

# Giáo trình Đại số tuyến tính

$$\left( \begin{array}{cccccccccc} \frac{1}{2} & -2 & 0 & -2 & 2 & 1 & 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 2 & 0 & -1 & 0 & -2 & -1 & 2 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & -\frac{1}{2} & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 & 2 & 1 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} \left( \begin{array}{cccccccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

(Dành cho sinh viên các ngành Khoa học tự nhiên)

# Lời nói đầu

---

Mục đích chính của giáo trình này là phục vụ cho sinh viên ngành Khoa học máy tính (trước đây gọi là Toán Tin). Kể từ học kỳ I năm học 2012-2013, môn Đại số tuyến tính cho ngành này chỉ còn dạy trong một học kỳ, tức là thời lượng chỉ bằng một nửa so với trước đây. Vì vậy, chúng tôi phải thay đổi lại cấu trúc chương trình, giảm đi tính hàn lâm vốn có của môn học truyền thống này và thay vào đó là tính toán cụ thể, một vài kết quả lý thuyết được thừa nhận không chứng minh và thay vào đó sẽ có nhiều ví dụ minh họa hơn.

Một số ví dụ trong bản thảo này được lấy từ các tài liệu mở [3] và [4].

Để có một cuốn sách có chiều dài vừa phải, phần ứng dụng của Đại số tuyến tính sẽ không đưa vào giáo trình. Cụ thể, chúng tôi sẽ đưa các nội dung sau trong phần phụ lục:

A.2 Các phép biến hình trong  $\mathbb{R}^2$  và  $\mathbb{R}^3$

A.3 Một số ứng dụng khác của Đại số tuyến tính

A.4 Đại số tuyến tính với phần mềm đại số máy tính Sage

trên trang web bên dưới.

Bản thảo đang quá trình cập nhật. Bản mới cập nhật nhất có thể tải miễn phí tại địa chỉ:

<https://sites.google.com/site/phoductai/dstt/>

Tác giả trân trọng cảm ơn PGS. TS. Nguyễn Đức Đạt và TS. Nguyễn Hồng Vân đã liệt kê những lỗi trình bày và in ấn trong bản thảo đầu tiên.

Hà Nội - Trieste, mùa hè năm 2013

**Phó Đức Tài**

# Chương 1

## Hệ phương trình tuyến tính

---

1.1. Hệ phương trình tuyến tính . . . . .	6
1.2. Phương pháp khử Gauss . . . . .	10
1.3. Tập nghiệm của một hệ phương trình tuyến tính	17
Bài tập chương 1 . . . . .	18

---

Trong chương trình phổ thông chúng ta đã được làm quen với hệ phương trình tuyến tính, nhưng với tên gọi khác - hệ phương trình bậc nhất. Ở đó chỉ giải các hệ bậc nhất có hai hoặc ba ẩn số. Trong chương này, chúng ta sẽ tìm hiểu hệ phương trình tuyến tính với số ẩn và số phương trình tùy ý.

### 1.1. Hệ phương trình tuyến tính

Một phương trình  $n$  ẩn  $x_1, x_2, \dots, x_n$  có dạng

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b,$$

trong đó  $a_1, a_2, \dots, a_n$  và  $b$  là các số thực, được gọi là một **phương trình tuyến tính**.

**Ví dụ 1.1.** (a) Các phương trình sau là phương trình tuyến tính:  $5x - 4y = 19$ ;  $-2x + 6y - 7z + 4 = 0$ ;  $\sqrt{5}x + \frac{1}{4}y = \pi^2$ .

(b) Các phương trình sau không phải là phương trình tuyến tính:  $x - 3y^2 = 1$ ;  $e^x + y = 3$ ;  $\frac{1}{x} - y = 2$ .

Một **hệ phương trình tuyến tính** là một hệ gồm các phương trình tuyến tính có chung các ẩn. Ví dụ, hệ

$$\begin{cases} x + y = 36 \\ 2x + 4y = 100 \end{cases}$$

là hệ phương trình tuyến tính gồm 2 phương trình và 2 ẩn; hệ

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_3 = 9 \\ x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 2 \end{cases}$$

là hệ phương trình tuyến tính gồm 2 phương trình và 3 ẩn.

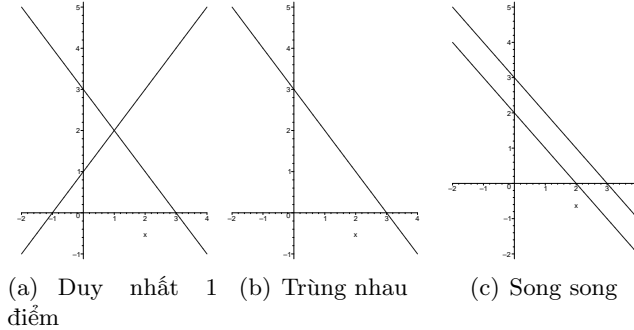
Một **hệ phương trình tuyến tính tổng quát** gồm  $m$  phương trình và  $n$  ẩn có dạng

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \dots &\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{cases}$$

Ta gọi hệ phương trình như trên là một hệ  $m \times n$ . Xét các ví dụ đơn giản sau.

**Ví dụ 1.2. (Hệ  $2 \times 2$ )** Giải các hệ phương trình sau, mỗi một hệ hãy minh họa bằng một cặp đường thẳng.

$$(a) \begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = -1 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases} \quad (c) \begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$$



Hình 1.1 Giao hai đường thẳng của hệ

(a) Hệ này có duy nhất nghiệm  $x = 1$  và  $y = 2$ . Trong hình vẽ, hệ có thể mô tả bằng hai đường thẳng cắt nhau tại duy nhất một điểm.

(b) Hệ này có vô số nghiệm, vì hai phương trình tương đương với nhau. Giải một trong hai phương trình, nghiệm của hệ có thể viết như sau

$$x = 3 - t, \quad y = t, \text{ với } t \text{ tùy ý.}$$

Trong hình vẽ, hệ có thể mô tả bằng hai đường thẳng trùng nhau. Hai đường thẳng này giao nhau bằng chính nó, tức là tập giao có vô hạn điểm.

(c) Hệ này vô nghiệm. Trong hình vẽ, hệ có thể mô tả bằng hai đường thẳng song song không trùng nhau. Như đã biết, hai đường thẳng này không cắt nhau.

Một hệ phương trình được gọi là có **dạng bậc thang** nếu tập hợp các ẩn số của mỗi phương trình là tập con thật sự của tập hợp các ẩn số của phương trình đứng trên (nếu có).

Khi giải một hệ phương trình tuyến tính, nếu bằng các phép biến đổi tương đương đưa được về dạng bậc thang thì sẽ dễ tìm nghiệm bằng cách giải từng ẩn một, giải ngược từ dưới lên bằng cách thế biến. Ví dụ, sau các phép biến đổi tương đương, ta có hệ

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 9 \\ 5y - 2z = 1 \\ z = 2 \end{cases}$$

Thay  $z = 2$  từ phương trình cuối vào phương trình thứ hai, tìm được  $y = 1$ . Tiếp tục thay  $y = 1$  và  $z = 2$  vào phương trình đầu tiên, tìm được  $x = 1$ . Vậy hệ có nghiệm duy nhất  $(x, y, z) = (1, 1, 2)$ .

**Định nghĩa 1.3.** Hai hệ phương trình tuyến tính được gọi là **tương đương** nếu chúng có chung tập nghiệm.

**Định nghĩa 1.4.** Trên một hệ phương trình tuyến tính, các phép biến đổi sau đây được gọi là các phép **biến đổi sơ cấp**.

- (a) Hoán đổi hai phương trình bất kì trong hệ.
- (b) Nhân một phương trình với một hằng số khác không.
- (c) Cộng thêm vào một phương trình bởi một bội số của một phương trình khác.

Dễ thấy qua mỗi một phép biến đổi sơ cấp ta thu được một hệ phương trình tuyến tính tương đương. Do đó qua một dãy các phép biến đổi sơ cấp ta cũng thu được một hệ tương đương.

Khi giải một hệ phương trình tuyến tính tổng quát, ta có thể dùng các phép biến đổi sơ cấp để đưa về hệ bậc thang. Trong tiết sau chúng ta sẽ chứng minh điều này ở Mệnh đề 1.11.

Quá trình biến đổi một hệ phương trình tuyến tính về hệ bậc thang qua một chuỗi các phép biến đổi sơ cấp nói trên gọi là quá trình khử biến.

**Ví dụ 1.5.** Quá trình dùng các phép biến đổi sơ cấp để giải hệ  $3 \times 3$ .

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 5 \\ 2x_1 + 6x_2 + 5x_3 = 6 \end{cases}$$

Nhân  $-1$  vào phương trình thứ nhất, rồi cộng vào phương trình thứ hai:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4 \\ 0x_1 + 1x_2 + 1x_3 = 1 \\ 2x_1 + 6x_2 + 5x_3 = 6 \end{cases}$$

Nhân  $-2$  vào phương trình thứ nhất, rồi cộng vào phương trình thứ ba:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4 \\ 0x_1 + 1x_2 + 1x_3 = 1 \\ 0x_1 + 2x_2 + 1x_3 = -2 \end{cases}$$

Nhân  $-2$  vào phương trình thứ hai, rồi cộng vào phương trình thứ ba:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4 \\ 0x_1 + 1x_2 + 1x_3 = 1 \\ 0x_1 + 0x_2 - 1x_3 = -4 \end{cases}$$

Nhân  $-1$  vào phương trình thứ ba:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4 \\ 0x_1 + 1x_2 + 1x_3 = 1 \\ 0x_1 + 0x_2 + 1x_3 = 4 \end{cases}$$

Hệ phương trình cuối viết lại đơn giản thành:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4 \\ x_2 + x_3 = 1 \\ x_3 = 4 \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có duy nhất nghiệm  $(x_1, x_2, x_3) = (2, -3, 4)$ .

**Ví dụ 1.6.** Quá trình dùng các phép biến đổi sơ cấp để giải hệ  $3 \times 4$ .

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 0x_3 + x_4 = 7 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 3 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 - 7x_4 = 1 \end{cases}$$

Nhân  $-1$  vào phương trình thứ nhất, rồi cộng vào phương trình thứ hai:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 0x_3 + x_4 = 7 \\ 0x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = -4 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 - 7x_4 = 1 \end{cases}$$

Nhân  $-3$  vào phương trình thứ nhất, rồi cộng vào phương trình thứ ba:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 0x_3 + x_4 = 7 \\ 0x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = -4 \\ 0x_1 - 5x_2 + 5x_3 - 10x_4 = -20 \end{cases}$$

Nhân  $-5$  vào phương trình thứ hai, rồi cộng vào phương trình thứ ba:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 0x_3 + x_4 = 7 \\ 0x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = -4 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 0 \end{cases}$$

Nhân  $-1$  vào phương trình thứ hai:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 0x_3 + x_4 = 7 \\ 0x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 0 \end{cases}$$

Nhân  $-2$  vào phương trình thứ hai, rồi cộng vào phương trình thứ nhất:

$$\begin{cases} x_1 + 0x_2 + 2x_3 - 3x_4 = -1 \\ 0x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 0 \end{cases}$$

Hệ phương trình cuối viết lại đơn giản thành:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 - 3x_4 = -1 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có vô số nghiệm, tập nghiệm có dạng

$$S = \{(-1 - 2s + 3t, 4 + s - 2t, s, t) | s, t \in \mathbb{R}\}.$$

## 1.2. Phương pháp khử Gauss

Để đơn giản hóa cách trình bày trong việc giải hệ phương trình bằng phương pháp khử biến, Gauss<sup>1</sup> dùng ma trận và các phép biến đổi sơ cấp theo hàng.

