**NỘI DUNG CHÍNH**

1. **Lời nói đầu:**

Xác suất và thống kê có mối liên quan mật thiết. Xác suất được sử dụng như một công cụ, cho phép ta đánh giá độ tin cậy của kết luận về tổng thể khi chỉ có thông tin mẫu.

1. **Không gian mẫu, biến cố:**
   1. ***Định nghĩa:***[[1]](#footnote-1),[[2]](#footnote-2)

\* Trong lý thuyết xác suất, một thí nghiệm, ***experiment***, là một quy trình hay một phép đo thu được một quan sát hoặc thu được một kết quả đầu ra, ***outcome***, không được dự đoán chắc chắn, ***certainty***.

*Ví dụ 1.1 - Phép thử:* Ghi lại điểm kiểm tra; Đo lượng mưa hàng ngày; Phỏng vấn người dân để lấy ý kiến ​​về một sắc lệnh; Kiểm tra sản phẩm được sản xuất ra để xác định xem đó có phải là sản phẩm lỗi hay sản phẩm chấp nhận được; Tung đồng xu và quan sát mặt xuất hiện.

\* Khi thực hiện một thí nghiệm, điều chúng ta quan sát được là một kết quả được gọi là sự kiện đơn giản, ***simple event***, ký hiệu là Ei.

|  |  |
| --- | --- |
| *Ví dụ 1.2 - Sự kiện đơn giản:* Gọi Ei là sự kiện đơn giản xuất hiện mặt thứ i khi tung hột xí ngầu gồm 6 mặt, i=(1,...,6). Ta có: E1 là sự kiện xuất hiện 1 mặt có 1 chấm,..., E6 là sự kiện xuất hiện 1 mặt có 6 chấm. | d:\DataCenter\CN_NXH_DuLieuRieng\HocTap\HCM_DHBK\HocPhan\MathematicalFoundations\BaiTapLon\HinhAnh\Hinh_001_Die.JPG |

\* Biến cố, ***event***, là một tập hợp các sự kiện đơn giản.

*Ví dụ 1.3 - Biến cố:* A={E1,E3,E5} là biến cố quan sát có một số lẻ. B={E1,E2,E3} là biến cố quan sát có một số nhỏ hơn 4. C={E2,E4,E6} là biến cố quan sát có một số chẵn.

\* Hai biến cố được gọi là biến cố loại trừ lẫn nhau, ***mutually exclusive events***, nếu cả hai không thể xảy ra cùng lúc.

*Ví dụ 1.4 - Biến cố loại trừ:* Biến cố A và C loại trừ lẫn nhau.

\* Không gian mẫu, ***sample space***, là tập hợp tất cả các sự kiện đơn giản, ***simple event***, hay tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra đã được biết từ một thí nghiệm, ký hiệu là S. Biến cố là một tập hợp con của không gian mẫu.

*Ví dụ 1.5 - Không gian mẫu:* S={E1,E2,E3,E4,E5,E6}.

* 1. ***Các quan hệ giữa các biến cố:***[[3]](#footnote-3)

\* Phần bù, ***complements***, của một biến cố là tập hợp các kết quả không nằm trong biến cố đó.

\* Các biến cố loại trừ lẫn nhau, ***Mutually exclusive events***, là các biến cố không thể xảy ra đồng thời.

\* Các công cụ như Biểu đồ Venn, ***Venn diagram***, Sơ đồ cây, ***tree diagram***, và Bảng xác suất, ***probability table***, có thể được sử dụng để biểu diễn không gian mẫu và các biến cố.

1. **Tổng quan về xác suất:**
   1. ***Định nghĩa về xác suất:***[[4]](#footnote-4)

Giả định rằng một thí nghiệm được lặp đi lặp lại nhiều lần dưới điều kiện giống hệt nhau và tần suất tương đối, ***relative frequency***, của một biến cố là tỷ lệ số lần biến cố đó xảy ra.

* 1. ***Ba tiền đề của xác suất:***[[5]](#footnote-5)

\* Mỗi xác suất của một sự kiện đơn giản nằm giữa 0 và 1 (bao gồm 0 và 1).

