

B1. Linear Algebra

Bổ sung thêm cho bài giảng

2019

Nội dung bổ sung



1. Vector
2. Ma trận
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Định thức
5. Ma trận thưa

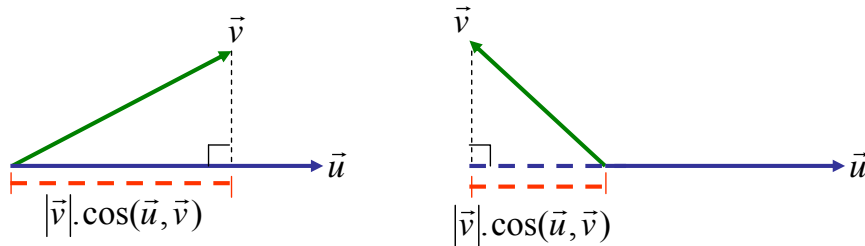
1. Vector



□ Vector Dot Product: mức độ tương quan giữa 2 vector

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \sum_{i=1}^n u_i \cdot v_i$$

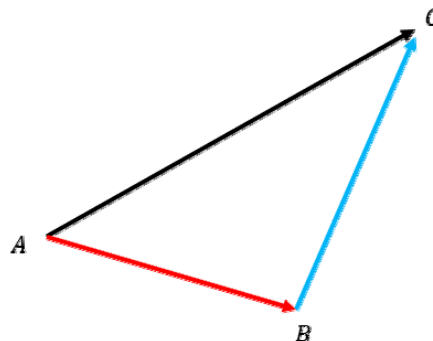
□ Vector projection



1. Vector (tt.)



□ Vector decomposition



$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$



Nội dung bổ sung



1. Vector
2. Ma trận
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Định thức
5. Ma trận thưa

2. Ma trận



□ Ý nghĩa

- thể hiện mối liên hệ giữa các đại lượng (tập hợp)
- thể hiện mối liên hệ nội tại trong một tập hợp

□ Ma trận **A** cấp (m, n) trên tập số thực \mathbb{R} : $\mathbf{A}_{m,n} \in \mathbf{M}_{m,n}(\mathbb{R})$

$$\mathbf{A}_{m,n} = [a_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}, a_{ij} \in \mathbb{R}$$

- a_{ij} hay $a_{i,j} \in \mathbb{R}$: các hệ số
- vector là ma trận đặc biệt: $\mathbf{A}_{1,n}$
- ma trận **O**: $a_{ij} = 0, \forall i, j$





2. Ma trận (tt.)

❑ Nhân ma trận với vô hướng

$$\alpha \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \alpha = (\alpha \cdot v_1, \alpha \cdot v_2, \dots, \alpha \cdot v_n)$$

❑ Nhân ma trận với ma trận

$$A_{m,n} \cdot B_{n,p} = C_{m,p} \quad C_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \end{pmatrix}$$

$$C_{11} = + \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} & a_{11} \cdot b_{12} & a_{11} \cdot b_{13} & a_{11} \cdot b_{14} \\ a_{12} \cdot b_{11} & a_{12} \cdot b_{12} & a_{12} \cdot b_{13} & a_{12} \cdot b_{14} \\ a_{13} \cdot b_{11} & a_{13} \cdot b_{12} & a_{13} \cdot b_{13} & a_{13} \cdot b_{14} \end{pmatrix}$$



82



2. Ma trận (tt.)

❑ Các vectors v_1, v_2, \dots, v_k được gọi là **phụ thuộc tuyến tính** nếu tồn tại các vô hướng $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ không đồng thời = 0:

$$\alpha_1 \cdot \vec{v}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{v}_2 + \dots + \alpha_k \cdot \vec{v}_k = \vec{0}$$

