Centre de
Réadaptation
de Mulhouse

CDI

CONCEPTEUR EN DEVELOPPEMENT INFORMATIQUE

Algèbre de Boole

Dossier d'informations et de travaux pratiques

OFP DI/M1S1C8/INF-TP-02/12

1. Introduction à la logique — *3*

1.1. Variable logique — **3**

1.2. Fonction logique — **3**

2. L'algèbre de Boole — *6*

2.1. Expression algébrique — **6**

2.2. Table de vérité — **6**

2.3. Les lois de composition — **10**

2.4. Utilisation de l'algèbre binaire — **12**

3. Circuits logiques — *13*

4. Exercices — *15*

Enoncé 1 — 15

Enoncé 2 — 15

Enoncé 3 — 16

Enoncé 4 — 18

Enoncé 5 — 15

1. Introduction à la logique

1.1. Variable logique

Un ordinateur ne manipule que des données binaires, on appelle donc variable logique une donnée binaire, c'est-à-dire une donnée ayant deux états possibles: 0 ou 1.

Une information binaire peut être représentée par une proposition qui ne peut être que VRAIE ou FAUSSE.

Elle peut être simple ("il fait plus de 25°C") ou complexe ("il fait plus de 25°C ET il ne pleut pas")

1.2. Fonction logique

On appelle fonction logique une entité acceptant plusieurs valeurs logiques en entrée et dont la sortie peut avoir deux états possibles: 0 ou 1.

Ces fonctions peuvent être des composants électroniques admettant des signaux électriques en entrée, et restituent un signal en sortie. Les signaux électroniques peuvent prendre une valeur de l'ordre de 5 Volts (c'est l'ordre de grandeur général) que l'on représente par un 1, ou 0 V que l'on représente par un 0.

Les fonctions logiques de bases sont appelées aussi **portes logiques**. Il s'agit de fonctions ayant une ou deux entrées et une sortie:

- La fonction ***OU*** (en anglais *OR*) positionne sa sortie à 1 si l'une ou l'autre de ses entrées est à 1

  Exemple:

  Un four doit s'arrêter si la température voulue est atteinte ou si le temps prévu est écoulé. Les propositions logiques sont:

  - P1 : " la température est supérieure à T_0 "
  - P2 : " le temps est supérieur à t_0 "

- P3 : " le four doit s'arrêter "

On peut écrire :

P3 est vraie si P1 est vraie OU si P2 est vraie.

Donc on a

P3=P1 OU P2.

La fonction s'appelle **somme logique** ou **fonction OU**.

On remarque que si P1 et P2 sont toutes deux vraies, P3 est vraie également. On parle de OU inclusif

- La fonction **ET** (en anglais *AND*) positionne sa sortie à 1 si ses deux entrées sont à 1

  Examinons la phrase : " j'irai me promener s'il fait plus de 25°C et s'il ne pleut pas. ".

  Soient les propositions :

  - P1 : "j'irai me promener "
  - P2 : " il fait plus de 25°C "
  - P3 : " il ne pleut pas ".

  Pour que la proposition P1 soit vraie, il faut que les deux propositions P2 et P3 soient vraies simultanément.

  On peut donc écrire :

  P1 est vraie si P2 est vraie ET P3 est vraie.

  Ou encore :

  P1 = P2 ET P3.

  Cette fonction s'appelle **produit logique** ou **fonction ET**.

- La fonction **NON** (appelée aussi *inverseur*) positionne sa sortie à 1 si son entrée est à 0, et vice-versa

  Soient les propositions

  P1 : " j'irai me promener "

  P2 : " il pleut "

Le système doit déterminer quand "je sortirai"; la logique du problème est : " j'irai me promener s'il ne pleut pas ". On peut donc dire que

P1 = NON P2

Cette fonction est appelée **négation** ou fonction **NON**.

On définit également les fonctions:

- ***OU* EXCLUSIF** (en anglais *XOR*) positionne sa sortie à 1 si l'une ou l'autre de ses entrées est à 1 mais pas les deux simultanément
- **NON *OU*** (couramment appelée *NOR*) et **NON ET** (*NAND*) comme étant la composition respective d'un NON avec un OU et un ET.

