ĐẠI HỌC QUỐC GIA THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ THÔNG TIN
VNUHCM - UIT

BÀI TẬP MÔN
PHÂN TÍCH VÀ THIẾT KẾ THUẬT TOÁN

by

Hoàng Quang Khải - 21520952
Nguyễn Nhật Minh - 21521135
Lê Tiến Quyết - 21520428
Lê Tuấn Vũ - 21521679

KHOA KHOA HỌC MÁY TÍNH

Homework #02: Phân tích thuật toán đệ quy
Trong quá trình phân tích thuật toán, việc thành lập phương trình T(n) là bước đầu tiên và quan trọng để đánh giá độ phức tạp của thuật toán. Trong trường hợp những thuật toán đệ quy, T(n) thường là những hệ thức truy hồi, vì thế qua bài tập này chúng ta biết được cách ứng dụng những phương pháp giải phù hợp để tìm được phương trình tổng quát T(n), từ đó làm tiền đề để đánh giá độ phức tạp của thuật toán sau này.

GV hướng dẫn:
Huỳnh Thị Thanh Thương

TPHCM, March 23, 2023

1 Thành lập phương trình đệ quy

a) Gửi ngân hàng 1000 USD, lãi suất 12%/năm. Số tiền có được sau 30 năm là bao nhiêu?

Gọi số tiền có được năm thứ n là $T(n), \quad n \geq 0$.
Ta có:

$$\begin{aligned} T(0) &= 1000 \\ T(1) &= 1000 \times 112\% = 1120 \\ &\vdots \\ T(n) &= 1.12 \times T(n-1) \end{aligned}$$

Vậy phương trình đệ quy:

$$T(n) = \begin{cases} 1000, & n = 0 \\ 1.12 \times T(n-1), & n > 0 \end{cases}$$

b) Cho thuật toán như sau

```
long Fibo(int n)
{
    if (n == 0 || n == 1)
        return 1;
    return Fibo(n-1) + Fibo(n-2);
}
```

Với $n < 2$, ta có $T(n) = c_1$.
Với $n \geq 2$, ta có $T(n) = T(n-1) + T(n-2) + c_2$.
trong đó: c_1, c_2 là các chi phí tổng hợp.
Vậy phương trình đệ quy:

$$T(n) = \begin{cases} c_1, & n < 2 \\ T(n-1) + T(n-2) + c_2, & n \geq 2 \end{cases}$$

c) Cho thuật toán như sau

```
public int g(int n) {
    if (n == 1)
        return 2;
    else
        return 3 * g(n / 2) + g(n / 2) + 5;
}
```

Với $n = 1$, ta có $T(n) = c_1$.
Với $n > 1$, Ta có $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + c_2$.
trong đó: c_1, c_2 là các chi phí tổng hợp.
Vậy phương trình đệ quy:

$$T(n) = \begin{cases} c_1, & n = 1 \\ 2T\left(\frac{n}{2}\right) + c_2, & n > 1 \end{cases}$$

d) Cho thuật toán như sau

```
long xn(int n) {
    if (n == 0) return 1;
    long s = 0;
    for (int i = 1; i <= n; i++)
        s = s + i * i * xn(n - i);
    return s;
}
```

Với $n = 0$, ta có $T(n) = c_1$.
Với $n > 0$, ta thấy hàm `xn(param)` được gọi lại n lần.

Do đó: $T(n) = nT(n-1) + c_2$.
trong đó: c_1, c_2 là các chi phí tổng hợp.
Vậy phương trình đệ quy:

$$T(n) = \begin{cases} c_1, & n = 0 \\ nT(n-1) + c_2, & n > 0 \end{cases}$$

e) Đánh giá độ phức tạp của hàm f

```
int f(int n) {
    if (n == 1) return 2;
    return pow(3, f(n / 2)) + 2 * log(f(n / 2)) - f(n / 2) + 1;
}
```

