1}{l'+1}, \quad l' = 1 + \frac{1}{l+1}$$

等の方程式を解いて求める．
3. ※ $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{A}{a_n}\right)$ が正しい漸化式です．
α に収束すると仮定すると，α は $\alpha = \dfrac{1}{2}\left(\alpha + \dfrac{A}{\alpha}\right)$，すなわち $\alpha = \pm\sqrt{A}$. $a_n > 0$ なので，収束するならば $\sqrt{A}$ しかありえないことがわかる．
$a_{n+1} - \sqrt{A} = \frac{(a_n - \sqrt{A})^2}{2a_n} \geq 0$ より，$0 \leq \frac{a_n - \sqrt{A}}{a_n} \leq 1$ $(n \geq 2)$ であるので，

$$a_{n+1} - \sqrt{A} = \frac{a_n - \sqrt{A}}{2} \cdot \frac{a_n - \sqrt{A}}{a_n} \leq \frac{a_n - \sqrt{A}}{2}.$$

これより

$$0 < a_{n+1} - \sqrt{A} < \frac{a_2 - \sqrt{A}}{2^{n-1}} \longrightarrow 0 \quad (n \to +\infty)$$

なので，はさみうちの原理より $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{A}$ である．

この漸化式は平方根の近似値を求めるのに利用される．

4. (1) $+\infty$ (2) 1 (3) $\pi^2/6$ (4) $+\infty$ (5) $1 - e^{-1/e}$ (6) e

(1) は教科書の例題 3.20 を参考のこと．(3) はバーゼル問題で探すと導出法が色々見つかる．(5), (6) は与えられた関数のグラフを書いてみるとよい．

5.† (i) が成立しない場合：$f(x) = x$ でよい．

(ii) が成立しない場合：区間を $I = (0, 1)$ として，関数としては例えば $f(x) = x$ でよい．

(iii) が成立しない場合：区間を $I = [0, 1]$ として，関数としては例えば $f(x) = x$ $(x \in [0, 1))$, 0 $(x = 1)$ とすると，最大値がない．

6.* 教科書 (p.31) の定理 3.25 において，系 2.17(教科書 p.16) を用いて，閉区間上の数列の極限値が元の閉区間に再び属することを利用している．しかし，開区間では，その上の数列の極限値は必ずしももとの開区間に属するとは限らない．例えば $a_n = 1/n$ は常に $a_n \in (0, 1)$ であるが，その極限は $0 \notin (0, 1)$ である．開区間においてこの性質が成り立たないのは「数列の極限が元の空間に属するとは限らないから」である．