Hidetoshi Arakawa

Afinação e Temperamento

Teoria e Prática

Suplemento

2004

Edição do Autor
Campinas, SP
Brasil

Hidetoshi Arakawa
Caixa Postal 6042
Campinas, SP
13083-970
arakawah@correionet.com.br

Prefácio do Suplemento

No Estudo de escalas e temperamentos empregam-se, tradicionalmente, cálculos à base de razão, os únicos considerados exatos. As razões demonstram, além do mais, a estrutura das escalas, quinta pura representada com número 3 e terça pura com número 5. No entanto, para suprimir a dificuldade de visualização do tamanho, em razão, usa-se a expressão cento, criada por Ellis. Para transformar razão em cento é necessário usar logaritmo. Apesar de facilitada com o cálculo de expoente, a soma e a subtração, a expressão convencional de cento resulta em número infinito, por não ser reversível à razão, exceto no temperamento igual. Além disto no cento convencional desaparece estrutura da escala.

Para corrigir esta deficiência, o autor criou uma notação alternativa, baseada em cento e comas. O princípio da notação é a posição das notas do igual temperamento, múltiplos de cem, mais a discrepância com frações das comas. A discrepância demonstra a estrutura da escala. O valor resultante dessa notação é exato e reversivel à razão.

Para achar os valores aproximados em cento é necessário apenas ter os valores das comas calculados em cento. O resultado, uma vez transformado em cento convencional, não pode mais ser reversível à razão.

No livro principal, o emprego desta notação e sua trasformação para razão são detalhamente discutidos. Neste suplemento trata-se da conversão da razão para a notação alternativa de cento, completando-se assim o ciclo cento-razão-cento da notação alternativa.

As razões de sete (septimal ratios) também são discutidas neste suplemento.

Embora alguns tenham cido demonstrados no livro principal, todos os exemplos são acompanhados de reversão à razão.

Campinas, 15 de fevereiro de 2004

Hidetoshi Arakawa

Conteúdo

Transformar razão em cento

1. Princípio da transformação da razão em cento

No estudo convencional de escalas e temperamentos com razão de freqüência, o cálculo de centos se faz por meio de logaritmos, usando a calculadora científica. O método alternativo, criado pelo autor deste suplemento, permite calcular centos sem logaritmo. Ele serve para a razão de freqüência expressa em $5^m \cdot 3^n \cdot 2^o$. Os símbolos *m*, *n* e *o* podem representar números inteiros ou razões expressadas em fração. Todas as escalas e temperamentos tradicionais pertencem a esta categoria.

No cálculo de cento são utilizadas a quinta pura de uma oitava acima, na razão de freqüência de 1:3, e a terça pura de duas oitavas acima, na razão de freqüência de 1:5. Expressam-se como segue.

Quinta pura *V* na razão de 2:3

$$V = 700 + \frac{1}{12}P \tag{1}$$

Quinta pura *V* de uma oitava acima, na razão de 1:3

$$\begin{aligned} V + VIII &= 700 + \frac{1}{12}P + 1200 \\ &= 1900 + \frac{1}{12}P \end{aligned} \tag{2}$$

Terça pura *III* na razão de 4:5

$$III = 400 + \frac{4}{12}P - K \tag{3}$$

Terça pura *III* de duas oitavas acima, na razão de 1:5

$$\begin{aligned} III + 2VIII &= \left(400 + \frac{4}{12}P - K\right) + 2\times1200 \\ &= 2800 + \frac{4}{12}P - K \end{aligned} \tag{4}$$

Empregando-se (2) e (4), a fórmula para calcular centos I_{centos} expressa-se assim:

$$I_{\text{centos}} = m\left(2800 + \frac{4}{12}P - K\right) + n\left(1900 + \frac{1}{12}P\right) + o\times1200 \tag{5}$$

A maneira de calcular cento aplicando a fórmula (5) passa a ser explicada em exemplos com intervalos conhecidos.

