ĐẠI HỌC QUỐC GIA THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ THÔNG TIN
VNUHCM - UIT

BÀI TẬP MÔN
PHÂN TÍCH VÀ THIẾT KẾ THUẬT TOÁN

by

Hoàng Quang Khải - 21520952
Nguyễn Nhật Minh - 21521135
Lê Tiến Quyết - 21520428
Lê Tuấn Vũ - 21521679

KHOA KHOA HỌC MÁY TÍNH

Homework #03: Độ phức tạp và các ký hiệu tiệm cận
Định lý Master

GV hướng dẫn:
Huỳnh Thị Thanh Thương

TPHCM, 24 tháng 04 năm 2023

HW#03: Big-O notation

Bài tập 1:

a) Độ phức tạp của thuật toán là một khái niệm để đo lường lượng tài nguyên (thời gian và bộ nhớ) cần thiết để thực hiện thuật toán

- Độ phức tạp thời gian: các thuật toán cần một lượng thời gian hữu hạn để thực thi, thời gian mà thuật toán cần để giải bài toán đã cho gọi là độ phức tạp thời gian của thuật toán.
- Độ phức tạp bộ nhớ: việc giải quyết các bài toán sử dụng máy tính yêu cầu bộ nhớ để lưu dữ liệu tạm thời hoặc kết quả cuối cùng trong khi thuật toán đang thực thi. Dung lượng bộ nhớ được yêu cầu bởi thuật toán để giải quyết bài toán được gọi là độ phức tạp bộ nhớ.

b) Ý kiến này là Đúng, bởi vì

Trên thực tế, với các thuật toán có độ phức tạp cao, việc để tìm ra hàm $T(n)$ chính xác là rất khó, và có thể gặp khó khăn khi so sánh 2 hàm số $T(n)$ với nhau. Do đó, người ta lựa chọn phương pháp so sánh tương đối, chỉ quan têm đến những giá trị n lớn, n càng lớn (tiến tới ∞) $\rightarrow$ So sánh tốc độ tăng (tỷ lệ tăng trưởng) của 2 hàm vì hàm nào có tốc độ tăng nhanh hơn thì luôn lớn hơn ở ∞ $\rightarrow$ Phân chia thành các bậc tăng trưởng "Order of growth", hàm có bậc tăng trưởng lớn hơn thì tăng nhanh hơn (phức tạp hơn) $\rightarrow$ Dễ so sánh

c) Cách sử dụng các ký hiệu tiệm cận khi nói về độ phức tạp thuật toán

- O (Big O): biểu diễn giới hạn trên của độ phức tạp thuật toán, nó cho biết thời gian chạy của thuật toán trong trường hợp tệ nhất đối với một input có kích thước n. Dễ dàng tìm thấy giới hạn trên của một thuật toán. Giới hạn trên.
- Ω (Big Ω): biểu diễn giới hạn dưới của thuật toán, nó cho biết thời gian chạy tốt nhất có thể của thuật toán đối với một input có kích thước n. Tuy nhiên nó lại không thực sự hữu ích và ít được sử dụng nhất trong cả 3. Giới hạn dưới.
- Θ (Big Θ): biểu diễn giới hạn một hàm từ trên xuống dưới, xác định hành vi tiệm cận chính xác. Nó cho biết thời gian chạy trung bình của thuật toán đối với một input có kích thước n.

Bài tập 2:

Với mỗi hàm $f(n)$ và thời gian t, chọn giá trị n lớn nhất của bài toán để có thể được giải quyết trong thời gian t, xem như thuật toán sẽ giải bài toán với thời gian $f(n)\mu$s.

Giá trị n lớn nhất (n_{max}) thoả mãn: $f(n_{max}) \leq t \quad (\mu s)$

Quy ước: 1 month = 30 days; 1 year = 365 days; $\log n = \log_2 n$

$f(n)$	1 second	1 minute	1 hour	1 day	1 month	1 year	1 century
$\log n$	2^{E+6}	2^{6E+7}	$2^{3.6E+9}$	$2^{8.64E+10}$	$2^{2.592E+12}$	$2^{3.1536E+13}$	$2^{3.1536E+15}$
$\sqrt{n}$	10^{12}	3.60E+15	1.30E+19	7.46E+21	6.72E+24	9.94E+26	9.94E+30
n	10^{6}	6.00E+07	3.60E+09	8.64E+10	2.59E+12	3.15E+13	3.15E+15
$n \log n$	62746	2801417	133378058	2755147513	71870856404	7.97634E+11	6.8611E+13
n^2	1000	7745	60000	293938	1609968	5615692	56156922
n^3	100	391	1532	4420	13736	31593	146645
2^n	19	25	31	36	41	44	51
$n!$	9	11	12	13	15	16	17

Bài tập 3:

a) Phép suy ra này là sai

Hai biểu thức này đều là hàm bậc 2, do đó chúng đều có bậc tăng trưởng cùng là $O(n^2)$. Không thể kết luận là 2 biểu thức bằng nhau khi chúng có cùng bậc tăng trưởng.

b) Chứng minh

Giả sử: $n^3 \in O(n^2)$, nghĩa là $\exists c \in \mathbb{R}+$ và $n_0 > 0 : 0 \leq n^3 \leq cn^2, \forall n \geq n_0$

Suy ra: $n \leq c, \forall n \geq n_0$

Điều này không thể xảy ra vì không thể chọn c để thoả điều kiện trên.

