

1 導入および集合論の復習

導入

本講義の目標は、現代社会において基本的な役割を果たしている統計学を、数学的に取り扱うことである。具体的に言えば、与えられた集合上において「確率測度」を定義する。そしてその定義を元にして「確率が平均に収束する」という「大数の法則」の証明を目指す。

この集合は有限集合でも無限集合でも良い。本講義ではそれぞれの場合について場合を分けて考察することになるが、ルベーク積分論を学べば、場合分けは実は必要がなく、統一的に扱えることがわかるだろう。

今回はまず、集合論の復習を行う。

1.1 集合論の記法

数学で、考える対象のはっきりとした集まりのことを**集合**という。本講義では、集合は大文字のアルファベットで表すことが多い。

集合を表す方法としては、まず

$$A = \{a, b, c, \dots\}$$

のように、属する対象をすべて書き並べて中括弧「{」と「}」で括弧する方法が基本的である。この場合、並べる順番を変えたり、あるいはいくつかの元を重複して書いたりしても、同じ集合を表すことになる。より洗練された書き方として、

$$A = \{x; x \text{ は条件 } P \text{ を満たす}\}$$

という形式で記述する方法もある。例えば

$$B = \{x; x \text{ は実数で } x^2 = 1 \text{ を満たす}\}$$

とすれば、これは方程式 $x^2 = 1$ を満たすすべての実数全体の集合、すなわち $\{-1, 1\}$ を表すことになる。

ある集合 A に属する対象 a を、その集合の元 (element) といい

$$a \in A \quad \text{または} \quad A \ni a$$

と書く。また対象 b が集合 A に属さないときは

$$b \notin A \quad \text{または} \quad A \not\ni b$$

と書く。

二つの集合 A, B は、それらに属する元がすべて同じとき**等しい**といい

$$A = B$$

と書く。等しくないときには $A \neq B$ と書く。たとえば

$$\{1, 2, 3\} = \{3, 2, 1\}, \quad \{-1, 0, 1\} \neq \{1, 2, 3\}$$

である。有限個の元からなる集合を**有限集合**、そうではないものを**無限集合**という。

以下の数の集合はよく用いられる。

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\} \quad (\text{自然数全体の集合})$$

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\} \quad (\text{整数全体の集合})$$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q}; p, q \in \mathbb{N}, q \neq 0 \right\} \quad (\text{有理数全体の集合})$$