2. Sétima Maior da Escala Pitagórica

A razão da sétima maior da escala pitagórica VII_{P} é representada por

$$VII_{\text{P}} = 3^5 \cdot 2^{-7} \tag{6}$$

Como *m*, *n* e *o* da fórmula (5) ficam 0, 5 e -7, a fórmula (6) expressa-se por

$$\begin{aligned} VII_{\text{P}} &= 5\left(1900 + \frac{1}{12}P\right) - 7\times1200 \\ &= 1100 + \frac{5}{12}P \end{aligned} \tag{7}$$

A fórmula (7) é reversível à razão por meio da expressão

$$\begin{aligned} VII_{\text{P}} &= 2^{\frac{11}{12}}\left(3^{12} \cdot 2^{-19}\right)^{\frac{5}{12}} \\ &= 3^5 \cdot 2^{-7} \end{aligned}$$

3. Semitom Diatônico da Escala Pitagórica

A razão do semitom diatônico da escala pitagórica T_{SDP} é

$$T_{\text{SDP}} = 3^{-5} \cdot 2^8 \tag{8}$$

Como *m*, *n* e *o* da fórmula (5) ficam 0, -5 e 8, T_{SDP} da fórmula (8) expressa-se por

$$\begin{aligned} T_{\text{SDP}} &= -5\left(1900 + \frac{1}{12}P\right) + 8\times1200 \\ &= 100 - \frac{5}{12}P \end{aligned} \tag{9}$$

A fórmula (9) é reversível à razão da seguinte maneira

$$\begin{aligned} T_{\text{SDP}} &= 2^{\frac{1}{12}}\left(3^{12} \cdot 2^{-19}\right)^{-\frac{5}{12}} \\ &= 3^{-5} \cdot 2^8 \end{aligned}$$

4. Semitom Cromático da Escala Pitagórica
A razão do semitom diatônico da escala pitagórica T_{scP} é

$$T_{\mathrm{scP}} = 3^{7} \cdot 2^{-11} \tag{10}$$

A expressão em cento da fórmula (10) fica assim

$$\begin{aligned} T_{\mathrm{scP}} &= 7\left(1900 + \frac{1}{12}P\right) - 11\times1200 \\ &= 100 + \frac{7}{12}P \end{aligned} \tag{11}$$

O valor da fórmula (11) é igual à posição da nota Dó sustenido da escala pitagórica.
Em todos os intervalos dessa escala o *m* da fórmula (5) é 0.

5. Quinta do Médio Tom
A razão da quinta do médio tom V_0 é

$$V_0 = 5^{\frac{1}{4}} \tag{12}$$

Para mudar a fórmula (12) em cento, os valores de *m*, *n* e *o* da fórmula (5) ficam 1/4, 0 e 0; a quinta do médio tom expressa-se por

$$\begin{aligned} V_0 &= \frac{1}{4}\left(2800 + \frac{4}{12}P - K\right) \\ &= 700 + \frac{1}{12}P - \frac{1}{4}K \end{aligned} \tag{13}$$

A fórmula (13) é reversível à razão com a expressão

$$\begin{aligned} V_0 &= 2^{\frac{7}{12}}\left(3^{12} \cdot 2^{-19}\right)^{\frac{1}{12}}\left(5^{-1} \cdot 3^{4} \cdot 2^{-4}\right)^{-\frac{1}{4}} \\ &= 5^{\frac{1}{4}} \end{aligned}$$

6. Díese Menor
A razão da díese menor D_{m} apresenta-se assim

$$D_{\mathrm{m}} = 5^{-3} \cdot 2^{7} \tag{14}$$

Como os valores de *m*, *n* e *o* da fórmula (5) ficam -3, 0 e 7, a díese menor D_{m} é representada por

$$D_{\mathrm{m}} = -3\left(2800 + \frac{4}{12}P - K\right) + 7\times1200 \tag{15}$$

$$= 3K - P \tag{16}$$

A fórmula (15) mostra a diferença entre 7 oitavas e 3 terças maiores puras de duas oitavas acima, fórmula (4). Como uma terça maior pura de duas oitava acima é composta de 4 quintas de V_0 da fórmula (13), a fórmula (15) é a diferença entre 7 oitavas e 12 quintas do médio tom V_0, como demonstrado a seguir

$$\begin{aligned} D_{\mathrm{m}} &= -3\left(2800 + \frac{4}{12}P - K\right) + 7\times1200 \\ &= -3\left\{4\left(700 + \frac{1}{12}P - \frac{1}{4}K\right)\right\} + 7\times1200 \\ &= 7VIII - 12V_0 \end{aligned} \tag{17}$$

A fórmula (16) pode ser modificada da seguinte maneira

$$\begin{aligned} D_{\mathrm{m}} &= -3\left(2800 + \frac{4}{12}P - K\right) + 7\times1200 \\ &= -3\left(III + 2VIII\right) + 7VIII \\ &= VIII - 3III \end{aligned} \tag{18}$$