0 ≤ P(E) ≤ 1

\* Tổng xác suất của tất cả các sự kiện đơn giản trong không gian mẫu bằng 1.

P(S) = 1

\* Với bất kỳ biến cố loại trừ E1, E2, ... và Ei.Ej ≠ ∅ (i≠j) ta được:

(1)

* 1. ***Mối quan hệ biến cố và Quy luật xác suất:***[[6]](#footnote-6)

\* Hợp, ***union***, của hai biến cố A và B, ký hiệu là A ∪ B, là biến cố A hoặc B hoặc cả hai xảy ra. Xác suất (công thức cộng):

(2) P(A ∪ B) = P(A) + P(B) - P(A ∩ B)

Đặc biệt, nếu A và B loại trừ nhau, ***mutually exclusive*** hay ***disjoint***, xác suất:

(3) P(A ∪ B) = P(A) + P(B) vì P(A ∩ B) = 0

\* Phần bù, ***complement***, của biến cố A, ký hiệu là Ac, là biến cố A không xảy ra.

(4) P(Ac) = 1 - P(A)

\* Giao, ***intersection***, của hai biến cố A và B, ký hiệu là A ∩ B, là cả biến cố A và B xảy ra.

* 1. ***Các biến cố độc lập:***[[7]](#footnote-7)

Hai biến cố A và B được coi là "độc lập", ***independent events***, nếu việc xảy ra của biến cố A không ảnh hưởng đến xác suất xảy ra của biến cố B. Nếu hai biến cố không độc lập, chúng được gọi là "phụ thuộc", ***dependent***. Khái niệm biến cố độc lập có liên quan chặt chẽ với xác suất có điều kiện.

* 1. ***Xác suất có điều kiện và công thức nhân xác suất:***[[8]](#footnote-8)
     1. *Xác suất có điều kiện:*

Xác suất biến cố A tìm được khi biến cố B xảy ra được gọi là xác suất có điều kiện, ***conditional probability***, của A, ký hiệu ***P(A|B)*** với điều kiện ***P(B) > 0***.

Khái niệm xác suất có điều kiện rất quan trọng khi chúng ta quan tâm đến việc tính toán xác suất khi có sẵn một số thông tin bộ phận liên quan đến kết quả của một thí nghiệm. Ngay cả khi không có thông tin bộ phận nào, xác suất có điều kiện vẫn có thể giúp tính toán các xác suất mong muốn dễ dàng hơn.

* + 1. *Công thức nhân xác suất tổng quát:*

Công thức nhân xác suất, ***Multiplication rule***, liên quan đến xác suất đồng thời của hai hoặc nhiều biến cố và thường được sử dụng cùng với xác suất có điều kiện và được xác định như sau:

(5) P(A ∩ B) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)

Từ công thức nhân xác suất tổng quát, ta suy ra công thức tính xác suất có điều kiện:

(6) P(A|B) = P(A ∩ B) / P(B) với P(B) > 0

hay P(B|A) = P(A ∩ B) / P(A) với P(A) > 0

* + 1. *Công thức nhân xác suất cho các biến cố độc lập:*

Nếu biến cố A và B độc lập thì:

(7) P(B|A) = P(B) hay P(A|B) = P(A)

(8) P(A ∩ B) = P(A)P(B)

Nếu biến cố A, B, C là các biến cố loại trừ lẫn nhau (hay độc lập từng đôi một) thì:

(9) P(A ∩ B ∩ C) = P(A)P(B)P(C)

* 1. ***Công thức xác suất đầy đủ và công thức Bayes:***[[9]](#footnote-9)
     1. *Công thức xác suất đầy đủ, Law of total probability:*

Cho tập các sự kiện giản đơn S1, S2,...,Sk loại trừ lẫn nhau và đầy đủ, xác suất của một biến cố A được xác định như sau:

(10) P(A) = P(S1)P(A|S1) + P(S2)P(A|S2) +...+ P(Sk)P(A|Sk)

