10　分散と高次モーメント

導入

今回は確率論におけるもう一つの重要な特徴量である分散について学ぶ．これはデータの散らばり具合を評価する際の指標となるものである．

確率変数 X とは，確率空間 Ω 上の可測関数 $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ であり，離散型の場合は確率分布表で

X の値	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$\cdots$	計
確率	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$	1

連続型の場合は確率密度関数 $f(x)$ を用いて

$$P(a \leqq X \leqq b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

となるものである．

10.1　分散の定義

二つの確率変数があったとき，それらの期待値が同じであっても，例えば一様分布と正規分布とは分布の仕方が大きく違う．そこで分布の様子を表すもう一つの指標である**分散**について紹介する．

定義 10.1

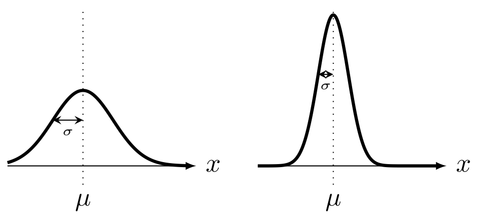
確率変数 X が与えられたとする．このとき期待値を $\mu = \mathbb{E}[X]$ と置くとき

$$V[X] := \mathbb{E}[(X-\mu)^2]$$

を，確率変数 X の**分散**という．

分散は，平均の周りの散らばりの度合いを表す指標である．分散が小さいときは平均の周りの値をとる確率が大きく，逆に分散が大きいときは平均より離れた値をとる確率が相対的に大きな分布になる．

分散大　　　　分散小



期待値と同様，積分 (もしくは無限級数) が発散して分散が存在しないこともある．

命題 10.2

確率変数 X の平均を μ とし，a, b を定数とする．

(1)　$V[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mu^2$

(2)　$V[aX+b] = a^2 V[X]$

証明． (1) 定義に従って計算をしていけば良い．

$$\begin{aligned} V[X] = \mathbb{E}[(X-\mu)^2] &= \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x^2 - 2\mu x + u^2) f(x)\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx - 2\mu \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx \\ &\quad + \mu^2 \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \\ &= \mathbb{E}[X^2] - 2\mu\cdot\mu + \mu^2 \cdot 1 = \mathbb{E}[X^2] - \mu^2. \end{aligned}$$

(2) $\mathbb{E}[aX+b] = a\mu + b$ より

$$\begin{aligned} V[aX+b] &= \mathbb{E}[(aX+b)^2 - (a\mu+b)^2] \\ &= \mathbb{E}[a^2(X-\mu)^2] = a^2\mathbb{E}[(X-\mu)^2] = a^2 V[X] \end{aligned}$$

となる．　□

この命題から，分散は一般には線形性を持っていないことが分かる．

演習問題 10.3. 次の確率分布について，その分散は存在するか．存在するならばその値を求めよ．

(1)　離散型確率分布
- (a)　n 個の値をとる一様分布
- (b)　二項分布 $B(n,p)$
- (c)　ポアソン分布 $\mathrm{Po}(\lambda)$

(2)　連続型確率分布
- (a)　区間 (a,b) 上の一様分布
- (b)　正規分布 $N(\mu,\sigma^2)$
- (c)　パラメータ $\lambda > 0$ を持つ指数分布
- (d)　パラメータ μ, σ を持つコーシー分布

10.2　高次モーメント

分散は大まかにいえば X^2 の期待値であった．これを拡張したものが**高次モーメント**である．

定義 10.4

X を確率変数とする．

(1) 非負整数 k に対して次の量

$$m_k := \mathbb{E}[X^k]$$

を確率変数 X の k **次モーメント**と呼ぶ．

(2) 次の関数を X の**モーメント母関数**という．

$$M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}].$$

注意． 平均・分散と同様に，k 次モーメントは存在しないこともある．またモーメント母関数は一般には原点の近傍のみで定義される関数である．分布によっては原点 $t=0$ 以外のすべての点で発散してしまう可能性もあることに注意する．