Trở lại hệ  $m \times n$  dạng tổng quát

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \dots &\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{cases}$$

Ta gọi

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ và } \overline{A} = \left( \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

tương ứng là **ma trận hệ số** và **ma trận mở rộng** của hệ.

Trong chương sau chúng ta sẽ tìm hiểu về ma trận chi tiết hơn. Tạm thời, ta xem ma trận là một bảng hình chữ nhật các con số.

**Định nghĩa 1.7.** Một **ma trận bậc thang** là một ma trận thỏa mãn

- (a) Các hàng chỉ chứa số 0 nếu có thì nằm bên dưới cùng.
- (b) Trên mỗi hàng, phần tử khác không đầu tiên tính từ bên trái đều là 1, được gọi là **số 1 dẫn đầu**.
- (c) Số 1 dẫn đầu của hàng dưới luôn nằm (ở cột) bên phải so với số 1 dẫn đầu của hàng trên.

**Định nghĩa 1.8.** Một **ma trận bậc thang rút gọn** là một ma trận bậc thang mà mỗi cột nếu chứa một số 1 dẫn đầu thì các phần tử còn lại trên cột đó phải bằng 0.

Dưới đây là hai ma trận bậc thang, trong đó ma trận bên phải có dạng bậc thang rút gọn.

$$\left( \begin{array}{cccccc|c} 1 & * & \dots & * & * & \dots & * & c_1 \\ 0 & 1 & \dots & * & * & \dots & * & c_2 \\ \cdot & \cdot & \dots & * & * & \dots & * & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 & * & \dots & * & c_r \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & c_{r+1} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & c_m \end{array} \right), \quad \left( \begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & * & \dots & * & c_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & * & \dots & * & c_2 \\ \cdot & \cdot & \dots & 0 & * & \dots & * & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 & * & \dots & * & c_r \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & c_{r+1} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & c_m \end{array} \right).$$

Chú ý, trong trường hợp tổng quát các số 1 dẫn đầu ở hàng kế tiếp nhất thiết không nhất thiết phải ở ngay cột kế sau. Xem hai ma trận đầu tiên trong ví dụ bên dưới.

<sup>1</sup>Carl Friedrich Gauss (1777–1855) nhà toán học lỗi lạc người Đức.

**Ví dụ 1.9.** Các ví dụ là các ma trận bậc thang rút gọn:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Các ma trận sau không phải là các ma trận bậc thang rút gọn:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Tương tự như trong Định nghĩa 1.4, các phép biến đổi sơ cấp đối với hệ phương trình có thể chuyển sang cho ma trận như sau:

**Định nghĩa 1.10.** Các phép biến đổi sau đây được gọi là các phép **biến đổi sơ cấp theo hàng**.

- (a) Hoán đổi hai hàng bất kì trong ma trận.
- (b) Nhân một hàng với một hằng số khác không.
- (c) Cộng thêm vào một hàng bởi một bội số của một hàng khác.

Từ giờ trở đi chúng ta dùng các kí hiệu:

- $H_i \leftrightarrow H_j$ : Hoán đổi hai hàng  $i$  và  $j$ .
- $cH_i$ : Nhân  $c$  vào hàng  $i$ .
- $cH_i + H_j$ : Cộng  $c$  lần hàng  $i$  vào hàng  $j$ .

Mệnh đề dưới đây và chứng minh của nó cho ta cách giải hệ phương trình tuyến tính theo phương pháp khử Gauss.

**Mệnh đề 1.11.** Với bất kỳ ma trận  $A$  nào, ta cũng có thể đưa ra các phép biến đổi hàng để chuyển  $A$  về dạng bậc thang. Hơn nữa, tiếp tục có thể đưa dạng bậc thang về dạng bậc thang rút gọn.

*Chứng minh.* Xét trường hợp cột thứ nhất có phần tử khác không. Bằng cách hoán đổi hàng nếu cần, ta có thể giả sử  $a_{11} \neq 0$ . Thực hiện phép biến đổi  $\frac{1}{a_{11}}H_1$ , ta có thể giả sử  $a_{11} = 1$ . Lần lượt thực hiện các phép biến đổi  $(-a_{i1})H_1 + H_i$  với  $i = 2, \dots, n$ , thu được số 1 dẫn đầu cho cột thứ nhất.

Trường hợp  $k - 1$  cột đầu tiên các phần tử đều bằng 0, ở cột thứ  $k$  có phần tử khác không. Bằng cách làm như trên ta có thể tạo số 1 dẫn đầu ở vị trí  $a_{1k}$ .

Tương tự như trên ta có thể thực hiện các phép biến đổi hàng để thu được các số 1 dẫn đầu ở các cột tiếp theo. Thực hiện cho đến cột cuối ta sẽ thu được dạng bậc thang.

Kí hiệu  $B = (b_{ij})_{m \times n}$  là dạng bậc thang tìm được ở trên. Giả sử  $b_{kl} = 1$  là một số 1 dẫn đầu. Do  $B$  là dạng bậc thang nên ở cột  $l$  các phần tử từ



hàng  $k + 1$  trở đi (nếu  $k = n$  thì không xét) đều bằng 0. Thực hiện lần lượt các phép biến đổi hàng  $(-b_{kj})H_k + H_j$  với  $1 \leq j \leq k - 1$  (nếu  $k = 1$  thì không cần thiết) sẽ làm cho cột thứ  $k$  chỉ có vị trí  $b_{kk} = 1$ , các vị trí còn lại bằng 0.

Tiếp tục quá trình trên ta sẽ thu được dạng bậc thang rút gọn.  $\square$

Trong chứng minh trên ta có thể thấy dạng bậc thang thu được không duy nhất. Tuy nhiên, dạng rút gọn thì duy nhất. Đó chính là ưu điểm khi đưa ra khái niệm này.

**Định lý 1.12.** *Mỗi ma trận chỉ có một dạng bậc thang rút gọn duy nhất.*

Dưới đây là một chứng minh ngắn gọn <sup>2</sup> khác với chứng minh dài dòng thường gặp ở các sách tham khảo.

*Chứng minh.* Ta sẽ chứng minh qui nạp theo số cột của ma trận  $n$ .

Khi  $n = 1$  khẳng định hiển nhiên đúng.

Giả sử khẳng định đúng với  $n = k$ . Xét một ma trận  $A$  có  $k + 1$  cột. Gọi  $A'$  là ma trận thu được từ  $A$  khi bỏ đi cột thứ  $k + 1$ . Theo giả thiết qui nạp  $A'$  có duy nhất một dạng bậc thang rút gọn. Giả sử  $A$  có hai dạng bậc thang rút gọn là  $B = (b_{ij})$  và  $C = (c_{ij})$ . Rõ ràng các phép biến đổi hàng để đưa  $A$  về dạng bậc thang rút gọn cũng đưa  $A'$  về dạng rút gọn. Do đó  $B$  và  $C$  cùng chung  $k$  cột đầu tiên, chúng chỉ có thể khác nhau ở cột thứ  $k + 1$ . Giả sử  $B \neq C$ , khi đó tồn tại chỉ số hàng  $i$  sao cho  $b_{i(k+1)} \neq c_{i(k+1)}$ .

Giả sử  $x = (x_1, \dots, x_{k+1})^t$  là một nghiệm nào đó của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất  $Ax = 0$  (lưu ý rằng hệ này có ít nhất một nghiệm tầm thường). Khi đó  $x$  cũng là nghiệm của  $Bx = 0$  và  $Cx = 0$ . Do đó  $(B - C)x = 0$ . Vì  $k$  cột đầu của ma trận  $(B - C)$  đều bằng các cột số 0. Từ phương trình thứ  $i$  của hệ, do  $b_{i(k+1)} \neq c_{i(k+1)}$ , suy ra  $x_{k+1} = 0$ . Điều này có nghĩa là mọi nghiệm của các hệ  $Bx = 0$  và  $Cx = 0$  nếu có thì  $x_{k+1} = 0$ . Từ đó suy ra cột thứ  $(k + 1)$  của  $B$  và  $C$  đều chứa số 1 dẫn đầu, vì nếu ngược lại có thể chọn  $x_{k+1}$  tùy ý. Do  $k$  cột đầu của  $B$  và  $C$  giống nhau, vị trí (hàng) của số 1 dẫn đầu ở cột thứ  $(k + 1)$  của  $B$  và  $C$  phải giống nhau. Vì vậy  $B = C$ , mâu thuẫn với giả thiết.

Vậy khẳng định đúng với  $n = k + 1$ .  $\square$

**Phương pháp khử Gauss** gồm các bước sau

1. Xác định ma trận mở rộng của hệ phương trình tuyến tính.
2. Dùng các phép biến đổi hàng sơ cấp để đưa ma trận hệ số về dạng bậc thang. Quá trình này thực hiện bao gồm ma trận mở rộng.

---

<sup>2</sup>Chứng minh của Thomas Yuster trong bài báo “The Reduced Row Echelon Form of a Matrix Is Unique: A Simple Proof,” *Mathematics Magazine*, Vol. 57, No. 2, 1984, pp. 93–94.

3. Viết hệ phương trình tuyến tính tương ứng với ma trận bậc thang, giải hệ này bằng phương pháp thế từ dưới lên.

**Ví dụ 1.13.** Trở lại Ví dụ 1.5.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 4 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 5 \\ 2x_1 + 6x_2 + 5x_3 &= 6 \end{cases}$$

Với ma trận mở rộng của nó là

$$A = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 5 & 6 \end{array} \right).$$

Thực hiện các phép biến đổi hàng sơ cấp

$$\begin{aligned} A &\xrightarrow{-1H_1+H_2} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 5 & 6 \end{array} \right) \xrightarrow{-2H_1+H_3} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{-2H_2+H_3} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \end{array} \right) \xrightarrow{-1H_3} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Ma trận cuối cùng là ma trận bậc thang. Hệ phương trình tuyến tính tương ứng của nó là

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4 \\ \quad \quad x_2 + x_3 = 1 \\ \quad \quad \quad + x_3 = 4 \end{cases}$$

Dùng phương pháp thế và giải ngược từ dưới lên, ta thu được lần lượt  $x_3 = 4$ ,  $x_2 = -3$  và  $x_1 = 2$ .

**Phương pháp khử Gauss-Jordan**<sup>3</sup> là phương pháp khử như phương pháp Gauss nhưng đưa về dạng bậc thang rút gọn. Khi đó, bước giải ngược như trong phương pháp Gauss đơn giản hơn rất nhiều.

Việc sử dụng phương pháp khử Gauss-Jordan, cần thêm các bước đưa về dạng bậc thang rút gọn. Chúng ta sẽ cần đến khi tính ma trận nghịch đảo ở trong chương sau. Dưới đây chúng ta sẽ lấy thêm một vài ví dụ cho phương pháp khử Gauss-Jordan.

Trong các ví dụ này, để tiện theo dõi mỗi số 1 dẫn đầu sau khi thỏa mãn điều kiện các phần tử khác trong cột chứa nó đều bằng 0 thì sẽ khoanh số 1 trong hình vuông. Gọi "bước thứ  $j$ " là bước để có thể khoanh số 1 ở cột thứ  $j$ .

**Ví dụ 1.14. (Hệ có duy nhất nghiệm)** Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} -7x_1 - 6x_2 - 12x_3 = -33 \\ \quad 5x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 24 \\ \quad \quad x_1 + 4x_3 = 5 \end{cases}$$

---

<sup>3</sup>Wilhelm Jordan (1842–1899) giáo sư trắc địa người Đức.