* + 1. *Công thức Bayes:*

Công thức Bayes, ***Bayes's rule*** hoặc ***Bayes’s formula***, là một công thức quan trọng trong xác suất. Công thức này cho phép tính toán xác suất hậu nghiệm, ***posterior probabilities***, dựa trên xác suất tiên nghiệm, ***prior probabilities***, và xác suất có điều kiện. Cụ thể, với k tập sự kiện đơn giản S1, S2,..., Sk loại trừ lẫn nhau và đầy đủ với xác suất tiên nghiệm P(S1), P(S2),..., P(Sk), nếu biến cố A xảy ra, xác suất hậu nghiệm có điều kiện của Si được xác định như sau:

(11) với i=1,2,...,k

1. **Biến ngẫu nhiên và Phân phối Xác suất:** 
   1. ***Biến ngẫu nhiên:***[[10]](#footnote-10)

Biến ngẫu nhiên, ***Random variable***, x có giá trị được giả định là thu được tương ứng với kết quả của một phép thử, là một cơ hội hoặc sự kiện ngẫu nhiên. Ví dụ như số sản phẩm lỗi trên số sản phẩm được chọn ngẫu nhiên.... Biến ngẫu nhiên là một khái niệm trung tâm trong lý thuyết xác suất. Các biến ngẫu nhiên có thể là rời rạc hoặc liên tục, ***Random continuous variable***.

* 1. ***Biến ngẫu nhiên rời rạc:***
     1. *Định nghĩa:[[11]](#footnote-11),[[12]](#footnote-12)*

Một biến ngẫu nhiên rời rạc, ***Random discreted variable***, chỉ có thể nhận một giá trị (hay không gian của chính nó) là hữu hạn hoặc đếm được.

* + 1. *Tính chất phân phối xác suất:[[13]](#footnote-13)*

Phân phối xác suất, ***probability distribution***, đối với một biến ngẫu nhiên rời rạc có thể là hàm xác suất (***probability mass function*** - ***PMF***), bảng phân phối xác suất (***probability distribution table*** - ***PMT***) hay đồ thị biểu diễn hoặc đưa ra các giá trị có thể của x và xác suất tương ứng p(x). Tính chất của phân phối xác suất cho biến ngẫu nhiên rời rạc gồm có:

\* Xác suất cho mỗi giá trị nằm giữa 0 và 1:

0 ≤ p(x) ≤ 1

\* Tổng xác suất của tất cả các giá trị có thể bằng 1:

∑p(x) = 1

* + 1. *Các tham số đặc trưng:[[14]](#footnote-14)*

\* Giá trị kỳ vọng, ***expected value***, hay trung bình, ***mean***, của x được xác định:

(12) μ = E(x) = ∑xp(x)

\* Phương sai, ***variance (Var)***, của x được xác định:

(13) σ2 = E[(x - μ)2] = ∑(x - μ)2p(x)

\* Độ lệch chuẩn, ***standard deviation (SD)***, của x là .

* + 1. *Một số phân phối xác suất phổ biến:[[15]](#footnote-15)*

\* Phân phối Bernoulli: Mô hình kết quả của một thử nghiệm hay phép thử duy nhất chỉ có hai kết quả (thành công hoặc thất bại). Biến ngẫu nhiên X=1 khi kết quả thành công và X=0 khi kết quả thất bại. Ta có hàm phân phối xác suất (***PMF***):

(14) p(0) = P{X = 0} = 1 - p = q và p(1) = P{X = 1} = p

với 0 ≤ p ≤ 1 là xác suất phép thử thành công.

Biến ngẩu nhiên X được gọi là biến ngẫu nhiên Bernoulli nếu PMF được cho bởi phương trình (14) với p ∈ (0,1).

\* Nhị thức Binomial: Giả định rằng có n phép thử độc lập mà kết quả thành công có xác suất là p, thất bại là 1-p. Nếu X đại diện cho số lần thành công xuất hiện trong n phép thử, khi đó, X là biến ngẫu nhiên nhị thức Binomial với các tham số (n,p). Trường hợp đặc biệt, biến ngẫu nhiên Bernoulli có tham số là (1,p). Hàm xác suất của biến ngẫu nhiên nhị thức X~(n,p) được xác định như sau:

(15) với i=0,1,...,n

|  |  |
| --- | --- |
| Kỳ vọng (trung bình) (Mean):  (16) E[X] = np | Phương sai (Var):  (17) Var(X) = np(1 - p) |