Với $n = 1$, ta có $T(n) = c_1$.
Với $n > 1$, ta thấy hàm `f(param)` được gọi lại 3 lần.
Do đó: $T(n) = 3T(n/2) + c_2$.
Vậy phương trình đệ quy:

$$T(n) = \begin{cases} c_1, \quad n = 1 \\ 3T(n/2) + c_2, \quad n > 1 \end{cases}$$

f) Cho thuật toán sau

```
def waste(n):
    if n == 0:
        return 0
    for i in range(1, n + 1):
        for j in range(1, i + 1):
            print(i, j, n)
    for i in [1, 2, 3]:
        waste(n / 2)
```

Với $n = 0$, ta có $T(n) = c_1$.
Với $n > 0$, ta thấy hàm `waste(param)` được gọi lại 3 lần.
Do đó: $T(n) = 3T(\frac{n}{2}) + \frac{n(n+1)}{2} + c_2$.
Vậy phương trình đệ quy:

$$T(n) = \begin{cases} c_1, \quad n = 0 \\ 3T(\frac{n}{2}) + \frac{n(n+1)}{2} + c_2, \quad n > 0 \end{cases}$$

g) Cho thuật toán như sau

```
void Draw(int n) {
    if (n < 1) return 0;
    for (i = 1; i <= n; i++)
        for (j = 1; j <= n; j++)
            print("*");
```

```
    Draw(n-3);
}
```

Với $n < 1$, ta có $T(n) = c_1$.
Với $n \geq 1$, ta có $T(n) = T(n-3) + n^2 + c_2$.
Vậy phương trình đệ quy:

$$T(n) = \begin{cases} c_1, & n < 1 \\ T(n-3) + n^2 + c_2, & n \geq 1 \end{cases}$$

h) Thiết lập công thức truy hồi

```python
def Zeta(n):
    if n == 0:
        Zeta = 6
    else:
        k = Ret = 0
        while k <= n - 1:
            Ret += Zeta(k)
            k += 1
        Zeta = Ret
```

Gọi $T(n)$ là số phép cộng cần thực hiện khi gọi `Zeta(n)`.
Với $n = 0$, ta có $T(n) = 0$.
Với $n > 0$, ta có $T(n) = T(n-1) + 2$.
Vậy phương trình đệ quy:

$$T(n) = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ T(n-1) + 2, & n > 0 \end{cases}$$

i) Bài toán Tháp Hà Nội

Mã giả thuật toán giải bài toán Tháp Hà Nội

```cpp
void move(int n, char a, char b, char c)
{
    if (n == 1)
    {
        // n == 1 thì chỉ có 1 đĩa chuyển thẳng từ a qua c
        cout << a << "->" << c;
        return;
```

```
    }
    move(n - 1, a, c, b); // chuyển n-1 đĩa từ a -> b
    move(1, a, b, c);     // chuyển đĩa thứ n từ a -> c
    move(n - 1, b, a, c); // chuyển n - 1 từ b -> c
}
```

Gọi $T(n)$ là số lần chuyển n dĩa.
Với $n = 0$, ta có $T(0) = 0$.
Với $n = 1$, ta có $T(1) = 1$.
Với $n > 1$, ta có $T(n) = 2 \cdot T(n-1) + T(1) = 2 \cdot T(n-1) + 1$.
Vậy phương trình đệ quy:

$$T(n) = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ 2 \cdot T(n-1) + 1, & n > 0 \end{cases}$$

j) Phân tích thuật toán đệ quy

Giải thuật chia để trị

$$X \cdot Y = AC \cdot 10^n + \big[(A - B)(D - C) + AC + BD\big] \cdot 10^{n/2} + BD$$

Với X, Y có 1 chữ số, nghĩa là $n = 1$, ta có $T(n) = 1 = c_1$.
Với $n > 1$, giải thuật sẽ phải tính tích các giá trị $AC; (A - B)(D - C) + AC + BD; BD$ với mỗi giá trị có số chữ số là $n/2$.
Do đó ta có: $T(n) = 3 \cdot T(n/2) + c_2$.
Vậy phương trình đệ quy:

$$T(n) = \begin{cases} c_1, & n = 1 \\ 3 \cdot T(n/2) + c_2, & n > 1 \end{cases}$$