$$\mathbb{R} = \{ \text{実数全体の集合} \} \quad (\text{実数全体の集合})$$

$$\mathbb{C} = \{x + iy; x, y \in \mathbb{R}\} \quad (\text{複素数全体の集合})$$

また、便宜上元を一つも持たない集合を**空集合** (empty set) と呼び、

$$\emptyset$$

と書く。例えば

$$\{x \in \mathbb{R}; x^2 + 1 = 0\} = \emptyset$$

である。

1.2 集合の演算

- 二つの集合 A, X が与えられているとする。

$$a \in A \Rightarrow a \in X$$

であるとき、 A は X の**部分集合**といい

$$A \subset X \quad \text{または} \quad X \supset A$$

と書く。また A が X の部分集合でないことを表すためには

$$A \not\subset X \quad \text{または} \quad X \not\supset A$$

と書く。空集合に関しては、任意の集合 A に対して $\emptyset \subset A$ となる。また $A \subset X$ であるが

$A = X$ ではない集合 A は、 X の**真部分集合**と呼ばれる。

- $A = B$ を示す際には

$$A \subset B \quad \text{かつ} \quad A \supset B$$

を確認するのが基本である。

- 集合 A に対して、 A の部分集合全体はまた集合となる。これを A の**べき集合**といい、 $\mathcal{P}(A)$ と書く。

$$\mathcal{P}(A) = \{B; B \subset A\}.$$

特に A 自身および空集合は $\mathcal{P}(A)$ の元となる。

$$A, \emptyset \in \mathcal{P}(A).$$

集合を元とするような集合は**集合族**と呼ばれる。

- 二つの集合 A, B が与えられたとする。 A, B の元を集めてできる集合をそれらの**和集合**といい

$$A \cup B$$

と書く。すなわち

$$A \cup B = \{x; x \in A \text{ または } x \in B\}$$

である。また A, B のどちらにも属する元全体の作る集合を、それらの**共通部分**といい

$$A \cap B$$

と書く。すなわち

$$A \cap B = \{x; x \in A \text{ かつ } x \in B\}$$

である。

- $A \cap B = \emptyset$ のとき、 A と B の和集合は**非交和**と呼び、

$$A \sqcup B$$

のように書き表す。

- A には属するが B には属さない元全体からなる集合を

$$A \setminus B$$

と書き、 A から B を引いた**差集合**という。

- 数学では一つの集合 X を固定して、その中でいろいろな考察を行うことも多い。そのような

とき、 X の部分集合 A に対して、差集合 $X \setminus A$ を X における A の**補集合**といい

$$A^c$$

と書く。補集合は、全体集合 X の取り方に依存する点に注意。

- 2つの集合の演算については、ベン図を用いると理解しやすい¹⁾。

定理 1.1 (ド・モルガンの法則)

X を全体集合とし、 A, B をその部分集合とする。このとき、次の等式が成立する。

$$(1) \quad (A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$(2) \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

1.3 統計・確率論における用語

統計・確率論でよく用いられる用語をここで紹介する。確率を考える対象はいろいろなので、対象とする全体を Ω で表し、**全事象**と呼ぶ。その部分集合 A, B, \dots は**事象**、その要素 $\omega \in \Omega$ は**根元事象**と呼ばれる。また根元事象を一つも含まない事象を**空事象**という。事象 A, B に対し、 $A^c = \Omega \setminus A$ を**余事象**、 $A \cup B$ を**和事象**、 $A \cap B$ を**積事象**という。また $A \cap B = \emptyset$ であるとき、 A と B は**排反**であるという。

偶然に左右されると考えられる実験や観測を行うことを**試行**という。

まとめ

- 集合論の記号法の復習
- 確率・統計学における用語

1) 3つまでなら実用的であるが、4つ以上だとあまり実用的ではない。

演習問題 1

- (1) $A = \{1, 2, 3, 4\}$ のべき集合 $\mathcal{P}(A)$ の要素を全て書き下せ.
(2) $X = \{n \in \mathbb{N}; 1 \leq n \leq 10\}$ とする. 以下の X の部分集合のうちどれとどれが等しいか, すべて答えよ.

$$A_1 = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

$$A_2 = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

$$A_3 = \{2, 3, 5, 7\}$$

$$A_4 = \{n \in X; n = 2k \text{ となる整数 } k \text{ が存在する}\}$$

$$A_5 = \{n \in X; n = 2k + 1 \text{ となる自然数 } k \text{ が存在する}\}$$

$$A_6 = \{n \in X; n \text{ は奇素数}\}$$

- (3) $X = \{n \in \mathbb{N}; 1 \leq n \leq 10\}$ を全体集合とし, $A_1, A_2, A_3 \subset X$ は前問のものとする. このとき以下を計算せよ.
(a) $A_1 \cap A_2$
(b) $A_1 \cap A_3^c$
(c) $A_1 \cup (A_2 \cap A_3)$
(d) $(A_1 \setminus A_3) \cup A_2$
(4) 分配法則 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ を示せ.
(5) $A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$ を示せ.
(6) 次の式はいずれも $A \subset B$ と同値になることを示せ.

$$(1) \quad A \cup B = B$$

$$(2) \quad A \cap B = A$$

$$(3) \quad A \setminus B = \emptyset$$

$$(4) \quad A \cup (B \setminus A) = B$$

$$(5) \quad A = B \setminus (B \setminus A)$$

- (7) 「 $A \subset B$ でない」ことと「 $A \cap B^c \neq \emptyset$ 」は同値であることを示せ.

(8) $\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ を求めよ.

(9) $\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right]$ を求めよ.

- (10) $A_n \subset \mathbb{R}^2$ を以下で定める集合とすると, $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ および $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ を求めよ.

$$A_n = \{(x, y); x \geq 0, 0 \leq y \leq x^n\} \subset \mathbb{R}^2$$