Ma trận mở rộng là

$$A = \left( \begin{array}{ccc|c} -7 & -6 & -12 & -33 \\ 5 & 5 & 7 & 24 \\ 1 & 0 & 4 & 5 \end{array} \right).$$

Bước  $j = 1$ ,

$$\begin{aligned} A &\xrightarrow{H_1 \leftrightarrow H_3} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 7 & 24 \\ -7 & -6 & -12 & -33 \end{array} \right) \xrightarrow{-5H_1+H_2} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 5 & -13 & -1 \\ -7 & -6 & -12 & -33 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{7H_1+H_3} \left( \begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 5 & -13 & -1 \\ 0 & -6 & 16 & 2 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Tiếp theo, với  $j = 2$ ,

$$\xrightarrow{\frac{1}{5}H_2} \left( \begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -13/5 & -1/5 \\ 0 & -6 & 16 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{6H_2+H_3} \left( \begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 4 & 5 \\ 0 & \boxed{1} & -13/5 & -1/5 \\ 0 & 0 & 2/5 & 4/5 \end{array} \right)$$

Cuối cùng, với  $j = 3$ ,

$$\begin{aligned} &\xrightarrow{\frac{5}{2}H_3} \left( \begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 4 & 5 \\ 0 & \boxed{1} & -13/5 & -1/5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{\frac{13}{5}H_3+H_2} \left( \begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 4 & 5 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{-4H_3+H_1} \left( \begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & -3 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 5 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Ma trận hệ số cuối cùng có dạng bậc thang rút gọn. Hệ phương trình có nghiệm duy nhất  $(x_1, x_2, x_3) = (-3, 5, 2)$ .

**Ví dụ 1.15. (Hệ có vô số nghiệm)** Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 + x_2 = 5 \end{cases}$$

Ma trận mở rộng là

$$A = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 0 & 5 \end{array} \right).$$

Bước đầu tiên, với  $j = 1$ ,

$$A \xrightarrow{-2H_1+H_2} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{-1H_1+H_3} \left( \begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \end{array} \right)$$

Tiếp theo, với  $j = 2$ ,

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{\frac{1}{3}H_2} \left( \begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{1H_2+H_1} \left( \begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{-2H_2+H_3} \left( \begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 1 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Ma trận hệ số cuối cùng có dạng bậc thang rút gọn. Ta có hệ phương trình tương đương

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 3 \\ x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có vô số nghiệm:  $(x_1, x_2, x_3) = (3 - s, 2 + s, s)$ , với  $s \in \mathbb{R}$  tùy ý.

**Ví dụ 1.16. (Hệ vô nghiệm)** Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 7x_3 - 7x_4 = 2 \\ -3x_1 + 4x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 2 \end{cases}$$

Ma trận mở rộng là

$$A = \left( \begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 7 & -7 & 2 \\ -3 & 4 & -5 & -6 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & -5 & 2 \end{array} \right)$$

Đầu tiên, với  $j = 1$ ,

$$\begin{aligned} A & \xrightarrow{H_1 \leftrightarrow H_3} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & -5 & 2 \\ -3 & 4 & -5 & -6 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & -7 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{3H_1+H_2} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & -5 & 2 \\ 0 & 7 & 7 & -21 & 9 \\ 2 & 1 & 7 & -7 & 2 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{-2H_1+H_3} \left( \begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 4 & -5 & 2 \\ 0 & 7 & 7 & -21 & 9 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -2 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Với  $j = 2$ ,

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{H_2 \leftrightarrow H_3} \left( \begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 4 & -5 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 7 & 7 & -21 & 9 \end{array} \right) \xrightarrow{-1H_2} \left( \begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 4 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 7 & 7 & -21 & 9 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{-1H_2+H_1} \left( \begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 7 & 7 & -21 & 9 \end{array} \right) \xrightarrow{-7H_2+H_3} \left( \begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Ma trận hệ số cuối cùng có dạng bậc thang rút gọn. Hàng cuối cho ta đẳng thức  $0 = -5$  (vô lí). Vậy hệ đã cho vô nghiệm.

Dưới đây là một ví dụ tương tự như ví dụ trước, chỉ bỏ đi phần có ẩn  $x_4$ .

**Ví dụ 1.17. (Hệ vô nghiệm)** Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 7x_3 = 2 \\ -3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 = 2 \end{cases}$$

Quá trình biến đổi hàng để đưa ma trận cơ sở về dạng bậc thang giống hệt như trong Ví dụ trước.

$$A = \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 7 & 2 \\ -3 & 4 & -5 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{H_1 \leftrightarrow H_3} \dots \xrightarrow{-7H_2 + H_3} \left( \begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 3 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{array} \right).$$

Hàng cuối cho ta đẳng thức  $0 = -5$  (vô lí). Vậy hệ đã cho vô nghiệm.

### 1.3. Tập nghiệm của một hệ phương trình tuyến tính

Như trong tiết đầu tiên, chúng ta đã biết tập nghiệm của hệ phương trình tuyến tính hai ẩn có thể là một điểm (duy nhất nghiệm), một đường thẳng (vô số nghiệm), hoặc tập rỗng (vô nghiệm).

Tiếp theo chúng ta tìm hiểu ý nghĩa hình học của các tập nghiệm của các hệ  $3 \times 3$  trong các Ví dụ 1.14, 1.15 và 1.17.

- (a) Ở Ví dụ 1.14, hệ có duy nhất nghiệm  $(x_1, x_2, x_3) = (-3, 5, 2)$ . Nếu mô tả mỗi phương trình bởi một mặt phẳng trong hệ tọa độ 3 chiều  $Ox_1x_2x_3$ , ba mặt phẳng này giao nhau tại một điểm duy nhất có tọa độ  $(-3, 5, 2)$ .
- (b) Ở Ví dụ 1.15, hệ có vô số nghiệm. Tập nghiệm là đường thẳng trong không gian ba chiều có phương trình tham số  $(x_1, x_2, x_3) = (3 - s, 2 + s, s)$ . Đường thẳng này là giao tuyến chung của ba mặt phẳng.
- Chúng ta dễ dàng xây dựng được ví dụ hệ  $3 \times 3$  có vô số nghiệm mà tập nghiệm là một mặt phẳng. Chẳng hạn lấy ba phương trình tương đương nhau.
- (c) Ở Ví dụ 1.17, hệ này vô nghiệm. Tập nghiệm bằng rỗng.

Trong trường hợp hệ có số ẩn nhiều hơn 3, ta không thể vẽ được tập nghiệm cho mỗi phương trình, chẳng hạn như trong Ví dụ 1.16. Tuy nhiên vẫn có thể nói về hình học của tập nghiệm.

Trong các chương tiếp theo chúng ta sẽ còn quay lại chủ đề về hệ phương trình tuyến tính nhiều lần. Để dễ theo dõi, dưới đây là các chủ đề sẽ gặp:

- Công thức tường minh cho nghiệm của hệ phương trình tuyến tính không suy biến: Chương 2, tiết 2.2 (thông qua ma trận nghịch đảo) và 2.3 (Công thức Cramer).
- Hình học của tập nghiệm dựa vào chiều của không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất: Chương 3, tiết 3.3.

## Bài tập chương 1

**1.1.** Xác định xem các ma trận dưới đây có dạng bậc thang hay không. Nếu có, tiếp tục xác định xem có phải dạng bậc thang rút gọn không.

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & \text{(b)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, & \text{(c)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \text{(d)} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & & \end{array}$$

**1.2.** Giải các hệ phương trình sau đây theo phương pháp khử Gauss.

$$\text{(a)} \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_1 - 7x_2 + 4x_3 = 10 \end{cases} \quad \text{(b)} \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = -2 \\ 2x_1 + x_2 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases}$$

**1.3.** Giải các hệ phương trình trong bài tập trước theo phương pháp khử Gauss-Jordan.

**1.4.** Giải các hệ phương trình sau theo các tham số  $a, b, c$

$$\text{(a)} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = a \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_1 - 7x_2 + 4x_3 = 10 \end{cases} \quad \text{(b)} \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = a \\ 2x_1 + x_2 = b \\ 3x_1 + 2x_2 = c \end{cases}$$

**1.5.** Tìm  $k$  để hệ sau vô nghiệm

$$\begin{cases} kx + y = 0 \\ x + ky = 1 \end{cases}$$

**1.6.** Tìm  $k$  để hệ sau có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + kx_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

**1.7.** (a) Chứng minh rằng nếu  $ad - bc \neq 0$  thì dạng bậc thang rút gọn của

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ là } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Từ kết quả ở phần (a) chứng minh rằng hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} ax + by = k \\ cx + dy = l \end{cases}$$

có duy nhất nghiệm khi và chỉ khi  $ad - bc \neq 0$ .

**1.8.** Xét hệ phương trình tuyến tính ba phương trình ba ẩn với ma trận mở rộng

$$\left( \begin{array}{ccc|c} -7 & -6 & -12 & b_1 \\ 5 & 5 & 7 & b_2 \\ 1 & 0 & 4 & b_3 \end{array} \right)$$

(Xem lại Ví dụ 1.14). Hãy giải đồng thời cho các trường hợp sau

$$(a) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (b) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (c) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**1.9.** Biết rằng đồ thị hàm số  $y = ax^2 + bx + c$  đi qua 3 điểm có tọa độ  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  và  $(x_3, y_3)$ . Chứng minh rằng các hệ số  $a, b, c$  là nghiệm của hệ phương trình tuyến tính có ma trận mở rộng là

$$\left( \begin{array}{ccc|c} x_1^2 & x_1 & 1 & y_1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 & y_2 \\ x_3^2 & x_3 & 1 & y_3 \end{array} \right).$$

Hãy mở rộng kết quả trên cho đồ thị hàm bậc  $n$  đi qua  $n + 1$  điểm.

**1.10.** Cho  $f(x)$  là một đa thức bậc hai. Biết rằng đồ thị hàm số  $y = f(x)$  đi qua 3 điểm có tọa độ  $(1, 8)$ ,  $(3, -2)$  và  $(4, -13)$ . Hãy xác định  $f(x)$ .

**1.11.** Hãy tìm đa thức  $P(x)$  có bậc nhỏ nhất, sao cho đồ thị hàm số  $y = P(x)$  đi qua 4 điểm có tọa độ  $(-1, -5)$ ,  $(1, 3)$ ,  $(2, 7)$  và  $(3, 19)$ .

**1.12.** Hãy tìm đa thức bậc ba  $P(x)$  trong mỗi trường hợp sau:

(a)  $P(0) = 1, P'(0) = 5, P(1) = 7$  và  $P'(1) = 9$ .

(b)  $P(1) = 3, P'(1) = 0, P(2) = 7$  và  $P'(2) = 1$ .

**1.13.** Bằng phương pháp khử Gauss-Jordan ma trận mở rộng của một hệ phương trình tuyến tính đưa được về dạng bậc thang rút gọn sau

$$\left( \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Hãy viết một hệ phương trình tuyến tính có các hệ số khác 0 với ma trận dạng bậc thang rút gọn của nó bằng ma trận ở trên.

**1.14.** Mỗi ma trận thì có duy nhất ma trận bậc thang rút gọn, nhưng có thể có nhiều ma trận bậc thang. Hãy cho một ví dụ như vậy.

**1.15.** Liệt kê tất cả các ma trận  $2 \times 2$  có dạng bậc thang rút gọn.

**1.16.** Liệt kê tất cả các ma trận  $3 \times 3$  có dạng bậc thang rút gọn.

**1.17.** Hãy lấy các ví dụ hệ phương trình tuyến tính ba ẩn

(a) Vô nghiệm do có ít nhất một cặp phương trình là các mặt phẳng song song không trùng nhau.