Ngược lại, v_1, v_2, \dots, v_k được gọi là **độc lập tuyến tính**

❑ **Hạng** của A, $\text{rank}(A)$, là số dòng tối đa **độc lập tuyến tính**

- nhiều phương pháp tính hạng của ma trận



83



1. Vector
2. Ma trận
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Định thức
5. Ma trận thưa

3. Hệ phương trình tuyến tính



□ Hệ phương trình tuyến tính m phương trình, n ẩn số

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

3. Hệ phương trình tuyến tính (tt.)



□ Các phép biến đổi sơ cấp trên DÒNG φ

Loại 1: hoán vị giữa dòng (i) và dòng (k), ký hiệu: $(i) \leftrightarrow (k)$

Loại 2: nhân dòng (i) với vô hướng $\alpha \neq 0$, ký hiệu: $(i) \rightarrow \alpha(i)$

Loại 3: thay dòng (i) bằng dòng (i) + $\alpha(k)$, ký hiệu: $(i) \rightarrow [(i) + \alpha(k)]$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 9 \\ -5 & 2 & -3 & 6 \\ 7 & 3 & 8 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2) \rightarrow [(2) + 2(1)]} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 9 \\ -1 & 0 & -3 & 24 \\ 7 & 3 & 8 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1) \leftrightarrow (3)} \begin{pmatrix} 7 & 3 & 8 & -4 \\ -1 & 0 & -3 & 24 \\ 2 & -1 & 0 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1) \rightarrow \frac{-1}{4}(1)} \begin{pmatrix} -7/4 & -3/4 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -3 & 24 \\ 2 & -1 & 0 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3) \rightarrow [(3) - 8(1)]} \begin{pmatrix} -7/4 & -3/4 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -3 & 24 \\ 16 & 5 & 16 & 1 \end{pmatrix}$$

□ A và B tương đương dòng, ký hiệu $A \sim B$, nếu A có thể biến đổi thành B (và ngược lại) bằng một số hữu hạn các phép φ_k

3. Hệ phương trình tuyến tính (tt.)



□ Phương pháp Gauss – Jordan với $A_{m,n} \cdot X_{n,1} = B_{m,1}$

$$\begin{array}{c} \text{C1} \qquad \qquad \qquad \text{C2} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ -2 & 1 & 2 & 3 & -8 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 2 & 1 & -8 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1^* & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 5 & 8 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & -20 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1^* & 0 & 7 & -16 & 26 \\ 0 & 1^* & -2 & 7 & -10 \\ 0 & 0 & -18 & 36 & -54 \\ 0 & 0 & -18 & 54 & -90 \end{array} \right) \\ \text{C3} \qquad \qquad \qquad \text{C4} \\ \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1^* & 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 1^* & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1^* & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 18 & -36 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1^* & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1^* & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1^* & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1^* & -2 \end{array} \right) \end{array}$$

$$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -1, x_4 = -2$$

$$\text{C1} : (2) \rightarrow (2) + 2(1), (3) \rightarrow (3) - 3(1), (4) \rightarrow (4) - 2(1)$$

$$\text{C2} : (2) \rightarrow (2) + (3), (1) \rightarrow (1) - 2(2), (3) \rightarrow (3) + 4(2), (4) \rightarrow (4) + 7(2)$$

$$\text{C3} : (4) \rightarrow (4) - (3), (3) \rightarrow -18^{-1}(3), (1) \rightarrow (1) - 7(3), (2) \rightarrow (2) + 2(3)$$

$$\text{C4} : (4) \rightarrow 18^{-1}(4), (1) \rightarrow (1) + 2(4), (2) \rightarrow (2) - 3(4), (3) \rightarrow (3) + 2(4)$$

