1 Mqrka na Jordan

определение: A,B - множество
AxB={(a,b): a $\in$ A, b $\in$ B}- Декартово произведение
$R^m = RxRxR...$
Определение
Клетка в R наричаме кой да е интервал.

Определение:
Дължина на клетка <a,b> се нарича |<a,b>|=b-a >=0
Определение:
клетка в R^m наричаме мн-во от вида I=I1xI2X...Im, където Ik, k = $\overline{(1,n)}$ са клетки в R
Определение:
Мярка на клетка I=I1xI2x..xIn се нарича числото:

$$m(I) = \prod_{i=1}^{n} m(I_i)$$

Определение
Мярка на отсечка се нарича числото |<a,b>|=b-a>=0
Определение
Нека A е множество. Съвкупността от мн-ва $\{A_i\}_{i=I}$ се нарича разбиване на A, ако:
1)$A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i, j \in I, i! = j$
2)$A = \bigcup_{i \in I} A_i$

Свойство:
Нека П е клетка в R^n и $\{Q_i\}_{i=1}^k$ е разбиване на П и Q_i - клетка => m(П)= $\sum_{i=1}^k m(Q_i)$

Доказателство

$$Q_i = I_i x I_j$$

$$S = \bigcup_{i=1}^{k} \partial I_i$$

$$T = \bigcup_{i=1}^{k} \partial J_i$$

$P = \bigcup L_i$- стандартно разбиване $m(\Pi) = \sum_i m(L_i) = \sum_{i=1}^k \sum_{l_i \subset Q_i} m(L_i) = \sum_{i=1}^k m(Q_i)$
Определение: Множество Q $\subset$ R^n се нарича клетъчно множество ако $\exists$ разбиване за Q съставено от клетки. $\exists \{\Pi_i\}_{i=1}^s$, П-клетки, $\Pi_i \cap \Pi_j ! = 0, \forall i, j = \overline{1, s} i! = j$, такива че $\bigcup_{i=1}^s \Pi_i = Q$

Свойство:

$$M(Q)=\sum_{i=1}^{s}m(\Pi_i)$$

Нека $\{\Pi_i\}_{i=1}^{s}, \{k_j\}_{i=1}^{k}$-разбиване от клетки на Q
$\sum_{i=1}^{s}m(\Pi_j)?=\sum_{i=1}^{k}m(k_j), P_{ij}=\Pi_i\cap K_j, i=\overline{1,s}, j=\overline{1,k}$
$\{\Pi_{ij}\}, i=\overline{1,s}, j=\overline{1,k}$- разбиване на Q
$\sum_{i=1}^{s}\sum_{j}^{k}m(\Pi_{ij})=\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{k}m(\Pi_{ij})=\sum_{i=1}^{s}m(\Pi_j)=\sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{s}m(\Pi_{ij})=\sum_{i=1}^{n}m(Q_j)$

Свойство1:
Нека A,B - клетъчни мн-ва, A $\cap$ B = $\emptyset$ =>
1) A $\cup$ B- клетъчно множество
2) m(A $\cup$ B)=m(A)+m(B)
Доказателство:
A,K- клет. мн-во => A = $\bigcup_{i=1}^{s}\Pi_i, B=\bigcup_{j=1}^{k}Q_j\{\Pi_i\}_{i=1}^{s}$-разбиване на A
$\{Q\}_1^j$-разбиване на B C=$\{\Pi_i\}^s\cup\{Q_j\}_{j=1}^{k}$-разбиване на A i B
$m(A\cup B)=\sum_{i=1}^{s}m(\Pi_i)+\sum_{i=1}^{k}m(Q_j)=m(A)+m(B)$
Следствие:
$\{A_i\}_i^p, A_i$- клет. мн-во, $A_i\cap A_j=\emptyset, \forall i,j=\overline{1,p}, i!=j$ =>

