# 9　期待値と確率変数の変数変換

## 導入

これまでで一般の空間における確率測度，および事象を数値化する確率変数を定義した．これでようやく確率論を展開する準備が整った．今回はまず期待値という確率の最も基本的な特徴量について学ぶ．

その前に確率変数 $X$ について復習しよう．これは確率空間 $\Omega$ から実数への可測関数 $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ であり，離散型の場合は確率分布表

| $X$ の値 | $x_1$ | $x_2$ | $\cdots$ | $x_n$ | $\cdots$ | 計 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 確率 | $p_1$ | $p_2$ | $\cdots$ | $p_n$ | $\cdots$ | 1 |

で，連続型の場合は確率密度関数 $f(x)$ を用いて

$$P(a \leqq X \leqq b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

となるものである．

## 9.1　離散型確率変数の期待値

期待値とは何かということを，以下の具体例を通して見ておこう．

**例 9.1.** 1000 円の当たりが 2 本，500 円の当たりが 3 本，100 円の当たりが 15 本，はずれが 80 本の計 100 本からなるくじがある．このくじを一回引く試行を考える．このとき引いたくじの賞金額を $X$ 円とすると，$X$ は確率変数であり，その分布は

| $X$ の値 | 0 | 100 | 500 | 1000 | 計 |
|---|---|---|---|---|---|
| 確率 | 0.8 | 0.15 | 0.03 | 0.02 | 1 |

となる．このとき賞金総額は 5000 円であるから，1 本のくじには 50 円が期待できる．これを別な見方をすると

$$50 = 0 \times 0.8 + 100 \times 0.15 + 500 \times 0.03 + 1000 \times 0.02$$

となる．すなわち $X$ の取りうる値とその確率を掛けて足しあげたものになっている．この値を確率変数 $X$ の**期待値**と呼び，$\mathbb{E}[X]$ で表す．

**定義 9.2**

離散型の確率変数 $X$ が与えられたとする．その確率分布表が

| $X$ の値 | $x_1$ | $x_2$ | $\cdots$ | $x_n$ | $\cdots$ | 計 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 確率 | $p_1$ | $p_2$ | $\cdots$ | $p_n$ | $\cdots$ | 1 |

であるとき，

$$\mathbb{E}[X] := \sum_{k=1}^{\infty} x_i p_i = x_1 p_1 + \cdots + x_n p_n + \cdots$$

を確率変数 $X$ の**期待値**という．

**演習問題 9.3.** 次の離散型分布における期待値を求めよ．

(1)　$n$ 個の値 $\{1, 2, \ldots, n\}$ をとる離散型一様分布
(2)　二項分布 $B(n, p)$
(3)　パラメータ $\lambda > 0$ を持つポアソン分布 $\mathrm{Po}(\lambda)$

以下の例でみるように，期待値はいつでも存在するとは限らない．

**演習問題 9.4.** 離散型確率変数 $X$ は以下のような確率分布をもつという．

$$P(X = k) = \frac{\alpha}{k^2} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

(1)　$\alpha$ の値を求めよ．
(2)　$\mathbb{E}[X]$ は存在しない (発散する) ことを確認せよ．

## 9.2　連続型確率変数の期待値

連続型確率変数の場合についても，同様に期待値を定義できる．

**定義 9.5**

$X$ を連続型の確率変数とし，その確率密度関数は $f(x)$ であるとする．このとき，

$$\mathbb{E}[X] := \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx$$

を確率変数 $X$ の**期待値**と呼ぶ．

**注意.** 本講義では離散型と連続型で場合を分けて扱ったが，ルベーグ積分の用いると統一的に扱うことができる．

**演習問題 9.6.** 次の連続型確率分布において期待値は存在するか．存在するならばその値を求めよ．

(1)　区間 $I = (a, b)$ 上の一様分布
(2)　正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$

(3)　パラメータ $\lambda > 0$ を持つ指数分布

(4)　パラメータ $\mu, \sigma$ を持つコーシー分布 $(\sigma > 0)$

## 9.3　確率変数の変換

確率変数 $X$ は，全事象 $\Omega$ から $\mathbb{R}$ への可測関数であった．もし $\mathbb{R}$ 上の関数 $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が可測関数であるならば，その合成関数 $Y$，すなわち

$$Y(\omega) = u\bigl(X(\omega)\bigr) \quad (\omega \in \Omega)$$

により定まる関数 $Y\colon \Omega \to \mathbb{R}$ も可測関数となり，したがって $Y$ も確率変数になる．

連続型の場合確率変数があればその確率密度関数もあるが，$Y$ の確率密度関数は次のようになる．

**定理 9.7**

$X$ を連続型の確率変数で，その密度関数は $f_X(x)$ であるとする．$u(x)$ を微分可能な単調増加関数とし，その逆関数を $x = v(y)$ とする．このとき，$Y = u(X)$ の確率密度関数 $f_Y(y)$ は