3. Hệ phương trình tuyến tính (tt.)



□ Phương pháp Gauss – Jordan với $A_{m,n} \cdot X_{n,1} = B_{m,1}$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 1 & -1 & | & 1 \\ 2 & -1 & 7 & -3 & 5 & | & 2 \\ 1 & 3 & -2 & 5 & -7 & | & 3 \\ 3 & -2 & 7 & -5 & 8 & | & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1^* & 2 & -9 & 4 & -6 & | & -1 \\ 0 & -7 & 11 & -13 & 19 & | & -4 \\ 0 & 1 & 7 & 1 & -1 & | & 4 \\ 0 & -3 & 9 & -6 & 9 & | & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1^* & 2 & -9 & 4 & -6 & | & -1 \\ 0 & 1 & 7 & 1 & -1 & | & 4 \\ 0 & -7 & 11 & -13 & 19 & | & -4 \\ 0 & -3 & 9 & -6 & 9 & | & 2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1^* & 0 & -23 & 2 & -4 & | & -9 \\ 0 & 1^* & 7 & 1 & -1 & | & 4 \\ 0 & 0 & 60 & -6 & 12 & | & 24 \\ 0 & 0 & 30 & -3 & 6 & | & 14 \end{pmatrix} \rightarrow (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ | \ -4) : \text{vô nghiệm}$$

(4) \rightarrow (4) – (1), (1) \rightarrow (1) – (2), (2) \rightarrow (2) – 2(3), (3) \rightarrow (3) – (1)
 (2) \leftrightarrow (3)
 (1) \rightarrow (1) – 2(2), (3) \rightarrow (3) + 7(2), (4) \rightarrow (4) + 3(2)
 (3) \rightarrow (3) – 2(4)

3. Hệ phương trình tuyến tính (tt.)



□ Phương pháp Gauss – Jordan với $A_{m,n} \cdot X_{n,1} = B_{m,1}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 & | & -2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 0 & | & 1 \\ 4 & -2 & 6 & 3 & -4 & | & 7 \\ 2 & 4 & -2 & 4 & -7 & | & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1^* & 1 & 0 & -3 & -1 & | & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 1 & | & 3 \\ 0 & -6 & 6 & 15 & 0 & | & 15 \\ 0 & 2 & -2 & 10 & -5 & | & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1^* & 0 & 1 & -2 & -1/2 & | & -1/2 \\ 0 & 1^* & -1 & -1 & -1/2 & | & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & -3 & | & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & -4 & | & 8 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1^* & 0 & 1 & 0 & -7/6 & | & 5/6 \\ 0 & 1^* & -1 & 0 & -5/6 & | & -5/6 \\ 0 & 0 & 0 & 1^* & -1/3 & | & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} : \text{các cột (3) và (5) không biến đổi được}$$

Hệ có vô số nghiệm

(2) \rightarrow (2) – (1), (3) \rightarrow (3) – 4(1), (4) \rightarrow (4) – 2(1)
 (3) \rightarrow (3) – 3(2), (4) \rightarrow (4) + (2) (2) \rightarrow -2^{-1} (2), (1) \rightarrow (1) – (2)
 (3) \rightarrow 9^{-1} (3), (4) \rightarrow (4) – 12(3), (1) \rightarrow (1) + 2(3), (2) \rightarrow (2) + (3)

3. Hệ phương trình tuyến tính (tt.)



□ Phương pháp Gauss – Jordan với $A_{m,n} \cdot X_{n,1} = B_{m,1}$

- cột chuẩn E_i (m dòng): hệ số dòng i bằng 1, các hệ số khác = 0

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, E_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$(E_1 \quad E_2 \quad \dots \quad E_m)?$$

3. Hệ phương trình tuyến tính (tt.)



□ Phương pháp Gauss – Jordan với $A_{m,n} \cdot X_{n,1} = B_{m,1}$

- Bước 1 – Chuẩn hóa các cột: xây dựng **tuần tự** E_1, E_2, \dots
 - Khi xây dựng E_k thì không được làm thay đổi E_1, \dots, E_{k-1}
 - Nếu không thể chuẩn hóa cột k thành E_k thì xét cột $(k + 1)$
- Bước 2 – Xem xét nghiệm của hệ phương trình
 - Chuẩn hóa E_1, E_2, \dots, E_n : nghiệm duy nhất
 - Xuất hiện 1 dòng mâu thuẫn: $(0 \ 0 \ \dots \ 0 \mid a \neq 0)$: vô nghiệm
 - Tạo E_1, \dots, E_k ($k < n$) không mâu thuẫn: vô số nghiệm

