Свеждане на кратния интеграл към повторен.

23 януари 2017 г.

Нека за $f(x,y)$ имаме, че:

1) $f(x,y)$ е интегрируема върху правоъгълника $\Pi = [a,b]x[c,d]$

2) $\forall x \in [a,b],\ \exists \int_c^d f(x,y)dy$.

Тогава $f(x,y)$ е интегрируема врху П. Тогава $\iint_\Pi f(x,y)dxdy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy \right] dx$

Нека за $f(x,y)$ имаме, че:

1) $f(x,y)$ е интегрируема върху правоъгълника $\Pi = [a,b]x[c,d]$

2) $\forall x \in [a,b],\ \exists \int_c^d f(x,y)dy$.

3) $\forall y \in [c,d],\ \exists \int_a^b f(x,y)dx$.

Тогава $\iint_\Pi f(x,y)dxdy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy \right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx \right] dy$

Нека $\varphi(X)$и$\Psi(x)$ са непрекъснати върху $[a,b]$. Множеството $(*) = D = \{(x,y) : a \le x \le b, \varphi(X) \le y \le \Psi(x)\}$, измеримо по Жордан е криволинеен трапец.

Нека $f(x,y)$ е интегруема върху $D(*)$?????? Тогава $\iint_\Pi f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\Psi(x)} f(x,y)dy$. Нека $c := min\varphi(x), d := max\Psi(x),\ x \in [a,b]$.

$\Pi = [a,b]x[c,d]$. Дефинираме $F(x,y) = \left| \begin{matrix} f(x,y) => (x,y) \in D \\ 0 => (x,y) \in \Pi / D \end{matrix} \right.$

От Твърдени 1 $=> \iint_\Pi F(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d F(x,y)dy =$

$= \int_a^b dx \left[\int_c^{\varphi(x)} F(x,y)dy + \int_{\varphi(x)}^{\varphi(x)} F(x,y)dy + \int_{\Psi(x)}^d F(x,y)dy \right] = = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\varphi(x)} f(x,y)dy.$