(b) Vô nghiệm do cả ba giao tuyến (của từng đôi mặt phẳng) là ba đường thẳng song song với nhau.

**1.18.** Để tính tích phân các phân thức một biến  $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ , một cách làm truyền thống là thực hiện phép chia đa thức  $P(x) = Q(x).T(x) + R(x)$  (với  $R(x)$  là phần dư), sau đó viết phân thức  $\frac{R(x)}{Q(x)}$  dưới dạng tổng các phân thức

đơn giản có dạng  $\frac{c}{(x-a)^n}$ . Giải hệ phương trình tuyến tính giúp chúng ta tìm được những phân tích như vậy. Tìm  $A, B, C$  trong các trường hợp sau:

$$(a) \frac{3x^2-3x-2}{(x+2)(x-2)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}.$$

$$(b) \frac{3x^2+3x-2}{(x+1)^2(x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x+1)^2}.$$

$$(c) \frac{x^4-1}{(x-2)(x+3)^2} = x - 4 + \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x+3)^2}.$$

**1.19.** Chứng minh rằng nếu một hệ phương trình tuyến tính có số phương trình ít hơn số ẩn thì hoặc vô nghiệm hoặc vô số nghiệm. Hãy lấy ví dụ cho mỗi trường hợp.

**1.20.** Với  $n \geq 3$ . Hãy tìm dạng bậc thang rút gọn của ma trận  $n \times n$  sau

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ n+1 & n+2 & n+3 & \dots & 2n \\ 2n+1 & 2n+2 & 2n+3 & \dots & 3n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n^2-n+1 & n^2-n+2 & n^2-n+3 & \dots & n^2 \end{pmatrix}.$$



# Chương 2

## Ma trận và định thức

---

2.1. Ma trận và các phép toán . . . . .	22
2.2. Định thức và các tính chất . . . . .	29
2.3. Một vài ứng dụng của định thức . . . . .	36
Bài tập chương 2 . . . . .	41

---

Trong chương trước chúng ta đã được làm quen với ma trận thông qua việc giải hệ phương trình tuyến tính bằng phương pháp khử Gauss. Ở chương này chúng ta sẽ đi vào chi tiết hơn, cụ thể sẽ tìm hiểu các phép toán của ma trận, các khái niệm quan trọng như ma trận nghịch đảo, định thức, ứng dụng ma trận nghịch đảo và định thức vào việc giải hệ phương trình tuyến tính. Ngoài ra, sẽ trình bày ứng dụng hình học của định thức trong việc tính diện tích và thể tích.

### 2.1. Ma trận và các phép toán

Nhắc lại, một ma trận  $m \times n$  là một bảng số gồm  $m$  hàng và  $n$  cột

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Để đơn giản, ta kí hiệu  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ , trong đó  $a_{ij}$  là phần tử ở hàng  $i$  và cột  $j$ . Ta gọi  $m \times n$  là **cỡ** của  $A$ .

Ma trận  $A$  được gọi là một **ma trận vuông** nếu  $m = n$ . Khi đó, ta nói  $A$  là một **ma trận vuông cỡ  $n$** .

**Định nghĩa 2.1.** Hai ma trận được gọi là **bằng nhau** nếu chúng có cùng cỡ và có các phần tử ở các vị trí tương ứng đôi một bằng nhau. Cụ thể, với  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  và  $B = (b_{kl})_{p \times q}$ , khi đó

$$A = B \iff m = p, n = q \text{ và } a_{ij} = b_{ij}, \forall 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n.$$

**Định nghĩa 2.2.** Ma trận chuyển vị của ma trận  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  là ma trận được kí hiệu bởi  $A^t$ , đó là ma trận cỡ  $n \times m$  có phần tử hàng  $j$  cột  $i$  bằng  $a_{ij}$ .

Như vậy  $A^t$  thu được từ  $A$  bằng cách hoán đổi hàng thành cột.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>Chữ  $t$  trong  $A^t$  là chữ cái đầu tiên của từ *transpose*, có nghĩa "đổi chỗ, chuyển vị trí" trong tiếng Anh. Tránh hiểu nhầm với kí hiệu lũy thừa.

Ví dụ, với  $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$  thì  $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$ .

**Định nghĩa 2.3.** Phép cộng (tương ứng, trừ) cho hai ma trận cùng cỡ được định nghĩa đơn giản bằng cách cộng (tương ứng, trừ) các phần tử có cùng vị trí ở hai ma trận. Cụ thể,

$$(a_{ij})_{m \times n} \pm (b_{ij})_{m \times n} = (a_{ij} \pm b_{ij})_{m \times n}.$$

Ví dụ

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 & 4+3 & 0+8 \\ 3+4 & 6+2 & 7+(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 4 \end{pmatrix}.$$

**Định nghĩa 2.4.** Phép nhân một số với một ma trận được định nghĩa như sau:

$$c \cdot (a_{ij})_{m \times n} = (c \cdot a_{ij})_{m \times n}.$$

Ví dụ

$$5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 20 & 0 \\ 15 & 30 & 35 \end{pmatrix}, \quad (-2) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -8 & 0 \\ -6 & -12 & -14 \end{pmatrix}.$$

Phép nhân hai ma trận  $A \times B$  đòi hỏi cỡ của chúng phải phù hợp, số cột của  $A$  bằng số hàng của  $B$ . Cụ thể như sau:

**Định nghĩa 2.5.** Với  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  và  $B = (b_{jk})_{n \times p}$ , ma trận  $A \times B = (c_{ik})_{m \times p}$  là một ma trận với

$$c_{ik} = \text{"Hàng } i \text{ của } A" \times \text{"Cột } k \text{ của } B"$$

$$AB = \begin{pmatrix} & \vdots & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ & \vdots & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dots & b_{1j} & \dots \\ & b_{2j} & \\ & \vdots & \\ & b_{nj} & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \dots & c_{ij} & \dots \\ & \vdots & \end{pmatrix}$$

Ở đây

$$\text{"Hàng } i \text{ của } A" \times \text{"Cột } k \text{ của } B" = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \dots + a_{in}b_{nk}$$

**Ví dụ 2.6.** Trong ví dụ dưới đây  $A$  có cỡ  $3 \times 2$  và  $B$  có cỡ  $2 \times 2$ . Tích  $BA$  không có nghĩa. Tích  $AB$  được tính như sau:

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 6 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 0 \cdot 5 & 2 \cdot 3 + 0 \cdot 7 \\ 4 \cdot 1 + 6 \cdot 5 & 4 \cdot 3 + 6 \cdot 7 \\ 8 \cdot 1 + 2 \cdot 5 & 8 \cdot 3 + 2 \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 34 & 54 \\ 18 & 38 \end{pmatrix}$$

**Định nghĩa 2.7.** Một ma trận vuông có các phần tử trên đường chéo chính<sup>2</sup> bằng 1, còn các phần tử còn lại bằng 0 được gọi là một **ma trận đơn vị**. Dưới đây là ma trận đơn vị cỡ  $n$ :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Ma trận đơn vị có tính chất như số "1" trong phép nhân. Cụ thể, với mọi ma trận  $A$  có số cột bằng  $n$  và mọi ma trận  $B$  có số hàng bằng  $n$  ( $A, B$  không nhất thiết là ma trận vuông), ta có

$$AI_n = A, \quad I_n B = B.$$

**Định nghĩa 2.8.** Một ma trận vuông có tất cả các phần tử nằm ngoài đường chéo chính bằng 0 được gọi là một **ma trận đường chéo**. Dưới đây là một ma trận đường chéo cỡ  $n$ :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Nhân một ma trận  $A$  bởi một ma trận đường chéo  $D$  về phía bên trái sẽ làm các hàng của  $A$  được nhân lên với bội là các phần tử trên đường chéo của  $D$ .

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 21 \\ -2 & -8 & -12 \end{pmatrix}.$$

Ngược lại, nhân một ma trận  $A$  bởi một ma trận đường chéo  $D$  về phía bên phải sẽ làm các cột của  $A$  được nhân lên với bội là các phần tử trên đường chéo của  $D$ .

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ 21 & -2 \\ 12 & -12 \end{pmatrix}.$$

**Tính chất 2.9.** Các tính chất sau đây có thể chứng minh trực tiếp từ định nghĩa.

1. Phép nhân có tính kết hợp

$$(AB)C = A(BC).$$

2. Phép nhân có tính phân phối đối với phép cộng

$$A(B + C) = AB + AC, \quad (B + C)A = BA + CA.$$

---

<sup>2</sup>Đường chéo hướng xuống dưới gọi là đường chéo chính, đường chéo hướng lên trên gọi là đường chéo phụ.

3. Phép nhân nói chung không giao hoán

$$AB \neq BA.$$

**Ví dụ 2.10.** Sau đây là hai ví dụ cho Tính chất 3 nói trên.

(a) Lấy  $A$  và  $B$  đều là các ma trận vuông cỡ bằng 2. Tích của chúng như sau

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix}.$$

(b) Lấy  $A$  có cỡ  $m \times n$  và  $B$  có cỡ  $n \times m$ . Với  $m \neq n$ , ta có  $AB$  và  $BA$  là các ma trận vuông có cỡ khác nhau, tương ứng là  $m$  và  $n$ . Do đó chúng không thể nào bằng nhau.

**Định nghĩa 2.11.** Thực hiện liên tiếp các phép nhân, ta định nghĩa phép lấy lũy thừa ma trận  $A$  như sau

$$A^2 = AA, \quad A^3 = A^2A, \dots, \quad A^n = A^{n-1}A.$$

**Định nghĩa 2.12.** Từ ma trận đơn vị  $I_n$ , thực hiện một phép biến đổi hàng sơ cấp ta thu được một **ma trận sơ cấp** tương ứng. Cụ thể ta có ba loại ma trận sơ cấp như sau:

1. Hoán đổi hàng  $i$  và hàng  $j$  cho nhau:

$$I \xrightarrow{H_i \leftrightarrow H_j} P_{i,j}.$$

2. Nhân hàng  $i$  với một hằng số  $c$  khác 0:

$$I \xrightarrow{cH_i} M_i(c).$$

3. Cộng thêm vào hàng  $i$  bởi bội  $c$  lần hàng  $j$ :

$$I \xrightarrow{cH_j + H_i} C_{i,j}(c).$$

Ví dụ với cỡ  $n = 4$ , sau đây là một vài ma trận sơ cấp

$$P_{2,4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2(5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C_{2,4}(5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Từ định nghĩa ta có nhân ma trận với các ma trận sơ cấp về bên trái thu được phép biến đổi hàng sơ cấp tương ứng. Cụ thể

**Mệnh đề 2.13.** 1. Hoán đổi hàng  $i$  và hàng  $j$  cho nhau.

$$A \xrightarrow{H_i \leftrightarrow H_j} B \text{ khi và chỉ khi } P_{i,j}A = B.$$

2. Nhân hàng  $i$  với một hằng số  $c$  khác 0.

$$A \xrightarrow{cH_i} B \text{ khi và chỉ khi } M_i(c)A = B.$$

3. Cộng thêm vào hàng  $i$  bởi  $c$  lần hàng  $j$ .

$$A \xrightarrow{cH_j+H_i} B \text{ khi và chỉ khi } C_{i,j}(c)A = B.$$

Kết quả quan trọng sau đây là hệ quả của Định lý 1.12 và các tính chất vừa nêu trên.