A fórmula (17) é a definição original do díese menor.
O díese menor da fórmula (15) é reversível à razão com

$$\begin{aligned} D_{\mathrm{m}} &= \left(5^{-1} \cdot 3^{4} \cdot 2^{-4}\right)^{3}\left(3^{12} \cdot 2^{-19}\right)^{-1} \\ &= 5^{-3} \cdot 2^{7} \end{aligned}$$

7. Quinta de Lobo do Médio Tom

A razão da quinta de lobo do médio tom V_1 é expressa por

$$V_1 = 5^{-\frac{11}{4}} \cdot 2^7 \tag{19}$$

Como *m*, *n* e *o* da fórmula (5) são -11/4, 0 e 7, expressão em cento da fórmula (19) fica

$$V_1 = -\frac{11}{4}\left(2800 + \frac{4}{12}P - K\right) + 7\times 1200 \tag{20}$$

$$= 700 - \frac{11}{12}P + \frac{11}{4}K \tag{21}$$

$$= \left(700 + \frac{1}{12}P - \frac{1}{4}K\right) + 3K - P$$

A fórmula (20) pode ser modificada a seguinte maneira

$$\begin{aligned} V_1 &= -\frac{11}{4}\left(2800 + \frac{4}{12}P - K\right) + 7\times 1200 \\ &= -11\left(700 + \frac{1}{12}P - \frac{1}{4}K\right) + 7\times 1200 \\ &= -11V_0 + 7VIII \\ 7VIII &= 11V_0 + V_1 \end{aligned} \tag{22}$$

A fórmula (22) demonstra que onze quintas normais e uma quinta de lobo formam sete oitavas. Para formar uma escala, a soma de 12 quintas precisa dar 8400 centos. No caso do médio tom, uma das quintas apresenta uma ‘díese menor’ a mais que a quinta normal V_0 do médio tom.

A fórmula (21) é reversível à expressão cento por meio de

$$\begin{aligned} V_1 &= 2^{\frac{7}{12}}\left(3^{12}\cdot 2^{-19}\right)^{-\frac{11}{12}}\left(5^{-1}\cdot 3^4\cdot 2^{-4}\right)^{\frac{11}{4}} \\ &= 5^{-\frac{11}{4}}\cdot 2^7 \end{aligned}$$

Na fórmula (5) para médio tom, *n* é sempre 0.

8. Terça Menor Pura

A razão da terça menor pura expressa-se assim

$$III_m = 5^{-1}\cdot 3\cdot 2 \tag{23}$$

A fórmula (23) em centos da terça menor pura fica

$$\begin{aligned} III_m &= -\left(2800 + \frac{4}{12}P - K\right) + \left(1900 + \frac{1}{12}P\right) + 1200 \\ &= 300 - \frac{3}{12}P + K \end{aligned} \tag{24}$$

A terça menor pura pode ser expressa assim

$$\begin{aligned} III_m &= -\left(2800 + \frac{4}{12}P - K\right) + \left(1900 + \frac{1}{12}P\right) + 1200 \\ &= \left(700 + \frac{1}{12}P\right) - \left(400 + \frac{4}{12}P - K\right) \\ &= V - III \end{aligned} \tag{25}$$

A fórmula (24) é transformada em cento com a expressão

$$\begin{aligned} III_m &= 2^{\frac{3}{12}}\left(3^{12}\cdot 2^{-19}\right)^{-\frac{3}{12}}\left(5^{-1}\cdot 3^4\cdot 2^{-4}\right) \\ &= 5^{-1}\cdot 3\cdot 2 \end{aligned}$$

9. Díese Maior

A razão de díese maior D_M é

$$D_M = 5^{-4}\cdot 3^4\cdot 2^3 \tag{26}$$

A fórmula (26) é convertida a cento por

$$D_M = -4\left(2800 + \frac{4}{12}P - K\right) + 4\left(1900 + \frac{1}{12}P\right) + 3\times 1200 \tag{27}$$

$$= 4K - P \tag{28}$$

A fórmula (25) é modificada da seguinte maneira

$$\begin{aligned} D_{\mathrm{M}} &= -4\left(2800+\frac{4}{12}P-K\right)+4\left(1900+\frac{1}{12}P\right)+3\times 1200 \\ &= 4\left\{\left(700+\frac{1}{12}P\right)-\left(400+\frac{4}{12}P-K\right)\right\}-1200 \\ &= 4(V-III)-VIII \\ &= 4III_{\mathrm{m}}-VIII \qquad (29) \end{aligned}$$