3. Hệ phương trình tuyến tính (tt.)



□ Điều kiện chuẩn hóa cột k thành E_k

- nếu $v_k = v_{k+1} = \dots = v_m = 0$: không thể chuẩn hóa
- nếu $0 \neq v_j \in \{v_k, v_{k+1}, \dots, v_m\}$: $(k) \leftrightarrow (j)$ để chuẩn hóa (đưa về 1)

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_{k-1} \\ v_k \\ v_{k+1} \\ \dots \\ v_m \end{pmatrix} \rightarrow E_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. Hệ phương trình tuyến tính (tt.)



□ Phương pháp **Gauss** dựa trên **cột bán chuẩn**

$$F_1 = \begin{pmatrix} f_{11} \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, F_2 = \begin{pmatrix} f_{12} \\ f_{22} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, F_{m-1} = \begin{pmatrix} f_{1(m-1)} \\ f_{2(m-1)} \\ f_{3(m-1)} \\ \dots \\ f_{(m-1)(m-1)} \\ 0 \end{pmatrix}, F_m = \begin{pmatrix} f_{1(m-1)} \\ f_{2(m-1)} \\ f_{3(m-1)} \\ \dots \\ f_{(m-1)(m-1)} \\ f_{mm} \end{pmatrix}$$

$f_{ij} \neq 0, \forall i \leq j$ $f_{ij} = 0, \forall i > j$

3. Hệ phương trình tuyến tính (tt.)



□ Phương pháp Gauss dựa trên cột bán chuẩn

$$\begin{aligned}
 &\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 5 & 3 \\ -4 & -1 & 4 & -12 & 18 \\ -2 & -5 & 7 & -6 & 38 \\ 6 & 0 & -3 & 20 & -14 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 2^* & -1 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & -3 & 4 & -2 & 24 \\ 0 & -6 & 7 & -1 & 41 \\ 0 & 3 & -3 & 5 & -23 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \ F_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 2^* & -1 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & -3^* & 4 & -2 & 24 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \\
 &\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2^* & -1 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & -3^* & 4 & -2 & 24 \\ 0 & 0 & 1^* & 9 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -6^* & 6 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \text{backward substitution} \\ x_4 = -1, x_3 = 4, x_2 = -2, x_1 = 3 \end{array} \\
 &\quad \quad \quad F_1 \quad F_2 \quad F_3 \quad F_4
 \end{aligned}$$

$$(2) \rightarrow (2) + 2(1), (3) \rightarrow (3) + (1), (4) \rightarrow (4) - 3(1)$$

$$(3) \rightarrow (3) + 2(4), (4) \rightarrow (4) + (2)$$

$$(4) \rightarrow (4) - (3)$$

3. Hệ phương trình tuyến tính (tt.)



□ Phương pháp Gauss dựa trên cột bán chuẩn

$$\begin{aligned}
 &\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -19 & 12 & -15 & -16 \\ -2 & 8 & -5 & 7 & 7 \\ 4 & -8 & 9 & 4 & 2 \\ -7 & 15 & -17 & -4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1^* & -3 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 5 & 3 \\ 0 & 8 & -1 & 18 & 16 \\ 0 & -6 & -3 & -11 & -14 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \ F_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1^* & -3 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2^* & -1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -6 & 4 & -5 \end{array}\right) \rightarrow \\
 &\quad \quad \quad F_1 \quad F_2
 \end{aligned}$$

$$\rightarrow (0 \ 0 \ 0 \ 0 \mid 3) : \text{hệ vô nghiệm.}$$

$$(3) \rightarrow (3) + 2(2), (1) \rightarrow (1) + 2(2), (2) \rightarrow (2) + 2(1), (4) \rightarrow (4) + 7(1)$$