- <u>Fonctions complexes</u>

  Il arrive que l'on ait besoin de la conjonction de plusieurs de ces fonctions :

  Etudions le cas : " j'irai me promener s'il fait plus de 25°C et qu'il ne pleut pas, ou si ma copine le veut. "

  Soient les propositions :

  - P1 : " j'irai me promener "
  - P2 : " il fait plus de 25°C "
  - P3 : " il pleut "
  - P4 : " ma copine veut se promener "

  Le problème se décrit par :

  P1 est vraie si P2 est vraie ET P3 est fausse, ou si P4 est vraie.

  Soit :

  P1=(P2 ET NON P3) OU P4.

  On remarque vite le besoin d'un formalisme mathématique pour décrire, traiter, et résoudre des problèmes logiques

2. L'algèbre de Boole

Boole est un mathématicien anglais du milieu du 19ème siècle qui conçut, un outil mathématique composé de symboles et de règles, applicable aux propositions logiques.

2.1. Expression algébrique

Le but de l'algèbre de Boole est de décrire le traitement de signaux sous forme d'expression algébrique. Les signaux (propositions) sont représentés par des noms de variables. Les fonctions logiques sont représentées par des opérateurs:

- la fonction ***OU*** est représentée par un *plus*: $+$
- la fonction **ET** est représentée par un *point*: $\cdot$
- la fonction **NON** est représentée par une *barre* au-dessus de la variable inversée: $\overline{A}$ Elle est parfois représentée par un / devant la variable inversée
- la fonction ***OU* EXCLUSIF** est représentée par un *plus encerclé*: $\oplus$

Une expression algébrique sera donc une expression du type:
$S = \overline{A} \oplus (B.C)$

2.2. Table de vérité

Une table de vérité est un tableau permettant de décrire toutes les possibilités de sorties en fonction des entrées. On place donc les variables d'entrées dans les colonnes de gauche en les faisant varier de telle façon à couvrir l'ensemble des possibilités. La colonne (ou les colonnes si la fonction a plusieurs sorties) de droite décrit la sortie.

Voici les tables de vérités des fonctions logiques:

Nom de la porte	Entrée		Sortie
	A	B	S
OU	0	0	0
	0	1	1
	1	0	1
	1	1	1
ET	0	0	0
	0	1	0
	1	0	0
	1	1	1
NON OU	0	0	1
	0	1	0
	1	0	0
	1	1	0
NON ET	0	0	1
	0	1	1
	1	0	1
	1	1	0
NON	0		1
	1		0

Il est possible à partir de la table de vérité d'une fonction d'écrire l'expression algébrique de celle-ci.

Soit la table de vérité suivante:

Entrée		Sortie
A	B	S
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	0

La sortie vaut 1 lorsque A vaut 1 et B vaut 0, l'expression algébrique de cette fonction est

$S = A.\overline{B}$

donc:

Prenons maintenant la table de vérité suivante:

Entrée			Sortie
A	B	C	S
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

La sortie vaut 1 lorsque

- A vaut 0
- B vaut 1
- C vaut 0

ou

- A vaut 1
- B vaut 1
- C vaut 0

L'expression algébrique de cette fonction est donc:

$$S = \overline{A}.B.\overline{C} + A.B.\overline{C}$$

Constituons la table de vérité du cas: " j'irai me promener s'il fait plus de 25°C et qu'il ne pleut pas, ou si ma copine le veut" avec les propositions :

- P1 : " j'irai me promener "
- P2 : " il fait plus de 25°C "
- P3 : " il pleut "
- P4 : " ma copine veut se promener "

Entrée			Sortie
P2	P3	P4	P1
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

$$P1 = P2.\overline{P3} + P4$$

<u>Priorité des opérateurs logiques:</u>

Par ordre de priorité décroissante: NOT, ET, OU

Des parenthèses changent l'ordre des priorités

2.3. Les lois de composition

Les lois de composition sont des règles logiques qui permettent de simplifier l'écriture des expressions algébriques.