Tính toán hàm phần phối nhị thức:

(18) với i=0,1,...,n

Mối quan hệ giữa P{X = k + 1} và P{X = k} là:

(19)

\* Phân phối Poisson: Cho biến ngẫu nhiên X={0,1,2,...} được gọi là biến ngẫu nhiên Poisson với tham số λ > 0 sao cho xác suất:

(19)

Phương trình trên được xác định dựa vào phương trình sau:

(20) =

Biến ngẫu nhiên Poisson có thể được sử dụng như một phép biến đổi gần đúng cho biến ngẫu nhiên nhị thức có tham số (n, p) khi n lớn và p đủ nhỏ để np có kích thước vừa phải. Cụ thể, giả sử X là biến ngẫu nhiên nhị thức có tham số (n,p) và đặt λ = np, ta chứng minh được công thức gần đúng:

(21)

|  |  |
| --- | --- |
| Kỳ vọng (trung bình) (Mean):  (22) E[X] = λ | Phương sai (Var):  (23) Var(X) = E[X2] − (E[X])2 = λ |

Với E[X2] = λ(λ + 1)

Tính toán hàm phần phối Poisson:

Ứng dụng công thức gần đúng khi n lớn và các biến cố không độc lập, gọi Ei (i=1,...,n) là biến cố thành công trong lần thử i, ta được:

(24) P{Ei} = 1 / n và P{Ei|Ej} = 1 / (n - 1) với i≠j

Mô hình Poisson: Giả định n biến cố, pi là xác suất biến cố i xảy ra (i=1,...,n), nếu tất cả pi nhỏ và các phép thử độc lập hoặc phần lớn phụ thuộc yếu, thì số lượng biến cố xảy ra này xấp sỉ phân phối Poisson với kỳ vọng (trung bình) là .

Mối quan hệ giữa xác suất P{X = i + 1} và P{X = i} được xác định bởi công thức:

(25)

\* Phân phối dạng hình học (Geometric): Gọi X là số phép thử thành công trong n phép thử với xác suất thành công là p (0 < p < 1), ta được:

(26) P{X = n} = p(1 - p)n-1 với n=1,2,...

|  |  |
| --- | --- |
| Kỳ vọng (trung bình) (Mean):  (27) E[X] = 1 / p | Phương sai (Var):  (28) Var(X) = (1 - p) / p2 |

\* Phân phối nhị thức nghịch (Negative Binomial): Gọi X là số phép thử thành công trong n phép thử với xác suất thành công là p (0 < p < 1), r là tổng tích luỹ số lần thành công ta được:

(29) với n = r, r+1,...

|  |  |
| --- | --- |
| Kỳ vọng (trung bình) (Mean):  (30) E[X] = r / p | Phương sai (Var):  (31) Var(X) = r(1 - p) / p2 |

Với

\* Phân phối Siêu bội (Hypergeometric): Mô tả số lần thành công trong một mẫu cỡ n được chọn từ một quần thể hữu hạn N chứa M thành công và (N - M) thất bại, ta có công thức xác suất như sau:

(32) với i = 0,1,...,n.

|  |  |
| --- | --- |
| Kỳ vọng (trung bình) (Mean):  (33) E[X] = np | Phương sai (Var):  (34) Var(X) ≈ np(1 - p) |

Với p = M / N

\* Phân phối Zeta (Zipf): Hàm xác suất:

(35) với k = 1,2,... và

* 1. ***Biến ngẫu nhiên liên tục:***
     1. *Khái niệm:[[16]](#footnote-16)*

Một biến liên tục có thể nhận vô số giá trị tương ứng với các điểm trên một khoảng tuyến tính.