2 Giải phương trình đệ quy bằng phương pháp truy hồi

1) $T(n) = T(n-1) + 5, \quad T(1) = 0.$

$$\begin{aligned} T(n) &= T(n-1) + 5 \\ &= [T(n-2) + 5] + 5 \\ &= [T(n-3) + 5] + 5 + 5 \\ &\vdots \\ &= T(n-i) + 5i \end{aligned}$$

Quá trình kết thúc khi $n - i = 1 \Rightarrow i = n - 1$.
Khi đó: $T(n) = T(1) + 5(n-1) = 5n - 5$.

2) $T(n) = T(n-1) + n, \quad T(1) = 1.$

$$\begin{aligned}
T(n) &= T(n-1) + n \\
&= [T(n-2) + n - 1] + n \\
&= [T(n-3) + n - 2] + n - 1 + n \\
&\vdots \\
&= T(n-i) + \sum_{k=n-i+1}^{n} k \\
&= T(n-i) + \frac{i(2n-i+1)}{2}
\end{aligned}$$

Quá trình kết thúc khi $n - i = 1 \Rightarrow i = n - 1$.
Khi đó: $T(n) = T(1) + \dfrac{(n-1)\left[2n-(n-1)+1\right]}{2} = \dfrac{n^2+n}{2}$.

3) $T(n) = 3T(n-1) + 1, \quad T(1) = 4.$

$$\begin{aligned}
T(n) &= 3T(n-1) + 1 \\
&= 3[3T(n-2) + 1] + 1 \\
&= 3^2 T(n-2) + 3 + 1 \\
&= 3^2[3T(n-3) + 1] + 3 + 1 \\
&= 3^3 T(n-3) + 3^2 + 3^1 + 3^0 \\
&\vdots \\
&= 3^i \cdot T(n-i) + \sum_{k=0}^{i-1} 3^k \\
&= 3^i \cdot T(n-i) + \frac{3^i - 1}{2}
\end{aligned}$$

Quá trình kết thúc khi $n - i = 1 \Rightarrow i = n - 1$.
Khi đó: $T(n) = 3^{n-1} \cdot T(1) + \dfrac{3^{n-1}-1}{2} = \dfrac{3^{n+1}-1}{2}$.

4) $T(n) = 2T(n/2) + 1, \quad T(1) = 1.$

$$\begin{aligned}
T(n) &= 2T(n/2) + 1 \\
&= 2[2T(n/4) + 1] + 1 \\
&= 2^2[2T(n/8) + 1] + 2 + 1 \\
&= 2^3T(n/2^3) + 2^2 + 2^1 + 2^0 \\
&\vdots \\
&= 2^i \cdot T(n/2^i) + \sum_{k=0}^{i-1} 2^k \\
&= 2^i \cdot T(n/2^i) + 2^i - 1
\end{aligned}$$

Quá trình kết thúc khi $\dfrac{n}{2^i} = 1 \Rightarrow i = \log_2 n$.
Khi đó: $T(n) = 2^{\log_2 n} \cdot T(1) + 2^{\log_2 n} - 1 = 2n - 1$.

5) $T(n) = 2T(n/2) + n, \quad T(1) = 1.$

$$\begin{aligned}
T(n) &= 2T(n/2) + n \\
&= 2[2T(n/4) + n/2] + n \\
&= 2^2[2T(n/8) + n/4] + 2n \\
&= 2^3T(n/2^3) + 3n \\
&\vdots \\
&= 2^i \cdot T(n/2^i) + in \\
&= 2^i \cdot T(n/2^i) + in
\end{aligned}$$

Quá trình kết thúc khi $\dfrac{n}{2^i} = 1 \Rightarrow i = \log_2 n$.
Khi đó: $T(n) = 2^{\log_2 n} \cdot T(1) + n\log_2 n = n + n\log_2 n$.

