

Формула на Грим

18 януари 2017 г.

Нека $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ са диференцируеми и непрекъснати върху едносвързаната област Ω и нека Γ е проста накръсана гладка крива линия, ограничаваща областта G . Тогава имаме:

$$\int_{\delta G} Pdx + Qdy = \iint_G \left(\frac{\delta Q(x, y)}{\delta x} - \frac{\delta P(x, y)}{\delta y} \right), \text{ където } \delta G := \Gamma, \text{ но положително ориентирана.}$$

Нека областта G е криволинеен трапец, както по $O\vec{y}$, така и по $O\vec{x}$.
Тоест:

$$G = \{(x, y) : a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \Psi(x)\} \text{ и } G = \{(x, y) : c \leq y \leq d, \alpha(y) \leq x \leq \beta(y)\}$$

$$\begin{aligned} 1) \text{ Да разгледаме: } & \iint_G \left[\left(\frac{-P(x, y)}{\delta y} \right) dx dy \right] = - \iint_G \left(\frac{\delta P(x, y)}{\delta y} \right) dx dy = \\ & = - \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\Psi(x)} \frac{\delta P(x, y)}{\delta y} dy = - \int_a^b \left(P(x, y) \Big|_{\varphi(x)}^{\Psi(x)} \right) dx = - \int_a^b [P(x, \Psi(x)) - P(x, \varphi(x))] dx = \\ & = \int_a^b P(x, \varphi(x)) dx - \int_a^b P(x, \Psi(x)) dx = \int_{ABCD} Pdx + \int_{EFGH} Pdx + \int_{DE} Pdx + \int_{LA} Pdx = \int_{\delta G} Pdx \end{aligned}$$

Описват се по обратно на часовниковата стрелка.

$$2) \text{ Аналогично за } \int_G \left(\frac{\delta Q(x, y) dx dy}{\delta x} \right) = \int_{\delta G} Qdy$$

Като съберем едно и две \Rightarrow Формула на Грим