* + 1. *Hàm phân phối tích luỹ:*[[17]](#footnote-17)

Hàm phân phối tích lũy, ***cumulative distribution function*** (***CDF***), của một biến ngẫu nhiên liên tục, ký hiệu là FX(x), là một hàm liên tục ∀x∈R. Ta có các đính lý sau:

Định lý 1: Các tính chất của hàm phân phối tích luỹ F(x):

\* Hàm FX(x) là hàm không giảm: Nếu a < b thì F(a) ≤ F(b)

\* Giới hạn dưới (bên trái) của FX(x) là 0:

\* Giới hạn trên (bên phải) của FX(x) là 1:

\* FX(x) liên tục bên phải:

Định lý 2: Nếu a < b thì

P[a < X ≤ b] = FX(b) - FX(a)

Định lý 3: ∀x∈R và thì

P[X = x] = FX(x) - FX(x⎯)

* + 1. *Tính chất phân phối xác suất:[[18]](#footnote-18)*

X là biến ngẫu nhiên liên tục, nếu tồn tại một hàm f(x) không âm, được xác định với mọi số thực x ∈ (−∞,+∞) và có tính chất đối với bất kỳ tập hợp các số thực B như sau:

(36)

Trong đó f(x) là hàm mật độ xác suất, ***probability density function (PDF)***.

Từ công thức (36) ta xét các trường hợp phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên liên tục như sau:

Trường hợp, B=[a,b] ta được:

(37)

Có thể ứng dụng công thức (37) để tính xác suất gần đúng của biến ngẫu nhiên gần một giá trị xác định cho trước a. Chẳng hạn, với ε nhỏ và hàm f liên tục tại x=a, ta tính được P(X) như sau:

(38)

Trường hợp, B=[a,a] ta được:

(39)

Trường hợp, B=[-∞,a] ta được:

(40)

Trường hợp, B=[-∞,+∞] ta được:

(41)

* + 1. *Các tham số đặc trưng:*

Kỳ vọng (trung bình) (Mean):

(42)

* + 1. *Một số phân phối xác suất phổ biến:[[19]](#footnote-19)*

\* Phân phối đều (Uniform):

Biến ngẫu nhiên có phân phối đều trên khoảng (0,1) có hàm mật độ (PDF) như sau:

(43)

Trường hợp tổng quát x ∈ (α,β) thì hàm mật độ có dạng:

(44)

|  |  |
| --- | --- |
| Kỳ vọng (trung bình) (Mean):  (45) E[X] = (β + α) / 2 | Phương sai (Var):  (46) Var(X) = (β - α)2 / 12 |

\* Phân phối chuẩn (Normal) hay Gaussian:

Biến ngẫu nhiên X là phân phối chuẩn với tham số kỳ vọng μ và phương sai σ² có hàm mật độ xác suất là:

(47) với -∞ < x < +∞

Phân phối chuẩn là một trong những phân phối quan trọng nhất, thường mô tả các biến ngẫu nhiên là kết quả của nhiều yếu tố ngẫu nhiên độc lập. Hàm mật độ có dạng hình chuông đặc trưng bởi hai tham số: kỳ vọng μ và phương sai σ².

\* Phân phối Chuẩn tắc (Standard Normal):

Biến ngẫu nhiên x được chuẩn hoá bởi giá trị của độ lệch chuẩn nằm bên trái hoặc bên phải của giá trị trung bình μ. Ta có thể tính xác suất cho biến ngẫu nhiên chuẩn bằng cách chuẩn hóa thành biến chuẩn tắc: z = (x - μ) / σ hay x = μ + zσ

Tính chất của biến chuẩn tắc:

+ x < μ => z < 0.

+ x > μ => z > 0.

+ x = μ => z = 0.

\* Phân phối Chuẩn gần đúng với phân phối xác suất nhị thức:

Định lý giới hạn DeMoivre–Laplace:

Nếu Xn biểu thị số lần thành công xảy ra trong n lần thử độc lập được thực hiện, mỗi lần thử thành công có xác suất p, thì với bất kỳ a < b, ta được:

(48) (n→∞)

Phân phối xác suất của X gần đúng với đường cong phân phối chuẩn:

μ = np và

\* Phân phối mũ (Exponential):

Một biến ngẫu nhiên có phân phối mũ với hàm mật độ xác suất (PDF) như sau:

(49) với tham số λ > 0

Hàm phân phối tích luỹ (CDF) F(a) có dạng:

(50) F(a) = P{X ≤ a} = 1 - e-λa với a ≥ 0

|  |  |
| --- | --- |
| Kỳ vọng (trung bình) (Mean):  (51) | Phương sai (Var):  (52) Var(X) = 1 / λ2 |