Vậy điều giả sử là sai.

c) Chứng minh

Giả sử: $\exists c \in \mathbb{R}+$ và $n_0 > 0$:

$$T(n) = a_k n^k + \cdots + a_1 n + a_0 \leq cn^k, \forall n \geq n_0$$

Ta có: $a_k n^k + \cdots + a_1 n + a_0 \leq a_k n^k + \cdots + a_1 n^k + a_0 n^k = n^k(a_k + \cdots + a_1 + a_0)$

Chọn $c = a_k + \cdots + a_1 + a_0 \Rightarrow T(n) = a_k n^k + \cdots + a_1 n + a_0 \leq cn^k, \forall n \geq n_0$

Vậy khi chọn $c = a_k + \cdots + a_1 + a_0$ và $n_0 = 1$, ta có: $T(n) = O(n^k)$

Bài tập 4: Sắp xếp tăng dần "theo Big-O nhỏ nhất"

Group 1:

$$
\begin{aligned}
f_1(n) &= \binom{n}{100} = \frac{n!}{(n-100)!100!} &&= O(n^{100}) \\
f_2(n) &= n^{100} &&= O(n^{100}) \\
f_3(n) &= \frac{1}{n} &&= O(1) \\
f_4(n) &= 10^{1000}n &&= O(n) \\
f_5(n) &= n\log n = O(n \cdot n^c) &&= O(n^{c+1})
\end{aligned}
$$

Vậy thứ tự Big-O tăng dần: $f_3 < f_4 < f_5 < f_1 = f_2$

Group 2:

$$
\begin{aligned}
f_1(n) &= 2^{2^{1000000}} &&= O(1) \\
f_2(n) &= 2^{100000n} &&= O(2^n) \\
f_3(n) &= \binom{n}{2} = \frac{n!}{(n-2)!2!} &&= O(n^2) \\
f_4(n) &= n\sqrt{n} &&= O(n^{\frac{3}{2}})
\end{aligned}
$$

Vậy thứ tự Big-O tăng dần: $f_1 < f_4 < f_3 < f_2$

Group 3:

$$
\begin{aligned}
f_1(n) &= n^{\sqrt{n}} = 2^{\sqrt{n}\log n} &&= O(2^{n^{c+0.5}}) \\
f_2(n) &= 2^n &&= O(2^n) \\
f_3(n) &= n^{10} \cdot 2^{\frac{n}{2}} = 2^{10\log n + \frac{n}{2}} &&= O(2^{n^c + \frac{n}{2}}) \\
f_4(n) &= \sum_{i=1}^{n}(i+1) = \frac{n(n+1)}{2} + n &&= O(n^2)
\end{aligned}
$$

Vậy thứ tự Big-O tăng dần: $f_4 < f_1 < f_3 < f_2$

Group 4:

$$
\begin{aligned}
f_1(n) &= n^4 \binom{n}{2} = n^4 \cdot n^2 &&= O(n^6) \\
f_2(n) &= \sqrt{n} \log n^4 = n^{\frac{1}{2}} \cdot n^{4c} &&= O(n^{0.5+4c}) \\
f_3(n) &= n^{5 \log n} &&= O(n^{\log n}) \\
f_4(n) &= 4 \log n + \log \log n &&= O(\log n) \\
f_5(n) &= \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} &&= O(n^2)
\end{aligned}
$$

Vậy thứ tự Big-O tăng dần: $f_4 < f_2 < f_5 < f_1 < f_3$

Group 5:

$$
\begin{aligned}
f_6(n) &= n^{\sqrt{n}} = 2^{\sqrt{n} \log n} &&= O(2^{n^{0.5+c}}) \\
f_7(n) &= n^{\log n} = 2^{\log n \log n} &&= O(2^{n^{2c}}) \\
f_8(n) &= 2^{\frac{n}{2}} &&= O(2^{\frac{n}{2}}) \\
f_9(n) &= 3^{\sqrt{n}} = 2^{\sqrt{n} \log 3} &&= O(2^{n^{0.5}}) \\
f_{10}(n) &= 4^{n^{\frac{1}{4}}} = 2^{2n^{\frac{1}{4}}} &&= O(2^{n^{\frac{1}{4}}})
\end{aligned}
$$

Vậy thứ tự Big-O tăng dần: $f_7 < f_{10} < f_9 \approx f_6 < f_8$

Group 6:

$$
\begin{aligned}
f_1(n) &= n^{0.999999} \log n &&= O(n^{0.999999+c}) \\
f_2(n) &= 10000000n &&= O(n) \\
f_3(n) &= 1.000001^n &&= O(1.000001^n) \\
f_4(n) &= n^2 &&= O(n^2)
\end{aligned}
$$

Vậy thứ tự Big-O tăng dần: $f_3 < f_1 \approx f_2 < f_4$

$$\begin{aligned} f_1(n) &= (n-2)! &&= O(n!) \\ f_2(n) &= 5\log(n+100)^{10} &&= O(n^c) \\ f_3(n) &= 2^2 n &&= O(2^n) \\ f_4(n) &= 0.001n^4 + 3n^3 + 1 &&= O(n^4) \\ f_5(n) &= \ln^2 n &&= O(n^{2c}) \\ f_6(n) &= \sqrt[3]{n} &&= O(n^{\frac{1}{3}}) \\ f_7(n) &= 3^n &&= O(3^n) \end{aligned}$$