A fórmula (29) é a definição de díese maior.
A fórmula (28) é reversível à expressão cento do seguinte modo

$$\begin{aligned} D_{\mathrm{M}} &= \left(5^{-1}\cdot 3^{4}\cdot 2^{-4}\right)^{4}\left(3^{12}\cdot 2^{-19}\right)^{-1} \\ &= 5^{-4}\cdot 3^{4}\cdot 2^{3} \end{aligned}$$

10. A quinta do Temperamento de -1/6 K
A razão da quinta do temperamento de -1/6 K, V_{SC} é demonstrada por

$$V_{\mathrm{SC}} = 5^{\frac{1}{6}}\cdot 3^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{-\frac{1}{3}} \qquad (30)$$

A fórmula (30) é transformada em cento pela expressão

$$\begin{aligned} V_{\mathrm{SC}} &= \frac{1}{6}\left(2800+\frac{4}{12}P-K\right)+\frac{1}{3}\left(1900+\frac{1}{12}P\right)-\frac{1}{3}\times 1200 \\ &= 700+\frac{1}{12}P-\frac{1}{6}K \qquad (31) \end{aligned}$$

A fórmula (31) é reversível a cento como se demonstra a seguir

$$\begin{aligned} V_{\mathrm{SC}} &= 2^{\frac{7}{12}}\left(3^{12}\cdot 2^{-19}\right)^{\frac{1}{12}}\left(5^{-1}\cdot 3^{4}\cdot 2^{-4}\right)^{-\frac{1}{6}} \\ &= 5^{\frac{1}{6}}\cdot 3^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{-\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

11. Quinta de Lobo do Temperamento de -1/6 K
A razão da quinta do lobo do temperamento de -1/6 K, V_{SCL} representa-se assim

$$V_{\mathrm{SCL}} = 5^{-\frac{11}{6}}\cdot 3^{-\frac{11}{3}}\cdot 2^{\frac{32}{3}} \qquad (32)$$

A fórmula (32) é transformada em cento pela expressão

$$\begin{aligned} V_{\mathrm{SCL}} &= -\frac{11}{6}\left(2800+\frac{4}{12}P-K\right)-\frac{11}{3}\left(1900+\frac{1}{12}P\right)+\frac{32}{3}\times 1200 \\ &= 700-\frac{11}{12}P+\frac{11}{6}K \qquad (33) \\ &= \left(700-\frac{1}{12}P+\frac{1}{6}K\right)+2K-P \\ &= \left(700+\frac{1}{12}P\right)+\frac{11}{6}K-P \end{aligned}$$

A fórmula (33) é convertida à razão por meio de

$$\begin{aligned} V_{\mathrm{SCL}} &= 2^{\frac{7}{12}}\left(3^{12}\cdot 2^{-19}\right)^{-\frac{11}{12}}\left(5^{-1}\cdot 3^{4}\cdot 2^{-4}\right)^{\frac{11}{6}} \\ &= 5^{-\frac{11}{6}}\cdot 3^{-\frac{11}{3}}\cdot 2^{\frac{32}{3}} \end{aligned}$$

12. Schisma
A razão da schisma S é representada por

$$S = 5\cdot 3^{8}\cdot 2^{-15} \qquad (34)$$

A fórmula acima é transformada em cento pela expressão

$$\begin{aligned} S &= \left(2800+\frac{4}{12}P-K\right)+8\left(1900+\frac{1}{12}P\right)-15\times 1200 \\ &= P-K \qquad (35) \end{aligned}$$

A fórmula (35) é a definição da schisma.
A fórmula (35) é transformada em razão da seguinte maneira

$$S = \left(3^{12}\cdot 2^{-19}\right)\left(5^{-1}\cdot 3^{4}\cdot 2^{-4}\right)^{-1}$$

