ĐẠI HỌC QUỐC GIA THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ THÔNG TIN
VNUHCM - UIT

BÀI TẬP MÔN
PHÂN TÍCH VÀ THIẾT KẾ THUẬT TOÁN

by

Hoàng Quang Khải - 21520952
Lê Tuấn Vũ - 21521679
Nguyễn Nhật Minh - 21521135
Lê Tiến Quyết - 21520428

Faculty of Computer Science

Homework #01: Đánh giá thuật toán dùng kỹ thuật toán sơ cấp

GV hướng dẫn:
Huỳnh Thị Thanh Thương

TPHCM, March 9, 2023

1 Tính tổng hữu hạn

a) $1+3+5+7+\ldots+999 = \dfrac{n(2a_1+(n-1)d)}{2} = \dfrac{500\,(2+499.2)}{2} = 250000$

b) $2+4+8+16+\ldots+1024 = \dfrac{u_1(q^n-1)}{q-1} = \dfrac{2(2^{10}-1)}{2-1} = 2046$

c) $\displaystyle\sum_{i=3}^{n+1} 1 = n+1-3+1 = n-1$

d) $\displaystyle\sum_{i=3}^{n+1} i = \sum_{i=1}^{n+1} i - \sum_{i=1}^{2} i = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - 3 = \frac{1}{2}\left(n^2+3n-4\right)$

e)

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n-1} i(i+1) = \sum_{i=0}^{n-1}(i^2+i) = \sum_{i=0}^{n-1} i^2 + \sum_{i=0}^{n-1} i \\ = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)^2}{3}\end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} 3^{j+1} = 3\sum_{j=1}^{n} 3^j = 3\left(\sum_{j=0}^{n} 3^j - 3^0\right) = 3\left(\frac{3^{n+1}-1}{3-1} - 1\right) = \frac{3^{n+2}-9}{2} \\ = \frac{9}{2}(3^n-1)\end{aligned}$$

g) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} ij = \sum_{i=1}^{n} i\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n^2+n)^2}{4}$

h)

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{n} i\left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right) = \frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1} \\ = \frac{n}{n+1}\end{aligned}$$

i) $\displaystyle\sum_{j\in\{2,3,5\}} (j^2+j) = (2^2+2)+(3^2+3)+(5^2+5) = 48$

j)

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{100}(i+j) = 101\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{n}(i+j) = 101\sum_{i=1}^{m}\left[i(n+1)+\frac{n(n+1)}{2}\right]$$
$$= 101\left[\frac{m(n+1)(m+1)}{2}+\frac{mn(n+1)}{2}\right] = \frac{101}{2}m(n+1)(m+n+1)$$

2 Đếm số phép gán và so sánh

```
s ← 0;                                        /* 2g */
i ← 1;
while i ≤ n do
    j ← 1;                                    /* 1g; n+1 ss */
    while j ≤ i² do
        s ← s + 1 ;                           /* 2g */
        j ← j + 1;
    end
    i ← i + 1;                                /* 1g */
end
```

Gọi α_i là số lần lặp của vòng lặp **while** nhỏ với điều kiện $j \le i^2 \quad (\alpha_i \ge 1)$
Vì α_i là số con j mà j chạy từ $1 \to i^2$ với bước tăng là 1.
Do đó, α_i nhận các giá trị $\{1, 4, 9, \ldots, i^2\} \to \alpha_i = i^2$

Kết luận

$$\text{Gán}(n) = 2 + 2n + \sum_{i=1}^{n} 2\alpha_i = 2 + 2n + 2\sum_{i=1}^{n} i^2 = 2 + 2n + \frac{n(n+1)(2n+1)}{3}$$
$$= \frac{2n^3+3n^2+7n+6}{3}$$

$$\text{Sosánh}(n) = n + 1 + \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i + 1) = n + 1 + \sum_{i=1}^{n} i^2 + \sum_{i=1}^{n} 1$$
$$= 2n + 1 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2n^3+3n^2+13n+6}{6}$$

3 Đếm số phép gán và so sánh

```
s ← 0;                                   /* 2g */
i ← 1;
while i ≤ n do
    j ← n − i²;                          /* 1g; n+1 ss */
    while j ≤ i² do
        s ← s + ij ;                     /* 2g */
        j ← j + 1;
    end
    i ← i + 1;                           /* 1g */
end
```

Gọi α_i là số lần lặp của vòng lặp **while** nhỏ với điều kiện $j \leq i^2 \quad (\alpha_i \geq 1)$
Vì α_i là số con j mà j chạy từ $n - i^2 \to i^2$ với bước tăng là 1.
Do đó, α_i nhận các giá trị $\{n - i^2, \ldots, i^2\}$
$\Rightarrow \alpha_i = i^2 - (n - i^2) + 1 = 2i^2 - n + 1$
Với $\alpha_i \geq 1 \Leftrightarrow n - i^2 - i^2 \leq 0 \Rightarrow i \geq \left\lceil \sqrt{\frac{n}{2}} \right\rceil \quad (i \geq 1)$

Ta có:

$$\begin{aligned}
\text{Gán}(n) &= 2 + 2n + \sum_{i=1}^{n} 2\alpha_i = 2 + 2n + 2\sum_{i=1}^{n}(2i^2 - n + 1) \\
&= 2 + 2n + 2 \sum_{i=\left\lceil \sqrt{\frac{n}{2}} \right\rceil}^{n} (2i^2 - n + 1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Sosánh}(n) &= n + 1 + \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i + 1) = n + 1 + \sum_{i=1}^{n}\alpha_i + \sum_{i=1}^{n} 1 \\
&= 2n + 1 + \sum_{i=\left\lceil \sqrt{\frac{n}{2}} \right\rceil}^{n} (2i^2 - n + 1)
\end{aligned}$$