各 k 次モーメント m_k とモーメント母関数 $M_X(t)$ には次の関係がある．

命題 10.5

確率変数 X のモーメント母関数 $M_X(t)$ が存在すると仮定する．このとき，$M_X(t)$ は X の高次モーメントの指数的母関数，すなわち

$$M_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m_k}{k!} t^k$$

になっており，特に次が成り立つ．

$$\frac{d^k M_X}{dt^k}(0) = m_k \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

証明． まず形式的な計算を行うと

$$\begin{aligned} M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tx)^k}{k!} \Big) f(x)\,dx \\ &\overset{(1)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)\,dx \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m_k}{k!} t^k \end{aligned}$$

となる．ここで問題になるのは (1) の箇所であるが，$M_X(t)$ の積分が収束する場合にはこの極限の交換が許される． □

すなわちこのモーメント母関数は，確率測度を，その k 次モーメント m_k(を $k!$ で割ったもの) を係数とする形式的べき級数に変換する．形式的べき級数は，収束する範囲においては解析関数となり非常に良い性質を持つ．特に，モーメント母関数は元の確率測度の情報を豊富に持っており，モーメント母関数が一致するような確率変数は非常に近い性質をもつだろうことが期待される．少なくとも，モーメント母関数が異なれば別の確率変数である．

注意． テイラー展開（マクローリン展開）は，与えられた滑らかな関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

のように x^k の級数として表示した．特にその係数に現れる $f^{(k)}(0)$ がすべて同じであれば「解析的関数」のクラスであれば同じ関数になる．ただし，より広いクラスで考えると異なる関数であっても $f^{(k)}(0)$ がすべて同じになることがありうる．たとえば

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

は任意の $n \geqq 0$ に対して原点における n 階導関数が存在し

$$f^{(n)}(0) = 0 \quad (n \in \mathbb{N})$$

となるので，原点においてテイラー展開を考えると，それは零関数 $g(x) = 0$ のものと一致してしまう．

したがって，モーメント母関数が一致していたとしても，元の確率変数が一致しているとまでは主張はできない．

注意． モーメント母関数よりも理論的に扱いやすいものとして**特性関数**

$$\varphi(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)\,dx$$

があるが，複素数値関数における微積分の理論が必要になる．

演習問題 10.6. 次の関数に対して，$f^{(n)}(0) = 0$ となることを示せ．

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

演習問題 10.7. 次の確率分布について，そのモーメント母関数は存在するか．存在するならばそれを求め，存在しないのであればその理由を述べよ．

(1) 離散型確率分布
  (a) n 個の値をとる一様分布
  (b) 二項分布 $B(n,p)$
  (c) ポアソン分布 $\mathrm{Po}(\lambda)$
(2) 連続型確率分布
  (a) 区間 (a,b) 上の一様分布
  (b) 正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$
  (c) パラメータ $\lambda > 0$ を持つ指数分布
  (d) パラメータ μ, σ を持つコーシー分布

演習問題 10

(1) 次の確率分布の分散を求めよ．
   (a) 離散型確率分布
      i. n 個の値をとる一様分布
      ii. 二項分布 $B(n, p)$
      iii. ポアソン分布 $\mathrm{Po}(\lambda)$
   (b) 連続型確率分布
      i. 区間 (a, b) 上の一様分布
      ii. 正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$
      iii. パラメータ $\lambda > 0$ を持つ指数分布
      iv. パラメータ μ, σ を持つコーシー分布

(2) 次の確率分布について，そのモーメント母関数は存在するか．存在するならばそれを求め，存在しないのであればその理由を述べよ．
   (a) 離散型確率分布
      i. n 個の値をとる一様分布
      ii. 二項分布 $B(n, p)$
      iii. ポアソン分布 $\mathrm{Po}(\lambda)$
   (b) 連続型確率分布
      i. 区間 (a, b) 上の一様分布
      ii. 正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$
      iii. パラメータ $\lambda > 0$ を持つ指数分布
      iv. パラメータ μ, σ を持つコーシー分布