

線形代数学・同演習 B

演習問題 8

1. 次の行列の固有値および対応する固有空間を求めよ．

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ 9 & 16 & 3 & 1 \\ -5 & -9 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- 2.[†] $V = \mathbb{R}[x]_n$ (n は自然数) とし, $T: V \rightarrow V$ を V 上の線形変換とする．このとき, 次のような部分集合は V の部分空間となるか．なるのならばそれを証明し, ならないのであればその理由を述べよ．

$$(1) \operatorname{Im}(T) \quad (2) \operatorname{Ker}(T) \quad (3) W := \{p(x) \in V; T(p(x)) = x\}$$

3. $V = \mathbb{R}[x]_1$ とする．次の線形変換 T_1, T_2 に対して, (i) 固有多項式, (ii) 固有値と対応する固有空間, をそれぞれ求めよ．

$$(1) T_1(p(x)) = xp'(x) \quad (2) T_2(p(x)) = p'(x) + p(0)x$$

4. a, b を任意の実数 (ただし $a \neq 0, 1, b \neq 0$) とする．また, 自然数 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して $\mathbb{R}[x]_n$ 上の線形変換 T_n を, $T_n(p(x)) := p(ax + b)$ により定義する．

(1) $n = 1$ のとき, T_1 の固有値と, 対応する固有空間を求めよ．

(2)[†] $n = 2$ のとき, T_2 の固有値と, 対応する固有空間を求めよ．

(3)* 一般の n に対して, T_n の固有値と, 対応する固有空間を求めよ．

- 5.[†] $V = \mathbb{R}[x]_2$ とする． V 上の線形変換 T の, 標準基底 $[x^2, x, 1]$ に関する表現行列 A が次で与えられているとき, T の固有値および対応する固有空間をそれぞれ求めよ．

$$(1) \begin{pmatrix} -3 & 0 & -12 \\ 0 & -2 & -15 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 3 & 10 & -21 \\ 3 & 6 & -11 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 6 & -1 & -5 \\ -5 & 2 & 5 \\ 5 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

6. A, B を n 次正方行列とし, さらに A は正則行列と仮定する^{*1}．このとき, AB の固有多項式と BA の固有多項式は一致することを示せ^{*2}．

12 月 12 日分 (凡例: 無印は基本問題, [†] は特に解いてほしい問題, * は応用問題)

講義用 HP: <http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~h-nakashima/lecture/2017LA.html>

^{*1} 実はこの仮定は不要である．

^{*2} よって, 特にそれぞれの固有値は重複度を込めて一致する．