$$(3) \rightarrow (3) - 4(2), (4) \rightarrow (4) + 3(2)$$

$$(4) \rightarrow (4) + 2(3)$$

3. Hệ phương trình tuyến tính (tt.)



□ Phương pháp Gauss dựa trên cột bán chuẩn

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 & 0 & | & 4 \\ 3 & -1 & 8 & -6 & 2 & | & 5 \\ 2 & 4 & 6 & -6 & 7 & | & -11 \\ -2 & 6 & -5 & 2 & 5 & | & -20 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1} \begin{pmatrix} 1^* & -1 & 3 & -2 & 0 & | & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 2 & | & -7 \\ 0 & 10 & 1 & -4 & 12 & | & -31 \\ 0 & 4 & 1 & -2 & 5 & | & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1, F_2} \begin{pmatrix} 1^* & -1 & 3 & -2 & 0 & | & 4 \\ 0 & 2^* & -1 & 0 & 2 & | & -7 \\ 0 & 0 & 6 & -4 & 2 & | & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 1 & | & 2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{F_1, F_2, F_3} \begin{pmatrix} 1^* & -1 & 3 & -2 & 0 & | & 4 \\ 0 & 2^* & -1 & 0 & 2 & | & -7 \\ 0 & 0 & 3^* & -2 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} : \text{các cột (4) và (5) không bán chuẩn hóa được.}$$

Hệ có vô số nghiệm với 2 ẩn tự do : $x_4 = a, x_5 = b$

(2) $\rightarrow (2) - 3(1), (3) \rightarrow (3) + (4), (4) \rightarrow (4) + 2(1)$
(3) $\rightarrow (3) - 5(2), (4) \rightarrow (4) - 2(2)$
(3) $\rightarrow 2^{-1}(3), (4) \rightarrow (4) - (3)$

3. Hệ phương trình tuyến tính (tt.)



□ S_A , ma trận **dạng bậc thang** của A

- bán chuẩn hóa tối đa các cột của A (Gauss)
- các dòng không tầm thường được xếp phía trên
- mỗi ma trận A có thể có nhiều S_A

□ R_A , ma trận **dạng bậc thang rút gọn** của A

- chuẩn hóa tối đa các cột của A (Gauss – Jordan)
- các dòng không tầm thường được xếp phía trên
- mỗi ma trận A chỉ có một R_A

3. Hệ phương trình tuyến tính (tt.)



□ Hạng của A, ký hiệu $\text{rank}(A)$

- số dòng không tầm thường của R_A (hay S_A)
- số cột chuẩn trong R_A
- số cột bán chuẩn trong S_A



3. Hệ phương trình tuyến tính (tt.)



□ Hạng của A, ký hiệu $\text{rank}(A)$

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{pmatrix} -1 & -3 & -2 & 1 & -7 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & -1 \\ -3 & 2 & 5 & -16 & 32 \\ 3 & -1 & -4 & 13 & -24 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1} \begin{pmatrix} -1^* & -3 & -2 & 1 & -7 \\ 0 & -5 & -5 & 5 & -15 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 8 \\ 0 & -10 & -10 & 16 & -45 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1, F_2} \begin{pmatrix} -1^* & -3 & -2 & 1 & -7 \\ 0 & 1^* & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -15 \end{pmatrix} \rightarrow \\
 &\rightarrow \begin{pmatrix} -1^* & -3 & -2 & 1 & -7 \\ 0 & 1^* & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2^* & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_A} \begin{pmatrix} 1^* & 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1^* & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1, E_2, E_3} \begin{pmatrix} 1^* & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1^* & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1^* & -5/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = R_A
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) &\rightarrow (2) + 2(1), (3) \rightarrow (3) + (4), (4) \rightarrow (4) + 3(1) \\
 (4) &\rightarrow (4) - 2(2), (2) \rightarrow -5^{-1}(2), (3) \rightarrow (3) - (2) \\
 (4) &\rightarrow (4) + 3(3) \\
 (1) &\rightarrow (1) + 3(2), (1) \rightarrow -(1) \\
 (1) &\rightarrow (1) + (3), (3) \rightarrow -2^{-1}(3), (2) \rightarrow (2) + (3)
 \end{aligned}$$

