Теорема- Ако f(x) е непрекъсната в/у компактно, изм. по Ж. мн-во G $\subset R^n =>$ f(x) е интегрируема в/у G

доказателство:

f(x) е непрек. в/у комп мн-во G $=>$ f(x) е равномено непр. в/у G, т.е. $\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 : \forall x', x'' \in G, \rho|x' - x''| < \delta => |f(x') - f(x'')| < \epsilon$

f(x) е интегрируема $<=> \forall \epsilon > 0 \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 : \forall \tau = \{G_i\}_{i^n}, \delta_\tau < \delta => S_\tau - s_\tau < \epsilon$

$\forall \epsilon > 0 \epsilon_0 = \frac{\epsilon}{(2m(G))} > 0 => \exists \delta = \delta(\epsilon_0) = \delta(\epsilon) > 0 : \forall x', x'' \exists G, \rho(x', x'') < \delta => |f(x') - f(x'')| < \epsilon_0$

$\forall \tau = \{G_i\}_{i=1}^n, \delta_\tau < \delta$

$\tau - > S_\tau - s_\tau = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) m(G_i)$

$$M_i - m_i = \sup_{x', x'' / in G_i} |f(x') - f(x'')|$$

$$\forall \tau = \{G_i\}_{i=1}^n, \delta_\tau < \delta$$

$\delta_\tau = \max_i d(G_i) = \max \sup_{x', x'' \in G_i} \rho(x', x'') \forall i = 1, 2.., n : \forall x', x'' \in G_i \rho(x', x'') < \delta => |f(x') - f(x'')| < \varepsilon 0$

$$M_i - m_i = \sup_{x', x'' \in G_i} |f(x') - f(x'')| \leq \varepsilon 0$$

$$S_\tau - s_\tau < \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) m(G_i) \leq \sum_{i=1}^n \varepsilon 0 m(G_i) = \varepsilon_0 \sum_{i=1}^n m(G_i) = \varepsilon 0 m(G)$$

$$\epsilon_0 = \frac{\varepsilon}{2m(G)}$$

$$=> \frac{\varepsilon}{2m(G)} m(G) = \varepsilon/2 < \varepsilon$$

$=>$ f(x) е интегрируема в/у G

Теорема - Нека f(x) е ограничена ф-я в/у компактно, изм. по Ж мн-во G $\subset R^n$ и множеството от точки на прекъсване е с ЖМО.

Доказателство:

E=$\{$x:f(x) е прекъсната в x$\}$

$\forall \varepsilon > 0 \exists$ клетъчно мн-во A_ϵ :

$$1) E \subset A_\epsilon$$

$$2) m(A_\varepsilon) < \varepsilon$$

тъй като f(x) е ограничена в/у G $=> \exists$ M $>$ 0: $\forall x \in M => |f(x)| \leq M$ $G' = G/A_\varepsilon => G'$е компактно Тъй като f(x) е непрекъснато в/у комп мн-во G' $=>$ f(x) е интегр. в/у G'(от силния критерий за интегрируемост).$=>$ $\forall \varepsilon > 0 \exists \tau = \{G_i\}_{i=2}^n : S_\tau - s_\tau < \varepsilon/2$ $G_1 = G \cap A_\varepsilon => \tau = \{G_i\}_{i=1}^n$ е разбиване на G $S_\tau - s_\tau = (M_1 - m_1) m(G_1) + (S'_\tau) - s'_\tau \leq (M_1 + m_1) m(G_1) + \varepsilon/2 \leq 2Mm(G_1) + \varepsilon/2 \leq 2Mm(A_\varepsilon) + \varepsilon/2 < 2M\frac{\varepsilon}{4M} + \varepsilon/2 = \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = 1$

$$M_1 - m_2 \leq M_1 + m_2 \leq (M + M) = 2M$$

От силния критерий за интегрируемост $=>$f(x) е интегрируема в/у G