* 1. ***Các định lý về giới hạn:***[[20]](#footnote-20)
     1. *Bất đẳng thức Markov’s:*

Nếu X là một biến ngẫu nhiên có giá trị không âm thì ta có công thức xác suất:

(53) P{X ≥ a} ≤ E[X] / a với a > 0

* + 1. *Bất đẳng thức Chebyshev’s:*

Nếu X là một biến ngẫu nhiên có giá trị trung bình μ và phương sai σ² là hữu hạn thì với mọi k > 0 ta có công thức xác suất:

(54) P{|X - μ| ≥ k} ≤ σ² / k²

Hệ quả: nếu Var(X) = 0 thì P{X = E[X]} = 1

* + 1. *Luật số lớn yếu, the weak law of large numbers:*

Cho X1,X2,... là một dãy các biến ngẫu nhiên độc lập và phân phối giống hệt nhau, mỗi biến có trung bình hữu hạn E[Xi] = μ. Khi đó, với bất kỳ ε > 0, ta được:

(55) (n→∞)

* + 1. *Định lý giới hạn trung tâm, the central limit theorem:*

Cho X1,X2,... là một dãy các biến ngẫu nhiên độc lập và có phân phối giống hệt nhau, mỗi biến có trung bình μ và phương sai σ2. Khi đó phân phối của

sẽ hướng đến phân phối chuẩn tắc vì n→∞. Nghĩa là, với -∞ < a < +∞ thì

(56) (n→∞)

Trường hợp Xi giới hạn đều và tồn tại M sao cho P{|Xi| < M}=1 ∀i, và khi đó:

(57) (n→∞)

* + 1. *Luật số lớn mạnh, the strong law of large numbers:*

Cho X1,X2,... là một dãy các biến ngẫu nhiên độc lập và phân phối giống hệt nhau, mỗi biến có trung bình hữu hạn E[Xi] = μ. Khi đó, với xác suất là 1, ta được:

(n→∞)

Áp dụng luật số lớn mạnh, giả sử E là một biến cố cố định của thí nghiệm, P(E) là xác suất E xảy ra trong lần thử nghiệm bất kỳ. Đặt:

Theo Luật số lớn mạnh thì với xác suất là 1, ta được:

(58)

1. **Phân phối xác suất đa biến:**
   1. ***Phân phối xác suất của hai biến ngẫu nhiên:[[21]](#footnote-21)***
      1. *Định nghĩa véc tơ ngẫu nhiên:*

Cho một phép thử ngẫu nhiên với không gian mẫu S và hai biến ngẫu nhiên X1, X2, với mỗi phần tử s ∈ S sao cho X1(s) = x1 và X2(s) = x2 khi đó (X1,X2) là một véc tơ ngẫu nghiên, ***random vertor***. Không gian của (X1,X2) là một tập:

D={(x1, x2) : x1 = X1(s), x2 = X2(s), s ∈ S}

* + 1. *Phân phối xác suất:*

Với hàm phân phối xác suất tích luỹ (CDF) có dạng:

(59) ∀(x1,x2)∈R2

Với các tập có dạng (a1,b1]×(a2,b2] thì CDF trở thành hàm hàm phân phối xác suất tích luỹ chung, ***joint cumulative distribution function***, của (X1,X2) có dạng:

(60)

Trường hợp (X1,X2) là véc tơ ngẫu nhiên rời rạc, ***discrete random vector***, thì X1, X2 là biến ngẫu nhiên rời rạc và không gian S là hữu hạn hay đếm được. Và hàm xác suất chung, ***joint probability mass function***, được xác định:

(61) ∀(x1,x2)∈S

* + 1. *Tham số:*

Kỳ vọng: giả định rằng Y = g(X1,X2) với g:R2→R:

Trường hợp (X1,X2) là véc tơ ngẫu nhiên rời rạc, luôn tồn tại:

(62)

Trường hợp (X1,X2) là véc tơ ngẫu nhiên liên tục, luôn tồn tại:

(63)