**Định lý 2.14.** Giả sử  $R$  là ma trận bậc thang rút gọn của một ma trận  $A$  cỡ  $m \times n$ . Khi đó, tồn tại các ma trận sơ cấp  $E_1, E_2, \dots, E_k$  có cỡ  $m \times m$  sao cho

$$R = E_k(\dots(E_2(E_1A))) = (E_k \dots E_2 E_1)A.$$

**Định nghĩa 2.15.** Giả sử  $A$  là một ma trận vuông cỡ  $n$ . Một ma trận vuông  $B$  cỡ  $n$  thỏa mãn tính chất

$$AB = BA = I_n$$

được gọi là một **ma trận nghịch đảo** của  $A$ .

**Nhận xét 2.16.** Từ định nghĩa và tính chất kết hợp ta có ma trận nghịch đảo của  $A$  là duy nhất. Thật vậy, giả sử  $A$  có hai ma trận nghịch đảo  $B$  và  $C$ . Khi đó

$$B = I_n B = (CA)B = C(AB) = CI_n = C.$$

Vậy  $B = C$ . Do ma trận nghịch đảo của  $A$  duy nhất, ta có thể kí hiệu bởi  $A^{-1}$ .

**Nhận xét 2.17.** Mặc dù không có khái niệm phép chia ma trận, khái niệm ma trận nghịch đảo giúp ta thực hiện tương tự như phép chia. Cụ thể, khi giải hệ phương trình tuyến tính  $Ax = b$ . Nếu  $A$  là một ma trận vuông khả nghịch, nhân hai vế đẳng thức này với  $A^{-1}$  về bên trái ta có

$$x = I_n x = (A^{-1}A)x = A^{-1}(Ax) = A^{-1}b.$$

Bằng cách này ta có thể tìm được nghiệm  $x$  nếu biết  $A^{-1}$ .

Với cách làm tương tự, nếu ma trận vuông  $A$  khả nghịch,  $A$ ,  $B$  và  $C$  cùng cỡ thì

$$AB = AC \iff B = C.$$

**Ví dụ 2.18.** (Phép rút gọn không phải bao giờ cũng thực hiện được.)

Ví dụ sau đây có  $AB = AC$  nhưng  $B \neq C$ . Trong trường hợp này  $A$  là một ma trận không khả nghịch.

$$\text{Với } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ta có } AB = AC = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Từ Mệnh đề 2.13 chúng ta có ngay kết quả dưới đây.

**Bổ đề 2.19.** *Các ma trận sơ cấp có ma trận nghịch đảo như sau:*

$$P_{i,j}^{-1} = P_{j,i}, \quad M_i(c)^{-1} = M_i(1/c), \quad C_{i,j}(c)^{-1} = C_{i,j}(-c).$$

**Mệnh đề 2.20.** *Cho  $A$  là một ma trận vuông cỡ  $n$ . Giả sử  $A$  có ma trận bậc thang rút gọn là ma trận đơn vị  $I_n$ . Theo Định lý 2.14 tồn tại các ma trận sơ cấp  $E_1, \dots, E_k$  sao cho  $(E_k \dots E_2 E_1)A = I_n$ . Khi đó  $B = E_k \dots E_2 E_1$  là ma trận nghịch đảo của  $A$ .*

*Chứng minh.* Ta chỉ cần chứng minh  $AB = I_n$ . Thật vậy, nhân lần lượt vào hai vế của  $(E_k \dots E_2 E_1)A = I_n$  vào bên trái với  $E_k^{-1}, \dots, E_1^{-1}$  ta có

$$A = E_1^{-1} \dots E_k^{-1} E_k \dots E_1 A = E_1^{-1} \dots E_k^{-1}.$$

Tiếp tục nhân lần lượt vào hai vế của  $A = E_1^{-1} \dots E_k^{-1}$  với  $E_k, \dots, E_1$  về bên phải ta có

$$AB = AE_k \dots E_1 = E_1^{-1} \dots E_k^{-1} E_k \dots E_1 = I_n.$$

□

Mệnh đề dưới đây cho ta cách tính ma trận nghịch đảo một cách thực hành hơn.

**Mệnh đề 2.21.** *Cho  $A$  là một ma trận vuông cỡ  $n$ . Giả sử  $A$  có ma trận bậc thang rút gọn là ma trận đơn vị  $I_n$ . Xét ma trận mở rộng  $(A|I_n)$ . Quá trình biến đổi hàng ta có*

$$(A|I_n) \rightarrow (I_n|B).$$

*Khi đó  $B$  là ma trận nghịch đảo của  $A$ .*

*Chứng minh.* Trong chương một, khi giải hệ phương trình tuyến tính  $Ax = b$  (với  $A$  là ma trận vuông cỡ  $n$ ,  $b = (b_1, \dots, b_n)^t$  và  $x = (x_1, \dots, x_n)^t$ ) bằng phương pháp khử Gauss-Jordan nếu

$$(A|b) \rightarrow (I_n|c), \quad \text{với } c = (c_1, \dots, c_n)^t$$

thì hệ có nghiệm duy nhất  $x = c$ . Tức là  $Ac = b$ .

Quá trình biến đổi  $(A|I_n) \rightarrow (I_n|B)$  cho ta đồng thời  $n$  đẳng thức

$$Ab_i = e_i, \text{ với } i = 1, \dots, n$$

trong đó  $e_i$  và  $b_i$  tương ứng là vectơ cột thứ  $i$  của  $I_n$  và  $B$ . Do đó  $AB = I_n$ .

Theo mệnh đề trước,  $A$  khả nghịch, nhân hai vế của  $AB = I_n$  với  $A^{-1}$  vào bên trái ta có  $B = A^{-1}$ . □

**Ví dụ 2.22.** Tìm ma trận nghịch đảo của

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Thực hiện quá trình biến đổi hàng sơ cấp như sau:

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) & \xrightarrow{-2H_1+H_2} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{-1/3H_2} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & -1/3 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{-H_2+H_1} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 2/3 & -1/3 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Vậy ma trận nghịch đảo cần tìm là

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}.$$

Sau đây là một kết quả được dùng ở các chương sau.

**Mệnh đề 2.23.**  $(AB)^t = B^t A^t$ .

*Chứng minh.* Giả sử  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  và  $B = (b_{jk})_{n \times p}$ . Khi đó  $(AB)^t$  có cỡ  $p \times m$ , phần tử hàng  $k$  cột  $i$  của nó bằng phần tử hàng  $i$  cột  $k$  của  $AB$ , do đó bằng

$$\begin{aligned} \text{"Hàng } i \text{ của } A" \times \text{"Cột } k \text{ của } B" &= a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{in}b_{nk} \\ &= b_{1k}a_{i1} + b_{2k}a_{i2} + \cdots + b_{nk}a_{in} \\ &= \text{"Hàng } k \text{ của } B^t" \times \text{"Cột } i \text{ của } A^t" \end{aligned}$$

Về phải sau cùng là phần tử hàng  $k$  cột  $i$  của  $B^t A^t$ . Ta có điều phải chứng minh.  $\square$

## 2.2. Định thức và các tính chất

Theo phần (b) của bài tập 1.7 ở chương 1, ta có điều kiện cần và đủ để hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} ax + by = k \\ cx + dy = l \end{cases}$$

là  $ad - bc \neq 0$ . Đối với hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} ax + by + cz = h \\ dx + ey + fz = k \\ mx + ny + pz = l \end{cases}$$

điều kiện cần và đủ<sup>3</sup> để hệ có nghiệm duy nhất là

$$aep + bfm + cdn - cem - afn - bdp \neq 0.$$

---

<sup>3</sup>T.S. Seki (Nhật, 1642-1708) và G.W. Leibniz (Đức, 1646-1716) phát hiện độc lập vào năm 1683.

Mở rộng cho hệ phương trình tuyến tính  $n$  phương trình  $n$  ẩn, Leibniz khám phá ra một đa thức  $D$  bậc  $n$  với các biến là các hệ số của ma trận hệ số, và điều kiện cho hệ có nghiệm duy nhất là  $D \neq 0$ . Về sau  $D$  được gọi là định thức.

Dưới đây là định nghĩa định thức của Laplace<sup>4</sup> để tính theo truy hồi.

**Định nghĩa 2.24. Định thức** của một ma trận vuông  $A = (a_{ij})_{n \times n}$ , kí hiệu bởi  $\det A$  hay

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

được định nghĩa một cách truy hồi như sau:

1.  $\det(A) = a_{11}$  với  $n = 1$ ,  $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$  với  $n = 2$ .
2. Với  $n \geq 2$

$$\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + \dots + a_{1n}C_{1n}.$$

Kí hiệu  $C_{1j}$  trong tổng ở trên được định nghĩa như sau.

**Định nghĩa 2.25.** Cho ma trận vuông  $A = (a_{ij})_{n \times n}$  với  $n \geq 2$ . **Định thức con**  $M_{ij}$  của phần tử  $a_{ij}$  là định thức của ma trận  $(n-1) \times (n-1)$  thu được từ  $A$  bằng cách bỏ đi hàng  $i$  và cột  $j$ . **Phần bù đại số**  $C_{ij}$  của phần tử  $a_{ij}$  được định nghĩa bởi

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Dấu của  $(-1)^{i+j}$  trong ma trận thay đổi luân phiên, ví dụ trong các trường hợp sau:

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}.$$

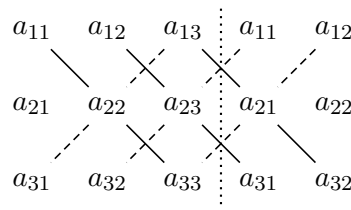
**Ví dụ 2.26.** Với  $n = 3$ , ta có

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}. \end{aligned}$$

Có một cách dễ nhớ khai triển định thức trong trường hợp  $n = 3$ , gọi là sơ đồ Sarrus. Bằng cách viết thêm 2 cột đầu ngay đằng sau ma trận, ta có ma trận  $3 \times 5$ . Kẻ thêm các đường chéo, các đường liền nét hướng xuống dưới, các đường đứt đoạn hướng lên trên.

<sup>4</sup>P-S. Laplace (Pháp, 1749-1827).





Định thức ma trận bằng tổng của các tích ba phần tử nằm trên các đường chéo, các đường liền nét mang dấu cộng, các đường đứt đoạn mang dấu trừ. Cụ thể

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

**Ví dụ 2.27.** Định thức của một ma trận đường chéo bằng tích các phần tử trên đường chéo. Đặc biệt ma trận đơn vị  $I_n$  có định thức bằng 1.

Chúng ta thừa nhận kết quả sau.

**Định lý 2.28** (Khai triển Laplace). (a) Theo hàng  $i$

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \dots + a_{in}C_{in}.$$

(b) Theo cột  $j$

$$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \dots + a_{nj}C_{nj}.$$

**Ví dụ 2.29.** Xét ma trận  $4 \times 4$  sau

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 1 \\ 9 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & -1 \\ 4 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Khai triển Laplace theo cột thứ ba

$$\begin{aligned} \det A &= (0)(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 9 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 6 \end{vmatrix} + (0)(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 6 \end{vmatrix} + \\ & \quad (-2)(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 9 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{vmatrix} + (2)(-1)^{4+3} \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 9 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 0 + 0 + (-2)(-107) + (-2)(61) = 92. \end{aligned}$$

Khai triển Laplace theo hàng thứ tư

$$\begin{aligned} \det A &= (4)(-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} + (1)(-1)^{4+2} \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 9 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} \\ & \quad + (2)(-1)^{4+3} \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 9 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} + (6)(-1)^{4+4} \begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 9 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} \\ &= (-4)(10) + (1)(-22) + (-2)(61) + 6(46) = 92. \end{aligned}$$

Nhận xét, trong tính toán định thức bằng phương pháp khai triển Laplace, chúng ta nên khai triển theo hàng hoặc cột có chứa nhiều số không nhất.