Vậy thứ tự Big-O tăng dần: $f_2 < f_5 < f_6 < f_4 < f_3 < f_7 < f_1$

Bài tập 5:

a) Chứng minh: O(C) = O(1) với C là hằng số

Chứng minh $O(C) \subset O(1)$: Với mọi $O(C) = C_1 C$, ta có: $C_1 C = C_2 \in O(1)$
Chứng minh $O(1) \subset O(C)$: Với mọi $O(1) = C_2 \cdot 1$, chọn $C_1 = \dfrac{C_2}{C} \Rightarrow O(1) = C_2 = C_1 C \in O(C)$
Vậy $O(C) = O(1)$

b) Nếu $f(n) \in O(g(n))$ và $g(n) \in O(h(n))$ thì $f(n) \in O(h(n))$

1. Xét $f(n) \in O(g(n)) : \exists c_1, \exists n_1 \mid f(n) \leq c_1 g(n), \forall n \geq n_1$

2. Xét $g(n) \in O(h(n)) : \exists c_2, \exists n_2 \mid g(n) \leq c_2 h(n), \forall n \geq n_2$

Từ 1, 2 suy ra: $f(n) \leq c_1 c_2 h(n)$
$\exists c_3 : c_3 \geq c_1 c_2 \Rightarrow f(n) \leq c_3 h(n)$
Vậy: $f(n) \in O(h(n))$

c) max$\{f(n), g(n)\} = \theta(f(n) + g(n))$

Ta có: $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{max\{f(n), g(n)\}}{f(n)+g(n)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\frac{f(n)}{max\{f(n),g(n)\}} + \frac{g(n)}{max\{f(n),g(n)\}}} = \dfrac{1}{1+0} = 1$
Vì $0 < 1 < +\infty \Rightarrow \max\{f(n), g(n)\} = \theta(f(n) + g(n))$

d) Nếu $t(n) \in O(g(n))$ thì $g(n) \in \Omega(t(n))$

Xét $t(n) \in O(g(n)) : \exists c > 0, \exists n_0 > 0 \mid t(n) \leq cg(n), \forall n \geq n_0$
$\Rightarrow g(n) \geq \dfrac{1}{c} t(n)$, chọn $c_1 = \dfrac{1}{c} \Rightarrow g(n) = c_1 t(n), \forall n \geq n_0$
Vậy: $g(n) \in \Omega(t(n))$

e) $\Theta(\alpha g(n)) = \Theta(g(n))$ **với mọi** $\alpha > 0$

- Xét $f(n) \in \Theta(\alpha g(n)), f(n)$ có dạng $f(n) = c\alpha g(n)$, với $c > 0$:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \frac{c\alpha g(n)}{g(n)} = c\alpha < +\infty$$

  Do đó:

$$f(n) \in \Theta(\alpha g(n)) \Leftrightarrow c\alpha g(n) \in \Theta(g(n)) \Rightarrow \Theta(\alpha g(n)) \subset \Theta(g(n)) \tag{1}$$

- Xét $h(n) \in \Theta(g(n)), h(n)$ có dạng $h(n) = cg(n)$, với $c > 0$:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{h(n)}{\alpha g(n)} = \frac{cg(n)}{\alpha g(n)} = \frac{c}{\alpha} < +\infty$$

  Do đó:

$$h(n) \in \Theta(g(n)) \Leftrightarrow cg(n) \in \Theta(\alpha g(n)) \Rightarrow \Theta(g(n)) \subset \Theta(\alpha g(n)) \tag{2}$$

Từ (1) và (2) suy ra: $\Theta(\alpha g(n)) = \Theta(g(n)), \forall \alpha > 0$

f) $\Theta(g(n)) = O(g(n)) \cap \Omega(g(n))$

Theo định nghĩa ta có:

$$O(g(n)) = \{f(n) : \forall C_1 > 0, n_0 > 0, 0 \le f(n) \le C_1 g(n), \forall n \ge n_0\} \tag{1}$$
$$\Omega(g(n)) = \{f(n) : \forall C_2 > 0, n_0 > 0, 0 \le C_2 g(n) \le f(n), \forall n \ge n_0\} \tag{2}$$

$$(1) \cap (2) = \{f(n) : \forall C_2, C_1 > 0, n_0 > 0, 0 \le C_2 g(n) \le f(n) \le C_1 g(n), \forall n \ge n_0\} \tag{3}$$

Mặt khác:

$$\Theta(g(n)) = \{f(n) : \forall C_1, C_2 \ge 0, n_0 \ge 0, C_2 g(n) \le f(n) \le C_1 g(n), \forall n \ge n_0\} \tag{4}$$

Từ (3) và (4) suy ra: $\Theta(g(n)) = O(g(n)) \cap \Omega(g(n))$

Bài tập 6: Các khẳng định bên dưới là đúng hay sai?

a) Nếu $f(n) = \Theta(g(n))$ và $g(n) = \Theta(h(n))$, thì $h(n) = \Theta(f(n))$

1. Xét $f(n) = \Theta(g(n))$:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = c_1 \quad (0 < c_1 < +\infty)$$

2. Xét $g(n) = \Theta(h(n))$:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{g(n)}{h(n)} = c_2 \quad (0 < c_2 < +\infty)$$

3. Giả sử $h(n) = \Theta(f(n))$:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{h(n)}{f(n)} = \lim_{n \to +\infty} \frac{h(n)g(n)}{g(n)f(n)} = C \quad (0 < C < +\infty)$$

Từ 1, 2, 3 ta có:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{h(n)}{f(n)} = \frac{1}{c_1 c_2} \quad (0 < \frac{1}{c_1 c_2} < +\infty)$$

Vậy: $h(n) = \Theta(f(n))$, khẳng định trên là đúng.

