Криволинейни интеграл от I-ви ред

18 января 2017 г.

<u>Дефиниция</u>: Нека $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ - област и $R_(x, y, z)$ - функция непрекъсната върху Ω

$$\Gamma : \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)), t \in [\alpha, \beta]$$

Γ - гладка интегруема крива линия лежаща в Ω се нарича криволинеен интеграл от I-ред и се записва

$$\int_\Gamma R(x, y, z)ds = \int_\alpha^\beta R(x(t), y(t), z(t)).|\vec{r}(t)|dt$$

$$|\vec{r}(t)| = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}$$

$$\Gamma : \vec{r} = \vec{r}(t),\ t \in [\alpha, \beta]$$
$$\Gamma' : \vec{\rho} = \vec{\rho}(s),\ s \in [\alpha, \beta]$$

$\Gamma = \Gamma'$, ако $\exists s : [\alpha, \beta] \to [\alpha_1, \beta_1]$, s - изображание и (s = s(t))

1) $\exists s'(t) : s'(t) > 0$ и $s'(t)$ - непрекъсната върху $[\alpha, \beta]$

2) $s(\alpha) = \alpha_1,\ s(\beta) = \beta_1$

3) $\vec{\rho}(s(t)) = \vec{r}(t),\ \forall \in [\alpha, \beta]$

<u>Свойство 1)</u> Стойността на криволинейният интеграл от I-ви ред не зависи от параметризацията.

<u>Доказателство</u>:

$$\Gamma : \vec{r} = \vec{r}(t),\ t \in [\alpha, \beta]$$
$$\Gamma : \vec{\rho} = \vec{\rho}(s),\ s \in [\alpha_1, \beta_1]$$

Тъй като кривата Γ е на монотонна функция ⇒ тя има обратна, която също е монотонно растяща

$$t:\ [\alpha_1,\beta_1]\to[\alpha,\beta],\ t=t(s),\ s\in[\alpha_1,\beta_1]$$

$$1)t'(s)>0,\ t'(s)-\text{непрекъсната}$$

$$2)t(\alpha_1)=\alpha,\ t(\beta_1)=\beta$$

$$3)\vec{r}(t(s))=\vec{\rho}(s)$$

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} R(x(t),y(t),z(t)).|\vec{r}(t)|dt=\int\limits_{\alpha_1}^{\beta_1} R(x(t(s)),y(t(s)),z(t(s))).|\vec{r}(t(s))|dt(s)=$$

$$=\int\limits_{\alpha_1}^{\beta_1} R(x(t(s)),y(t(s)),z(t(s))).|\vec{r}(t(s))|t'(s)ds$$

Тъй като t'(s) е положителна можем да го вкараме под модула

$$=\int\limits_{\alpha_1}^{\beta_1} R(x(t(s)),y(t(s)),z(t(s))).|\vec{r}(t(s)).t'(s)|ds=(*)$$

$$\text{но}\vec{(r)}(t(s))=\vec{(\rho)}(s)$$

$$\text{и}|\vec{(r)}(t(s))|'_s=|\vec{r}(t(s)).t'(s)|$$

$$\Rightarrow\ (*)=\int\limits_{\alpha_1}^{\beta_1} R(x(s),y(s),z(s)).|\vec{(\rho)}'(s)|ds$$

<u>Дефиниция:</u> $\Gamma:\ \vec{r}=\vec{r}(t),\ t\in[\alpha,\beta]$, $\Gamma^-:\ \vec{\rho}(t)=\vec{r}(\beta+\alpha-t),\ t\in[\alpha,\beta]$ където Γ^- е противоположно ориентирана на Γ

<u>Свойство 2))</u> $\int\limits_{\Gamma} Rds=\int\limits_{\Gamma^-} Rds$

<u>Доказателство:</u> $\int\limits_{\Gamma} Rds=\int\limits_{\alpha}^{\beta} R(x(t),y(t),z(t)).|\vec{r}(t)|.dt$

$$s=\alpha+\beta-t,\ t=\alpha,\ s=\beta\ \text{или}\ t=\beta,\ s=\alpha,\ t=\beta+\alpha-s$$

$$-\int\limits_{\alpha}^{\beta} R(x(\beta+\alpha-s),y(\beta+\alpha-s),z(\beta+\alpha-s)).|\vec{r}(\beta+\alpha-s)|.ds$$

$$\int_{\beta}^{\alpha} R(x(\beta+\alpha-s), y(\beta+\alpha-s), z(\beta+\alpha-s)).|\vec{r}(\beta+\alpha-s)|.ds = \int_{\Gamma^-} Rds$$

$$\Rightarrow \int_{\Gamma^-} Rds = \int_{\Gamma} Rds$$

<u>Свойство 3)</u> $\int\limits_{\Gamma} Rds = \int\limits_{\Gamma_1} Rds + \int\limits_{\Gamma_2} Rds$, където $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma$ и $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$