$$\text{rank}(A) = 3$$

- S_A (R_A) có 3 dòng $\neq 0$
- R_A có 3 cột chuẩn
- S_A có 3 cột bán chuẩn

3. Hệ phương trình tuyến tính (tt.)



□ Định lý **Kronecker – Capelli**

- Nếu $\text{rank}(A|B) = \text{rank}(A) + 1$ thì $(A|B)$ vô nghiệm
- Nếu $\text{rank}(A|B) = \text{rank}(A) = n$ thì $(A|B)$ có 1 nghiệm duy nhất
- Nếu $\text{rank}(A|B) = \text{rank}(A) = k < n$ thì $(A|B)$ có vô số nghiệm



100

Nội dung bổ sung



1. Vector
2. Ma trận
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Định thức
5. Ma trận thưa

101

4. Định thức



□ Định thức của ma trận vuông $A \in M_n(\mathbb{R})$, ký hiệu $\det(A)$ hay $|A|$

- $A = [a] \in M_1(\mathbb{R}) \Rightarrow |A| = a$

- $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \Rightarrow |A| = (ad - bc)$

- $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{pmatrix}$ quy tắc **SARRUS**
 $\Rightarrow |A| = (aei + bfg + cdh) - (ceg + afh + bdi)$

4. Định thức (tt.)



□ Định thức của ma trận vuông A , ký hiệu $\det(A)$ hay $|A|$, $n \geq 2$

- **Minor** $A(i, j)$: loại bỏ dòng i và cột j của A

- **Cofactor**: $C_{ij} = (-1)^{(i+j)} \cdot |A(i, j)|$

- tính toán dựa trên dòng i :

$$|A| = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot C_{ik} = a_{i1} \cdot C_{i1} + a_{i2} \cdot C_{i2} + \dots + a_{in} \cdot C_{in}$$

- tính toán dựa trên cột j :

$$|A| = \sum_{k=1}^n a_{kj} \cdot C_{kj} = a_{1j} \cdot C_{1j} + a_{2j} \cdot C_{2j} + \dots + a_{nj} \cdot C_{nj}$$



4. Định thức (tt.)

□ Định thức của ma trận vuông $A \in M_n(\mathbb{R})$, ký hiệu $\det(A)$ hay $|A|$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ -5 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

- Tính $|A|$ dựa trên dòng (1):

$$\begin{aligned} |A| &= \sum_{k=1}^n a_{1k} \cdot C_{1k} = a_{11} \cdot C_{11} + a_{12} \cdot C_{12} + a_{13} \cdot C_{13} = \\ &= 4(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -5 & -6 \end{vmatrix} + 2(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = \\ &= 4(-20) + 17 + 2(11) = 41 \end{aligned}$$



4. Định thức (tt.)

□ Một số nhận xét

- Chọn dòng hay cột có nhiều hệ số = 0
- Nếu có dòng (hay cột) chỉ chứa hệ số 0 thì $|A| = 0$
- Nếu có 2 dòng (hay 2 cột) tỉ lệ với nhau thì $|A| = 0$
- Nếu A là ma trận *tam giác* trên hoặc dưới thì $|A| = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}$
- $|A| = |A^T|$
- $|A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_k| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots \cdot |A_k|$



4. Định thức (tt.)

❑ Các phép biến đổi sơ cấp trên CỘT ρ

Loại 1: hoán vị giữa cột (j) và cột (k), ký hiệu: $(j)'' \leftrightarrow (k)''$

Loại 2: nhân cột (i) với vô hướng α , ký hiệu: $(i)'' \rightarrow \alpha(i)''$

Loại 3: thay cột (i) bằng cột (i) + $\alpha(k)$, ký hiệu: $(i) \rightarrow [(i) + \alpha(k)]$



4. Định thức (tt.)