$$1)\bigcup_{i=1}^{p}A_i-kletuchno-mnojestvo$$

$$2)m(\bigcup_{i=1}^{p}A_i)=\sum_{i=1}^{p}m(A_i)$$

Свойство 2: нека A и B са кл. мн-ва => A $\cap$B-кл.мн-во Доказателство: $=\bigcup_{i=1}^{m}\Pi_i, B=\bigcup_{j=1}^{k}Q_j$
$\{\Pi_i\}_{i=1}^{m}$ разбиване по A; $\{Q_j\}_1^k$-разбиване по B => $\{\Pi_{ij}=\Pi_i\cap Q_j\}_1^m i=\overline{1,m}, j=\overline{1,k}$-разбиване по A A $\cap$ B= ($\bigcup_{i=1}^{m}\Pi_i$) $\cap$ ($\bigcup_{j=1}^{k}Q_j$)= $\bigcup$ ($\Pi_i\cap Q_j$)$i=\overline{1,m}, j=\overline{1,k}$ - клетъчно мн-во
Свойство 3:
Ako A i B са кл мн-ва => A/ B е клетъчно мн-во
Лема:
Ако Π и Q клетки => Π / Q е кл. мн-во

$$\Pi=\Pi_1x\Pi_2$$

$$Q=Q1xQ2$$

$$(A_2x\Pi_1/Q_1)\cup([\Pi_1\cap Q_1]x\Pi_2/Q_2)$$

Доказателство на 3:
1) Нека B е кл. мн-во A=$\bigcup_{i=1}^{s}\Pi_i$, $\{\Pi_i\}_{i\in I}$- разбиване на
A / B = ($\bigcup_{i=1}^{s}/B=\sum_{i=1}^{s}(\Pi_i/B)$

Нека B е клет. мн-во B $= \sum_{i=1}^{k} Q_j, \{Q_j\}_{j=1}^{k}$-разбиване на кл. мн-во B
A / B =A / $\bigcup_{j=1}^{k} Q_j = \bigcap_{j=1}^{k}(A/Q_j)$

Св-во 4- Ако A и B са кл. мн => AUB- kl. мн-во

Св-то 5:
Ako A i B са кл. н-во и A $\subset$ B

$$=> m(B) = m(A) + m(B/A)$$

$$m(A) \leq m(B)$$

св-во 6:
Нека $\{A_i\}_{i=1}^{n}$- кл. мн-во => m($\bigcup_{i=1}^{n} A)i) \leq \sum_{i=1}^{nm(A_i)}$
Доказат-во:
1)n=1:
$m(A_1) \leq m(A_1)$ 2) k $\in N$
$m(\bigcup_{i=1}^{k} A_i) = \sum_{i=1}^{k} m(A_i)$- допускаме, че е вярно
3) $m(\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i) = m((\bigcup_{i=1}^{k} A_i) \bigcup A_{k+1}) = m(\bigcup_{i=1}^{k} A_i) + m(A/\bigcup_{i=1}^{k} A_i) = \sum_{i=1}^{n} m(A_i) + m(A_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1} m(A_i)$
Определение: $\Omega \subset R^m . \Omega$ е измери. по Ж ако $\forall \varepsilon > 0 \exists$ кл. мн-во A,B:

$$1) A \subset \Omega \subset B$$

$$2) m(B) - m(A) < \varepsilon$$

Ако C е кл. мн-во => C е изм. по Ж.
Определение:
Нека $\Omega \subset R^n$ е изм. по Жорд. Мярка на Жордан на мн. Ω, наричаме такова число $m(\Omega)$, за което имаме, че $\forall$ кл. мн-во A,B: $A \subset \Omega \subset B => m(A) \leq m(\Omega) \leq m(B)$
Твърдение: Ако $\Omega \subset R^m$ е измеримо по Жорд, то $\exists$ мярката на Жорд $m(\Omega)$ на мн Ω При това тя е единствена и има:

$$m(\Omega) = \sup_{a \subset \Omega}(A) = inf_{\Omega \subset B} m(B)$$

д-во: $A^* = \{A : A$ е кл. мн-в0, $A \subset \Omega\}$
$B^* = \{B : B$ е кл.мн-во, $\Omega \subset B\}$ Ω е измеримо по Ж:
$\forall \varepsilon > 0 \exists$ кл. мн-во A, B:

$$1) m(B) - m(A) < \varepsilon$$

$$A \subset \Omega \subset B$$

За $\forall A \in A^*, \forall B \in B^* : A \subset \Omega \subset B$
A $\subset$ B
$m(A) \leq m(B)$
$\forall A \in A^*, \forall B \in B^*$
$m(A) \leq m(B)$
Ако фиксираме B:

$m(A) \le m(B), \forall A \in A^* => m(B)$ е горна граница на $\{m(A) : A \in A^*\} =>$
$\exists \sup_{A\in A^*} m(A) = \sup_{A\subset\Omega} m(A) \le m(B), \forall B \in B^*$
$=> \exists \inf_{B\in B^*} m(B) = \inf_{B\subset B} m(B) =>$
$m(A) \le sup_{A\subset\Omega} m(A) \le \sup_{A\subset\Omega} m(A) \le \inf_{\Omega\subset} m(B) \le m(B)$
$=> \exists m(\Omega)$ $\forall A$ кл. мн-во с $\Omega, \forall$ кл. мн-во $\Omega \subset B => m(A) \le \sup_{a\subset\Omega} m(a) \le \inf_{\Omega\subset B} m(B) \le m(B)$
$0 \le \sup_{\Omega\subset B} m(B) - \sup_{A\subset\Omega} m(A) \le m(B) - m(A)$
Ω е изм. по Ж :

$$=> \forall \varepsilon > 0 \exists klet - mnojestvo A_\varepsilon, B_\varepsilon :$$

$$1) A_\varepsilon \subset \Omega \subset B_\varepsilon$$

$$2) m(B_\varepsilon) - m(A_\varepsilon) < \varepsilon$$

$=> \forall \varepsilon > 0$

$$0 \le \inf_{\Omega\subset B} m(B) - \sup_{A\subset\Omega} m(A) < \varepsilon$$

$$=> \inf_{\Omega\subset B} m(B) = \sup_{A\subset\Omega} m(A) = m(\Omega)$$

Теорема:
мн-во $\Omega \subset R^m$ е изм. по Ж $<=> \forall \varepsilon > 0 \exists$изм. по Ж- Ω_1, Ω_2

$$1) \Omega_1 \subset \Omega \subset \Omega_2$$

$$2) m(\Omega_2) - m(\Omega_1) < \varepsilon$$

ДОказателство:
$<=$
Нека $\forall \varepsilon > 0 \exists$ изм. по Ж. мн. Ω_1, Ω_2:

$$1) \Omega_1 \subset \Omega \subset \Omega_2$$

$$2) m(\Omega_2) - m(\Omega_1) < \varepsilon$$

$\forall \varepsilon > 0 \exists$ кл. мн-во A,B:

$$1) A \subset \Omega \subset B$$

$$2) m(B) - m(A) < \varepsilon$$

Ω_1-измеримо по Ж $=>$ m(Ω_1)= $\sup_{A\subset\Omega_1} m(A)$

$$\forall \varepsilon > 0, \varepsilon/4 > 0 \exists A_\varepsilon \subset \Omega_1 :$$

$m(\Omega_1) - \varepsilon/4 < m(A_\varepsilon)$
$m(\Omega_2) = \inf_{\Omega_2\in B} m(B)$ $m(\Omega_2) = \inf_{\Omega_2\in B} m(B)$
$\varepsilon/4 > 0 \exists \Omega_2 \subset B_\varepsilon : m(B_\varepsilon) < m(\Omega_2) + \varepsilon/4$
$A_\varepsilon \subset \Omega_1 \subset \Omega \subset \Omega_2 \subset B_\varepsilon$
$=> -m(A_\varepsilon) < -m(\Omega_1) + \varepsilon/4$

$m(B_\varepsilon) - m(A_\varepsilon) < (m(\Omega_2) + \varepsilon/4) + (-m(\Omega_1) + \varepsilon/4) = m(\Omega_2 - m(\Omega_1) + \varepsilon/2 < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon)$ $\forall \varepsilon > 0 \exists$ кл. мн-во $A_\varepsilon, B_\varepsilon$:

$$1) A_\varepsilon \subset \Omega_1 \subset \Omega \subset \Omega_2 \subset B_\varepsilon$$

$$m(B_\varepsilon) - m(A_\varepsilon) < \varepsilon$$

Определение:

Нека E $\subset R^m$ е мн-во с Жорданова Мярк 0, ако $\forall \varepsilon > 0 \exists$измеримо по Ж. мн-во А:

$$1) E \subset A$$

$$2) m(A) < \varepsilon$$

Св-во1: Ако E е мн-во с ЖМО => E е измеримо по Ж и m(E)=0
д-во:
E е ЖМО => $\forall \varepsilon > 0 \exists$ кл. мн-во А:

$$1) E \subset A$$

$$2) m(A) M \varepsilon$$

$\forall \varepsilon > 0 \exists$ кл. мн-в C, D:

$$1) C \subset E \subset D$$

$$2) m(D) - m(C) < \varepsilon?$$

$c = \emptyset$

$$\emptyset \subset E \subset A$$

$$m(A) - m(\emptyset) = m(A) < \varepsilon$$

=> E е изм по Ж

$0 \leq m(E) = \in_{E \subset A} m(A) \leq \varepsilon$
$\forall \varepsilon > 0 : 0 \leq m(E) \leq \varepsilon => m(E) = 0$
Св-во: E -мн-во с ЖМО, $E' \subset E => E'$ е мн с ЖМО
E' $\subset$ E
E- ЖМО => $\forall \varepsilon > 0 \exists$ изм. по Ж:

$$1)' \subset E \subset A$$

$$2) m(A) < \varepsilon => E' - e - JMO$$

св-во: E и F са мн с ЖМО => E и F е мн-во с ЖМО.
E,F са мн с ЖМО= $\forall \varepsilon > 0 \exists$ кл. мн-во А и B:

$$1) \subset A; F \subset B$$

$$2) m(A) < \varepsilon/2; m(B) < \varepsilon/2$$

1)$E \cup F \subset A \cup B-$кл. мн-во
2)$m(A \cup B) \leq m(A) + m(B) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon => E \cup F$ е мн. с ЖМО.
Св-во: АКО E и F са мн с ЖМО => E ∩ F и E / F е мн с ЖМО

$$E \cap F \subset E \cup F$$

$$E/F \subset E \cup F$$

$$E \cup F - e - JMO - ot - Svoistvo2 => E \cap F - and - e/F - sa - s - JMO$$

Твърдение -(КРИТЕРИЙ ЗА ИЗМЕРИМОСТ)-Мн-во $\Omega \subset R^n$ е изм. по Ж <=>:

$$1)\Omega - e - ogranicheno$$

$$2)kontur - \Omega - e - JMO$$

д-во:
=>
Нека Ω е изм по Ж => $\forall \varepsilon > 0 \exists$ кл мн-во A,B:

$$A \subset \Omega \subset B$$

$$m(B) - m(A) < \varepsilon$$

от 1 => $\Omega \subset B$- B - кл мн-во => Ω е кл мн-во
контур Ω е ЖМО ?

$\forall \varepsilon > 0 \exists$ кл. мн-во G:

$$\partial\Omega \subset G$$

$$m(G) < \varepsilon$$

Ω е изм по Ж => $\forall \varepsilon > 0 \exists$ кл. мн-во A и B:

$$A \subset \Omega \subset B$$

$$m(B) - m(A) < \varepsilon$$

$A^o \subset A, A^o \cap \partial A = \emptyset$
$m(A^o) = m(A)$
$B \subset m(\overline{B}), m(\overline{B}) = m(B)$
$A^o \subset A \subset \Omega B \subset \overline{B}$
$m(\overline{B}) - m(A^o) = m(B) - m(A), \varepsilon$

$$A^o \cap \partial\Omega = \emptyset$$

$$\partial\Omega\emptyset\overline{B}$$

$$\partial\Omega \subset \overline{B}/A^o = G$$

$$m(\overline{B}/A^o) = m(\overline{B}) - m(A^o) = m(B) - m(A) < \varepsilon$$

$\overline{B} = A^o \cup (\overline{B}/A^o)$
$m(\overline{B}) = m(A^o) + m(\overline{B}/A^o)$

<=
Нека Ω е ограничено.
$\partial\Omega$ е мн. ЖМО. Дали Ω е изм. по Ж? $\forall\varepsilon > 0\exists$ кл. мн-во A и B:

$$1)a \subset \Omega \subset B$$

$$2)m(B) - m(A) < \varepsilon$$

Ω-ограничено => $\exists$ кл. мн-во $\Pi : \Omega \subset \Pi$, тъй като $\partial\Omega$ е ЖМО => $\forall\varepsilon > 0\exists$ кл мн-во A:

$$1)\partial\Omega \subset A$$

$$2)m(A) < \varepsilon$$

Π/A-кл мн-во
$\Pi/A = \bigcup_{i=1}^{n} \Pi$, $\Pi_i \cap \Pi_j = \emptyset, \forall i, j = \overline{1,n}, i! = j$
$\forall i = \overline{1,n}, \Pi \subset \Omega$
$\Pi_i \cap \Omega = \emptyset$
K $= \bigcup_{P_i \in \Omega} \Pi_i$
$K \subset \Omega$
$k \subset \Omega$
$B = k \cup A$-кл. мн-во $k \subset \Omega \subset B$
m(B)=m($k \bigcup A$)=m(k)+m(A)
m(B)-m=m(K)+m(a)-m(K)=m(a)
=> Ω е изм. по Ж. Св-во: Ако $\Omega_1, \Omega_2(\Omega_i \subset R^n, i = \overline{1,i})$ са изм по Ж => $\Omega_1 \bigcup \Omega_2; \Omega_1 \bigcap \Omega_2, \Omega_1/\Omega_2)$ са изм по Ж.

$$\Omega_1, \Omega_2 - sa - izm - po - Jordan :$$

$$=> 1)\Omega_1, \Omega_2 - sa - ogranich$$

$$2)\partial\Omega_1, \partial\Omega_2 - sa - s - JMO$$

д-во:

1) Ω_1 и Ω_2 са изм по Ж m(Ω_1)=$\inf_{\Omega_1 \subset A} m(A)$
$m(\Omega_2) = \inf_{\Omega_2 \subset B} m(B)$ $\forall\varepsilon > 0\exists$кл мн-во $A_\varepsilon > \Omega_1, m(A_2) < m(\Omega_1) + \varepsilon$
$\exists$кл мн-во $A_\varepsilon > \Omega_1, m(A_2) < m(\varepsilon_2) + \varepsilon$
$\Omega_1 \bigcup \Omega_2 \subset A_\varepsilon \bigcup B_\varepsilon$
$=> m(\Omega_1 \bigcup \Omega_2) \leq m(A_\varepsilon \bigcup B_\varepsilon) \leq m(A_\varepsilon) + m(B_\varepsilon) < m(\Omega_1) + \varepsilon + m(\Omega_2) + \varepsilon$

$$m(\Omega_1 \bigcup \Omega_2) < m(\Omega_1) + m(\Omega_2) + 2\varepsilon$$

$$=> m(\Omega_1 \bigcup \Omega_2) \leq m(\Omega_1) + m(\Omega_2)$$

$2)\Omega_1 \bigcap \Omega_2 = \emptyset, m(\Omega_1 \bigcup \Omega_2) = m(\Omega_1) + m(\Omega_2)$,от 1) =>$m(\Omega_1 \bigcup \Omega_2) \leq m(\Omega_1) + m(\Omega_2)$
Да покажем, че m($\Omega_1 \bigcup \Omega_2) \geq m(\Omega_1) + m(\Omega_2)$

$$m(\Omega_1) = \sup_{A \subset \Omega_1} m(A)$$

$$m(\Omega_2) = \sup_{B \subset \Omega_2} m(B)$$

$\forall \varepsilon > 0$, за $\varepsilon/2 > 0$
$\exists A_\varepsilon \subset \Omega_1 : m(\Omega_1) - \varepsilon/2 < m(A_\varepsilon)$
$\exists B_\varepsilon \subset \Omega_2 : m(\Omega_2) - \varepsilon/2 < m(B_\varepsilon)$
$\Omega_1 \bigcup \Omega_2 \supset A_\varepsilon \bigcup B_\varepsilon => m(\Omega_1 \bigcup \Omega_2) \geq m(A_\varepsilon \bigcup B_\varepsilon) = m(A_\varepsilon) + m(B_\varepsilon)$,защото
$A_\varepsilon \bigcap B_\varepsilon = \emptyset$
$m(\Omega_1) - \varepsilon/2 + m(\Omega_2) - \varepsilon/2 = m(\Omega_1) + m(\Omega_2) - \varepsilon$
$m(\Omega_1 \bigcup \Omega_2) > m(\Omega_1) + m(\Omega_2) - \varepsilon$
$=> m(\Omega_1 \bigcup \Omega_2) \geq m(\Omega_1) + m(\Omega_2)$

$$=> m(\Omega_1 \bigcup \Omega_2) = m(\Omega_1) + m(\Omega_2)$$