Đặt $t = \left\lceil \sqrt{\frac{n}{2}} \right\rceil$, ta được:

$$\sum_{i=\left\lceil \sqrt{\frac{n}{2}} \right\rceil}^{n} (2i^2 - n + 1) = \sum_{i=t}^{n}(2i^2 - n + 1) = \sum_{i=t}^{n}(-n+1) + 2\sum_{i=t}^{n} i^2$$
$$= (-n+1)(n-t+1) + 2\sum_{i=1}^{n} i^2 - 2\sum_{i=1}^{t-1} i^2$$
$$= (-n+1)(n-t+1) + \frac{n(n+1)(2n+1)}{3} - \frac{t(t-1)(2t-1)}{3}$$

Kết luận

$$\text{Gán}(n) = 2 + 2n + 2(-n+1)(n-t+1) + \frac{2}{3}[n(n+1)(2n+1) - t(t-1)(2t-1)]$$
$$= 4 + 2(-n+1)(n-t) + \frac{2}{3}[n(n+1)(2n+1) - t(t-1)(2t-1)]$$

$$\text{Sosánh}(n) = 2n + 1 + (-n+1)(n-t+1) + \frac{1}{3}[n(n+1)(2n+1) - t(t-1)(2t-1)]$$
$$= 2 + n + (-n+1)(n-t) + \frac{1}{3}[n(n+1)(2n+1) - t(t-1)(2t-1)]$$

Với $t = \left\lceil \sqrt{\frac{n}{2}} \right\rceil$

4 Đếm số phép gán và so sánh

```
float Function Alpha (float x, long n)
    long i ← 1;                              /* 2g */
    float z ← 0;
    while i ≤ n do
        long j ← 1;                          /* 2g; n+1 ss */
        float t ← 1;
        while j ≤ i do
            t ← tx;                          /* 2g */
            j ← 2j;
        end
        z ← z + it;                          /* 2g */
        i ← i + 1;
    end
    return z;
```

Gọi α_i là số lần lặp của vòng lặp **while** nhỏ với điều kiện $j \le i \quad (\alpha_i \ge 1)$
Vì α_i là số con j mà j chạy từ $1 \to i$ với tỉ lệ bước tăng là 2.
Và j nhận các giá trị $\{1, 2, 4, 8, 16, \ldots, 2^k\}$, $k \in \mathbb{N}$
Do đó: α_i là số phần tử của tập $\{k \in \mathbb{N} \mid 2^k \le i\} \Rightarrow 0 \le k \le \log_2 i$
$\Rightarrow \alpha_i = \lfloor \log_2 i \rfloor + 1$

Kết luận

$$\begin{aligned}
\text{Gán}(n) &= 2 + 4n + \sum_{i=1}^{n} 2\alpha_i = 2 + 4n + 2\sum_{i=1}^{n}(\lfloor \log_2 i \rfloor + 1) \\
&= 2 + 4n + 2\sum_{i=1}^{n}\lfloor \log_2 i \rfloor + 2\sum_{i=1}^{n} 1 = 2 + 6n + 2\sum_{i=1}^{n}\lfloor \log_2 i \rfloor
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Sosánh}(n) &= n + 1 + \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i + 1) = n + 1 + \sum_{i=1}^{n}\lfloor \log_2 i \rfloor + \sum_{i=1}^{n} 2 \\
&= 3n + 1 + \sum_{i=1}^{n}\lfloor \log_2 i \rfloor
\end{aligned}$$

5 Đếm số phép gán và so sánh

```
sum ← 0;                                  /* 2g */
i ← 1;
while i ≤ n do
    j ← n − i;                            /* 1g; n+1 ss */
    while j ≤ 2i do
        sum ← sum + ij;                   /* 2g */
        j ← j + 2;
    end
    k ← i;                                /* 1g */
    while k > 0 do
        sum ← sum + 1;                    /* 2g */
        k ← k/2;
    end
    i ← i + 1;                            /* 1g */
end
```

Gọi α_i là số lần lặp của vòng lặp **while** nhỏ với điều kiện $j \le 2i$.
Vì α_i là số con j mà j chạy từ $n - i \to 2i$ với bước tăng là 2.

Do đó:

$$\alpha_i \text{ là số phần tử của tập } \{n-i, n-i+2, \ldots, 2i\} = \frac{2i-(n-i)}{2}+1$$
$$= \frac{3i-n+2}{2}$$

Với $\alpha_i \geq 1 \Leftrightarrow n-i \leq 2i \Leftrightarrow i \geq \dfrac{n}{3}$.
Vậy:

$$\alpha_i = \begin{cases} 0, \quad i < \left\lceil \dfrac{n}{3} \right\rceil \\ \dfrac{3i-n+2}{2}, \quad i \geq \left\lceil \dfrac{n}{3} \right\rceil \end{cases}$$

Gọi β_i là số lần lặp của vòng lặp **while** nhỏ với điều kiện $k > 0$.
Vì β_i là số con j mà j chạy từ $i \to 1$ với tỉ lệ bước giảm là $\dfrac{1}{2}$.
Do đó:

$$\beta_i \text{ là số phần tử của tập } \left\{i, \frac{i}{2}, \frac{i}{4}, \ldots, \frac{i}{2^k} \mid k \in \mathbb{N}, \frac{i}{2^k} \geq 1\right\} \Rightarrow 0 \leq k \leq \lfloor \log_2 i \rfloor$$