b) Nếu $f(n) = O(g(n))$ và $g(n) = O(h(n))$ thì $h(n) = \Omega(f(n))$

1. Xét $f(n) = O(g(n))$:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = c_1 \quad (c_1 < +\infty)$$

2. Xét $g(n) = O(h(n))$:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{g(n)}{h(n)} = c_2 \quad (c_2 < +\infty)$$

3. Giả sử $h(n) = O(f(n))$:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{h(n)}{f(n)} = \lim_{n \to +\infty} \frac{h(n)g(n)}{g(n)f(n)} = C \quad (C < +\infty)$$

Từ 1, 2, 3 ta có:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{h(n)}{f(n)} = \frac{1}{c_1 c_2}$$

Mà $c_1, c_2 < +\infty$ nên $\frac{1}{c_1 c_2}$ không xác định được.
Vậy khẳng định trên là sai.

c) **Nếu** $f(n) = O(g(n))$ **và** $g(n) = O(f(n))$ **thì** $f(n) = g(n)$

1. Xét $f(n) = O(g(n))$:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = c_1 \quad (c_1 < +\infty)$$

2. Xét $g(n) = O(h(n))$:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{g(n)}{h(n)} = c_2 \quad (c_2 < +\infty)$$

Từ 1, 2 ta có: $c_1, c_2 < +\infty \Rightarrow$ Không thể xác định $c_1 = c_2$ hay không.
Vậy khẳng định trên là sai.

d) $\frac{n}{100} = \Omega(n)$

Ta có:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{n}{100}}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{100} = \frac{1}{100} > 0$$

Vậy khẳng định trên là đúng

e) $f(n) + O(f(n)) = \Theta(f(n))$

Xét $f(n) = O(f(n))$:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{O(f(n))}{f(n)} = c \quad (0 < c < +\infty)$$

Suy ra:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f(n) + O(f(n))}{f(n)} = 1 + c$$

Mà $0 < 1 + c < +\infty$
Vậy khẳng định trên là đúng

f) $2^{10n} = O(2^n)$

Ta có:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^{10n}}{2^n} = \lim_{n\to+\infty} 2^{9n} = +\infty$$

Suy ra: $2^{10n} \neq O(2^n)$
Vậy khẳng định trên là sai.

g) $2^{n+10} = O(2^n)$

Ta có:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^{n+10}}{2^n} = 2^{10} < +\infty$$

Suy ra: $2^{10n} = O(2^n)$
Vậy khẳng định trên là đúng.

h) $\log_{10} n = \Theta(\log_2 n)$

Ta có:
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log_{10} n}{\log_2 n} = \log_{10} 2 < +\infty$$
Suy ra: $\log_{10} n = \Theta(\log_2 n)$
Vậy khẳng định trên là đúng.

Bài tập 7: Định lý Master

1. $T(n) = 3T(n/2) + n^2$

Ta có: $f(n) = n^2, a = 3, b = 2$
Vì $3 < 2^2 \Rightarrow T(n) \in \Theta(n^2)$ *(Trường hợp 1 dạng đơn giản)*

2. $T(n) = 7T(n/3) + n^2$

Ta có: $f(n) = n^2, a = 7, b = 3$
Vì $7 < 3^2 \Rightarrow T(n) \in \Theta(n^2)$ *(Trường hợp 1 dạng đơn giản)*

3. $T(n) = 3T(n/3) + n/2$

Ta có: $f(n) = \frac{n}{2}, a = 3, b = 3$
Vì $3 = 3^1 \Rightarrow T(n) \in \Theta(n \log n)$ *(Trường hợp 2 dạng đơn giản)*

4. $T(n) = 16T(n/4) + n$

Ta có: $f(n) = n, a = 16, b = 4$
Vì $16 > 4^1 \Rightarrow T(n) \in \Theta(n^2)$ *(Trường hợp 3 dạng đơn giản)*

5. $T(n) = 2T(n/4) + n^{0.51}$

Ta có: $f(n) = n^{0.51}, a = 2, b = 4$
Vì $2 < 4^{0.51} \Rightarrow T(n) \in \Theta(n^{0.51})$ *(Trường hợp 1 dạng đơn giản)*

6. $T(n) = 3T(n/2) + n$

Ta có: $f(n) = n, a = 3, b = 2$
Vì $3 > 2^1 \Rightarrow T(n) \in \Theta(n^{\log_2 3})$ *(Trường hợp 3 dạng đơn giản)*

7. $T(n) = 3T(n/3) + \sqrt{n}$

Ta có: $f(n) = \sqrt{n}, a = 3, b = 3$
Vì $3 > 3^{0.5} \Rightarrow T(n) \in \Theta(n)$ *(Trường hợp 3 dạng đơn giản)*

8. $T(n) = 4T(n/2) + cn$

Ta có: $f(n) = cn, a = 4, b = 2$
Vì $4 > 2^1 \Rightarrow T(n) \in \Theta(n^2)$ *(Trường hợp 3 dạng đơn giản)*

9. $T(n) = 4T(n/4) + 5n$

Ta có: $f(n) = 5n, a = 4, b = 4$
Vì $4 = 4^1 \Rightarrow T(n) \in \Theta(n \log n)$ *(Trường hợp 2 dạng đơn giản)*

10. $T(n) = 5T(n/4) + 4n$

Ta có: $f(n) = 4n, a = 5, b = 4$
Vì $5 > 4^1 \Rightarrow T(n) \in \Theta(n^{\log_4 5})$ *(Trường hợp 3 dạng đơn giản)*

