Критерии за итегруемост на функция

23 януари 2017 г.

Нека $f(x)$ е дефинирана и ограничена върху измеримо по Жордан множество Ω. Нека $I = \{G_i\}_{i=0}^{n}$ е разбиване на Ω. Тогава малката и голямата сума на Дарбу са съответно $s = \sum m_i m(G_i)$ и $S = \sum M_i m(G_i)$, където $m_i = inf f(x)$ и $M_i = sup f(x)$ $[x \in G_i]$ и имат следните свойства:

1) За $\forall s_\tau \leq \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) m(G_i) \leq S_\tau;\ f(\xi_i) = \delta_\tau(f;\xi)$

2) $s = inf \delta_\tau(f;\xi);\ S_\tau = sup \delta_\tau(f;\xi)$

Нека $\tau = \{G_i\}_{i=0}^{n}$ и $\tau' = \{G_j\}_{j=0}^{l}$ са разбивания на Ω. Тогава ако за $\forall j = \overline{1,l} \quad \forall i = \overline{1,n} : D_j < G_i,\ \tau < \tau'$, то τ' следват:

3) Ако $\tau = \{G_i\}_{i=0}^{n}$ и $\tau' = \{G_j\}_{j=0}^{l}$ са разбивания $=> s_\tau \leq s_{\tau'} \leq S_{\tau'} \leq S_\tau$

$$s_\tau = \sum_{i=1}^{n} m_i m(G_i) = \sum_{i=1}^{n} m_i \big(\sum m(D_j) \big) = \sum_{i=1}^{n} \sum m_i m(D_j) \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} \sum m_j m(D_j) = \sum_{i=1}^{n} m_j m(D_j) = s_{\tau'} => s_\tau \leq s_{\tau'}$$

4) за всеки две разбивания τ и $\tau' => s_\tau \leq s_{\tau'}$ Следва от 3.

5) Съществуват $sup s_\tau = \underline{I}$ и $inf S_\tau = \overline{I}$, при това $s_\tau \leq \underline{I} \leq \overline{I} \leq S_\tau$

От свойство 4 имаме, че за $\forall \tau$ и τ', разбивани на Ω имаме, че $S_\tau \leq S_{\tau'}$. Имаме, че $\{S_\tau; \tau\}$ е ограничена отгоре $=> sup s_\tau = \underline{I}$

Функцита $f(x)$ е интегрируема по Риман върху измеримо по Жордан множесто $\Omega <=>$ за $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 : \forall \tau = \{G_i\}_{i=1}^{n}$ с големина разбиване $\delta_\tau < \delta => S_\tau - s_\tau < \epsilon$

Нека $f(x)$ е интегрируема по Риман върху Ω Тогава $\exists I \in R : \forall \epsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 : \forall \tau = \{G_i\}_{i=1}^{n},\ \delta_\tau < \delta, \forall \xi = \{\xi_i\}_{i=1}^{n}, \xi \in G_i => |I - \delta_\tau(f;\xi)| < \epsilon$

Тогава $I - \epsilon < \delta_\tau(f;\xi) < I + \epsilon => I - \epsilon \leq s_\tau = inf \delta_\tau(f;\xi) \leq sup \delta_\tau(f;\xi) = S_\tau \leq I + \epsilon$.

Имаме,че $\begin{cases} S_\tau \leq & I+\epsilon \\ -s_\tau \leq -I+\epsilon \end{cases}$. Като ги съерем получаваме $S_\tau - s_\tau \leq 2\epsilon$ Доказано.

Обратно. За $\forall\epsilon > 0$, можем да намерим $\delta = \delta(\epsilon) > 0 : \forall\tau = \{G_i\}_{i=1}^n \tau < \delta$, за което $S_\tau - s_\tau < \epsilon*$. Имаме, че $s_\tau \leq \underline{I} \leq \overline{I} \leq S_\tau$. Тогава $0 \leq \overline{I} - \underline{I} \leq S_\tau - s_\tau => -\overline{I} - \underline{I} \leq 0 \leq S_\tau - s_\tau < \epsilon$ За някое I

За $\forall\epsilon > 0 \quad 0 \leq \overline{I} - \underline{I} < \epsilon => \overline{I} - \underline{I} = 0 => \overline{I} = \underline{I} = I$ Тогава $s_\tau - S_\tau \leq \delta_\tau(f;\xi) - I \leq S_\tau - s_\tau => |\delta_\tau(f;\xi)| \leq S_\tau - s_\tau < \epsilon$

По деф f(x) е интегруема о Риман.

Нека f(x) е дефинирана и ограничена в множестовото $E \subset R^n$ Знаем, че $\exists M sup f(x)$ и $\exists m inf f(x) [x \in E]$. Разлиаката $M - m$ се нарича колебание и $\omega_E(f) = sup\big(f'(x) - f''(x)\big)$