Vậy:

$$\beta_i = \lfloor \log_2 i \rfloor + 1$$

Ta có

$$\text{Gán}(n) = 2 + 3n + \sum_{i=1}^{n} 2\alpha_i + \sum_{i=1}^{n} 2\beta_i$$
$$= 2 + 3n + \sum_{i=\lceil \frac{n}{3} \rceil}^{n} (3i-n+2) + 2\sum_{i=1}^{n} (\lfloor \log_2 i \rfloor + 1)$$
$$= 2 + 5n + \sum_{i=\lceil \frac{n}{3} \rceil}^{n} (3i-n+2) + 2\sum_{i=1}^{n} \lfloor \log_2 i \rfloor$$

$$
\begin{aligned}
\text{Sosánh}(n) &= n + 1 + \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i + 1) + \sum_{i=1}^{n}(\beta_i + 1) \\
&= n + 1 + \sum_{i=1}^{n}\alpha_i + \sum_{i=1}^{n}\beta_i + 2\sum_{i=1}^{n}1 \\
&= 3n + 1 + \frac{1}{2}\sum_{i=\lceil \frac{n}{3} \rceil}^{n}(3i - n + 2) + \sum_{i=1}^{n}(\lfloor \log_2 i \rfloor + 1) \\
&= 4n + 1 + \frac{1}{2}\sum_{i=\lceil \frac{n}{3} \rceil}^{n}(3i - n + 2) + \sum_{i=1}^{n}\lfloor \log_2 i \rfloor
\end{aligned}
$$

Đặt $t = \lceil \frac{n}{3} \rceil$, ta được:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=\lceil \frac{n}{3} \rceil}^{n}(3i - n + 2) &= \sum_{i=t}^{n}(-n + 2) + 3\sum_{i=t}^{n} i \\
&= (-n + 2)(n - t + 1) + \frac{3}{2}(n - t + 1)(n + t)
\end{aligned}
$$

Kết luận

$$
\begin{aligned}
\text{Gán}(n) &= 2 + 5n + (-n + 2)(n - t + 1) + \frac{3}{2}(n - t + 1)(n + t) + 2\sum_{i=1}^{n}\lfloor \log_2 i \rfloor \\
&= 4 + \frac{15}{2}n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}t(2n - 1) - \frac{3}{2}t^2 + 2\sum_{i=1}^{n}\lfloor \log_2 i \rfloor
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{Sosánh}(n) &= 4n + 1 + \frac{1}{2}(-n + 2)(n - t + 1) + \frac{3}{4}(n - t + 1)(n + t) + \sum_{i=1}^{n}\lfloor \log_2 i \rfloor \\
&= 2 + \frac{21}{4}n + \frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{4}t(2n - 1) - \frac{3}{4}t^2 + \sum_{i=1}^{n}\lfloor \log_2 i \rfloor
\end{aligned}
$$

6 Đếm số phép gán và so sánh

```
i ← 1;                                              /* 2g */
count ← 0;
while i ≤ 4n do
    x ← (n − i)(i − 3n);                            /* 3g; 4n+1 ss */
    y ← i − 2n;
    j ← 1;
    while j ≤ x do
        count ← count − 2;                          /* 2g */
        j ← j + 2;
    end
    if x > 0 then
        if y > 0 then
            count ← count + 1;                      /* 1g */
        end
    end
    i ← i + 1;                                      /* 1g */
end
```

Gọi α_i là số lần lặp của vòng lặp **while** nhỏ với điều kiện $j \leq x$.
Vì α_i là số con j mà j chạy từ $1 \to x$ với bước tăng là 2.
Do đó:

$$\alpha_i \text{ là số phần tử của tập } \{1, 3, 5, \ldots, x\} = \frac{x-1}{2} + 1 = \frac{x+1}{2} \approx \left\lceil \frac{x}{2} \right\rceil \approx \left\lceil \frac{(n-i)(i-3n)}{2} \right\rceil$$

Với $\alpha_i \geq 1 \Leftrightarrow n + 1 \leq i \leq 3n - 1$.

Vậy:

$$\alpha_i = \begin{cases} 0, & i \le n \text{ hoặc } i \ge 3n \\ \left\lceil \dfrac{(n-i)(i-3n)}{2} \right\rceil, & n+1 \le i \le 3n-1 \end{cases}$$

Ta có bảng xét dấu:

i	1		n		$2n$		$3n$		$4n$
$x = (n-i)(i-3n)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$y = i - 2n$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	

Kết luận

$$\begin{aligned} \text{Gán}(n) &= 2 + 4 \times 4n + \sum_{i=1}^{4n} 2\alpha_i + [3n - 1 - (2n+1) + 1] \\ &= 17n + 1 + 2\sum_{i=n+1}^{3n-1} \left\lceil \frac{(n-i)(i-3n)}{2} \right\rceil \\ &\approx 17n + 1 + \frac{1}{3}n(4n^2 - 1) = \frac{4}{3}n^3 + \frac{50}{3}n + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Sosánh}(n) &= 4n + 1 + \sum_{i=1}^{4n} (\alpha_i + 1) + 4n + [3n - 1 - (n+1) + 1] \\ &= 14n + \sum_{i=n+1}^{3n-1} \left\lceil \frac{(n-i)(i-3n)}{2} \right\rceil \\ &\approx 14n + \frac{1}{3}n(4n^2 - 1) = \frac{41}{3}n + \frac{4}{3}n^3 \end{aligned}$$