11. $T(n) = 4T(n/5) + 5n$

Ta có: $f(n) = 5n, a = 4, b = 5$
Vì $4 < 5^1 \Rightarrow T(n) \in \Theta(n)$ *(Trường hợp 1 dạng đơn giản)*

12. $T(n) = 25T(n/5) + n^2$

Ta có: $f(n) = n^2, a = 25, b = 5$
Vì $25 = 5^2 \Rightarrow T(n) \in \Theta(n^2 \log n)$ *(Trường hợp 2 dạng đơn giản)*

13. $T(n) = 10T(n/3) + 17n^{1.2}$

Ta có: $f(n) = 17n^{1.2}, a = 10, b = 3$
Vì $10 > 3^{1.2} \Rightarrow T(n) \in \Theta(n^{\log_3 10})$ *(Trường hợp 3 dạng đơn giản)*

14. $T(n) = 7T(n/2) + n^3$

Ta có: $f(n) = n^3, a = 7, b = 2$
Vì $7 < 2^3 \Rightarrow T(n) \in \Theta(n^3)$ *(Trường hợp 1 dạng đơn giản)*

15. $T(n) = 4T(n/2) + \log n$

Ta có: $\log_b a = \log_2 4 = 2, \quad f(n) = \log n = O(n^{2-\epsilon}), \quad 0 < \epsilon < 2$
Vậy: $T(n) = \Theta(n^2)$ *(Trường hợp 1 dạng tổng quát)*

16. $T(n) = 4T(n/5) + \log n$

Ta có: $\log_b a = \log_5 4, \quad f(n) = \log n = O(n^{\log_5 4 - \epsilon}), \quad 0 < \epsilon < \log_5 4$
Vậy: $T(n) = \Theta(n^{\log_5 4})$ *(Trường hợp 1 dạng tổng quát)*

17. $T(n) = \sqrt{2}T(n/2) + \log n$

Ta có: $\log_b a = \log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2}, \quad f(n) = \log n = O(n^{\frac{1}{2} - \epsilon}), \quad 0 < \epsilon < \frac{1}{2}$
Vậy: $T(n) = \Theta(n^{\frac{1}{2}})$ *(Trường hợp 1 dạng tổng quát)*

18. $T(n) = 2T(n/3) + n \log n$

Ta có: $\log_b a = \log_3 2, \quad f(n) = n \log n = \Theta\left(n^{\log_3 2} \log^k n\right), \quad k = 1 \geq 0$
Vậy: $T(n) = \Theta\left(n^{\log_3 2} \log^2 n\right)$ *(Trường hợp 2 dạng tổng quát)*

19. $T(n) = 3T(n/4) + n \log n$

Ta có: $\log_b a = \log_4 3, \quad f(n) = n \log n = \Theta\left(n^{\log_4 3} \log^k n\right), \quad k = 1 \geq 0$
Vậy: $T(n) = \Theta\left(n^{\log_4 3} \log^2 n\right)$ *(Trường hợp 2 dạng tổng quát)*

20. $T(n) = 6T(n/3) + n^2 \log n$

Ta có: $\log_b a = \log_3 6, \quad f(n) = n^2 \log n = \Theta\left(n^{\log_3 6} \log^k n\right), \quad k = 1 \geq 0$
Vậy: $T(n) = \Theta\left(n^{\log_3 6} \log^2 n\right)$ *(Trường hợp 2 dạng tổng quát)*

21. $T(n) = 3T(n/5) + \log^2 n$

Ta có: $\log_b a = \log_5 3, \quad f(n) = \log^2 n = O(n^{\log_5 3 - \epsilon}), \quad 0 < \epsilon < \log_5 3$
Vậy: $T(n) = \Theta(n^{\log_5 3})$ *(Trường hợp 1 dạng tổng quát)*

22. $T(n) = 2T(n/2) + \frac{n}{\log n}$

Ta có: $\log_b a = \log_2 2 = 1, \quad f(n) = \frac{n}{\log n} = O(n)$
Vậy: $T(n) = \Theta(n)$ *(Trường hợp 1 dạng tổng quát)*

23. $T(n) = 2^n T(n/2) + n^n$

Vì $a = 2^n$ không phải là hằng số nên không áp dụng được định lý Master

24. $T(n) = 0.5T(n/2) + n$

Vì $a = 0.5 < 1$ nên không áp dụng được định lý Master

25. $T(n) = T(n/2) + n(2 - \cos n)$

Ta có: $\log_b a = \log_2 1 = 0, \quad f(n) = n(2-\cos n) = \Omega(n^\epsilon), \quad \epsilon = 0.1$
Xét điều kiện: $f(n/2) \leq cf(n) \Leftrightarrow c \geq \frac{n}{2}(2 - \cos\frac{n}{2}) \div n(2-\cos n) \Leftrightarrow c \geq \frac{3}{2}$
Do đó: $\nexists c < 1$ thoả mãn.
Không áp dụng được định lý Master.