6) $T(n) = 2T(n/2) + n^2, \quad T(1) = 1.$

$$\begin{aligned} T(n) &= 2T(n/2) + n^2 \\ &= 2[2T(n/4) + n^2/4] + n^2 \\ &= 2^2[2T(n/8) + n^2/16] + n^2/2 + n^2 \\ &= 2^3T(n/2^3) + n^2/4 + n^2/2 + n^2 \\ &\vdots \\ &= 2^i \cdot T(n/2^i) + \sum_{k=0}^{i-1} \frac{n^2}{2^k} \\ &= 2^i \cdot T(n/2^i) + 2n^2\left(1 - \frac{1}{2^i}\right) \end{aligned}$$

Quá trình kết thúc khi $\frac{n}{2^i} = 1 \Rightarrow i = \log_2 n$.
Khi đó: $T(n) = 2^{\log_2 n} \cdot T(1) + 2n^2\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 2n^2 - n.$

7) $T(n) = 2T(n/2) + \log n, \quad T(1) = 1.$

$$\begin{aligned} T(n) &= 2T(n/2) + \log n \\ &= 2[2T(n/4) + \log n/2] + \log n \\ &= 2^2[2T(n/8) + \log n/4] + 2\log n/2 + \log n \\ &= 2^3T(n/2^3) + 4\log n/4 + 2\log n/2 + \log n \\ &\vdots \\ &= 2^i \cdot T(n/2^i) + \log n \sum_{k=0}^{i-1} 2^k - \sum_{k=0}^{i-1} 2^k \log 2^k \\ &= 2^i \cdot T(n/2^i) + \log n \sum_{k=0}^{i-1} 2^k - \log 2 \sum_{k=0}^{i-1} k2^k \end{aligned}$$

Ta có:

$$\sum_{k=0}^{i-1} k2^k = (i-2)2^i + 2$$

Thay vào biểu thức trên ta có:

$$T(n) = 2^i \cdot T(n/2^i) + (2^i - 1)\log n - \Big[(i-2)2^i + 2\Big]\log 2$$

Quá trình kết thúc khi $\dfrac{n}{2^i} = 1 \Rightarrow i = \log_2 n$.
Khi đó:

$$\begin{aligned}
T(n) &= 2^{\log_2 n} \cdot T(1) + (2^{\log_2 n} - 1)\log n - \left[(\log_2 n - 2)2^{\log_2 n} + 2\right]\log 2 \\
&= n - \log n + 2(n-1)\log 2
\end{aligned}$$

3 Giải phương trình đệ quy bằng phương pháp truy hồi

Với $T(1) = 1$

1) $T(n) = 3T(n/2) + n^2$

$$\begin{aligned}
T(n) &= 3T(n/2) + n^2 \\
&= 3\left[3T(n/4) + n^2/4\right] + n^2 \\
&= 3^2[3T(n/8) + n^2/16] + 3n^2/4 + n^2 \\
&= 3^3[3T(n/16) + n^2/64] + 9n^2/16 + 3n^2/4 + n^2 \\
&= 3^4T(n/16) + 27n^2/64 + 9n^2/16 + 3n^2/4 + n^2 \\
&\vdots \\
&= 3^i \cdot T(n/2^i) + 4n^2\left[1 - (3/4)^i\right]
\end{aligned}$$

Quá trình kết thúc khi $\dfrac{n}{2^i} = 1 \Rightarrow i = \log_2 n$.
Khi đó:

$$\begin{aligned}
T(n) &= 3^{\log_2 n} \cdot T(1) + 4n^2\left[1 - (3/4)^{\log_2 n}\right] \\
&= 4n^2 - 3^{\log_2 n + 1}
\end{aligned}$$

2) $T(n) = 8T(n/2) + n^3$

$$\begin{aligned}
T(n) &= 8T(n/2) + n^3 \\
&= 8[8T(n/4) + n^3/8] + n^3 \\
&= 64[8T(n/8) + n^3/64] + 2n^3 \\
&\vdots \\
&= 8^i \cdot T(n/2^i) + in^3
\end{aligned}$$