Mệnh đề sau đây cho ta một số trường hợp ma trận có định thức bằng 0.

**Mệnh đề 2.30.** *Ma trận vuông thỏa mãn một trong ba điều kiện sau đây thì có định thức bằng 0.*

- (a) *Có một hàng gồm toàn các số 0.*
- (b) *Có hai hàng bằng nhau.*
- (c) *Có một hàng bằng bội của một hàng khác.*

*Chứng minh.* (a) Khai triển Laplace theo hàng chỉ toàn số 0 này ta có định thức bằng 0.

(b) Khi hoán đổi hai hàng giống nhau này ma trận không có gì thay đổi nên định thức cũng vậy. Mặt khác, theo kết quả phần (b) trong Mệnh đề 2.32 định thức lại đổi dấu. Vì vậy định thức phải bằng 0.

(c) Dùng kết quả phần (a) trong Mệnh đề 2.32 và phần (b) ở trên.  $\square$

**Mệnh đề 2.31.** *Cho ma trận  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ . Giả sử hàng  $i$  của  $A$  có tính chất*

$$(a_{i1}, \dots, a_{in}) = (b_1 + c_1, \dots, b_n + c_n).$$

*Khi đó  $\det A = \det B + \det C$ , trong đó  $B$  và  $C$  tương ứng là các ma trận thu được từ  $A$  bằng cách thay hàng  $i$  bởi  $(b_1, \dots, b_n)$  và  $(c_1, \dots, c_n)$ .*

*Chứng minh.* Dựa và khai triển Laplace theo hàng  $i$ .  $\square$

Mệnh đề sau đây cho mối liên hệ của định thức qua các phép biến đổi sơ cấp theo hàng.

**Mệnh đề 2.32.** (a) *Nếu nhân một hàng của ma trận  $A$  với một hằng số  $c$  thì giá trị định thức sẽ gấp  $c$  lần.*

(b) *Nếu hoán đổi hai hàng bất kỳ cho nhau thì định thức đổi dấu.*

(c) *Nếu cộng vào một hàng bằng  $c$  lần một hàng khác thì giá trị định thức không thay đổi.*

*Chứng minh.* (a) Giả sử hàng  $r$  của  $A$  được nhân bởi hằng số  $c$ . Gọi  $A_r$  là ma trận mới. Khai triển Laplace theo hàng  $r$ , ta có

$$\det A_r = (ca_{r1})A_{r1} + \dots + (ca_{rn})A_{rn} = c(a_{r1}A_{r1} + \dots + a_{rn}A_{rn}) = c \det A.$$

(b) Chứng minh bằng qui nạp theo cỡ  $n$  của ma trận.

Khi  $n = 2$ : Đổi chỗ hai hàng của  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  thu được ma trận  $B = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{pmatrix}$ . Rõ ràng  $\det A = -\det B$ .

Giả sử khẳng định đúng đến  $n = k - 1$ . Ta chứng minh khẳng định đúng với  $n = k$ . Thật vậy, giả sử  $A$  có cỡ  $k$ , đổi chỗ hai hàng nào đó ta thu được ma trận  $B$ . Khai triển Laplace cho định thức của  $A$  và định thức của  $B$  theo hàng  $i$  không phải là hai hàng trên. Rõ ràng hàng  $i$  của  $A$  và hàng  $i$  của  $B$  giống nhau, các phần bù đại số tương ứng có cỡ bằng  $n - 1$  theo giả thiết qui nạp có định thức đổi dấu. Từ đó suy ra  $\det A = -\det B$ .

(c) Dựa vào Mệnh đề 2.31 và phần (c) của Mệnh đề 2.30. □

Áp dụng tính chất (a) ở Mệnh đề trên lặp lại  $n$  lần ta có hệ quả sau.

**Hệ quả 2.33.** Với  $A$  là ma trận vuông cỡ  $n$ , ta có

$$\det(cA) = c^n \det A.$$

Sau đây là một ví dụ ứng dụng quá trình biến đổi sơ cấp theo hàng.

**Ví dụ 2.34.** Giả sử cần tính định thức ma trận  $4 \times 4$  sau đây

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Thực hiện các phép biến đổi sơ cấp theo hàng

$$\begin{aligned}
A \xrightarrow{H_1 \leftrightarrow H_2} A_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2H_1+H_2} A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -6 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 4 & 0 \end{pmatrix} \\
\xrightarrow{1H_1+H_3} A_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -6 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 3 \\ 3 & 5 & 4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-3H_1+H_4} A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -6 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 3 \\ 0 & -4 & 7 & -3 \end{pmatrix} \\
\xrightarrow{1H_3+H_2} A_5 &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & -2 & 3 \\ 0 & -4 & 7 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{2}H_2} A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 4 & -2 & 3 \\ 0 & -4 & 7 & -3 \end{pmatrix} \\
\xrightarrow{-4H_2+H_3} A_7 &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 11 \\ 0 & -4 & 7 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{4H_2+H_4} A_8 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 11 \\ 0 & 0 & 3 & -11 \end{pmatrix} \\
\xrightarrow{-1H_3+H_4} A_9 &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & -22 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2H_4+H_3} A_{10} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 55 \\ 0 & 0 & 1 & -22 \end{pmatrix} \\
\xrightarrow{H_3 \leftrightarrow H_4} A_{11} &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -22 \\ 0 & 0 & 0 & 55 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{55}H_4} A_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -22 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Theo Mệnh đề 2.32 ta có

$$\begin{aligned}
\det A &= -\det A_1 = -\det A_2 = -\det A_3 = -\det A_4 = -\det A_5 = 2 \det A_6 \\
&= 2 \det A_7 = 2 \det A_8 = 2 \det A_9 = 2 \det A_{10} = -2 \det A_{11} = 110 \det A_{12}
\end{aligned}$$

Ma trận  $A_{12}$  là một ma trận tam giác trên, do đó  $\det A_{12} = (1)(1)(1)(1) = 1$ .

Vậy  $\det A = -110(1) = -110$ .

**Nhận xét 2.35.** Phương pháp tính định thức ở trên khá phức tạp khi thực hiện bằng tay, nhưng khá hiệu quả nếu thực hiện bằng một chương trình máy tính.

**Mệnh đề 2.36.**  $\det A = \det A^t$ .

*Chứng minh.* Chứng minh bằng qui nạp theo  $n$  (cỡ của  $A$ ).

Trường hợp  $n = 1$  là hiển nhiên.

Giả sử có đẳng thức với mọi ma trận có cỡ  $n = k - 1$ .

Xét  $A$  có cỡ bằng  $k$ . So sánh khai triển Laplace cho định thức của  $A$  theo hàng thứ nhất và định thức của  $A^t$  theo cột thứ nhất, ta có

$$\det A = a_{11}C_{11} + \cdots + a_{1n}C_{1n}, \quad \det A^t = a_{11}D_{11} + \cdots + a_{1n}D_{1n},$$

trong đó  $C_{ij}$  và  $D_{ij}$  tương ứng là phần bù đại số của  $a_{ij}$  trong  $A$  và  $A^t$ . Theo giả thiết qui nạp ta có  $C_{1j} = D_{1j}$ , vì chúng bằng  $(-1)^{1+j}$  nhân với định thức của các ma trận có cỡ  $k - 1$  là chuyển vị của nhau.  $\square$

**Chú ý 2.37.** Từ tính chất trên các kết quả về định thức phát biểu cho hàng cũng đúng nếu phát biểu lại cho cột.

**Định nghĩa 2.38.** Một ma trận được gọi là **không suy biến** nếu định thức của nó khác không. Ngược lại nó được gọi là **suy biến**.

Kết quả sau cho ta tiêu chuẩn duy nhất nghiệm của một hệ phương trình tuyến tính có số phương trình bằng số ẩn. Như đã giới thiệu trong đầu chương, khái niệm định thức được đưa ra nhằm mục đích này.

**Mệnh đề 2.39.** *Cho trước một hệ phương trình tuyến tính có số phương trình bằng số ẩn. Khi đó hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi ma trận hệ số của nó không suy biến.*

*Chứng minh.* Gọi  $A$  là ma trận hệ số và  $R$  là ma trận bậc thang rút gọn của  $A$ . Hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi  $R$  là ma trận đơn vị. Áp dụng Mệnh đề 2.32 ta có điều phải chứng minh.  $\square$

**Mệnh đề 2.40.**  $\det(AB) = \det A \det B$ .

*Chứng minh.* Trước hết ta chứng minh cho trường hợp  $A = E$  là một ma trận sơ cấp. Nhắc lại, có ba dạng ma trận sơ cấp (xem Định nghĩa 2.12), định thức của chúng lần lượt là

$$\det P_{i,j} = -1, \quad \det M_i(c) = c, \quad \det C_{i,j}(c) = 1.$$

Mặt khác theo Mệnh đề 2.13, các ma trận  $P_{i,j}B$ ,  $M_i(c)B$  và  $C_{i,j}(c)B$  tương ứng là các ma trận thu được từ  $B$  qua các phép biến đổi sơ cấp 'hoán đổi 2 hàng', 'nhân vào một hàng' và 'cộng vào một hàng'. Do đó

$$\det P_{i,j}B = -\det B, \quad \det M_i(c)B = c \det B, \quad \det C_{i,j}(c)B = \det B.$$

Kết hợp hai nhóm đẳng thức ở trên, ta có  $\det(EB) = \det E \det B$ .

Từ đó, với  $E_1, E_2$  là hai ma trận sơ cấp, ta có

$$\det(E_2E_1B) = \det E_2 \det(E_1B) = \det E_2 \det E_1 \det B.$$

Tổng quát ta có  $\det(E_k \dots E_1B) = \det E_k \dots \det E_1 \det B$ .

Bây giờ ta sẽ chứng minh mệnh đề trong trường hợp tổng quát. Giả sử  $R$  là ma trận bậc thang rút gọn của  $A$ . Khi đó tồn tại các ma trận sơ cấp  $E_1, \dots, E_k$  sao cho  $E_k \dots E_1A = R$ . Hay  $A = E_1^{-1} \dots E_k^{-1}R$ . Do ma trận nghịch đảo của một ma trận sơ cấp cũng là một ma trận sơ cấp, nên  $A = F_1 \dots F_kR$  với  $F_i = E_i^{-1}$  là ma trận sơ cấp. Xét hai trường hợp:

Nếu  $A$  là một ma trận không suy biến thì  $R = I$ , hay  $A = F_1 \dots F_k$ . Khi đó

$$\det(AB) = \det(F_1 \dots F_kB) = \det F_1 \dots \det F_k \det B = \det A \det B.$$

Nếu  $A$  là một ma trận suy biến, khi đó hàng cuối cùng của  $R$  chỉ toàn số 0, suy ra hàng cuối cùng của ma trận  $RB$  cũng vậy. Do đó  $\det(RB) = 0$ . Ta có

$$\det(AB) = \det((F_1 \dots F_k R)B) = \det((F_1 \dots F_k)(RB)) = \det(F_1 \dots F_k) \det(RB) = 0.$$

Do  $A$  suy biến nên  $\det A \det B = 0$ . Vậy  $\det(AB) = \det A \det B$ .  $\square$

**Hệ quả 2.41.** Nếu ma trận  $A$  khả nghịch thì  $\det A^{-1} = 1/\det A$ .

*Chứng minh.* Từ Mệnh đề 2.40 ta có

$$1 = \det I_n = \det(AA^{-1}) = \det A \det A^{-1}.$$

Do đó  $\det A^{-1} = 1/\det A$ .  $\square$

### 2.3. Một vài ứng dụng của định thức

Trong tiết này chúng ta sẽ đưa ra ba ứng dụng của định thức. Đầu tiên là công thức tính ma trận nghịch đảo, tiếp đến là công thức nghiệm của hệ phương trình tuyến tính không suy biến. Chú ý trong Chương 1, bằng phương pháp khử Gauss-Jordan chúng ta có thể giải hệ phương trình tuyến tính và tính ma trận nghịch đảo, nhưng không có một công thức tường minh nào. Ứng dụng cuối cùng bàn về ý nghĩa hình học đẹp của định thức, đó là công thức tính diện tích, thể tích, ... qua định thức.