26. $T(n) = 64T(n/8) - n^2 \log n$

Vì $f(n) = -n^2 \log n < 0$ nên không thể áp dụng định lý Master

27. $T(n) = T(n/2) + 2^n$

Ta có: $\log_b a = \log_2 1 = 0, \quad f(n) = 2^n = \Omega(n^\epsilon), \quad \epsilon = 1$
Xét điều kiện: $f(n/2) \leq cf(n) \Leftrightarrow c \geq 2^{\frac{n}{2}} \div 2^n \Leftrightarrow c \geq \max\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2^{\frac{n}{2}}}{2^n} = 0$
Do đó: $\exists c < 1$ thoả mãn.
Vậy: $T(n) = \Theta(f(n)) = \Theta(2^n)$ *(Trường hợp 3 dạng tổng quát)*

28. $T(n) = 16T(n/4) + n!$

Ta có: $\log_b a = \log_4 16 = 2, \quad f(n) = n! = \Omega(n^{2+\epsilon}), \quad \epsilon = 1$
Xét điều kiện: $16f(n/4) \leq cf(n) \Leftrightarrow c \geq 16 \cdot \left(\dfrac{n}{4}\right)! \div n! \Leftrightarrow c \geq \max\limits_{n\to+\infty} \dfrac{16\cdot\left(\frac{n}{4}\right)!}{n!} = 0$
Do đó: $\exists c < 1$ thoả mãn.
Vậy: $T(n) = \Theta(f(n)) = \Theta(n!)$ *(Trường hợp 3 dạng tổng quát)*

Bài tập 8: Chứng minh các tính chất sau

- $\mathbf{n + n^2 O(\ln n) = O(n^2 \ln n)}$

  Xét hàm số $f(n) \in O(\ln n)$ thì:
  $\exists c_1 \in \mathbb{R}^+,\ n_0 \in\ \mathbb{N}$ sao cho: $f(n) \leq c_1 \ln n, \forall n \geq n_0$
  $\rightarrow$ Đặt $g(n) = n + n^2 f(n) \leq n + n^2 c_1 \ln n, \forall n \geq n_0$
  Chọn $c_1 = \frac{1}{2}, n_0 = 2 \rightarrow g(n) \leq n + \frac{1}{2}n^2 \ln n \leq \frac{3}{2}n^2 \ln n$ (vì $n \leq\ n^2 \ln n$ với $\forall n \geq 2$)
  $\rightarrow \exists c_2 = \frac{3}{2}, n_0 = 2$ sao cho: $g(n) \leq c_2 n^2 \ln n, \forall n \geq n_0$

$$\rightarrow g(n) = O\left(n^2 \ln n\right)$$

  Vậy $n + n^2 O(\ln n) = O\left(n^2 \ln n\right)$ (đpcm)

- $\mathbf{g(n) \in O(h(n)) \rightarrow O(g(n)) \subseteq O(h(n))}$

Vì $g(n) \in O\big(h(n)\big)$ nên $\exists c_1 \in \mathbb{R}^+, n_1 \in \mathbb{N}$ sao cho: $g(n) \le c_1 h(n), \forall n \ge n_1$
Xét hàm số $f(n) \in O(g(n))$ thì:
$\exists c_2 \in \mathbb{R}^+,\ n_2 \in \mathbb{N}$ sao cho: $f(n) \le c_2 g(n), \forall n \ge n_2$

$$\rightarrow f(n) \le c_2\big(c_1 h(n)\big) = (c_1 c_2)\, h(n), \forall n \ge max(n_1, n_2)$$

Do đó: $\exists c_3 = c_1 * c_2 \in \mathbb{R}^+, n_3 = \max(n_1, n_2) \in \mathbb{N}$ sao cho: $f(n) \le c_3 h(n), \forall n \ge n_3$
$\rightarrow f(n) \in O\big(h(n)\big)$
$\rightarrow$ Với bất kỳ hàm số $f(n) \in O(g(n))$ thì $f(n) \in O\big(h(n)\big) \rightarrow O\big(g(n)\big) \subseteq O\big(h(n)\big)$
Vậy ta có điều phải chứng minh

- $\mathbf{O\big(f(n)\big) = O\big(g(n)\big) \leftrightarrow g(n) \in O\big(f(n)\big)}$ **và** $\mathbf{f(n) \in O(g(n))}$

$$O\big(f(n)\big) = O\big(g(n)\big) \leftrightarrow \begin{cases} O\big(f(n)\big) \subset O\big(g(n)\big) \\ O\big(g(n)\big) \subset O\big(f(n)\big) \end{cases}$$

Với $O\big(f(n)\big) \subset O\big(g(n)\big) \leftrightarrow h(n) \in O\big(f(n)\big)$ thì $h(n) \in O\big(g(n)\big)$
Ở đây chọn $h(n) = f(n) \rightarrow f(n) \in O\big(g(n)\big)$ (*)
Chứng minh tương tự với $O\big(g(n)\big) \subset O\big(f(n)\big)$, ta được: $g(n) \in O\big(f(n)\big)$ (**)
Từ (*) và (**) $\rightarrow f(n) \in O\big(g(n)\big)$ và $g(n) \in O\big(f(n)\big)$ (đpcm)

- $\mathbf{O\big(f(n)\big) \subset O\big(g(n)\big) \leftrightarrow f(n) \in O\big(g(n)\big)}$ **và** $\mathrm{g}\,\mathbf{(n) \notin O(f(n))}$

Với $O\big(f(n)\big) \subset O\big(g(n)\big) \leftrightarrow h(n) \in O\big(f(n)\big)$ thì $h(n) \in O\big(g(n)\big)$
Ở đây chọn $h(n) = f(n) \rightarrow f(n) \in O\big(g(n)\big)$ (*)
$\rightarrow \exists c \in \mathbb{R}^+, n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho: $f(n) \le cg(n) \leftrightarrow \frac{1}{c} f(n) \le g(n), \forall n \ge n_0$
$\rightarrow \exists c' = \frac{1}{c} \in \mathbb{R}^+, n_0' = n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho:
$c' f(n) \le g(n), \forall n \ge n_0' \rightarrow g(n) \in \Omega\big(f(n)\big) \ne O\big(f(n)\big) \rightarrow g(n) \notin O\big(f(n)\big)$(**)
Từ (*) và (**) $\rightarrow f(n) \in O\big(g(n)\big)$ và $g(n) \notin O\big(f(n)\big)$ (đpcm)