7 Đếm số phép gán và so sánh

```
i ← 1;                                   /* 2g */
count ← 0;
while i ≤ 4n do
    x ← (n − i)(i − 3n);                 /* 3g; 4n+1 ss */
    y ← i − 2n;
    j ← 1;
    while j ≤ x do
        if i ≥ 2y then
            count ← count − 2;           /* 1g */
        end
        j ← j + 1;                       /* 1g */
    end
    i ← i + 1;                           /* 1g */
end
```

Gọi α_i là số lần lặp của vòng lặp **while** nhỏ với điều kiện $j \leq x$.
Vì α_i là số con j mà j chạy từ $1 \to x$ với bước tăng là 1.
Do đó:

$$\alpha_i \text{ là số phần tử của tập } \{1, 2, 3, \ldots, x\} = x = (n-i)(i-3n)$$

Với $\alpha_i \geq 1 \Leftrightarrow n+1 \leq i \leq 3n-1$.
Vậy:

$$\alpha_i = \begin{cases} 0, & i \leq n \text{ hoặc } i \geq 3n \\ (n-i)(i-3n), & n+1 \leq i \leq 3n-1 \end{cases}$$

Ta có bảng xét dấu:

i	1		n		$2n$		$3n$		$4n$
$x = (n-i)(i-3n)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$y = i - 2n$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	

Để câu lệnh *count* ← *count* − 2 được thực hiện $\Leftrightarrow i \leq 2y \Leftrightarrow i \leq 2(i-2n)$
$\Leftrightarrow i \leq 4n \Rightarrow$ Câu lệnh luôn được thực hiện khi **while** $i \leq 4n$ thoả mãn.

Ta có

$$\text{Gán}(n) = 2 + 4 \times 4n + \sum_{i=1}^{4n} 2\alpha_i = 2 + 16n + 2\sum_{i=n+1}^{3n-1}(n-i)(i-3n)$$

$$\begin{aligned}\text{Sosánh}(n) &= 4n + 1 + \sum_{i=1}^{4n}(\alpha_i + 1) + \sum_{i=1}^{4n}\alpha_i \\ &= 8n + 1 + 2\sum_{i=n+1}^{3n-1}(n-i)(i-3n)\end{aligned}$$

Xét:

$$\begin{aligned}&\sum_{i=n+1}^{3n-1}(n-i)(i-3n) = \sum_{i=n+1}^{3n-1}(-3n^2 + 4ni - i^2) \\ &= -3n^2\sum_{i=n+1}^{3n-1}1 + 4n\sum_{i=n+1}^{3n-1}i - \sum_{i=n+1}^{3n-1}i^2 \\ &= -3n^2(2n-1) + 4n \times 2n(2n-1) - \sum_{i=1}^{3n-1}i^2 + \sum_{i=1}^{n}i^2 \\ &= 10n^3 - 5n^2 - \frac{3n(3n-1)(6n-1)}{6} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{4n^3 - n}{3}\end{aligned}$$

Kết luận

$$\text{Gán}(n) = 2 + 16n + \frac{2}{3}(4n^3 - n) = \frac{6 + 46n + 8n^3}{3}$$

$$\text{Sosánh}(n) = 1 + 8n + \frac{2}{3}(4n^3 - n) = \frac{3 + 22n + 8n^3}{3}$$

8 Đếm số phép gán và so sánh

```
i ← 1;                                        /* 2g */
count ← 0;
while i ≤ 3n do
    x ← 2n − i;                               /* 3g; 3n+1 ss */
    y ← i − n;
    j ← 1;
    while j ≤ x do
        if j ≥ n then
            count ← count − 1;                /* 1g */
        end
        j ← j + 1;                            /* 1g */
    end
    if y > 0 then
        if x > 0 then
            count ← count + 1;                /* 1g */
        end
    end
    i ← i + 1;                                /* 1g */
end
```

Gọi α_i là số lần lặp của vòng lặp **while** nhỏ với điều kiện $j \leq x$.
Vì α_i là số con j mà j chạy từ $1 \to x$ với bước tăng là 1.
Do đó:

$$\alpha_i \text{ là số phần tử của tập } \{1, 2, 3, \ldots, x\} = x = 2n - i$$

Với $\alpha_i \geq 1 \Leftrightarrow i \leq 2n - 1$.

Ta có bảng xét dấu:

i	1		n		$2n$		$3n$
$x = 2n - i$		$+$		$+$	0	$-$	
$y = i - n$		$-$	0	$+$		$+$	

Gọi β_i là số lần câu lệnh **if** $j \geq n$ thoả mãn.

$$\begin{aligned}\beta_i = \text{ số phần tử của tập hợp } \{n, n+1, \ldots, x\} &= x - n + 1 \\ &= 2n - i - n + 1 = n - i + 1\end{aligned}$$

Với $\beta_i \geq 1 \Leftrightarrow i \leq n$

Từ bảng xét dấu:

$$x > 0 \Leftrightarrow 1 \leq i \leq 2n - 1$$
$$y > 0 \Leftrightarrow n + 1 \leq i \leq 3n$$
$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow n + 1 \leq i \leq 2n - 1$$