❑ Nhận xét

- Nếu $A \rightarrow B$ bằng 1 phép biến đổi loại 1 trên dòng hay cột thì

$$|B| = -|A|$$

- Nếu $A \rightarrow B$ bằng 1 phép biến đổi loại 2 trên dòng hay cột thì

$$|B| = \alpha \cdot |A|$$

$$\Rightarrow |\alpha \cdot A| = \alpha^n \cdot |A| \text{ (nhân } n \text{ dòng của } A \text{ với } \alpha)$$

- Nếu $A \rightarrow B$ bằng 1 phép biến đổi loại 3 trên dòng hay cột thì

$$|B| = |A| \text{ (độc lập với } \alpha)$$



4. Định thức (tt.)

□ Ma trận (vuông) khả nghịch, ma trận nghịch đảo

- ma trận đơn vị cấp n (vuông): $I_{n,n} \equiv I_n$
- ma trận nghịch đảo của A , nếu có, là duy nhất, ký hiệu: A^{-1}

□ Các phát biểu sau là tương đương đối với ma trận $A_{n,n}$

- A khả nghịch
- $|A| \neq 0$
- $\text{rank}(A) = n$



4. Định thức (tt.)

□ Tìm ma trận nghịch đảo dựa trên định thức

- Minor $A(i, j)$: loại bỏ dòng i và cột j của A
- Cofactor: $C_{ij} = (-1)^{(i+j)} \cdot |A(i, j)|$
- Lập ma trận: $C_{n,n} = [C_{ij}]$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot C^T$$

- $n = 2$:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{(ad-bc)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$



4. Định thức (tt.)

□ Tìm ma trận nghịch đảo dựa trên định thức

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ -5 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} C_{11} &= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = -20 \\ C_{12} &= (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -5 & -6 \end{vmatrix} = -17 \\ C_{13} &= (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 11 \\ &\dots \end{aligned} \Rightarrow C = \begin{pmatrix} -20 & -17 & 11 \\ -2 & -14 & -3 \\ -7 & -8 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{-41} \begin{pmatrix} -20 & -2 & -7 \\ -17 & -14 & -8 \\ 11 & -3 & 10 \end{pmatrix}$$



4. Định thức (tt.)

□ Tìm ma trận nghịch đảo bằng cách giải $A \cdot X = I$

□ Giả sử ma trận $A_{n,n}$ là khả nghịch ($R_A = I_n$)

- Nếu chuỗi các phép biến đổi sơ cấp trên dòng $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$ biến A thành $R_A (= I_n)$ thì chuỗi phép biến đổi đó cũng sẽ biến I_n thành A^{-1} .

□ Phương pháp Gauss – Jordan tìm ma trận nghịch đảo A^{-1} : thực hiện chuỗi $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$ đồng thời trên A và I_n

$$(A \mid I_n) \rightarrow (A_1 \mid B_1) \rightarrow (A_2 \mid B_2) \rightarrow \dots \rightarrow (A_k \mid B_k) \text{ trong đó } A_k = R_A$$

$$\text{Nếu } R_A = I_n \text{ thì } A \text{ khả nghịch và } A^{-1} = B_k$$

4. Định thức (tt.)