13. Quinta de Helmholtz

A razão da quinta de Helmholtz expressa-se por

$$V_{H} = 5^{-\frac{1}{8}} \cdot 2^{\frac{7}{8}} \tag{36}$$

A fórmula (36) é transformada em cento com a expressão

$$\begin{aligned} V_{H} &= -\frac{1}{8}\left(2800 + \frac{4}{12}P - K\right) + \frac{7}{8} \times 1200 \\ &= 700 - \frac{1}{24}P + \frac{1}{8}K \\ &= \left(700 + \frac{1}{12}P\right) - \frac{1}{8}(P - K) \\ &= V - \frac{1}{8}S \end{aligned} \tag{37}$$

A fórmula (37) é reversível à razão por meio de

$$\begin{aligned} V_{H} &= 2^{\frac{7}{12}}\left(3^{12} \cdot 2^{-19}\right)^{-\frac{1}{24}}\left(5^{-1} \cdot 3^{4} \cdot 2^{-4}\right)^{\frac{1}{8}} \\ &= 5^{-\frac{1}{8}} \cdot 2^{\frac{7}{8}} \end{aligned}$$

14. Quinta de -1/4 K + 1/12 P

Uma quinta de -1/4 K + 1/12 P, V_{DC} é representada por

$$V_{DC} = 5^{\frac{1}{4}} \cdot 3 \cdot 2^{-\frac{19}{12}} \tag{38}$$

A fórmula (38) é transformada da seguinte maneira

$$\begin{aligned} V_{DC} &= \frac{1}{4}\left(2800 + \frac{4}{12}P - K\right) + \left(1900 + \frac{1}{12}P\right) - \frac{19}{12} \times 1200 \\ &= 700 + \frac{2}{12}P - \frac{1}{4}K \end{aligned} \tag{39}$$

A fórmula (39) é reversível à razão através de

$$\begin{aligned} V_{DC} &= 2^{\frac{7}{12}}\left(3^{12} \cdot 2^{-19}\right)^{\frac{2}{12}}\left(5^{-1} \cdot 3^{4} \cdot 2^{-4}\right)^{-\frac{1}{4}} \\ &= 5^{\frac{1}{4}} \cdot 3 \cdot 2^{-\frac{19}{12}} \end{aligned}$$

Razões de Sete

1. Princípio do Cálculo da Razões de Sete

Razões de sete (septimal ratios) são razões que incluem o número 7. A principal razão é 7:4 e corresponde ao intervalo de sétima menor. A diferença entre a nota Sib da escala pitagórica e a de 4:7 chama-se coma de sétima menor *X*, expressa por

$$X = \frac{\left(\frac{2^{4}}{3^{2}}\right)}{\left(\frac{7}{2^{2}}\right)} = \left(2^{4} \cdot 3^{-2}\right)\left(7 \cdot 2^{-2}\right)^{-1} = 7^{-1} \cdot 3^{-2} \cdot 2^{6} = \frac{64}{63}. \tag{1}$$

A coma de sétima menor equivale a 27,264091795 centos; no entanto, para calcular intervalos em centos basta a precisão de centésimos, ou seja, 27,26 centos.

Modificando-se a fórmula (1), a sétima menor VII_{m} é expressada da seguinte maneira

$$\begin{aligned} VII_{m} &= 7 \cdot 2^{-2} \\ &= \left(2^{4} \cdot 3^{-2}\right)\left(7^{-1} \cdot 3^{-2} \cdot 2^{6}\right)^{-1} \\ &= 2^{\frac{10}{12}}\left(3^{12} \cdot 2^{-19}\right)^{-\frac{2}{12}}\left(7^{-1} \cdot 3^{-2} \cdot 2^{6}\right)^{-1} \end{aligned} \tag{2}$$

A sétima menor VII_{m} é transformada em expressão centesimal por

$$VII_{m} = 1000 - \frac{2}{12}P - X \tag{3}$$

A fórmula (3) demonstra que a sétima menor é a sétima menor pitagórica menos a coma de sétima menor. Ela vale 968,83 centos, sendo portanto uma coma de sétima menor, 27,26 centos, menor que a sétima menor da escala pitagórica, que vale 996,09 centos.

A sétima harmônica fica duas oitavas acima da sétima menor $VII_{m.}$ Usando-se a fórmula (3), a sétima harmônica é expressa da seguinte maneira

$$\begin{aligned} VII_{m} + 2VIII &= \left(1000 - \frac{2}{12}P - X\right) + 2 \times 1200 \\ &= 3400 - \frac{2}{12}P - X \end{aligned} \tag{4}$$

A fórmula (4) é reversível à razão por

$$\begin{aligned} VII_{mS} + 2VIII &= 2^{\frac{34}{12}}\left(3^{12}\cdot 2^{-19}\right)^{-\frac{2}{12}}\left(7^{-1}\cdot 3^{-2}\cdot 2^{6}\right)^{-1} \\ &= 7 \end{aligned}$$

Com a fórmula (4) transformam-se em cento as razões de sete.

