3　合成関数の微分

二つの関数 f, g が与えられたとき，これらの合成関数とは $(f \circ g)(x) := f\bigl(g(x)\bigr)$ のことで，その微分は

$$\frac{d}{dx}\left\{f\bigl(g(x)\bigr)\right\} = f'\bigl(g(x)\bigr) \cdot g'(x)$$

によって与えられた．本節ではこの合成関数の微分を多変数の場合へ一般化する．**考える関数は全てなめらか**とし，変数の数によって場合を分けて考える．

3.1　1 変数 +2 変数

1 変数関数 $f(t)$ と 2 変数関数 $g(x, y)$ が与えられたとき，合成関数 $F(x, y) := f\bigl(g(x, y)\bigr)$ について考える．

命題 3.1. $F(x, y)$ は x, y に関して偏微分可能で，

$$F_x(x, y) = f'\left(g(x, y)\right) \cdot g_x(x, y),$$
$$F_y(x, y) = f'\left(g(x, y)\right) \cdot g_y(x, y).$$

ベクトル表記は $\boxed{\nabla F(\boldsymbol{x}) = f'\bigl(g(\boldsymbol{x})\bigr)\, \nabla g(\boldsymbol{x}).}$

3.2　2 変数 +1 変数

2 変数関数 $f(x, y)$ において，変数 x, y がそれぞれ t に関する関数 $x = x(t)$, $y = y(t)$ になっているとする．このとき，合成関数 $F(t) := f\bigl(x(t), y(t)\bigr)$ について考える．見易くするために，$\boldsymbol{x}(t) = (x(t), y(t))$ とおく．

命題 3.2. $F(t) = f\bigl(\boldsymbol{x}(t)\bigr)$ は t に関する 1 変数関数で

$$\frac{dF}{dt}(t) = f_x\bigl(\boldsymbol{x}(t)\bigr)\, x'(t) + f_y\bigl(\boldsymbol{x}(t)\bigr)\, y'(t).$$

$x'(t)$, $y'(t)$ は t に関する導関数．$\boldsymbol{x}'(t) = (x'(t), y'(t))$ とおくと，ベクトル表記は $\boxed{\nabla f\bigl(\boldsymbol{x}(t)\bigr) \cdot \boldsymbol{x}'(t).}$

3.3　連鎖律

2 変数関数 $f(x, y)$ において, 変数 x, y が其々 u, v に関する 2 変数関数 $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ になっているとする．見易くするために, $\boldsymbol{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ とおく．このとき, 合成関数 $F(u, v) := f\bigl(x(u, v), y(u, v)\bigr)$ について考える．$\boldsymbol{u} = (u, v)$ とする．

定理 3.3. $F(\boldsymbol{u}) = f\bigl(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{u})\bigr)$ は u, v に関し偏微分可能で

$$F_u(u, v) = f_x(\boldsymbol{x}(u, v))x_u(u, v) + f_y(\boldsymbol{x}(u, v))y_u(u, v),$$
$$F_v(u, v) = f_x(\boldsymbol{x}(u, v))x_v(u, v) + f_y(\boldsymbol{x}(u, v))y_v(u, v).$$

変数 u, v に関する勾配を $\nabla_{\boldsymbol{u}}$ とすれば，ベクトル表記は

$$\boxed{\nabla_{\boldsymbol{u}} F(\boldsymbol{u}) = \nabla_{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{u})) \cdot \nabla_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{x}(\boldsymbol{u}).}$$

10 月 24 日.

注意 3.4. この性質は**連鎖律**と呼ばれる．次のように書けば印象的である．引数は適切に補うこと．

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial F}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}.$$

3.4　座標変換

連鎖律は座標変換を行うときに必要になる．

定義 3.5. $\mathbb{R}^2$ において，変換 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ $(r \geq 0,\ \theta \in [0, 2\pi))$ を極座標変換という．

例題 3.6. $f(x, y)$ に対して $F(r, \theta) := f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ とするとき，次を示せ[*1]．

$$F_r(r, \theta) = f_x \cdot \cos\theta + f_y \cdot \sin\theta,$$
$$F_\theta(r, \theta) = -f_x \cdot r\sin\theta + f_y \cdot r\cos\theta.$$

(考え方) 連鎖律を用いる．

注意 3.7. 座標変換する際に，従属変数を設定して $z = f(x, y) = F(r, \theta)$ とすると，$f_x = z_x$, $F_r = z_r$ などのように書けるので考えやすい．たとえば,

$$z_r = \frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} = z_x x_r + z_y y_r \quad \text{etc.}$$

極座標変換において，r, θ を x, y の関数と見ることも多い．簡単な計算から $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\tan\theta = \frac{y}{x}$ であるので，r_x, r_y や θ_x, θ_y も計算できる．

$$r_x = \cos\theta,\ r_y = \sin\theta,\ \theta_x = -\frac{\sin\theta}{r},\ \theta_y = \frac{\cos\theta}{r}.$$

例題 3.8. 例題 3.6 と同様の仮定の下で次を示せ．

$$(f_x)^2 + (f_y)^2 = (F_r)^2 + \frac{1}{r^2}(F_\theta)^2.$$

(考え方) 連鎖律を利用する．

(略解) $z = f(x, y) = F(r, \theta)$ とおけば，連鎖律から

$$z_x = z_r r_x + z_\theta \theta_x = z_r \cos\theta - z_\theta \tfrac{\sin\theta}{r},$$
$$z_y = z_r r_y + z_\theta \theta_y = z_r \sin\theta + z_\theta \tfrac{\cos\theta}{r}$$

なので，$(z_x)^2 + (z_y)^2 = (z_r)^2 + \frac{1}{r^2} \cdot (z_\theta)^2$ を得る．

定義 3.9. 3 次元空間の極座標変換は次で与えられる．

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta.$$

ここで，$r \geq 0$, $\theta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ である．幾何学的意味は教科書 p.138 の図を参照のこと．

まとめ (1) 多変数関数の合成関数の微分は**「連鎖律」**を用いて計算する．(2) 2 次元，3 次元空間の**極座標変換**.

