線形代数学・同演習 B

1 月 17 日分　小テスト

学籍番号：　　　　　　　　　　　　　　氏名：

次の $\mathbb{R}^3$ の基底を Gram–Schmidt の直交化法を用いて直交化せよ.

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

解）

(1) $\boldsymbol{u}_1 = \dfrac{1}{\|\boldsymbol{v}_1\|}\boldsymbol{v}_1 = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

(2) まず $\boldsymbol{v}_2' = \boldsymbol{v}_2 - (\boldsymbol{v}_2 \,|\, \boldsymbol{u}_1)\,\boldsymbol{u}_1$ を計算する.

$$\boldsymbol{v}_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}(1\cdot 1 + 2\cdot 0 + 0\cdot 1)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

よって $\boldsymbol{u}_2 = \dfrac{1}{\|\boldsymbol{v}_2'\|}\boldsymbol{v}_2' = \dfrac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$

(3) まず $\boldsymbol{v}_3' = \boldsymbol{v}_3 - (\boldsymbol{v}_3 \,|\, \boldsymbol{u}_1)\,\boldsymbol{u}_1 - (\boldsymbol{v}_3 \,|\, \boldsymbol{u}_2)\,\boldsymbol{u}_2$ を計算する.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_3' &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}(1\cdot 1 + 0\cdot 0 - 2\cdot 1)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{18}(1\cdot 1 + 0\cdot 4 + 2\cdot 1)\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6+3-1 \\ 0+0-4 \\ -12+3+1 \end{pmatrix} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

よって $\boldsymbol{u}_3 = \dfrac{1}{\|\boldsymbol{v}_3'\|}\boldsymbol{v}_3' = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$

以上より，以下の $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ が求める正規直交基底である.

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

※講義や講義内容に関して，意見・感想・質問等を自由に記述してください.