#### 2.3.1. Giải hệ phương trình tuyến tính theo phương pháp Cramer

**Định lý 2.42.** Cho  $A$  là một ma trận khả nghịch. Khi đó ma trận nghịch đảo của  $A$  xác định như sau

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} (C_{ij})^t = \frac{1}{|A|} (C_{ji}) = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix},$$

trong đó  $C_{ij}$  là phần bù đại số của  $a_{ij}$ .

*Chứng minh.* Đặt  $B = (C_{ij})^t$ . Đặt  $M = (m_{ij}) = AB$ . Ta có:

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}.$$

Mỗi phần tử trên đường chéo chính của  $M$  bằng

$$m_{ii} = a_{i1}C_{i1} + \cdots + a_{in}C_{in} = \det A$$

Dấu bằng thứ hai do khai triển Laplace định thức của  $A$  theo hàng thứ  $i$ .

Các phần tử nằm ngoài đường chéo chính có dạng

$$m_{ij} = a_{i1}C_{j1} + \cdots + a_{in}C_{jn} = 0, \quad i \neq j$$

Theo khai triển Laplace (theo hàng thứ  $j$ ), vế phải của đẳng thức ở trên là định thức của ma trận thu được từ  $A$  bằng cách thay hàng thứ  $j$  bằng hàng thứ  $i$ . Ma trận mới có hai hàng bằng nhau, nên định thức bằng 0.

Do đó  $AB = |A|I_n$ . Suy ra  $A(\frac{1}{|A|}B) = I_n$ . Nhân hai vế về bên trái với  $A^{-1}$ , ta có  $\frac{1}{|A|}B = A^{-1}$ . Vậy  $\frac{1}{|A|}B$  là ma trận nghịch đảo của  $A$ .  $\square$

**Ví dụ 2.43.** Ma trận  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 4 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$  có định thức bằng 77. Theo định lý trên, ma trận nghịch đảo của  $A$  là

$$A^{-1} = \frac{1}{77} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{77} \begin{pmatrix} 14 & -19 & 3 \\ 0 & 11 & -22 \\ 7 & 7 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/11 & -19/77 & 3/77 \\ 0 & 1/7 & -2/7 \\ 1/11 & 1/11 & 1/11 \end{pmatrix}.$$

**Định lý 2.44** (Công thức Cramer<sup>5</sup>). Nếu  $\det A \neq 0$  thì hệ phương trình tuyến tính  $n$  phương trình  $n$  ẩn  $Ax = b$  có nghiệm duy nhất

$$x_j = \frac{\det A_j}{\det A}, \quad 1 \leq j \leq n,$$

trong đó  $A_j$  là ma trận thu được từ  $A$  bằng cách thay cột  $j$  bằng cột  $b$ .

*Chứng minh.* Do  $\det A \neq 0$  nên ma trận  $A$  khả nghịch. Nhân hai vế  $Ax = b$  với  $A^{-1}$ , ta có

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1}b = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Dấu bằng thứ hai dựa vào công thức tính ma trận nghịch đảo ở Định lý 2.42. Do đó

$$x_j = \frac{1}{|A|} (b_1 C_{1j} + \cdots + b_n C_{nj}) = \frac{|A_j|}{|A|}.$$

Đẳng thức sau cùng dựa vào khai triển Laplace của định thức của  $A_j$  theo cột thứ  $j$ .  $\square$

**Ví dụ 2.45.** Giải hệ phương trình tuyến tính sau bằng phương pháp Cramer

$$\begin{cases} x_1 + x_2 &= 36 \\ 2x_1 + 4x_2 &= 100 \end{cases}$$

Do định thức của ma trận hệ số bằng  $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ . Theo định lý trên hệ có nghiệm duy nhất:

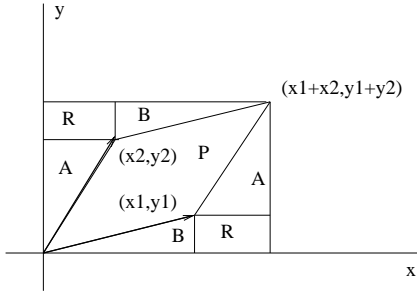
$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 36 & 1 \\ 100 & 4 \end{vmatrix}}{2} = \frac{44}{2} = 2, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 36 \\ 2 & 100 \end{vmatrix}}{2} = \frac{28}{2} = 2.$$

---

<sup>5</sup>Gabriel Cramer (Thụy Sĩ, 1704-1752).

### 2.3.2. Định thức trong hình học

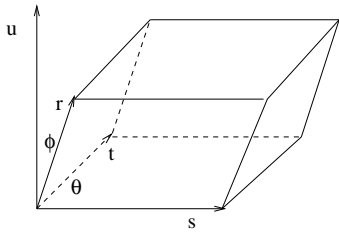
Trong mặt phẳng  $Oxy$  diện tích của hình bình hành có 4 đỉnh  $O(0,0)$ ,  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  và  $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$  có thể tính như sau



$$\begin{aligned} \text{dt}(\text{hình bình hành } P) &= \text{dt}(\text{hình chữ nhật}) - 2\text{dt}(A) - 2\text{dt}(B) \\ &\quad - 2\text{dt}(R) \\ &= (x_1 + x_2)(y_1 + y_2) - x_1y_1 - x_2y_2 - 2x_2y_1 \\ &= x_1y_2 - x_2y_1 \end{aligned}$$

Như vậy diện tích của hình bình hành trên bằng  $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_1 \end{vmatrix}$ , tức là định thức của ma trận có hai hàng là bằng hai tọa độ các cạnh của nó.

Điều này cũng đúng trong trường hợp thể tích.



$$\begin{aligned} V(\text{hình hộp } P) &= \text{Chiều cao} \times \text{dt}(\text{đáy}) \\ &= \pm(|r| \cos \phi)(|s||t| \sin \theta) \\ &= \pm|r||s||t| \sin \theta \cos \phi \end{aligned}$$

**Định lý 2.46.** Cho hình hộp  $P$  có ba cạnh tạo bởi ba vectơ có tọa độ là các hàng của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ t_1 & t_2 & t_3 \end{pmatrix}.$$

Khi đó thể tích của  $P$  bằng giá trị tuyệt đối của  $\det A$ .

*Chứng minh.* Khai triển Laplace định thức của  $A$  theo hàng thứ nhất:

$$\begin{aligned} \det A &= r_1 \begin{vmatrix} s_2 & s_3 \\ t_2 & t_3 \end{vmatrix} - r_2 \begin{vmatrix} s_1 & s_3 \\ t_1 & t_3 \end{vmatrix} + r_3 \begin{vmatrix} s_1 & s_2 \\ t_1 & t_2 \end{vmatrix} \\ &= r_1(s_2t_3 - s_3t_2) + r_2(s_3t_1 - s_1t_3) + r_3(s_1t_2 - s_2t_1) \\ &= r \cdot (s \times t). \end{aligned}$$

Trong biểu thức cuối, dấu " $\cdot$ " là tích vô hướng, còn dấu " $\times$ " là tích có hướng của hai vectơ. Trong hình vẽ trên, tích có hướng  $s \times t$  bằng vectơ  $u$  vuông góc với mặt phẳng xác định bởi hai vectơ  $s$  và  $t$ . Độ dài của  $u$  thỏa mãn

$$|u|^2 = |s|^2|t|^2 - (s \cdot t)^2.$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} (\det A)^2 &= (r \cdot u)^2 = |r|^2|u|^2 \cos^2 \phi \\ &= |r|^2(|s|^2|t|^2 - (s \cdot t)^2) \cos^2 \phi \\ &= |r|^2(|s|^2|t|^2 - |s|^2|t|^2 \cos^2 \theta) \cos^2 \phi \\ &= |r|^2|s|^2|t|^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi. \end{aligned}$$



Lấy căn hai vế ta có đẳng thức cần chứng minh.  $\square$

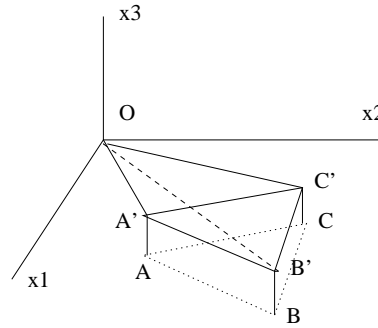
**Hệ quả 2.47.** Thể tích của tứ diện có đỉnh là góc tọa độ và có ba cạnh bằng bởi ba vectơ  $r, s, t$  như trên bằng

$$\frac{1}{6} |\det A|.$$

*Chứng minh.* Do thể tích tứ diện bằng  $1/6$  thể tích hình hộp ở trên.  $\square$

**Mệnh đề 2.48.** Diện tích của tam giác  $ABC$  trong mặt phẳng, với tọa độ  $A(a_1, a_2)$ ,  $B(b_1, b_2)$  và  $C(c_1, c_2)$ , bằng giá trị tuyệt đối của  $\frac{1}{2} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix}$ .

*Chứng minh.* Trong hệ tọa độ 3 chiều thì tọa độ  $z$  của  $A, B, C$  bằng 0. Vẽ thêm 3 điểm  $A', B', C'$  có tọa độ  $A'(a_1, a_2, 1)$ ,  $B'(b_1, b_2, 1)$  và  $C'(c_1, c_2, 1)$ .



Hình 2.1

Theo Hệ quả trên, thể tích của tứ diện  $OA'B'C'$  bằng giá trị tuyệt đối của  $\frac{1}{6} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix}$ . Mặt khác diện tích của hai tam giác  $ABC$  và  $A'B'C'$  bằng nhau, cùng với chiều cao của tứ diện  $OA'B'C'$  hạ từ  $O$  bằng 1, suy ra điều cần chứng minh.  $\square$

## Bài tập chương 2

**2.1.** Xác định  $AB$  và  $BA$  trong các trường hợp sau:

(a)  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ .

(b)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ .

(c)  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ .

**2.2.** Cho  $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$  và  $B = \begin{pmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Tính  $A^n$  và  $B^n$ , với  $n \in \mathbb{N}$ .

**2.3.** Hãy xác định xem các ma trận dưới đây ma trận nào khả nghịch. Tiếp đó hãy tìm ma trận nghịch đảo.

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad (b) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad (c) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad (d) \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

**2.4.** (a) Chứng minh rằng mặc dù tích hai ma trận không có tính chất giao hoán, tuy nhiên  $\det(AB) = \det(BA)$ .

(b) Chứng minh rằng nếu  $B = C^{-1}AC$  thì  $\det A = \det B$ .

**2.5.** Cho dãy truy hồi  $x_1 = a, x_2 = b$  và  $x_{n+2} = 2x_{n+1} + x_n$ , với  $n \geq 1$ . Hãy tìm ma trận  $A$  cỡ  $2 \times 2$  để có đẳng thức

$$\begin{pmatrix} x_{n+2} \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix}, \forall n \geq 1.$$

Từ đó đưa ra cách tính số hạng tổng quát  $x_n$  theo  $A, n, a$  và  $b$ .