2. Quinta das Razões de Sete

As duas quintas V_S descendentes que formam uma sexta menor VII_m são calculadas da seguinte maneira

$$\begin{aligned} -2V_s + 2VIII &= 1000 - \frac{2}{12}P - X \\ V_s &= \frac{1}{2}\left\{2\times 1200 - \left(1000 - \frac{2}{12}P - X\right)\right\} \\ &= 700 + \frac{1}{12}P + \frac{1}{2}X \qquad (5) \end{aligned}$$

A fórmula (5) é reversível à razão com a expressão

$$\begin{aligned} V_s &= 2^{\frac{7}{12}}\left(3^{12}\cdot 2^{-19}\right)^{\frac{1}{12}}\left(7^{-1}\cdot 3^{-2}\cdot 2^{6}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= 7^{-\frac{1}{2}}\cdot 2^{2} \qquad (6) \end{aligned}$$

A fórmula (6) de razão é transformada em expressão centesimal por

$$\begin{aligned} V_s &= -\frac{1}{2}\left(3400 - \frac{2}{12}P - X\right) + 2\times 1200 \\ &= 700 + \frac{1}{12}P + \frac{1}{2}X \qquad (7) \end{aligned}$$

Esta quinta da fórmula (7) tem meia coma de sétima menor a mais que a quinta pura. Tem 715,59 centos, sendo portanto 13,63 centos maior que a quinta pura.

A diferença entre sete oitavas e doze quintas V_S no círculo descendente é representada da seguinte maneira

$$\begin{aligned} 7VIII - 12V_s &= 7\times 1200 - 12\left(700 + \frac{1}{12}P + \frac{1}{2}X\right) \\ &= -\left(P + 6X\right) \qquad (8) \end{aligned}$$

A fórmula (8) é reversível à razão por meio de

$$\begin{aligned} -\left(P + 6X\right) &= \left(3^{12}\cdot 2^{-19}\right)^{-1}\left(7^{-1}\cdot 3^{-2}\cdot 2^{6}\right)^{-6} \\ &= 7^{6}\cdot 2^{-17} \end{aligned}$$

Seu valor é -187,04 centos.

Como a discrepância é grande, esta quinta não é adequada para formar uma escala praticável. Alguns intervalos são usados apenas para estudo.

3. Quinta Diminuta das Razões de Sete

O intervalo na razão de 5:7 é a quinta diminuta V_{dS}, e expressa por

$$V_{ds} = 7\cdot 5^{-1} \qquad (9)$$

A fórmula (9) é transformada em cento da seguinte maneira

$$\begin{aligned} V_{dS} &= \left(3400 - \frac{2}{12}P - X\right) - \left(2800 + \frac{4}{12}P - K\right) \\ &= 600 - \frac{6}{12}P + K - X. \qquad (10) \end{aligned}$$

Vale 582,51 centos.

A fórmula (10) é reversível à razão por meio da expressão

$$\begin{aligned} V_{dS} &= 2^{\frac{6}{12}}\left(3^{12}\cdot 2^{-19}\right)^{-\frac{6}{12}}\left(5^{-1}\cdot 3^{4}\cdot 2^{-4}\right)\left(7^{-1}\cdot 3^{-2}\cdot 2^{6}\right)^{-1} \\ &= 7\cdot 5^{-1} \end{aligned}$$

4. Terça Maior das Razões de Sete

O intervalo de 7:9 é a terça maior na razão de sétima, III_S, e expressa-se da seguinte maneira

$$III_S = \frac{9}{7} = 7^{-1}\cdot 3^{2} \qquad (11)$$

A fórmula (11) é transformada em cento por meio de

$$\begin{aligned} III_S &= -\left(3400 - \frac{2}{12}P - X\right) + 2\left(1900 + \frac{1}{12}P\right) \\ &= 400 + \frac{4}{12}P + X \qquad (12) \end{aligned}$$

A fórmula (12) demonstra que a terça maior na razão de sétima III_S tem uma coma de sétima menor a mais que a terça maior da escala pitagórica. Com valores em centos das comas P e X, o valor da terça maior III_S é calculada em 435,08 centos.