Quá trình kết thúc khi $\dfrac{n}{2^i} = 1 \Rightarrow i = \log_2 n$.
Khi đó:

$$\begin{aligned} T(n) &= 8^{\log_2 n} \cdot T(1) + n^3 \log_2 n \\ &= n^3 + n^3 \log_2 n \end{aligned}$$

3) $T(n) = 4T(n/3) + n$

$$\begin{aligned} T(n) &= 4T(n/3) + n \\ &= 4[4T(n/9) + n/3] + n \\ &= 4^i \cdot T(n/3^i) + \frac{(4/3)^i - 1}{4/3 - 1} \\ &\vdots \\ &= 4^i \cdot T(n/3^i) + 3n[(4/3)^i - 1] \end{aligned}$$

Quá trình kết thúc khi $\dfrac{n}{3^i} = 1 \Rightarrow i = \log_3 n$.
Khi đó:

$$\begin{aligned} T(n) &= 4^{\log_3 n} \cdot T(1) + 3n[(4/3)^{\log_3 n} - 1] \\ &= 4^{log_3 n+1} - 3n \end{aligned}$$

4) $T(n) = 9T(n/3) + n^2$

$$\begin{aligned} T(n) &= 9T(n/3) + n^2 \\ &= 9(9T(n/9) + n^2/9) + n^2 \\ &= 81(9T(n/27) + n^2/81) + 2n^2 \\ &\vdots \\ &= 9^i \cdot T(n/3^i) + in^2 \end{aligned}$$

Quá trình kết thúc khi $\dfrac{n}{3^i} = 1 \Rightarrow i = \log_3 n$.
Khi đó:

$$\begin{aligned} T(n) &= 9^{\log_3 n} \cdot T(1) + n^2 \log_3 n \\ &= n^2 + n^2 \log_3 n \end{aligned}$$

5) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + 1, \quad T(2) = 0$

$$\begin{aligned} T(n) &= 2T(n^{1/2}) + 1 \\ &= 2[2T(n^{1/4}) + 1] + 1 \\ &= 2^2 T(n^{1/2^2}) + 2 + 1 \\ &\vdots \\ &= 2^i \cdot T(n^{1/2^i}) + 2^i - 1 \end{aligned}$$

Quá trình kết thúc khi:

$$n^{\frac{1}{2^i}} = 2 \Rightarrow \frac{1}{2^i} = \frac{1}{\log_2 n} \Leftrightarrow i = \log_2(\log_2 n)$$

.
Khi đó:

$$\begin{aligned} T(n) &= 2^{\log_2(\log_2 n)} \cdot T(2) + 2^{\log_2(\log_2 n)} - 1 \\ &= \log_2 n - 1 \end{aligned}$$

4 Giải phương trình đệ quy dùng phương trình đặc trưng

a) $T(n) = 4T(n-1) - 3T(n-2), \quad T(0) = 1; T(1) = 2$

Đặt: $x^n = T(n)$
Phương trình trên trở thành:

$$\begin{aligned} x^n - 4x^{n-1} + 3x^{n-2} &= 0 \\ x^{n-2}(x^2 - 4x + 3) &= 0 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{l} x^{n-2} = 0 \\ x^2 - 4x + 3 = 0 \quad \text{(phương trình đặc trưng)} \end{array}\right.$$

Giải phương trình đặc trưng:

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$
$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

$T(n)$ có dạng:

$$c_1 x_1^n + c_2 x_2^n = c_2 3^n + c_1$$

Theo đề ta có: $\begin{cases} T(0) = c_1 + c_2 = 1 \\ T(1) = c_1 + 3c_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow c_1 = c_2 = \dfrac{1}{2}$

Vậy:

$$T(n) = \frac{3^n}{2} + \frac{1}{2}$$

b) $T(n) = 4T(n-1) - 5T(n-2) + 2T(n-3), \quad T(0) = 0; T(1) = 1; T(2) = 2$

Đặt: $x^n = T(n)$

Phương trình trên trở thành:

$$x^n - 4x^{n-1} + 5x^{n-2} - 2x^{n-3} = 0$$
$$x^{n-3}(x^3 - 4x^2 + 5x - 2) = 0$$

