Свойство 1:

$$\int_G dx = m(G)$$

д-во: $\int_G dx = sup_\tau s_\tau = \sum_{i=1}^n m_i m(G_i) = \sum_{i=1}^n inf f(x) m(G_i) = \sum_{i=1}^n m(G_i) = m(G)$

Св-во 2:

f(x) и g(x) са интегр. вюу измерим. по Жорд. мн-во G =>
1) $\lambda f(x), \lambda \in R, f(x)+g(x)$ са интегр. в/у G;
2) $\int_G \lambda f(x)dx = \lambda \int_G f(x)dx$
$\int_G (f(x)+g(x))dx = \int_G f(x)dx + \int_G g(x)dx$ Доказателство: $\lambda f(x)$ е инт. в/у G, λ != 0
f(x) е инт. в/у G => ∃ I ∈ R: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall \tau = \{G_i\}_1^n, \delta_\tau < \delta, \forall \xi = \{\xi_i\}_{i=1}^n, \xi_i \in G_i i = 1,2,..,n => |I - \sigma_\tau(fi\xi)| < \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$ Разглеждаме $|\lambda I - \sigma_\tau(\lambda fi\xi)|$
$\sigma(\lambda fi\xi) = \sum_{i=1}^n (\lambda f)(\xi_i) m(G_i) = \sum_{i=1}^n (\lambda f(\xi_i) m(G_i)) = \lambda \sum f(\xi_i) m(G_i) = \lambda \sigma_\tau(fi\xi) |\lambda I - \sigma_\tau(\lambda fi\xi)| = |\lambda I - \lambda\sigma_\tau(fi\xi)| = |\lambda||I - \sigma_\tau(fi\xi)| < \frac{\varepsilon}{|\lambda|} \exists \lambda I : \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall \tau = \{G_i\}_{i=1}^n, \delta_\tau < \delta, \forall \xi = \{\xi_i\}_{i=1}^n, \xi_i \in G_i => |\lambda I - \sigma_\tau(\lambda fi\xi)| < \varepsilon => 1) \lambda f(x)$ е интегр. в/у G; 2) $\int \lambda f(x)dx = \lambda I = \lambda \int f(x)dx$

Свойство 3: Ако f(x) >= 0 и интегр. в/у изм. по Ж. мн-во G => $\int_G f(x)dx >= 0$ Доказателство: $\int_G f(x)dx = sup_\tau s_\tau = sup_\tau \sum m_i m(G_i)$
$m_i = inf_{x \in G_i} f(x) >= 0$
$s_\tau \sum_{i=1}^n m_i m(G_i) >= 0 => \sup_\tau \sum_{i=1}^n m_i m(G_i) >= 0$

Свойство 4ри: Ако f(x) >= g(x) и са интегр. в/у изм. по Ж мн-во G => $\int_G f(x)dx >= \int_G g(x)dx$
доказателство:
f(x) и g(x) са интегр в/у G =>f(x)-g(x) интегр. в/у G и f(x)-g(x) >= 0, $\forall x \in G$
$\int_G [f(x) - g(x)]dx >= 0 => \int_G (f(x) - g(x))dx = \int_G f(x) - \int_G g(x)dx >= 0 => \int_G f(x)dx >= \int_G g(x)dx$
Свойство 5:
Ако f(x) е интегр. в/у измер/ по Ж. мн-во G => |f(x)| е интегр. в/у G и $|\int_G f(x)dx| \leq \int_G |f(x)|dx$
доказателство:
$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall \tau = \{G_i\}_{i=1}^n, \delta_\tau < \delta => \sum_{i=1}^n \omega_i(f) m(G_i) < \varepsilon, where \omega_i(f) = sup_{x', x'' \in G} |f(x') - f(x'')|$
$||f(x')| - |f(x'')|| \leq |f(x') - f(x'')|$
$\omega_i(|f|) = \sup_{x', x'', \in G_i} ||f(x')| - |f(x'')|| \leq \sup_{x', x'', \in G_i} |f(x') - f(x'')| = \omega_i(f)$
$\sum \omega_i(|f|) m(G_i) \leq \sum_{i=1}^n \omega_i(f) m(G_i) < \varepsilon => |f(x)|$ е интегр. в/у G
|f(x)| >= f(x) и |f(x)|>=-f(x), $\forall x \in G$

$$\int_G |f(x)|dx >= \int_G f(x)dx$$

$$\int_G |f(x)|dx >= \int_G (-f(x))dx = -\int_G f(x)dx$$

$$\int_G |f(x)|dx >= |\int_G f(x)dx|$$

Свойство 6:
Нека f(x) е интегр. в/у изм. по Ж мн-во G и G=G1 $\cup$ G2: G1 $\cap$ G2 = $\emptyset$, G1, G2 - измеримо по Жордан.