[*1] f_x, f_y は引数 $(r\cos\theta, r\sin\theta)$ を省略している．引数を書くとはみ出してしまうため．

演習問題 3

問題 1. $z=f(x,y)$, $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ のとき，次式の独立変数 x,y を，r,θ に書き換えよ[*1].

$$(1)\quad z_x^2+z_y^2 \qquad (2)\quad z_{xx}+z_{yy}$$

問題 2. α を定数とし，$z=f(x,y)$ とおく．ここで $x=\xi\cos\alpha-\eta\sin\alpha$, $y=\xi\sin\alpha+\eta\cos\alpha$ とするとき，次式を証明せよ．

$$(1)\quad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)^2$$

$$(2)\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}$$

問題 3.† $z=f(x,y)$, $x=e^u\cos v$, $y=e^u\sin v$ のとき，次式を証明せよ．

$$z_{xx}+z_{yy}=e^{-2u}(z_{uu}+z_{vv}).$$

問題 4. $z=f(x,y)$, $x=\cosh u\cos v$, $y=\sinh u\sin v$ のとき，次式を証明せよ．

$$z_{xx}+z_{yy}=\frac{\cosh 2u-\cos 2v}{2}(z_{uu}+z_{vv}).$$

問題 5.† $z=f(x,y)$, $x=\dfrac{\xi}{\xi^2+\eta^2}$, $y=\dfrac{\eta}{\xi^2+\eta^2}$ のとき，次式を示せ．

$$(x^2+y^2)(z_{xx}+z_{yy})=(\xi^2+\eta^2)(z_{\xi\xi}+z_{\eta\eta}).$$

本日扱った連鎖律は，多変数関数の微積分を扱う上で非常に重要なものです．この講義では扱いませんが，偏微分方程式というものがあります．たとえば，時間 t と空間上の点 (x,y,z) に関する関数 $\varphi(x,y,z;t)$ に対して，次の方程式

$$\varphi_{tt}=c^2(\varphi_{xx}+\varphi_{yy}+\varphi_{zz})\quad (c\text{ は定数})$$

は波動方程式と呼ばれ，振動，音，光や電磁波など振動・波動現象を記述するにあたって基本となる方程式です．こういった方程式を解く際に，変数変換をする必要が生じることもあり，そのようなときに連鎖律が必要になってきます．因みに，Fourier 変換や Laplace 変換というものは，このような (偏) 微分方程式を解くための手段として非常に強力です．

[*1] つまり，連鎖律を使って，r,θ および z_r, z_θ などを使って表す．

小レポート

(1) 次の関数の原始関数を一つ求めよ．

$$f_1(x)=\frac{1}{\sin x},\quad f_2(x)=\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x},$$
$$f_3(x)=\frac{1}{1+\tan x},\quad f_4(x)=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

(2) $f(x,y)$ を C^1 級の 2 変数関数とし，$F(r,\theta):=f(r\cos\theta,r\sin\theta)$ とする．このとき，

$$f_{xx}+f_{yy}=F_{rr}+\frac{1}{r}F_r+\frac{1}{r^2}F_{\theta\theta}$$

成り立つことを示せ．

注意． (1) $t=\tan\frac{x}{2}$ または $t=\tan x$ と変数変換．(2) $z=f(x,y)=F(r,\theta)$ とし，連鎖律を用いる．

小レポートについて． 次回の講義の際に提出すること．原則として期限を過ぎての提出は認めないが，やむを得ない事情がある際は，必ずその旨を**期限日までにメールにより**連絡すること．

レポート課題

空間の極座標変換について，次の問いに答えよ．**(1)** r,θ,φ を x,y,z の関数と見て，それぞれに関する偏導関数を求めよ．**(2)** 三変数関数 $f(x,y,z)$ を極座標変換したものを $F(r,\theta,\varphi)$ と書く．このとき，次が成り立つことを，円柱座標を経由せずに[*1]示せ．$\Delta f:=f_{xx}+f_{yy}+f_{zz}$ としたとき，

$$\Delta f=F_{rr}+\frac{2}{r}F_r+\frac{1}{r^2}\left(F_{\theta\theta}+\frac{1}{\tan\theta}F_\theta+\frac{1}{\sin^2\theta}F_{\varphi\varphi}\right)$$

注意． (1) 合わせて $3\times3=9$ 個ある．(2) θ に関するものが煩雑になる．丁寧に，要領よく計算しないと計算ミスをしてしまう．

提出について． レポートの形式は自由だが，丁寧に作成すること．提出期限は **11 月 21 日の講義まで**．途中まででも良いので，自力で，できるところまで計算すること．くれぐれも他人の計算を丸写しなどはしないように．

[*1] 教科書の解法は円柱座標を経由するものである．