$\left[\begin{array}{l} x^{n-3} = 0 \\ x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0 \quad \text{(phương trình đặc trưng)} \end{array}\right.$

Giải phương trình đặc trưng:

$$x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$$
$$\begin{cases} x_1 = 1 \quad (n_0 \text{ bội } 2) \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

$T(n)$ có dạng:

$$c_1x_1^n + c_2nx_1^n + c_3x_2^n = c_32^n + nc_2 + c_1$$

Theo đề ta có: $\begin{cases} T(0) = c_1 + c_3 & = 0 \\ T(1) = c_1 + c_2 + 2c_3 & = 1 \\ T(2) = c_1 + 2c_2 + 4c_3 & = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = c_3 = 0 \\ c_2 = 1 \end{cases}$

Vậy:

$$T(n) = n$$

c) $T(n) = T(n-1) + T(n-2), \quad T(0) = 1; T(1) = 1$

Đặt: $x^n = T(n)$

Phương trình trên trở thành:

$$x^n - x^{n-1} - x^{n-2} = 0$$
$$x^{n-2}(x^2 - x - 1) = 0$$

$\left[\begin{array}{l} x^{n-2} = 0 \\ x^2 - x - 1 = 0 \quad \text{(phương trình đặc trưng)} \end{array}\right.$

Giải phương trình đặc trưng:

$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$T(n)$ có dạng:

$$c_1 x_1^n + c_2 x_2^n = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Theo đề ta có: $\begin{cases} T(0) = c_1 + c_2 & = 1 \\ T(1) = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) & = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{5+\sqrt{5}}{10} \\ c_2 = \frac{5-\sqrt{5}}{10} \end{cases}$

Vậy:

$$T(n) = \frac{5+\sqrt{5}}{10} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5-\sqrt{5}}{10} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

5 Giải phương trình đệ quy dùng phương pháp hàm sinh

a) $T(n) = \begin{cases} c_1, & n = 0 \\ T(n-1) + c_2, & n > 0 \end{cases}$

Hàm sinh $\{T(n)\}_{n=0}^{\infty}$ có dạng:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} T(n) x^n \\ &= c_1 + \sum_{n=1}^{\infty} T(n-1) x^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_2 x^n \quad \text{(tách thành hai dãy)} \\ &= c_1 + x \sum_{n=0}^{\infty} T(n) x^n + c_2 \sum_{n=1}^{\infty} x^n \\ &= c_1 + x f(x) + c_2 \frac{x}{1-x} \quad \text{(biến đổi lại thành hàm sinh)} \\ &= c_1 + \frac{c_2 x}{1-x} + x f(x) \end{aligned}$$

Tham khảo cách trình bày bởi ChatGPT.

Ta có:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= c_1 + xf(x) + c_2\frac{x}{1-x} \\
f(x) &= \frac{c_1 + \frac{c_2 x}{1-x}}{1-x} \\
&= \frac{c_1}{1-x} + \frac{c_2 x}{(1-x)^2} \\
&= c_1\sum_{n=0}^{\infty} x^n + c_2\sum_{n=0}^{\infty} nx^n \\
&= c_1 + c_2\sum_{n=0}^{\infty} nx^n
\end{aligned}
$$

Suy ra:

$$T(n) = c_1 + c_2 n = c_2 n + c_1$$

b) $T(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 2, & n = 1 \\ 7T(n-1) - 12T(n-2), & n \geq 2 \end{cases}$

Hàm sinh $\{T(n)\}_{n=0}^{\infty}$ có dạng:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} T(n)x^n \\
&= 7\sum_{n=2}^{\infty} T(n-1)x^n - 12\sum_{n=2}^{\infty} T(n-2)x^n + 2x + 1 \\
&= 7x\sum_{n=1}^{\infty} T(n)x^n - 12x^2\sum_{n=0}^{\infty} T(n)x^n + 2x + 1 \\
&= 7xf(x) - 7x - 12x^2 f(x) + 2x + 1 \\
&= 7xf(x) - 12x^2 f(x) - 5x + 1
\end{aligned}
$$