A terça maior III_S é a diferença entre o Ré de uma oitava acima da escala pitagórica, 4:9, e a sétima menor VII_m, 4:7. Essa diferença expressa-se por

$$\begin{aligned} III_S &= (II_P + VIII) - VII_{mS} \qquad (13) \\ &= \left(200 + \frac{2}{12}P + 1200\right) - \left(1000 - \frac{2}{12}P - X\right) \\ &= 400 + \frac{4}{12}P + X \end{aligned}$$

A fórmula (13) é modificada da seguinte maneira

$$\begin{aligned} III_S &= (II_P + VIII) - VII_{mS} \\ &= 2V - (-2V_S + 2VIII) \\ &= 2V + 2V_S - 2VIII \qquad (14) \\ &= 2\left(700 + \frac{1}{12}P\right) + 2\left(700 + \frac{1}{12}P + \frac{1}{2}X\right) - 2\times 1200 \\ &= 400 + \frac{4}{12}P + X \end{aligned}$$

A fórmula (14) demonstra que a terça maior III_S é formada com duas quintas pitagórica V e duas quintas V_S.

A fórmula (12) é reversivel à razão por meio de

$$\begin{aligned} III_S &= 2^{\frac{4}{12}}\left(3^{12}\cdot 2^{-19}\right)^{\frac{4}{12}}\left(7^{-1}\cdot 3^{-2}\cdot 2^{6}\right) \\ &= 7^{-1}\cdot 3^{2} \end{aligned}$$

5. Terça Menor das razões de Sete

A terça menor na razão de sétima III_S é a razão de 6:7 e expressa-se assim

$$III_{mS} = \frac{7}{6} = 7\cdot 3^{-1}\cdot 2^{-1} \qquad (15)$$

A fórmula (15) é transformada em cento da seguinte maneira

$$\begin{aligned} III_{mS} &= \left(3400 - \frac{2}{12}P - X\right) - \left(1900 + \frac{1}{12}P\right) - 1200 \\ &= 300 - \frac{3}{12}P - X \qquad (16) \end{aligned}$$

O valor é 266,87 centos.

A terça menor III_S é a diferença entre a sexta menor VII_m na razão de 4:7 e a quinta pura V na razão de 2:3 e representa-se por

$$\begin{aligned} III_{mS} &= VII_S - V \\ &= \left(1000 - \frac{2}{12}P - X\right) - \left(700 + \frac{1}{12}P\right) \\ &= 300 - \frac{3}{12}P - X \qquad (17) \end{aligned}$$

As fórmulas (16) e (17) são reversíveis à razão da seguinte maneira

$$\begin{aligned} III_{mS} &= 2^{\frac{3}{12}}\left(3^{12}\cdot 2^{-19}\right)^{-\frac{3}{12}}\left(7^{-1}\cdot 3^{-2}\cdot 2^{6}\right)^{-1} \\ &= 7\cdot 3^{-1}\cdot 2^{-1} \end{aligned}$$

6. Tom das Razões de Sete

O tom na razão de sétima T_S é de 7:8 e expressa-se por

$$T_S = \frac{8}{7} = 7^{-1}\cdot 2^{3} \qquad (18)$$

A fórmula (18) é transformada em cento da seguinte maneira

$$
\begin{aligned}
T_s &= 3\times 1200 - \left(3400 - \frac{2}{12}P - X\right) \\
&= 200 + \frac{2}{12}P + X \qquad (19)
\end{aligned}
$$

O tom T_S é a diferença entre uma oitava *VIII* e a sexta menor VII_m representada pela expressão

$$
\begin{aligned}
T_s &= VIII - VII_s \\
&= 1200 - \left(1000 - \frac{2}{12}P - X\right) \\
&= 200 + \frac{2}{12}P + X \qquad (20)
\end{aligned}
$$

As fórmula (19) e (20) são reversíveis à razão por meio da seguinte expressão

$$
\begin{aligned}
T_s &= 2^{\frac{2}{12}}\left(3^{12}\cdot 2^{-19}\right)^{\frac{2}{12}}\left(7^{-1}\cdot 3^{-2}\cdot 2^{6}\right) \\
&= 7^{-1}\cdot 2^{3}
\end{aligned}
$$