□ Tìm ma trận nghịch đảo

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 9 \\ 2 & 1 & 2 \\ -7 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 4 & 9 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1^* & 3 & 7 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & -12 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 22 & 53 & 7 & -7 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1^* & 3 & 7 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -5 & 18 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & -1 & 5 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \\ & \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1^* & 0 & -2 & 16 & -55 & -9 \\ 0 & 1^* & 3 & -5 & 18 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 9 & -31 & -5 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1^* & 0 & 0 & -2 & 7 & 1 \\ 0 & 1^* & 0 & 22 & -75 & -12 \\ 0 & 0 & 1^* & -9 & 31 & 5 \end{array} \right). \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 7 & 1 \\ 22 & -75 & -12 \\ -9 & 31 & 5 \end{pmatrix} \\ & (1) \rightarrow (1) - (2), (2) \rightarrow (2) - 2(1), (3) \rightarrow (3) + 7(1) \\ & (3) \rightarrow (3) + 4(2), (2) \rightarrow (2) + 3(3) \\ & (1) \rightarrow (1) - 3(2), (3) \rightarrow (3) - 2(2) \\ & (1) \rightarrow (1) - 2(3), (2) \rightarrow (2) + 3(3), (3) \rightarrow -(3) \end{aligned}$$

4. Định thức (tt.)



□ Các tính chất trên ma trận **A** khả nghịch

- A^{-1} khả nghịch: $(A^{-1})^{-1} = A$
- A^T khả nghịch: $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
- $\alpha \neq 0$, $\alpha.A$ khả nghịch: $(\alpha.A)^{-1} = \alpha^{-1}.A^{-1}$
- $r \in \mathbb{Z}$, A^r khả nghịch: $(A^r)^{-1} = A^{-r}$
- $A.B$ khả nghịch $\Leftrightarrow A$ và B khả nghịch và $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$
- $|A^{-1}| = |A|^{-1}$
- $A.X = B$ có nghiệm duy nhất $X = A^{-1}.B$





1. Vector
2. Ma trận
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Định thức
5. Ma trận thưa

5. Ma trận thưa



□ Coordinate List (COO)

Giả sử p là số phần tử $\neq 0$ của ma trận A

Tạo 3 mảng có cùng kích thước p :

- $\text{data}[p]$ chứa p giá trị $\neq 0$ của A
- $\text{col}[p]$ chứa p chỉ số CỘT của các phần tử $\neq 0$ của A
- $\text{row}[p]$ chứa p chỉ số DÒNG của các phần tử $\neq 0$ của A

$$A[\text{row}[i], \text{col}[i]] = \text{data}[i]$$



5. Ma trận thưa (tt.)



❑ Compressed Sparse Row (CSR) → row oriented

Giả sử p là số phần tử $\neq 0$ của ma trận A

Tạo 3 mảng có *kích thước khác nhau*:

- $data[]$ chứa p giá trị $\neq 0$ của A
- $indices[]$ chứa p chỉ số CỘT của các phần tử $\neq 0$ của A
- $indptr[]$ chứa một dãy số có $(m + 1)$ phần tử tăng (không đều) từ 0 cho đến p

VỊ TRÍ BẮT ĐẦU rút trích trong $data[]$ cho mỗi dòng $i < m$

$idxptr = (start_r(0), start_r(1), start_r(2), \dots, start_r(m-1), p)$

$start_r(0) = 0$ (quy ước: chỉ số bắt đầu = 0)

5. Ma trận thưa (tt.)



❑ Compressed Sparse Row (CSR) → row oriented

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$data[] = [8 \quad 6 \quad 9 \quad 4 \quad 3]$$

$$indices[] = [0 \quad 3 \quad 2 \quad 5 \quad 3]$$

$$idxptr[] = [0 \quad 2 \quad 4 \quad 5]$$

Gọi $P(i)$ là tập các giá trị $\neq 0$ của dòng $A(i)$, được rút trích từ $data[]$

$$P(0) = \{ data[0], data[1] \} = \{ 8, 6 \}$$

$$P(1) = \{ data[2], data[3] \} = \{ 9, 4 \}$$

$$P(2) = \{ data[4] \} = \{ 3 \}$$





Đậu Thế Cấp, *Đại số tuyến tính*, NXB Giáo dục, 2008.

Lê Văn Hợp, *Bài giảng môn Toán Đại số B1* (Đại số tuyến tính).

Nguyễn Duy Thuận và các tác giả, *Đại số tuyến tính*, NXB ĐH Sư phạm, 2003.