Ta có:

$$\begin{aligned}
f(x) &= 7xf(x) - 12x^2 f(x) + 2x + 1 \\
f(x) &= \frac{-5x+1}{1-7x+12x^2} \\
&= \frac{-5x+1}{(1-3x)(1-4x)} \\
&= \frac{2}{1-3x} - \frac{1}{1-4x} \\
&= 2\sum_{n=0}^{\infty}(3x)^n - \sum_{n=0}^{\infty}(4x)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(2\cdot 3^n - 4^n\right)x^n
\end{aligned}$$

Suy ra:

$$T(n) = 2\cdot 3^n - 4^n$$

c) $$\begin{cases} T(n+1) = T(n) + 2(n+2), & n \geq 0 \\ T(0) = 3 \end{cases}$$

Chuẩn hoá phương trình: Đặt $n' = n+1$

$$T(n') = T(n) = \begin{cases} 3, & n = 0 \\ T(n-1) + 2(n+1), & n \geq 1 \end{cases}$$

Hàm sinh $\{T(n)\}_{n=0}^{\infty}$ có dạng:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} T(n)x^n \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} T(n-1)x^n + \sum_{n=2}^{\infty} 2(n+1)x^n + 7x + 3 \\
&= x\sum_{n=1}^{\infty} T(n)x^n + 2\sum_{n=2}^{\infty}(n+1)x^n + 7x + 3 \\
&= xf(x) - 3x + \frac{2x}{(1-x)^2} - 2(1+2x) + 7x + 3 \\
&= xf(x) + \frac{2x}{(1-x)^2} + 1
\end{aligned}$$

Ta có:

$$\begin{aligned}
f(x) &= xf(x) + \frac{2x}{(1-x)^2} + 1 \\
f(x) &= \frac{\frac{2x}{(1-x)^2} + 1}{1-x} \\
&= \frac{2x}{(1-x)^3} + \frac{1}{1-x}
\end{aligned}$$

Xét đẳng thức:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Đạo hàm 2 vế, ta được:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^{n-1} = \frac{2(1-x)}{(1-x)^4}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)x^n = \frac{2}{(1-x)^3}$$

Thay vào $f(x)$, ta có:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)x^n + \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

Suy ra:

$$T(n) = (n+1)(n+2) + 1 = n^2 + 3n + 3$$

6 Giải phương trình đệ quy bằng phương pháp đoán nghiệm

Đề bài: Cho phương trình đệ quy

$$T(n) = \begin{cases} c_1, & n = 1 \\ 4T(n/2) + n, & n \geq 2 \end{cases}$$

i) Đoán nghiệm: $f(n) = an^3$

Dùng quy nạp chứng minh: $T(n) \leq f(n), \forall n$.
Để $T(1) \leq f(1)$, ta chọn a sao cho $c_1 \leq a$.
Giả sử: $T(k) \leq f(k), \forall k < n$.
Điều này có nghĩa: $4T(\frac{k}{2}) + k \leq f(\frac{k}{2})$.

Cần CM: $T(k) \leq f(k)$ tại $k = n$:

$$\begin{aligned} T(n) = 4T(n/2) + n &\leq 4f(n/2) + n \\ T(n) = 4T(n/2) + n &\leq \frac{an^3}{2} + n \\ \textbf{Để } T(n) \leq f(n) \textbf{ thì: } \frac{an^3}{2} + n &\leq f(n) = an^3 \\ \Leftrightarrow a &\geq \frac{2}{n^2} \\ \Leftrightarrow a \geq 2 &\geq \frac{2}{n^2} \quad (n \geq 1) \end{aligned}$$

Để tìm a, ta giải hệ:

$$\begin{cases} a \geq 2 \\ a \geq c_1 \quad (c_1 \geq 0) \end{cases}$$

Suy ra :

$$\exists a, \forall n \geq 1 : T(n) \leq \frac{an^3}{2} + n \leq an^3 = f(n)$$

Chọn $a = c_1 + 2 \Rightarrow T(n) \leq (c_1 + 2)n^3$
Vậy: Đoán nghiệm thành công.