- $\mathbf{f(n) \in O(n) \rightarrow 2^{f(n)} \in O(2^n)}$

Xét hàm số $f(n) \in O(n)$ thì:
$\exists c_1 \in \mathbb{R}^+,\ n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho: $f(n) \le c_1 n, \forall n \ge n_0$

$$\rightarrow 2^{f(n)} \le 2^{c_1 n}, \forall n \ge n_0$$

+ Nếu $c_1 = 1:$
$2^{f(n)} \le 2^n, \forall n \ge n_0 \rightarrow \exists c_2 = 1, n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho: $2^{f(n)} \le c_2 2^n, \forall n \ge n_0$

$$\rightarrow 2^{f(n)} \in O(2^n)$$

+ Nếu $c_1 \ne 1:$

$2^{f(n)} \leq 2^{c_1 n} = (2^{c_1})^n \neq c_2 2^n$ (với $\forall c_1 \neq 1$)

$$\rightarrow 2^{f(n)} \notin O(2^n)$$

Vậy điều cần chứng minh là sai

Bài tập 9: Quy ước $\log n$ là $\log_2 n$

1. Cho $\mathbf{f(n) = \sum_{i=1}^{n} i}$ và $\mathbf{g(n) = n^2}$. Chứng minh $\mathbf{f(n) = \Theta(g(n))}$

$$f(n) = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

- Cách 1: Dùng giới hạn

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1(1+\frac{1}{n})}{2} = \frac{1(1+0)}{2} = \frac{1}{2}$$

$\rightarrow 0 < \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty \rightarrow f(n) = \Theta(g(n))$ (đpcm)

- Cách 2: Dùng định nghĩa

Ta cần đi chứng minh rằng: $\exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+,\ \mathrm{n}_0 \in \mathbb{N} \mid c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$

$$c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n) \leftrightarrow c_1 n^2 \leq \frac{n(n+1)}{2} \leq c_2 n^2 \leftrightarrow c_1 \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \leq c_2$$

Dễ thấy rằng với $n \geq 1$ thì: $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \leq 1 \rightarrow$ Chọn $c_1 = \frac{1}{2},\ c_2 = 1, n_0 = 1$ thì: $c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n),\ \forall n \geq n_0 \rightarrow f(n) = \Theta(g(n))$ (đpcm)

2. Chứng minh: $\mathbf{\frac{1}{2}n^2 - 3n = \Theta(n^2)}$

Đặt $f(n) = \frac{1}{2}n^2 - 3n, g(n) = n^2$

- Cách 1: Dùng giới hạn

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2}n^2 - 3n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{n}\right) = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

$\rightarrow 0 < \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty \rightarrow f(n) = \Theta(g(n))$ hay $\frac{1}{2}n^2 - 3n = \Theta(n^2)$ (đpcm)

- Cách 2: Dùng định nghĩa

Ta cần đi chứng minh rằng: $\exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+, n_0 \in \mathbb{N}$ thỏa : $c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$

$$c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n) \leftrightarrow c_1 n^2 \leq \frac{1}{2}n^2 - 3n \leq c_2 n^2 \leftrightarrow c_1 \leq \frac{1}{2} - \frac{3}{n} \leq c_2$$

Dễ thấy rằng với $n \geq 12$ thì: : $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{2} - \frac{3}{n} \leq \frac{1}{2} \rightarrow$ Chọn $c_1 = \frac{1}{4},\ c_2 = \frac{1}{2}, n_0 = 12$ thì: $c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n),\ \forall n \geq n_0 \rightarrow f(n) = \Theta(g(n))$ hay $\frac{1}{2}n^2 - 3n = \Theta(n^2)$ (đpcm)

3. Chứng minh: $n \log n - 2n + 13 = \Omega(n \log n)$

Đặt $f(n) = n \log n - 2n + 13, g(n) = n \log n$

- Cách 1: Dùng giới hạn

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n \to \infty} \frac{n \log n - 2n + 13}{n \log n} = \lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{2}{\log n} + \frac{13}{n \log n}\right) = (1 - 0 + 0) = 1 > 0$$

$\rightarrow f(n) = \Omega(g(n))$ hay $n \log n - 2n + 13 = \Omega(n \log n)$ (đpcm)

- Cách 2: Dùng định nghĩa

Ta cần đi chứng minh rằng: $\exists c \in \mathbb{R}^+, n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho: $cg(n) \leq f(n)$

$$cg(n) \leq f(n) \leftrightarrow c \times n \log n \leq n \log n - 2n + 13 \leftrightarrow c \leq 1 - \frac{2}{\log n} + \frac{13}{n \log n}$$

Dễ thấy rằng với $n \geq 2$ thì: $0.68 \leq 1 - \frac{2}{\log n} + \frac{13}{n \log n} \leq \frac{13}{2} \rightarrow c = \frac{1}{2}, n_0 = 2$ thì:
$cg(n) \leq f(n), \forall n \geq n_0 \rightarrow f(n) = \Omega\left(g(n)\right)$ hay $n \log n - 2n + 13 = \Omega(n \log n)$ (đpcm)