Kết luận

$$\begin{aligned}\text{Gán}(n) &= 2 + 4 \times 3n + \sum_{i=1}^{3n} \beta_i + \sum_{i=1}^{3n} \alpha_i + [2n - 1 - (n+1) + 1] \\ &= 1 + 13n + \sum_{i=1}^{n} (n - i + 1) + \sum_{i=1}^{2n-1} (2n - i) \\ &= 1 + 13n + (n+1) \sum_{i=1}^{n} 1 - \sum_{i=1}^{n} i + 2n \sum_{i=1}^{2n-1} 1 - \sum_{i=1}^{2n-1} i \\ &= 1 + 13n + n(n+1) - \frac{n(n+1)}{2} + 2n(2n-1) - \frac{2n(2n-1)}{2} \\ &= \frac{5n^2 + 25n + 2}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Sosánh}(n) &= 3n + 1 + \sum_{i=1}^{3n} (\alpha_i + 1) + \sum_{i=1}^{3n} \alpha_i + 3n + [3n - (n+1) + 1] \\ &= 1 + 8n + \sum_{i=1}^{3n} 1 + 2 \sum_{i=1}^{3n} \alpha_i \\ &= 1 + 11n + 2 \sum_{i=1}^{2n-1} (2n - i) \\ &= 1 + 11n + 4n \sum_{i=1}^{2n-1} 1 - 2 \sum_{i=1}^{2n-1} i \\ &= 1 + 11n + 4n(2n-1) - 2 \times \frac{2n(2n-1)}{2} = 4n^2 + 9n + 1\end{aligned}$$

9 Đếm số phép gán và so sánh

```
i ← 1;                                  /* 2g */
res ← 0;
while i ≤ n do
    j ← 1;                              /* 2g; n+1 ss */
    k ← 1;
    while j ≤ i do
        res ← res + ij;                 /* 3g */
        k ← k + 2;
        j ← j + k;
    end
    i ← i + 1;                          /* 1g */
end
```

Gọi α_i là số lần lặp của vòng lặp **while** nhỏ với điều kiện $j \leq i$.
Vì α_i là số con j mà j chạy từ $1 \to i$ với bước tăng là một cấp số cộng với số hạng đầu là $u_1 = 3$ và công bội $d = 2$.
Do đó:

$$\alpha_i \text{ là số phần tử của tập } \{1, 4, 9, \ldots, i\} = \text{số phần tử của tập } \{m \in \mathbb{N}^* \mid m^2 \leq i\}$$

Vậy:

$$\alpha_i = \left\lfloor \sqrt{i} \right\rfloor$$

Kết luận

$$\begin{aligned}
\text{Gán}(n) &= 2 + 3n + \sum_{i=1}^{n} 3\alpha_i = 2 + 3n + 3\sum_{i=1}^{n} \left\lfloor \sqrt{i} \right\rfloor \\
&= 2 + 3n + \frac{1}{2} \left\lfloor \sqrt{n} \right\rfloor \left(-2 \left\lfloor \sqrt{n} \right\rfloor^2 - 3 \left\lfloor \sqrt{n} \right\rfloor + 6n + 5 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Sosánh}(n) &= n + 1 + \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + 1) = 2n + 1 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \\
&= 2n + 1 + \sum_{i=1}^{n} \left\lfloor \sqrt{i} \right\rfloor \\
&= 2n + 1 + \frac{1}{6} \left\lfloor \sqrt{n} \right\rfloor \left(-2 \left\lfloor \sqrt{n} \right\rfloor^2 - 3 \left\lfloor \sqrt{n} \right\rfloor + 6n + 5 \right)
\end{aligned}$$

10 Đếm số phép gán và so sánh

```
sum ← 0;                                                   /* 3g */
i ← 1;
idx ← −1;
while i ≤ n do
    j ← 1;                                        /* 1g; n+1 ss */
    while j ≤ n do
        if (i = j) AND (i + j = n + 1) then
            idx ← i;
        end
        sum ← sum + a[i][j];                      /* 2g; n+1 ss */
        j ← j + 1;
    end
    i ← i + 1;                                             /* 1g */
end
if idx ≠ −1 then
    sum ← sum − a[idx][idx];
end
```

Để gán $idx \leftarrow i$: $\begin{cases} i = j \\ i + j = n + 1 \end{cases} \Leftrightarrow 2i = n + 1 \Leftrightarrow n$ lẻ

Nhận xét:

TH 1: n lẻ $\rightarrow$ tồn tại duy nhất 1 trường hợp thoả mãn điều kiện để $idx \leftarrow i$, khi đó:

$$\text{Gán}(n) = 3 + 2n + (1 + 2n^2) + 1 = 2n^2 + 2n + 5$$
$$\text{Sosánh}(n) = n + 1 + n(n + 1) + 2n^2 + 1 = 3n^2 + 2n + 2$$

TH 2: n chẵn $\rightarrow$ không tồn tại trường hợp thoả mãn điều kiện $\Rightarrow idx \leftarrow -1$, khi đó:

$$\text{Gán}(n) = 3 + 2n + 2n^2$$
$$\text{Sosánh}(n) = n + 1 + n(n + 1) + 2n^2 + 1 = 3n^2 + 2n + 2$$

Kết luận

$$\text{Gán}(n) = \begin{cases} 2n^2 + 2n + 5, & n \text{ lẻ} \\ 2n^2 + 2n + 3, & n \text{ chẵn} \end{cases}$$

$$\text{Sosánh}(n) = 3n^2 + 2n + 2$$

11 Đếm và kiểm tra số phép gán, so sánh

```
i ← 1;
ret ← 0;
s ← 0;
while i ≤ n do
    j ← 1;
    s ← s + 1/i; // số thực
    while j ≤ s do
        ret ← ret + ij;
        j ← j + 1;
    end
    i ← i + 1;
end
```

11.1 Kỹ thuật toán sơ cấp

Gọi α_i là số lần lặp của vòng lặp **while** nhỏ với điều kiện $j \leq s$.
Vì α_i là số con j mà j chạy từ $1 \to s$ với bước tăng 1.
Mặt khác:

$$s \text{ nhận các giá trị } \left\{1, 1+\frac{1}{2}, \ldots, 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{i}\right\}$$