ii) Đoán nghiệm: $f(n) = an^2$

Dùng quy nạp chứng minh: $T(n) \leq f(n), \forall n$.
Để $T(1) \leq f(1)$, ta chọn a sao cho $c_1 \leq a$.
Giả sử: $T(k) \leq f(k), \forall k < n$.
Điều này có nghĩa: $4T(\frac{k}{2}) + k \leq f(\frac{k}{2})$.
Cần CM: $T(k) \leq f(k)$ tại $k = n$:

$$\begin{aligned} T(n) = 4T(n/2) + n &\leq 4f(n/2) + n \\ T(n) = 4T(n/2) + n &\leq an^2 + n \\ \textbf{Để } T(n) \leq f(n) \textbf{ thì: } an^2 + n &\leq f(n) = an^2 \\ \Leftrightarrow n &\leq 0 \quad (n \geq 1) \\ \Rightarrow \text{Không tồn tại } a \text{ thoả mãn} \end{aligned}$$

Vậy: Đoán nghiệm thất bại.

iii) Đoán nghiệm: $f(n) = an^2 - bn$

Dùng quy nạp chứng minh: $T(n) \leq f(n), \forall n$.
Để $T(1) \leq f(1)$, ta chọn a sao cho $c_1 \leq a - b$.
Giả sử: $T(k) \leq f(k), \forall k < n$.
Điều này có nghĩa: $4T(\frac{k}{2}) + k \leq f(\frac{k}{2})$.
Cần CM: $T(k) \leq f(k)$ tại $k = n$:

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 4T(n/2) + n \leq 4f(n/2) + n \\
T(n) &= 4T(n/2) + n \leq an^2 - 2bn + n \\
T(n) &= 4T(n/2) + n \leq f(n) - bn + n \\
\textbf{Để } T(n) \leq f(n) \textbf{ thì: } & -bn + n \leq 0 \\
& \Leftrightarrow b \geq 1
\end{aligned}
$$

Để tìm a, b, ta giải hệ:

$$
\begin{cases} a - b \geq c_1 \\ b \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq c_1 + b \\ b \geq 1 \end{cases}
$$

Chọn $b = 1; a = c_1 + 1 \Rightarrow T(n) \leq (c_1 + 1)n^2 - n$
Vậy: Đoán nghiệm thành công.

7 Giải phương trình đệ quy bằng phương pháp đoán nghiệm

$$
T(n) = \begin{cases} 1, & n \leq 5 \\ T(n/2) + T(n/4) + n, & n \geq 6 \end{cases}
$$

Gợi ý đoán: $T(n) = O(n)$

Đoán nghiệm $f(n) = an$.
Dùng quy nạp chứng minh: $T(n) \leq f(n), \forall n$.
Với $n = 1$, cần CM: $T(1) \leq f(1) \Rightarrow 1 \leq a$

Để $T(1) \leq f(1)$ ta chọn $a \geq 1$.

Giả sử: $T(k) \leq f(k), \forall k < n$.
Điều này có nghĩa: $T\left(\frac{k}{2}\right) + T\left(\frac{k}{4}\right) + k \leq f\left(\frac{k}{2}\right)$.

Cần CM: $T(k) \leq f(k)$ với $k = n$:

$$T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + T\left(\frac{n}{4}\right) + n \leq f\left(\frac{n}{2}\right) + f\left(\frac{n}{4}\right) + n$$
$$T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + T\left(\frac{n}{4}\right) + n \leq \frac{an}{2} + \frac{an}{4} + n$$
$$T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + T\left(\frac{n}{4}\right) + n \leq f(n) - \frac{an}{4} + n$$

Để $T(n) \leq f(n)$ **thì:** $-\frac{an}{4} + n \leq 0$

$$\Leftrightarrow a \geq 4$$

Chọn $a = 4 \Rightarrow T(n) \leq f(n) = 4n$

Vậy: $T(n) = O(n)$