4. Chứng minh: $\log_3 n^2 = \Theta\left(\log_2 n^3\right)$

Đặt $f(n) = \log_3\left(n^2\right) = 2\log_3 n, g(n) = \log_2\left(n^3\right) = 3\log_2 n$

- Cách 1: Dùng giới hạn

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n \to \infty} \frac{2\log_3 n}{3\log_2 n} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{2}{3}\log_3 2\right) = \frac{2}{3}\log_3 2$$

$\rightarrow 0 < \lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty \rightarrow f(n) = \Theta(g(n))$ hay $\log_3\left(n^2\right) = \Theta(\log_2\left(n^3\right))$ (đpcm)

- Cách 2: Dùng định nghĩa

Ta cần đi chứng minh rằng: $\exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+, n_0 \in \mathbb{N}$ thỏa : $c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$
$c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n) \leftrightarrow c_1 \times 3\log_2 n \leq 2\log_3 n \leq c_2 \times 3\log_2 n \leftrightarrow c_1 \leq \frac{2}{3}\log_3 2 \leq c_2$
Dễ thấy rằng với $n \geq 2$ thì: : $\frac{1}{3} \leq \frac{2}{3}\log_3 2 \leq \frac{1}{2} \rightarrow$ Chọn $c_1 = \frac{1}{3},\ c_2 = \frac{1}{2}, n_0 = 2$ thì:
$c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n),\ \forall n \geq n_0 \rightarrow f(n) = \Theta(g(n))$ hay $\log_3\left(n^2\right) = \Theta(\log_2\left(n^3\right))$ (đpcm)

5. Chứng minh: $n^{\log 4} \in \omega\left(3^{\log n}\right)$

Đặt $f(n) = n^{\log 4}, g(n) = 3^{\log n}$

- Cách 1: Dùng giới hạn

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\log 4}}{3^{\log n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\log 4}}{n^{\log 3}} = \lim_{n\to\infty} n^{\log \frac{4}{3}} = \infty$$

$\rightarrow f(n) \in \omega(g(n))$ hay $\mathrm{n}^{log4} \in \omega\left(3^{\mathrm{logn}}\right)$ (đpcm)

- Cách 2: Dùng định nghĩa

Ta cần đi chứng minh rằng: $\forall c > 0$ thì $\exists n_0 > 0$ sao cho: $0 \leq cg(n) < f(n), \forall n \geq n_0$
$\rightarrow cg(n) < f(n) \leftrightarrow c \times 3^{\log n} < n^{log4} \leftrightarrow c < n^{\log \frac{4}{3}}$ hay $n > \sqrt[\log \frac{4}{3}]{c}$
Chọn $n_0 = c^3 \rightarrow$ Với $\forall c > 0$ luôn $\exists n_0 > 0$ sao cho: $cg(n) < f(n), \forall n \geq n_0$
$\rightarrow f(n) \in \omega(g(n))$ hay $\mathrm{n}^{log4} \in \omega\left(3^{\mathrm{logn}}\right)$ (đpcm)

6. Chứng minh: $\log^2 n \in o\left(n^{\frac{1}{2}}\right)$

Đặt $f(n) = \log^2 n, g(n) = n^{\frac{1}{2}}$

- Cách 1: Dùng giới hạn

$$\rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log^2 n}{n^{\frac{1}{2}}} \rightarrow^{L'\text{Hospital}} \lim_{n\ \to\infty} \frac{2\log n \times \frac{1}{n \ln n}}{\frac{1}{2} n^{-1/2}} \rightarrow^{L'\text{Hospital}} \lim_{n\ \to\infty} \frac{4}{n^{1/2} \ln 2} = 0$$

$\rightarrow f(n) \in o(g(n))$ hay $\log^2 n \in o(n^{1/2})$ (đpcm)

- Cách 2: Dùng định nghĩa

Ta cần đi chứng minh rằng: $\forall c > 0$ thì $\exists n_0 > 0$ sao cho: $0 \leq f(n) < cg(n), \forall n \geq n_0$

$$\rightarrow f(n) < cg(n) \leftrightarrow \log^2 n < cn^{1/2} \leftrightarrow c > \frac{\log^2 n}{n^{\frac{1}{2}}} = 0$$

Với $\log^2 n = 0 \leftrightarrow n = 1 \Rightarrow$ Chọn $n_0 = 1 \rightarrow$ Với $\forall c > 0$ luôn $\exists n_0 > 0$ sao cho: $f(n) < cg(n), \forall n \geq n_0$
$\rightarrow f(n) \in o\left(g(n)\right)$ hay $\log^2 n \in o\left(n^{\frac{1}{2}}\right)$ (đpcm)

7. Chứng minh: $\mathbf{\frac{n^2}{2}} \neq \omega(\mathbf{n^2})$

Đặt $f(n) = \frac{n^2}{2}, g(n) = n^2$

- Cách 1: Dùng giới hạn

$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq \infty \to$ f(n) $\neq$ $g(n)$
hay $\frac{n^2}{2} \neq \omega\ (n^2)$ (đpcm)

- Cách 2: Dùng định nghĩa

Giả sử $\frac{n^2}{2} = \omega\left(n^2\right) \to \forall c > 0$ thì $\exists n_0 > 0$ sao cho:
$0 \leq$ cg(n) $\leq f(n), \forall n \geq n_0 \to cn^2 \leq \frac{n^2}{2} \leftrightarrow c \leq \frac{1}{2} \to$ Không đúng với $\forall c > 0$
$\to$ giả sử sai hay $\frac{n^2}{2} \neq \omega\ (n^2)$ (đpcm)