$$f_Y(y) = f_X\bigl(v(y)\bigr)\, v'(y)$$

で与えられる．

**証明．**　密度関数の定義を思い出すと，$Y$ の密度関数は

$$P(a \leqq Y \leqq b) = \int_a^b f_Y(y)\, dy$$

となるような関数 $f_Y(y)$ である．今知っている情報はすべて確率変数 $X$ のものなので，この式の左辺を $X$ を用いた式に書き直していく．すると

$$P(a \leqq Y \leqq b) = P(a \leqq u(X) \leqq b)$$

ここで $u$ は単調増加なので

$$\begin{aligned} P(a \leqq u(X) \leqq b) &= P(u^{-1}(a) \leqq X \leqq u^{-1}(b)) \\ &= P(v(a) \leqq X \leqq v(b)) \\ &= \int_{v(a)}^{v(b)} f_X(x)\, dx \end{aligned}$$

ここで $y = u(x)$ と変数変換をすれば，$x = v(y)$ より

$$\begin{array}{c|ccc} x & v(a) & \to & v(b) \\ \hline y & a & \to & b \end{array} \qquad dx = v'(y)\, dy$$

なので

$$\int_{v(a)}^{v(b)} f_X(x)\, dx = \int_a^b f_X\bigl(v(y)\bigr)\, v'(y)\, dy.$$

これより

$$f_Y(y) = f_X\bigl(v(y)\bigr)\, v'(y)$$

であることが分かる．　□

また $Y = u(X)$ の期待値は以下のように計算できる．

**命題 9.8**

$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[u(X)]$，すなわち

$$\mathbb{E}[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} u(x) f_X(x)\, dx$$

**証明．**　期待値の定義及び先述の定理 9.7 より

$$\mathbb{E}[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} y f_X\bigl(v(y)\bigr) v'(y)\, dy$$

ここで $x = v(y)$ と変数変換をすれば

$$\begin{array}{c|ccc} y & -\infty & \to & \infty \\ \hline x & -\infty & \to & \infty \end{array} \qquad dx = v'(y)\, dy$$

なので

$$\mathbb{E}[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} u(x) f_X(x)\, dx$$

となる．　□

この命題の系として，期待値の線形性を確認できる．

**系 9.9.**　定数 $a, b$ に対して

$$\mathbb{E}[aX + b] = a\mathbb{E}[X] + b$$

**証明．**　先ほどの命題より

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[aX + b] &= \int_{-\infty}^{\infty} (ax + b) f_X(x)\, dx \\ &= a \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, dx + b \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, dx \\ &= a\mathbb{E}[X] + b \end{aligned}$$

となる．　□

# 演習問題 9

(1) 次の離散型分布における期待値を求めよ．
  (a) $n$ 個の値 $\{1, 2, \ldots, n\}$ をとる離散型一様分布
  (b) 二項分布 $B(n, p)$
  (c) パラメータ $\lambda > 0$ を持つポアソン分布 $\mathrm{Po}(\lambda)$

(2) 離散型確率変数 $X$ は以下のような確率分布をもつという．

$$P(X = k) = \frac{\alpha}{k^2} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

  (a) $\alpha$ の値を求めよ．
  (b) $\mathbb{E}[X]$ は存在しない (発散する) ことを確認せよ．

(3) 次の連続型確率分布において期待値は存在するか．存在するならばその値を求めよ．
  (a) 区間 $I = (a, b)$ 上の一様分布
  (b) 正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$
  (c) パラメータ $\lambda > 0$ を持つ指数分布
  (d) パラメータ $\mu, \sigma$ を持つコーシー分布 $(\sigma > 0)$

(4) $a, c$ を定数とし，$a$ については $0 < a < 1$ を満たすと仮定する．離散型確率変数 $X$ の確率分布が以下の形をしているとき，以下の問いに答えよ．

$$P(X = k) = ca^{k-1} \quad (k \in \mathbb{N})$$

  (a) 定数 $c$ の値を求めよ．
  (b) $\mathbb{E}[X]$ を求めよ．

(5) $c$ を定数とする．関数 $f(x)$ を以下で定義するとき，以下の問いに答えよ．

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 & (0 \leqq x \leqq 1) \\ c(2 - x) & (1 \leqq x \leqq 2) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

  (a) $f(x)$ が確率密度関数になるとき，$c$ の値を求めよ．
  (b) (a) のとき，$\mathbb{E}[X]$ を求めよ．