$$=> \int_G f(x)dx = \int_{G1} f(x)dx + \int_{G2} f(x)dx$$

Доказателство: f(x) е интегр. в/у G => f(x) е интегр. в/у G_i(i=1,2) I=$\int_G f(x)dx$; $I_i = \int_G f(x)dx, i = 1, 2$
$\forall\varepsilon > 0 \exists\delta_0 = \delta(\varepsilon) > 0 \forall\tau = \{G_i\}_{i=1}^n$ На Gi $\forall\xi = \{\xi_i\}_{i=1}^n \in G_i, \delta_\tau < \delta_0, \xi_i \in G_i, i = \overline{1,n} => |I - \sigma_\tau(fi\xi)| = \varepsilon/4$
$\exists\delta_j = \delta_j(\varepsilon) > 0 (j = 1, 2) \forall\tau_j = \{G_i^{(j)}\}_{i=1}^{n_j} \delta_{\tau_j} < \delta_j, \forall\xi^{(j)} = \{\xi_i^{(j)}\}_{i=1}^{n_j} \xi_i^{(j)} \in G_j => |I_j - \sigma_\tau(fi\xi^{(1)})| < \varepsilon/4$ Вземаме $\tau_2 = \{G_i^2\}_{i=1}^{n_2}$ на $G_2, \delta_2 < \delta$, вземаме $\xi^{(2)} = \{\xi_i^{(2)}\}_{i=1}^{n_2} : |I_2 - \sigma_{\tau_2}(fi\xi^{(2)})| < \varepsilon/4$
$|I - (I_1 + I_2)| < \varepsilon$ $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$- разбиване на $G_\tau, \delta_\tau < \delta_0.\xi = \{\xi_i^0\}_{i=1}^{n_1} \cup \{\xi_i^{(2)}\}_{i=1}^{n_2} = \xi^{(1)} \cup \xi^{(2)}$ $\sigma_\tau(fi\xi) = \sigma_\tau(fi\tau^{(1)}) + \sigma_\tau(fi\xi^{(2)})$
$|I - \sigma_\tau(fi\xi)| < \varepsilon/4$
$|I - (I_1 + I_2)| = |I - \sigma_\tau(fi\xi) + \sigma_\tau(fi\xi) - (I_1 + I_2)| \le |I - \sigma_\tau(fi\xi)| + |(I_1 + I_2) - \sigma_\tau(fi\xi)| \le |I - \sigma_\tau(fi\xi) + (I_1 + \sigma_{\tau_1}(fi\xi^{(1)}))| + |I_2 - \sigma_{\tau_2}(fi\xi^{(2)})| < \varepsilon/4 + \varepsilon/4 + \varepsilon/4 < \varepsilon$

Свойство: ТЕОРЕМА за средното значение - Нека ф-та f(x) е непрек в/у измер/ по Ж, компактно мн-во $G \subset R^n$

$$=> \exists x_0 \in G :\in_G f(x)dx = f(x_0)m(G), m(G) > 0$$

$$f(x_0) = \frac{1}{m(G)} \int_G f(x)dx - sredna - stoinost - na - f(x) - v/u - G$$

Доказателство: Тъй като f(x) е непрек. в/у комп. мн-во G => f(x) достига най- голяма и най- малка стойност т.е. $\exists x1, x2 \in G_i \forall x \in G => m = f(x1) \le f(x) \le f(x2) = M$

$$\int_G mdx \le \int_G f(x)dx \le \int_G Mdx$$

$m.m(G) \le \int_G f(x)dx \le Mm(G) : m(G) > 0m \le \frac{1}{m(G)} \int_G f(x)dx \le M$ тъй като G е свързан по теоремата на Вайерщрас $\exists x_0 \in G : f(x_0) = \frac{1}{m(G)} \int_G f(x)dx$

$$\int_G f(x)dx = f(x_0)m(G)$$