

Кратен интегран на Риман

15 январа 2017 г.

$$\tau = \{x_i\}_{i=0}^n \quad a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

$$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i] \quad \sigma(f; \xi) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

$$\Delta x_i = |[x_{i-1}, x_i]| = x_i - x_{i-1} \quad i \in 1..n$$

$$\delta_\tau = \max \Delta x_i (1 \leq i \leq n) \quad \xi = \{\xi_i\}_{i=1}^n$$

Определение: $f(x)$ е интегрируема върху интервала $[a, b]$ ако $\exists I \in \mathbb{R} : \forall \epsilon > 0 \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 \forall \tau = \{x_i\}_{i=0}^n, \delta_\tau < \delta, \forall \xi = \{\xi_i\}_{i=1}^n, \xi \in [x_{i-1}, x_i] i = 1..n$

$$\Rightarrow |I - \sigma_\tau(f; \xi)| < \epsilon$$

I - интеграл на Риман на функцията $f(x)$ върху интервала $[a, b]$

Нека функцията $f(x)$ е дефинирана върху измеримо по Жордан множество $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

$$x = (x_1, \dots, x_n) \quad \tau = \{G_i\}_{i=1}^n, G_i \subset \Omega \forall i = 1..n$$

$$1) \cup_{i=1}^n G_i = \Omega, G_i \text{ - измеримо по Жордан}$$

$$2) G_i \cap G_j = \emptyset \forall i, j = 1..n \ i \neq j$$

$$3) \tau \text{ - разбиране на } \Omega \quad \forall i = 1..n \ \xi_i \in G_i$$

$$\sigma_\tau(f; \xi) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) m(G_i) \text{ - Сума на Риман}$$

Определени: $U \subset \mathbb{R}^m, \rho$ - метрика.

$\text{Diam} U = \sup \rho(x, y)_{x, y \in U}$ - наричаме диаметър

Определение: Големи на разбирането $\tau - \delta_\tau = \max \text{diam}(G_i) \ 1 \leq i \leq n$

Определени: Казваме, че $f(x)$ е интегрируема по Риман върху Ω , ако $\exists I \in \mathbb{R} : \forall \epsilon > 0; \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 : \forall \tau = \{G_i\}_{i=1}^n, \delta_\tau < \delta \ \forall \xi = \{\xi_i\}_{i=1}^n, \xi_i \in G_i \quad i = 1..n \quad |I - \sigma_\tau(f; \xi)| < \epsilon$

Определение: $f(x)$ е дефинирано върху измеримо по Жордан множество $\Omega \subset R^n : f(x)$ е съществено ограничена върху Ω ако $\exists G \subset \Omega$ с ЖМ нула, такова че $f(x)$ е ограничена върху Ω/G
 Определение: $f(x)$ е дефинирано върху измеримо по Жордан множество $\Omega \subset R^n : f(x)$ е съществено неограничена върху Ω ако $\exists G \subset \Omega$ с ЖМ нула, такова че $f(x)$ е неограничена върху Ω/G

Теорема: Ако $f(x)$ е дефинирана върху измеримо по Жордан множество Ω и е съществено неограничена върху $\Omega \Rightarrow f(x)$ не е интегрируема върху Ω

Доказателство: Нека $f(x)$ е съществено неограничена върху Ω и интегрируема по Риман върху Ω

От това, че е интегрируема $\Rightarrow \exists I \in R : \forall \epsilon > 0 \exists \delta = \delta_{\epsilon} > 0 : \forall \tau = \{G_i\}_{i=1}^n, \delta_\tau < \delta \forall \xi = \{\xi_i\}_{i=1}^n, \xi_i \in G_i \quad i = 1..n \quad |I - \sigma_\tau(f_i \xi)| < \epsilon$

$$\epsilon = 1 \quad \exists \delta_1 > 0 : \forall \tau = \{G_i\}_{i=1}^n : \delta_\tau < \delta \forall \xi = \{\xi_i\}_{i=1}^n, \xi_i \in G_i \quad i = 1..n$$

$$|I - \sigma_\tau(f_i \xi)| < 1$$

$$I - 1 < \sigma_\tau(f_i \xi) < I + 1$$

$$I - 1 < \sum_{i=1}^n f(\xi_i) m(G_i) < I + 1$$

$f(x)$ е съществено неограничена в $G \Rightarrow \exists G_{i_0} \in \tau$ и $m(G_{i_0}) \neq 0$: $f(x)$ е неограничена върху G_{i_0}

За конкретно $G_{i_0} = G_1$

$\Rightarrow f(x)$ е неограничена върху G_1

$$I - 1 < \sum_{i=1}^n f(\xi_i) m(G_i) < I + 1$$

$$I - 1 < f(\xi_1) m(G_1) + \sum_{i=2}^n f(\xi_i) m(G_i) < I + 1$$

$$\xi = \{\xi_1, \xi_2^0, \xi_3^0, \dots, \xi_n^0\} : \xi_1 \in G_1 ; \xi_i^0 \in G_i$$

$$I - 1 < f(\xi_1) m(G_1) + \sum_{i=2}^n f(\xi_i) m(G_i) < I + 1$$

$$\sum_{i=2}^n f(\xi_i)m(G_i) = A$$

$$I - A - 1 < f(\xi_1)m(G_1) < I + 1 - A \quad \forall \xi_1 \in G_1 : m(G_1) \neq 0$$

$$\frac{I - A - 1}{m(G_1)} < f(\xi_1) < \frac{I + 1 - A}{m(G_1)}$$