# 微分積分学・同演習 A

## 演習問題 13

1.† $I_n := \displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)^n}$ $(n \in \mathbb{N})$ とおくとき，以下の問いに答えよ．

(1) $I_n$ を部分積分することにより，$I_{n+1}$ を $I_n$ を用いて表せ．

(2) (1) を利用して $I_2, I_3, I_4$ を求めよ．

2.* 正の実数 $p, q$ に対して $I_{p,q} := \int x^p(ax+b)^q\,dx$ ($a, b$ は正の実数) とおく．このとき，次の簡約公式が成り立つことを示せ*1．

$$(p+q+1)I_{p,q} = qbI_{p,q-1} + x^{p+1}(ax+b)^q, \quad a(p+q+1)I_{p,q} = -pbI_{p-1,q} + x^p(ax+b)^{q-1}.$$

3. ベータ関数 $B(s,t)$ $(s, t > 0)$ に関する次の等式を示せ．

$$(1) \quad B(s,t) = B(t,s) \qquad (2) \quad B(s+1,t) = \frac{s}{s+t}B(s,t)$$

$$(3) \quad B(s,t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^{2s-1}(\cos\theta)^{2t-1}d\theta$$

4. 広義積分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}x^\alpha\,dx$ をガンマ関数を用いて表せ．

5.* $I := \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$ を次の誘導に従って示せ．$S_n := \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n\,dx$ とおく．

(1) $1 < \dfrac{S_{2k}}{S_{2k+1}} < \dfrac{S_{2k-1}}{S_{2k+1}} = \dfrac{2k+1}{2k}$ を確認し，よって $\displaystyle\lim_{k\to\infty}\frac{S_{2k}}{S_{2k+1}} = 1$ を示せ．

(2) $S_{2k}S_{2k+1} = \dfrac{\pi}{4k+2}$ を示せ．よって (1) より $\displaystyle\lim_{k\to\infty}\sqrt{k}S_{2k+1} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ である*2．

(3) $S_{2k+1} = \displaystyle\int_0^1 (1-x^2)^k\,dx$, $S_{2k-2} = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^k}$ を示せ*3．

(4) 不等式 $1 - x^2 < e^{-x^2} < \dfrac{1}{1+x^2}$ $(x \neq 0)$ が成立することを示せ．

(5) 不等式 $2\sqrt{k}\displaystyle\int_0^1 (1-x^2)^k\,dx < I < 2\sqrt{k}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^k}$ を示せ*4．

以上より $2\sqrt{k}S_{2k+1} < I < 2\sqrt{k}S_{2k-2}$ であり，はさみうちの定理より所要の結果 $I = \sqrt{\pi}$ を得る．

---

7 月 25 日分 (凡例：無印は基本問題，† は特に解いてほしい問題，∗ は応用問題)

講義用 HP: http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~h-nakashima/lecture/2017C.html

*1 ヒント: $x^p(ax+b)^q = ax^{p+1}(ax+b)^{q-1} + bx^p(ax+b)^{q-1}$ を用いて変形し，部分積分を行う．

*2 この証明は解析概論（高木貞治著）から取った．$\sqrt{S_{2k}S_{2k+1}} = S_{2k+1}\sqrt{\frac{S_{2k}}{S_{2k+1}}}$ と見る．

*3 $S_n$ の積分において，前者は $t = \cos x$, 後者は $t = \cos x/\sin x$ と変数変換する．

*4 偶関数なので積分区間を $[0, +\infty)$ として考える．$x^2 = ky^2$ となるように変数変換し，(4) の不等式を利用する．ここで被積分関数が正ならば，$\int_0^1 < \int_0^{+\infty}$ となることに注意．