Криволинейни интеграл от II-ри ред

18 января 2017 г.

<u>Дефиниция:</u> $\Omega \in \mathbb{R}^3$ - област. Вектор функцията $\vec{\Gamma}$

$$\vec{\Gamma} : \Omega -> E^3$$

Където E^3 пространството от $\forall$ точки служещи за начало на 3 мерни вектори. $p \in \Omega,\ p(x, y, z),\ \vec{F}(p) = \vec{F}(x, y, z)$ Γ - гладка крива линия, $\Gamma \in \Omega$.

$$\vec{r}:\ \vec{r} = \vec{r}(s),\ s \in [\alpha, \beta]$$

$\int\limits_{\alpha}^{\beta} (\vec{F}, \vec{r}').ds$ - Криволинеен интеграл от II-ри ред. $(\vec{F}, \vec{r}')$ - скаларно произведение

$$\vec{r} = \vec{r}(s) = (x(s), y(s), z(s)), s \in [\alpha, \beta] \text{ и } \vec{F}(P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$$

$$\int\limits_{\Gamma} (\vec{F}, \vec{r}').ds = \int\limits_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz$$

$$\int\limits_{\Gamma} (\vec{F}, \vec{r}').ds = \int\limits_{\alpha}^{\beta} (\vec{F}, \vec{r}').ds =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} [P(x(s), y(s), z(s)).x'(s) + Q(x(s), y(s), z(s)).y'(s) + R(x(s), y(s), z(s)).z'(s)].ds$$

<u>Свойство 1)</u> Стойността на криволинейният интеграл, не зависи от параметризацията на криволинейния интеграл, по който интегрираме

Не се изисква Доказателство

<u>Свойство 2)</u> $\int\limits_{\Gamma} (\vec{F}, \vec{r}').ds = -\int\limits_{\Gamma^-} (\vec{F}, \vec{r}').ds$

Доказателство: $\Gamma: \ \vec{r}=\vec{r}(t), \ t\in[\alpha,\beta]$. $\Gamma^-: \ \vec{\rho}=\vec{r}(\beta+\alpha-t), t\in[\alpha,\beta]$

$\int\limits_{\Gamma^-}(\vec{F},\vec{\rho}).ds=\int\limits_{\alpha}^{\beta}(\vec{F}(\beta+\alpha-t), \ \vec{r}'(\beta+\alpha-t)).dt$

$$\tau=\tau(t)=\beta+\alpha-t, \ \alpha\to\beta$$

$$t=\beta+\alpha-\tau, \ \beta\to\alpha$$

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta}(\vec{F}(\tau),-\vec{r}(\tau)').d(\beta+\alpha-\tau)=-\int\limits_{\beta}^{\alpha}(\vec{F}(\tau),\vec{r}(\tau)').d\tau=-\int\limits_{\alpha}^{\beta}(\vec{F}(\tau),\vec{r}(\tau)').d\tau=-\int\limits_{\Gamma}(\vec{F},\vec{r}).ds$$

Свойство 3) $\int_{\Gamma_1\cup\Gamma_2}(\vec{F},\vec{r}).ds=\int_{\Gamma_1}(\vec{F},\vec{r}).ds+\int_{\Gamma_2}(\vec{F},\vec{r}).ds$, където $\Gamma_1\cup\Gamma_2=\Gamma$ и $\Gamma_1\cap\Gamma_2=\emptyset$