Associativité

- (A.B).C est équivalent à A.(B.C)
- (A+B)+C est équivalent à A+(B+C)

Absorption

- A.(A+B) est équivalent à A

- A+A.B est équivalent à A

Commutativité

- A.B est équivalent à B.A
- A+B est équivalent à B+A

Distributivité

- A+(B.C) est équivalent à (A+B).(A+C)
- A.(B+C) est équivalent à A.B+A.C

Idempotence

- A.A est équivalent à A
- A + A est équivalent à A

Identité

- 1.A est équivalent à A
- 0+A est équivalent à A

Inversion

- A./A est équivalent à 0
- A+/A est équivalent à 1

Nullité

- 0.A est équivalent à 0
- 1+A est équivalent à 1

Théorème de *De Morgan*

- $\overline{A.B}$ est équivalent à $\overline{A}+\overline{B}$
- $\overline{A+B}$ est équivalent à $\overline{A}.\overline{B}$

•

2.4. Utilisation de l'algèbre binaire

L'algèbre binaire peut se substituer à l'utilisation des propositions logiques, et on l'emploie chaque fois que la complexité des systèmes logiques l'exige.

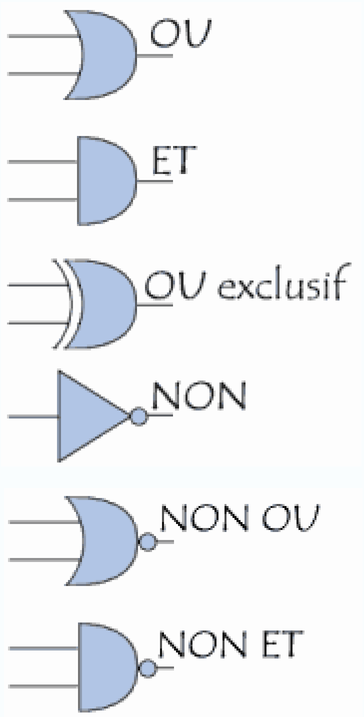
La transposition des propositions logiques à l'algèbre binaire est la suivante :

Propositions logiques	**Algèbre binaire**
FAUX	0
VRAI	1
Proposition (P)	Variable (A)
Négation (NON P)	Complément (/A)
Somme (P1 OU P2)	Somme (A+B)
Produit (P1 ET P2)	Produit (A.B)

Les propriétés et les théorèmes de l'algèbre binaire permettront une approche plus simple et systématique des problèmes logiques complexes.

3. Circuits logiques

La représentation conventionnelle des portes logiques est la suivante:



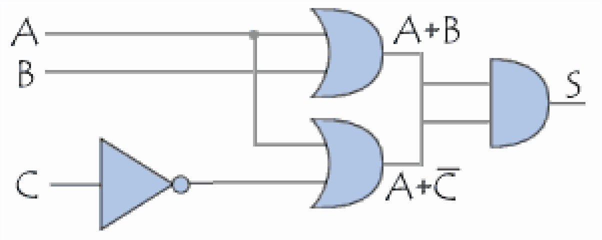
<u>Réalisation de circuits logiques</u>

On appelle circuit logique (ou *circuit combinatoire*) un ensemble de portes logiques reliées entre elles pour répondre à une expression algébrique. Il s'agit donc d'aller transcrire en schéma électrique (à l'aide des représentations ci-dessus) l'expression algébrique que l'on a simplifiée grâce aux lois de composition.

Par exemple l'expression algébrique

(A+B).(A+/C)

sera schématisée comme suit:



4. Exercices

Enoncé 1

Complétez le tableau suivant en déterminant le résultat de chaque expression logique en fonction des valeurs des variables:

Expression logique	Valeurs des variables	Résultat VRAI / FAUX
A>2 OU B<3	A=2 B=3	
	A=3 B=5	
	A=3 B=1	
A>2 OU B<3 et C≠1	A=3 B=1 C=1	
	A=1 B=1 C=2	
	A=3 B=1 C=2	
(A>2 OU B<3) ET C≠1	A=3 B=1 C=1	
	A=3 B=3 C=2	
	A=2 B=5 C=2	
A>2 OU B<3 ET C≠1 OU A<1	A=0 B=2 C=1	
	A=1 B=2 C=2	
	A=3 B=2 C=2	
(A>2 OU B<3) ET C≠1 OU A<1	A=0 B=2 C=2	
	A=1 B=5 C=2	
	A=3 B=5 C=2	
A>2 OU B<3 OU C≠1 ET A<1	A=0 B=5 C=2	
	A=0 B=2 C=1	
	A=3 B=2 C=2	

Enoncé 2

La lumière d'un véhicule s'éclaire si une des deux portes avant est ouverte (capteurs pd et pg à coupure de circuit) ou si l'interrupteur du plafonnier est appuyé.

