Кратен интегран на Риман

15 января 2017 г.

$$\tau = \{x_i\}_{i=0}^{n} \qquad a = x_0 < x_1 < .. < x_n = b$$

$$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i] \qquad \sigma(f_i;\xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

$$\Delta x_i = |[x_{i-1}, x_i]| = x_i - x_{i-1} \qquad i \in 1..n$$

$$\delta_\tau = max\Delta x_i(1 <= i <= n) \qquad \xi = \{\xi_i\}_{i=1}^{n}$$

Определение: f(x) е интегруема върху интервала [a,b] ако $\exists I \in R : \forall \epsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0\ \forall \tau = \{x_i\}_{i=0}^{n}, \delta_\tau < \delta, \forall \xi = \{\xi_i\}_{i=1}^{n}, \xi \in [x_{i-i}, x_i] i = 1..n$

$$=> |I - \sigma_\tau(f_i\xi)| < \epsilon$$

I - интеграл на Риман на функцията f(x) върху интервала [a,b]

Нека функцията f(x) е дефинирана върху измеримо по Жордан множество $\Omega \subset R^n$

$x = (x_1, .., x_n) \qquad \tau = \{G_i\}_{i=1}^{n}, G_i \subset \Omega\ \forall i = 1..n$

1) $\cup_{i=1}^{n} G_i = \Omega, G_i$ - измеримо по Жордан

2) $G_i \cap G_j = \emptyset \forall i, j = 1..n\ i \neq j$

3) τ - разбиване на $\Omega \qquad \forall i = 1..n\ \xi_i \in G_i$

$\sigma_\tau(f_i\xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)m(G_i)$ - Сума на Риман

Определени: U $\subset R^m, \rho$ - метрика.
DiamU $= \sup\rho(x, y)_{x,y\in U}$ - наричаме диаметър

Определение: Големи на разбирането $\tau - \delta_\tau = maxdiam(G)\ 1 <= i <= n$

Определени: Казваме, че f(x) е ингрируема по Риман върху Ω, ако $\exists I \in R : \forall \epsilon > 0;\ \exists \delta = \delta(\epsilon) < 0 : \forall \tau = \{G_i\}_{i=1}^{n}, \delta_\tau < \delta\ \forall \xi = \{\xi_i\}_{i=1}^{n}, \xi_i \in G_i \qquad i = 1..n \qquad |I - \sigma_\tau(f_i\xi| < \epsilon$

Определение: f(x) е дефинирано върху измеримо по Жордан многжесто $\Omega \subset R^n$: $f(x)$ е съществено ограничена върху Ω ако $\exists G \subset \Omega$ с ЖМ нула, такова че : f(x) е ограничена върху Ω/G
Определение: f(x) е дефинирано върху измеримо по Жордан многжесто $\Omega \subset R^n$: $f(x)$ е съществено неограничена върху Ω ако $\exists G \subset \Omega$ с ЖМ нула, такова че : f(x) е неограничена върху Ω/G

Теорема: Ако f(x) е дефинирана върху измеримо по Жордан множесто Ω и е съществено неограничена върху Ω => f(x) не е интегрируема върху Ω

Доказателство: Нека f(x) е съществено неограничена върху Ω и интегрируема по Риман върху Ω

От това, че е интегрируема $=> \exists I \in R : \forall \epsilon > 0 \exists \delta = \delta_{epsilon} > 0 : \forall \tau = \{G_i\}_{i=1}^{n}, \delta_\tau < \delta \; \forall \xi = \{\xi_i\}_{i=1}^{n}, \xi_i \in G_i \qquad i = 1..n \qquad |I - \sigma_\tau(f_i \xi| < \epsilon$

$\epsilon = 1 \qquad \exists \delta_1 > 0 : \forall \tau = \{G_i\}_{i=1}^{n} : \delta_\tau < \delta \; \forall \xi = \{\xi_i\}_{i=1}^{n}, \xi_i \in G_i \qquad i = 1..n$

$$|I - \sigma_\tau(f_i \xi)| < 1$$

$$I - 1 <= \sigma_\tau(f_i \xi) < I + 1$$

$$I - 1 < \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) m(G_i) < I + 1$$

f(x) е съществено неограничена в G => $\exists G_{i_0} \in \tau$ и $m(G_{i_0}) \neq 0$: f(x) е неограничена върху G_{i_0}

За конкретно $G_{i_0} = G_1$

=> f(x) е неограничена върху G_1

$$I - 1 < \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) m(G_i) < I + 1$$

$$I - 1 < f(\xi_1) m(G_1) + \sum_{i=2}^{n} f(\xi_i) m(G_i) < I + 1$$

$$\xi = \{\xi_1, \xi_2^0, \xi_3^0, ..., \xi_n^0\} : \xi_1 \in G_1 \; ; \xi_i^0 \in G_i$$

$$I - 1 < f(\xi_1) m(G_1) + \sum_{i=2}^{n} f(\xi_i) m(G_i) < I + 1$$

$$\sum_{i=2}^{n} f(\xi_i)m(G_i) = A$$

$$I - A - 1 < f(\xi_1)m(G_1) < I + 1 - A \qquad \forall \xi_1 \in G_1 : m(G_1) \neq 0$$

$$\frac{I - A - 1}{m(G_1)} < f(\xi_1) < \frac{I + 1 - A}{m(G_1)}$$