Do đó:

$$\alpha_i \text{ là số phần tử của tập } \{1, 2, 3, \ldots, s\} = s = \left\lfloor \sum_{x=1}^{i} \frac{1}{x} \right\rfloor$$

Kết luận

$$\begin{aligned}
\text{Gán}(n) &= 3 + 3n + \sum_{i=1}^{n} 2\alpha_i \\
&= 3 + 3n + 2\sum_{i=1}^{n} \left\lfloor \sum_{x=1}^{i} \frac{1}{x} \right\rfloor && (1) \\
&\approx 3 + 3n + 2\sum_{i=1}^{n} \lfloor \ln i + \gamma \rfloor \quad (\gamma \approx 0.5772) && (2)
\end{aligned}$$

$$\text{Sosánh}(n) = n + 1 + \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + 1) = 2n + 1 + \sum_{i=1}^{n} \left\lfloor \sum_{x=1}^{i} \frac{1}{x} \right\rfloor \tag{3}$$

$$\approx 2n + 1 + \sum_{i=1}^{n} \lfloor \ln i + \gamma \rfloor \quad (\gamma \approx 0.5772) \tag{4}$$

11.2 Kiểm tra bằng chương trình C++

```cpp
// The function counts the number of assignments and comparisons performed in the process based on n.
// The function takes three parameters: n (the upper limit), Assign (a vector to store the assignment counts), Compare (a vector to store the comparison counts).
void Function(int n, vector<int>& Assign, vector<int>& Compare){
    float i = 1, ret = 0, s = 0, j;
    int count_assign = 3, count_compare = 0;
    // Increment compare counter
    count_compare++;
    // Loop from 1 to n
    while (i <= n){
        count_compare++;
        // Initialize j
        j = 1;
        count_assign++;
        s = s + (1 / i);
        count_assign++;
        count_compare++;
        // Loop from 1 to s
        while (j <= s){
            count_compare++;
            ret = ret + i * j;
            count_assign++;
            // Increment j
            j = j + 1;
            count_assign++;
        }
        // Increment i
        i = i + 1;
        count_assign++;
    }
```

```cpp
    // Store assign counter in vector
    Assign.push_back(count_assign);
    // Store compare counter in vector
    Compare.push_back(count_compare);
}

int main(){
    int n;
    vector<int> Assign;
    vector<int> Compare;
    cout << "n\t\t";
    // Print values of n from 1 to 20
    for (int i = 1; i <= 20; i++) cout << i << "\t";
    // Call function for each value of n
    for (n = 1; n <= 20; n++) Function(n, Assign, Compare);
    cout << "\nGan(n)      ";
    // Print assign values for each n
    for (int i = 0; i < 20; i++) cout << Assign[i] << "\t";
    cout << "\nSosanh(n)   ";
    // Print compare values for each n
    for (int i = 0; i < 20; i++) cout << Compare[i] << "\t";
    return 0;
}
```

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Gan(n)	8	13	18	25	32	39	46	53	60	67
SoSanh(n)	4	7	10	14	18	22	26	30	34	38

Hình 1: Kết quả chạy chương trình với $n \in [1, 10]$

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
76	85	94	103	112	121	130	139	148	157
43	48	53	58	63	68	73	78	83	88

Hình 2: Kết quả chạy chương trình với $n \in [11, 20]$

Bảng 1: Bảng thống kê so sánh kết quả giữa công thức và chương trình

n	Gán(n) = (1)	Code	SS(n) = (3)	Code
1	8	8	4	4
2	13	13	7	7
3	18	18	10	10
4	25	25	14	14
5	32	32	18	18
6	39	39	22	22
7	46	46	26	26
8	53	53	30	30
9	60	60	34	34
10	67	67	38	38
11	76	76	43	43
12	85	85	48	48
13	94	94	53	53
14	103	103	58	58
15	112	112	63	63
16	121	121	68	68
17	130	130	73	73
18	139	139	78	78
19	148	148	83	83
20	157	157	88	88

12 Đếm và kiểm tra số phép gán, so sánh

```
i ← 1;
res ← 0;
while i ≤ n do
    j ← 1;
    while j ≤ i do
        res ← res + ij;
        j ← j + 1;
    end
    i ← i + 5;
end
```

12.1 Kỹ thuật toán sơ cấp

Đặt $i = 1 + 5k \Rightarrow 1 \leq 1 + 5k \leq n \Rightarrow 0 \leq k \leq \left\lfloor \dfrac{n-1}{5} \right\rfloor$

Khi đó số lần lặp vòng **while** ngoài chính là số giá trị k thoả mãn điều kiện trên.

$\Rightarrow$ số lần lặp vòng while ngoài $= \left\lfloor \dfrac{n-1}{5} \right\rfloor + 1$. Gọi α_i là số lần lặp của vòng lặp **while** nhỏ với điều kiện $j \leq i$.

Vì α_i là số con j mà j chạy từ $1 \to i$ với bước tăng 1.