Présentez:

- Les propositions
- La table de vérité
- L'expression booléenne simplifiée

Enoncé 3

Soient 3 couleurs:

Cb = couleur de base

Cad1 = 1ère couleur additionnelle

Cad2 = 2ème couleur additionnelle

Cr = couleur résultat

Pour chacune des affirmations suivantes, vous présenterez:

- La table de vérité à partir des propositions données
- L'expression booléenne simplifiée. Pour cet énoncé, vous disposez des fonctions logiques ET (.), OU (+) et NON ($\overline{\text{variable}}$)

1. Le résultat attendu est Cr = couleur très claire.

Cr est de type "très claire" si les 2 couleurs additionnelles sont blanches. Le blanc étant exclu de cette catégorie, la couleur de base ne doit pas être blanche

Les propositions sont:

P1 : Cr = très claire

P2 : Cb = blanc

P3 : Cad1 = blanc

P4 : Cad2 = blanc

2. Le résultat attendu est Cr = couleur claire.

Cr est clair si une seule des 2 couleurs additionnelles est blanche. . Le blanc étant exclu de cette catégorie, la couleur de base ne doit pas être blanche.

Les propositions sont:

P1 : Cr = claire

P2 : Cb = blanc

P3 : Cad1 = blanc

P4 : Cad2 = blanc

3. Le résultat attendu est Cr = mauve.

Cr est mauve si Cb est bleue et si l'une des 2 couleurs additionnelles est rouge et l'autre blanche. Lors de cette opération de mélange, les couleurs additionnelles ne peuvent être que rouges ou blanches
Les propositions sont:
Propositions:

P1 : Cr = mauve

P2 : Cb = bleu

P3 : Cad1 = blanc

P4 : Cad2 = blanc

4. Le résultat attendu est Cr = violet.

Cr est violet si Cb est bleue et si les 2 couleurs additionnelles sont rouges ou bleues, mais pas toutes les 2 bleues. Lors de cette opération de mélange, les couleurs additionnelles ne peuvent être que rouges ou bleues
Propositions:

P1 : Cr = violet

P2 : Cb = bleu

P3 : Cad1 = bleu

P4 : Cad2 = bleu

Enoncé 4

A l'aide de l'algèbre de Boole, simplifiez les équations suivantes:

$R1 = A.B + A.\overline{B}$

R2 = A+AC+AB

$R3 = (A + B)(\overline{A} + B)$

$R4 = \overline{A}B + (\overline{A}.\overline{B}.D)A$

$R5 = (A + C)(\overline{A} + C)(1)$

A l'aide du théorème de De Morgan et de l'algèbre de Boole, simplifiez l'équation suivante:

$$R = \overline{(\overline{A\overline{B}})(\overline{\overline{B + C + \overline{D}}}) + \overline{BC}}$$

Enoncé 5

Donnez l'expression simplifiée de la fonction booléenne correspondant à la proposition *"l'intéressé peut souscrire un avenant"*

Pour pouvoir souscrire un avenant, il faut remplir l'une des conditions suivantes:

- Avoir souscrit la police "Vie" (code type: V), être de sexe masculin, marié et âgé de 25 ans au moins
- Ne pas avoir souscrit la police "Vie", être de sexe féminin et mariée
- Etre célibataire, de sexe masculin et âgé de 25 ans au moins
- Avoir souscrit la police "Vie", être de sexe féminin et mariée
- N'avoir pas souscrit la police "Vie", être âgé de 25 ans au moins, marié et de sexe masculin
- Avoir moins de 25 ans, être marié et de sexe masculin

Les propositions sont :

P = Avoir souscrit une police "Vie"

SM = Etre de sexe masculin

M = Etre marié

A = Avoir 25 ans au moins