* + 1. *Hàm tạo sinh động lượng:*

Đặt X = (X1,X2)’ là véc tơ ngẫu nhiên. Nếu tồn tại với |t1|<h1 và |t2|<h2 (h1,h2>0), ta gọi là Hàm tạo sinh động lượng, ***moment generating function***, của X. Đặt t = (t1,t2)’ ta được:

(64)

Kỳ vọng:

(65)

* + 1. *Định lý:*

Với (X1,X2) là véc tơ ngẫu nhiên, Y1 = g1(X1,X2) và Y2 = g2(X1,X2), k1,k2∈R, ta được:

(66) E(k1Y1 + k2Y2) = k1E(Y1) + k2E(Y2)

Với (X1,X2) là véc tơ ngẫu nhiên và Var(X2) là hữu hạn, ta được:

(67) E[E(X2|X1)] = E(X2)

(68) Var[E(X2|X1)] ≤ Var(X2)

* 1. ***Hiệp phương sai và hệ số tương quan:***

Cho hai biến ngẫu nhiên X và Y có hàm phân phối xác suất chung là f(x,y). Nếu u(x,y) là hàm theo x và y thì E[u(X,Y)] được xác định tồn tại.

Giả định các giá trị trung bình của X, Y là μ1, μ2 luôn tồn tại, có được từ hàm u(x,y) và phương sai của X, Y là σ12, σ22 tồn tại từ việc đặt u(x,y) bằng (x - μ1)2 và (x - μ2)2. Ta có kỳ vọng toán:

(69) E[(X - μ1)(Y - μ2)] = E(XY) - μ1μ2

Gọi Corr(X,Y) là hệ số tương quan, ***Correlation coefficient***, và Cov(X,Y) là hiệp phương sai, ***Covariance***, ta được:

(70)

Từ phương trình (69),(70) ta được:

(72) E(XY) = μ1μ2 + Corr(X,Y)σ1σ2 = μ1μ2 + Cov(X,Y)

Định lý: Nếu E(Y|X) là tuyến tính theo X thì

(73)

(74)

1. Mục 4.2. “Introduction to Probability and Statistics”. [↑](#footnote-ref-1)
2. Mục 2.2. “A first course in probability”. [↑](#footnote-ref-2)
3. Mục 4.2. “Introduction to Probability and Statistics”. [↑](#footnote-ref-3)
4. Mục 4.3. “Introduction to Probability and Statistics”. [↑](#footnote-ref-4)
5. Mục 2.3. “A first course in probability”. [↑](#footnote-ref-5)
6. Mục 4.5. “Introduction to Probability and Statistics”. [↑](#footnote-ref-6)
7. Mục 4.6. “Introduction to Probability and Statistics”. [↑](#footnote-ref-7)
8. Mục 4.6. “Introduction to Probability and Statistics”. [↑](#footnote-ref-8)
9. Mục 4.7. “Introduction to Probability and Statistics”. [↑](#footnote-ref-9)
10. Mục 4.8. “Introduction to Probability and Statistics”. [↑](#footnote-ref-10)
11. Mục 1.2. “Introduction to Probability and Statistics”. [↑](#footnote-ref-11)
12. Mục 1.6.1. “Introduction to Mathematical Statictics”. [↑](#footnote-ref-12)
13. Mục 4.8. “Introduction to Probability and Statistics”. [↑](#footnote-ref-13)
14. Mục 4.8. “Introduction to Probability and Statistics”. [↑](#footnote-ref-14)
15. Mục 4.6, 4.7 và 4.8. “A first course in probability”. [↑](#footnote-ref-15)
16. Mục 1.2. “Introduction to Probability and Statistics”. [↑](#footnote-ref-16)
17. Mục 1.5. “Introduction to Mathematical Statictics”. [↑](#footnote-ref-17)
18. Mục 5.1. “A first course in probability”. [↑](#footnote-ref-18)
19. Mục 5.3, 5.4 và 5.5. “A first course in probability”. [↑](#footnote-ref-19)
20. Mục 8.2, 8.3 và 8.4. “A first course in probability”. [↑](#footnote-ref-20)
21. Mục 2.1. “Introduction to Mathematical Statistics”. [↑](#footnote-ref-21)