Do đó:

$$\alpha_i \text{ là số phần tử của tập } \{1, 2, 3, \ldots, i\} = 1 + 5k$$

Kết luận

$$
\begin{aligned}
\text{Gán}(n) &= 2 + 2\left(\left\lfloor \frac{n-1}{5} \right\rfloor + 1\right) + \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{5} \right\rfloor} 2\alpha_i \\
&= 4 + 2\left\lfloor \frac{n-1}{5} \right\rfloor + 2\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{5} \right\rfloor} (1+5k) \\
&= 4 + 2\left\lfloor \frac{n-1}{5} \right\rfloor + 2\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{5} \right\rfloor} 1 + 10\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{5} \right\rfloor} k \\
&= 4 + 2\left\lfloor \frac{n-1}{5} \right\rfloor + 2\left(\left\lfloor \frac{n-1}{5} \right\rfloor + 1\right) + 5\left\lfloor \frac{n-1}{5} \right\rfloor \left(\left\lfloor \frac{n-1}{5} \right\rfloor + 1\right) \\
&= 6 + 9\left\lfloor \frac{n-1}{5} \right\rfloor + 5\left\lfloor \frac{n-1}{5} \right\rfloor^2 \qquad (5)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{Sosánh}(n) &= \left(\left\lfloor \frac{n-1}{5} \right\rfloor + 1\right) + 1 + \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{5} \right\rfloor} (\alpha_i + 1) \\
&= 2 + \left\lfloor \frac{n-1}{5} \right\rfloor + \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{5} \right\rfloor} 1 + \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{5} \right\rfloor} \alpha_i \\
&= 2 + \left\lfloor \frac{n-1}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-1}{5} \right\rfloor + 1 + \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{5} \right\rfloor} (1+5k) \\
&= 3 + 2\left\lfloor \frac{n-1}{5} \right\rfloor + \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{5} \right\rfloor} 1 + 5\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{5} \right\rfloor} k \\
&= 4 + \frac{11}{2}\left\lfloor \frac{n-1}{5} \right\rfloor + \frac{5}{2}\left\lfloor \frac{n-1}{5} \right\rfloor^2 \qquad (6)
\end{aligned}
$$

12.2 Kiểm tra bằng chương trình C++

```
// The function counts the number of assignments and comparisons performed in the process based on n.
// The function takes three parameters: n (the upper limit), Assign (a vector to store the assignment counts), Compare (a vector to store the comparison counts)
```

```
void Function(int n, vector<int> &Assign, vector<int> &Compare){
    // Initialize i to 1
    int i = 1, res = 0;
    // Initialize count_assign and count_compare to 2 and 1 respectively
    int count_assign = 2, count_compare = 1;
    // Loop from i to n with a step of 5
    while (i <= n){
        // Initialize j to 1
        int j = 1;
        // Increment count_assign by one
        count_assign++;
        // Increment count_compare by one
        count_compare++;
        // Loop from j to i with a step of one
        while (j <= i){
            res = res + i * j;
            // Increment j by one
            j = j + 1;
            // Increment count_assign by two
            count_assign += 2;
            // Increment count_compare by one
            count_compare++;
        }
        // Increment i by five
        i = i + 5;
        // Increment count_assign and count_compare by one
        count_assign++;
        count_compare++;
    }
    // Append the final value of count_assign to Assign vector
    Assign.push_back(count_assign);
    // Append the final value of count_compare to Compare vector
    Compare.push_back(count_compare);
}

int main(){
    // Declare an integer variable n
    int n;
```

```cpp
    // Declare a vector variable Assign
    vector<int> Assign;
    // Declare a vector variable Compare
    vector<int> Compare;
    cout << "n\t\t";
    // Print values of n from 1 to 20 separated by tabs
    for (int i = 1; i <= 20; i++) cout << i << "\t";
    // Call Function for each value of n from 1 to 20 and pass Assign and Compare vectors as arguments
    for (n = 1; n <= 20; n++) Function(n, Assign, Compare);
    cout << "\nGan(n)      ";
    // Print assign values for each n separated by tabs
    for (int i = 0; i < 20; i++) cout << Assign[i] << "\t";
    cout << "\nSosanh(n)   ";
    // Print compare values for each n separated by tabs
    for (int i = 0; i < 20; i++) cout << Compare[i] << "\t";
    return 0;
}
```

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Gan(n)	6	6	6	6	6	20	20	20	20	20
Sosanh(n)	4	4	4	4	4	12	12	12	12	12

Hình 3: Kết quả chạy chương trình với $n \in [1, 10]$

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
44	44	44	44	44	78	78	78	78	78
25	25	25	25	25	43	43	43	43	43

Hình 4: Kết quả chạy chương trình với $n \in [11, 20]$

Bảng 2: Bảng thống kê so sánh kết quả giữa công thức và chương trình

n	Gán(n) = (5)	Code	SS(n) = (6)	Code
1	6	6	4	4
2	6	6	4	4
3	6	6	4	4
4	6	6	4	4
5	6	6	4	4
6	20	20	12	12
7	20	20	12	12
8	20	20	12	12
9	20	20	12	12
10	20	20	12	12
11	44	44	25	25
12	44	44	25	25
13	44	44	25	25
14	44	44	25	25
15	44	44	25	25
16	78	78	43	43
17	78	78	43	43
18	78	78	43	43
19	78	78	43	43
20	78	78	43	43

13 Đếm và kiểm tra số phép gán, so sánh

```
sum ← 0;
i ← n;
while i > 0 do
    j ← i;
    while j > 0 do
        sum ← sum + 1;
        j ← j − 1;
    end
    i ← i ÷ 2;
end
```

13.1 Kỹ thuật toán sơ cấp

Đặt $i = \frac{n}{2^k} \Rightarrow 0 < i \leq n \Leftrightarrow 1 \leq \frac{n}{2^k} \leq n \Rightarrow 0 \leq k \leq \lfloor \log_2 n \rfloor$
Khi đó số lần lặp vòng **while** ngoài chính là số giá trị k thoả mãn điều kiện trên.
$\Rightarrow$ số lần lặp vòng while ngoài $= \lfloor \log_2 n \rfloor + 1$.
Gọi α_i là số lần lặp của vòng lặp **while** nhỏ với điều kiện $j \geq 0$.
Vì α_i là số con j mà j chạy từ i $\to$ 1 với bước giảm 1.
Do đó:

$$\alpha_i \text{ là số phần tử của tập } \{i, i-1, i-2, \ldots, 1\} = i = \left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor$$

Kết luận

$$\begin{aligned}
\text{Gán}(n) &= 2 + 2\left(\lfloor \log_2 n \rfloor + 1\right) + \sum_{k=0}^{\lfloor \log_2 n \rfloor} 2\alpha_i \\
&= 4 + 2\lfloor \log_2 n \rfloor + 2\sum_{k=0}^{\lfloor \log_2 n \rfloor} \alpha_i \\
&= 4 + 2\lfloor \log_2 n \rfloor + 2\sum_{k=0}^{\lfloor \log_2 n \rfloor} \left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor && (7) \\
&\approx 4 + 2\lfloor \log_2 n \rfloor + 4n - 2 = 2 + 4n + 2\lfloor \log_2 n \rfloor && (8)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\text{Sosánh}(n) &= (\lfloor \log_2 n \rfloor + 1) + 1 + \sum_{k=0}^{\lfloor \log_2 n \rfloor} (\alpha_i + 1) \\
&= 2 + \lfloor \log_2 n \rfloor + \sum_{k=0}^{\lfloor \log_2 n \rfloor} \alpha_i + \sum_{k=0}^{\lfloor \log_2 n \rfloor} 1 \\
&= 2 + \lfloor \log_2 n \rfloor + \lfloor \log_2 n \rfloor + 1 + \sum_{k=0}^{\lfloor \log_2 n \rfloor} \left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor \\
&= 3 + 2 \lfloor \log_2 n \rfloor + \sum_{k=0}^{\lfloor \log_2 n \rfloor} \left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor \qquad (9) \\
&\approx 3 + 2 \lfloor \log_2 n \rfloor + 2n - 1 = 2 + 2n + 2 \lfloor \log_2 n \rfloor \qquad (10)
\end{aligned}
$$

13.2 Kiểm tra bằng chương trình C++

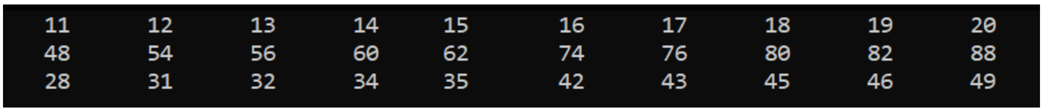
```cpp
// The function counts the number of assignments and comparisons performed in the process based on n.
// The function takes three parameters: n (the upper limit), Assign (a vector to store the assignment counts), Compare (a vector to store the comparison counts)
void Function(int n, vector<int> &Assign, vector<int> &Compare){
    int sum = 0;
    // Initialize i to n
    int i = n;
    // Initialize count_assign and count_compare to 2 and 1 respectively
    int count_assign = 2, count_compare = 1;
    // Loop from i to zero with a step of dividing by two
    while (i > 0){
        // Initialize j to i
        int j = i;
        count_assign++;
        count_compare++;
        // Loop from j to zero with a step of subtracting one
        while (j > 0){
            sum = sum + 1;
            j = j - 1;
```

```cpp
                count_assign += 2;
                count_compare += 1;
            }
            i = i / 2;
            count_assign++;
            count_compare++;
        }
        // Append the final value of count_assign to Assign vector
        Assign.push_back(count_assign);
        // Append the final value of count_compare to Compare vector
        Compare.push_back(count_compare);
}

int main(){
    // Declare an integer variable n
    int n;
    // Declare a vector variable Assign
    vector<int> Assign;
    // Declare a vector variable Compare
    vector<int> Compare;
    cout << "n\t\t";
    // Print values of n from 1 to 20 separated by tabs
    for (int i = 1; i <= 20; i++) cout << i << "\t";
    // Call Function for each value of n from 1 to 20 and pass Assign and Compare vectors as arguments
    for (n = 1; n <= 20; n++) Function(n, Assign, Compare);
    cout << "\nGan(n)      ";
    // Print assign values for each n separated by tabs
    for (int i = 0; i < 20; i++) cout << Assign[i] << "\t";
    cout << "\nSosanh(n)   ";
    // Print compare values for each n separated by tabs
    for (int i = 0; i < 20; i++) cout << Compare[i] << "\t";
    return 0;
}
```

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Gan(n)	6	12	14	22	24	28	30	40	42	46
Sosanh(n)	4	8	9	14	15	17	18	24	25	27

Hình 5: Kết quả chạy chương trình với $n \in [1, 10]$



Hình 6: Kết quả chạy chương trình với $n \in [11, 20]$

Bảng 3: Bảng thống kê so sánh kết quả giữa công thức và chương trình

n	Gán(n) = (7)	Code	SS(n) = (9)	Code
1	6	6	4	4
2	12	12	8	8
3	14	14	9	9
4	22	22	14	14
5	24	24	15	15
6	28	28	17	17
7	30	30	18	18
8	40	40	24	24
9	42	42	25	25
10	46	46	27	27
11	48	48	28	28
12	54	54	31	31
13	56	56	32	32
14	60	60	34	34
15	62	62	35	35
16	74	74	42	42
17	76	76	43	43
18	80	80	45	45
19	82	82	46	46
20	88	88	49	49