**2.6.** Cho dãy truy hồi  $x_1 = a, x_2 = b, x_3 = c$  và  $x_{n+3} = 5x_{n+2} + 2x_{n+1} - x_n$ , với  $n \geq 1$ . Hãy tìm ma trận  $A$  cỡ  $3 \times 3$  để có đẳng thức

$$\begin{pmatrix} x_{n+3} \\ x_{n+2} \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_{n+2} \\ x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix}, \forall n \geq 1.$$

Từ đó đưa ra cách tính số hạng tổng quát  $x_n$  theo  $A, n, a, b$  và  $c$ .

**2.7.** Cho  $A(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ . Tính  $A^2(\alpha), A^3(\alpha)$ . Chứng minh rằng

$$A^n(\alpha) = A(n\alpha), \forall n \in \mathbb{Z}.$$

**2.8.** Tính định thức của các ma trận sau theo cả hai cách (khai triển Laplace và khai triển theo sơ đồ Sarrus)

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 8 \end{pmatrix}, \quad (b) \begin{pmatrix} 5 & 7 & -2 \\ 9 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**2.9.** Tìm ma trận nghịch đảo và tính định thức của nó cho hai ma trận ở bài tập trên.

**2.10.** Giải hệ phương trình tuyến tính  $Ax = b$ , với  $A$  là ma trận trong câu (a) của bài trước, trong hai trường hợp:

(a)  $b = (10, 20, 30)^t$ .

(b)  $b = (10, 20, 31)^t$ .

**2.11.** (a) Chứng minh rằng  $(cA)^{-1} = \frac{1}{c}A^{-1}$ , với mọi  $c$  khác không.

(b) Chứng minh rằng  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$  và  $(AB)^t = B^tA^t$ . Hãy đưa ra và chứng minh công thức tổng quát cho ma trận nghịch đảo của tích  $n$  ma trận và ma trận chuyển vị của tích  $n$  ma trận.

**2.12.** (a) Hãy lấy một ví dụ hai ma trận  $A$  và  $B$  có cỡ  $2 \times 2$  sao cho  $AB = O$  nhưng  $BA \neq O$ .

(b) Hãy đưa ra một phản ví dụ cho khẳng định rằng  $(A + B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$  đúng với mọi ma trận vuông  $A$  và  $B$  cùng cỡ.

**2.13.** Không khai triển định thức, hãy chứng minh

$$\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ac \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}.$$

**2.14.** Tương tự bài tập trước, với  $A(\alpha)$  cho bởi

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

**2.15. Định thức Vandermonde**<sup>6</sup> cho trường hợp  $n = 3$ . Chứng minh rằng

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b).$$

**2.16. Định thức Vandermonde** cho trường hợp  $n = 4$ . Chứng minh rằng

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 \end{vmatrix} = (x_4 - x_3)(x_4 - x_2)(x_4 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_1)(x_2 - x_1).$$

**2.17.** (a) Từ hai bài tập trước, hãy phát biểu và chứng minh định thức Vandermonde cho trường hợp tổng quát.

(b) Cho trước  $n + 1$  điểm có tọa độ  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_{n+1}, y_{n+1})$ , với các hoành độ đôi một khác nhau. Chứng minh rằng chỉ tồn tại duy nhất một đa thức  $P(x)$  bậc  $n$ , sao cho đồ thị hàm số  $y = P(x)$  đi qua  $n + 1$  điểm này. *Gợi ý:* Xem bài tập 1.9.

**2.18.** Chứng minh rằng thể tích của tứ diện  $ABCD$  có tọa độ bốn đỉnh  $A(a_1, a_2, a_3)$ ,  $B(b_1, b_2, b_3)$ ,  $C(c_1, c_2, c_3)$  và  $D(d_1, d_2, d_3)$ , bằng giá trị tuyệt đối của

$$\frac{1}{6} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 1 \\ d_1 & d_2 & d_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

---

<sup>6</sup>Alexandre-Théophile Vandermonde (Pháp, 1735-1796).

**2.19.** Chứng minh rằng diện tích của tam giác  $ABC$  có tọa độ ba đỉnh  $A(a_1, a_2, a_3)$ ,  $B(b_1, b_2, b_3)$ ,  $C(c_1, c_2, c_3)$  bằng căn bậc hai của

$$\frac{1}{4} \left( \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & 1 \\ a_2 & c_2 & 1 \\ a_3 & c_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & 1 \\ b_2 & c_2 & 1 \\ b_3 & c_3 & 1 \end{vmatrix}^2 \right).$$

**2.20.** Tam giác  $ABC$  được định nghĩa bởi ba đường thẳng không đồng qui, không có hai đường nào song song

$$\begin{cases} a_1x + a_2y + a_3 &= 0 \\ b_1x + b_2y + b_3 &= 0 \\ c_1x + c_2y + c_3 &= 0 \end{cases}$$

Chứng minh rằng diện tích của tam giác bằng giá trị tuyệt đối của

$$\frac{1}{2(b_1c_2 - b_2c_1)(c_1a_2 - c_2a_1)(a_1b_2 - a_2b_1)} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}^2.$$

# Chương 3

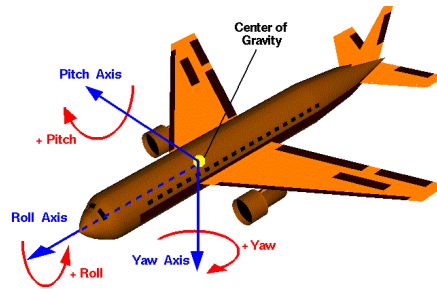
## Không gian véctơ

---

3.1. Không gian véctơ, không gian véctơ con và các ví dụ . . . . .	45
3.2. Hệ véctơ độc lập tuyến tính và hệ véctơ phụ thuộc tuyến tính . . . . .	45
3.3. Cơ sở và số chiều của một không gian véctơ . .	45
Bài tập chương 3 . . . . .	45

---

Chúng ta đã làm quen với các không gian  $\mathbb{R}^2$  (hai chiều) và  $\mathbb{R}^3$  (ba chiều). Có lẽ các bạn cũng từng nghe về bốn chiều khi giới thiệu thêm biến thời gian. Tuy nhiên chúng ta cần nhiều hơn thế, trong hình vẽ dưới đây chúng ta cần một hệ tọa độ 6 chiều để mô tả chuyển động của một máy bay. Ba tọa độ đầu tiên để mô tả vị trí khối tâm của máy bay, ba tọa độ sau tương ứng với độ cuộn, độ lạng và độ trệch.<sup>1</sup> Trong chương này chúng ta sẽ tìm



Hình 3.1 Cần 6 chiều để mô tả chuyển động của một máy bay.

hiểu không gian  $\mathbb{R}^n$  ( $n$  chiều) và hơn thế sẽ tìm hiểu các không gian véctơ mà trong đó các véctơ không chỉ là các bộ  $n$  số, mà còn là các đối tượng khác như đa thức, ma trận, các hàm khả vi, v.v.

### 3.1. Không gian véctơ, không gian véctơ con và các ví dụ

Trong tiết này chúng ta bắt đầu làm quen với toán học trừu tượng bằng một định nghĩa hình thức cho không gian véctơ.

**Định nghĩa 3.1.** Một tập  $V$  khác rỗng trên đó có hai phép toán (**phép cộng véctơ** và **phép nhân vô hướng**) được gọi là một **không gian véctơ** (trên  $\mathbb{R}$ ) nếu mười tính chất sau đây được thỏa mãn:

---

<sup>1</sup>Các từ tiếng Anh tương ứng là *roll*, *pitch* và *yaw*.

### Đối với phép cộng

- (1) (Tính đóng)  $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in V$  với mọi  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ .
- (2) (Tính kết hợp)  $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$  với mọi  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ .
- (3) (Tính giao hoán)  $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$  với mọi  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ .
- (4) (Tồn tại phần tử trung hòa) Tồn tại phần tử  $\mathbf{0}$  trong  $V$  sao cho

$$\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u} \text{ với mọi } \mathbf{u} \in V.$$

- (5) (Phần tử đối) Với mọi  $\mathbf{u} \in V$ , tồn tại phần tử thường kí hiệu bởi  $(-\mathbf{u}) \in V$  thỏa mãn

$$\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = (-\mathbf{u}) + \mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

### Đối với phép nhân

- (6) (Tính đóng) Với mọi vô hướng<sup>2</sup>  $a$  và với mọi  $\mathbf{u} \in V$  tích  $a\mathbf{u} \in V$ .
- (7) (Tính phân phối)  $a(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\mathbf{u} + a\mathbf{v}$  với mọi vô hướng  $a$  và với mọi  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ .
- (8) (Tính phân phối)  $(a + b)\mathbf{u} = a\mathbf{u} + b\mathbf{u}$  với mọi vô hướng  $a, b$  và với mọi  $\mathbf{u} \in V$ .
- (9) (Tính kết hợp)  $a(b\mathbf{u}) = (ab)\mathbf{u}$  với mọi vô hướng  $a, b$  và với mọi  $\mathbf{u} \in V$ .
- (10) (Vô hướng đơn vị)  $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$  với mọi  $\mathbf{u} \in V$ .

Mỗi phần tử của  $V$  được gọi là một **véc tơ**.

**Nhận xét 3.2.** Véc tơ  $\mathbf{0}$  trong tính chất 4 duy nhất. Thật vậy, nếu có một véc tơ  $\mathbf{0}'$  cũng thỏa mãn tính chất 4, khi đó

$$\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0}' = \mathbf{0}'.$$

Phần tử  $\mathbf{0}$  được gọi là **véc tơ không**.

Ví dụ đầu tiên khá quen thuộc với chúng ta.

**Ví dụ 3.3.** Tập hợp các số thực  $\mathbb{R}$  với hai phép toán cộng và nhân thông thường là một không gian véc tơ. Tập hợp các số hữu tỉ  $\mathbb{Q}$  không phải là một không gian véc tơ vì tính đóng đối với phép nhân vô hướng không thỏa mãn, ví dụ

$$\sqrt{2} \in \mathbb{R}, 1 \in \mathbb{Q} \text{ nhưng } \sqrt{2} \cdot 1 \notin \mathbb{Q}.$$

Tập hợp  $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$  với hai phép toán định nghĩa như sau:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \text{ và } a(x, y) = (ax, ay)$$

---

<sup>2</sup>Một số còn gọi là một vô hướng. Trong giáo trình này chúng ta chỉ xét các không gian véc tơ thực, vô hướng ở đây là số thực.

lập thành một không gian vectơ. Vectơ không là  $(0, 0)$ .

Tổng quát, tập hợp  $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$  với hai phép toán định nghĩa như sau:

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \text{ và } a(x_1, \dots, x_n) = (ax_1, \dots, ax_n)$$

**Ví dụ 3.4.** Tập hợp  $\mathbb{R}[x]$  tất cả các đa thức với hệ số thực cùng với hai phép toán cộng đa thức và nhân vô hướng với đa thức lập thành một không gian vectơ. Vectơ  $\mathbf{0}$  trong không gian này là đa thức không hay số 0. Với  $P$  và  $Q$  là hai đa thức trong  $\mathbb{R}[x]$ , các phép toán được định nghĩa như sau:

$$(P + Q)(x) = P(x) + Q(x), \\ (aP)(x) = aP(x), \quad a \in \mathbb{R}.$$

Tương tự, với hai phép toán định nghĩa như trên: Tập hợp  $\mathbb{R}[x]_{\leq d}$  tất cả các đa thức có bậc nhỏ hơn hoặc bằng  $d$  là một không gian vectơ; nhưng tập hợp  $\mathbb{R}[x]_d$  tất cả các đa thức có bậc bằng  $d$  không phải là một không gian vectơ (bài tập 3.1).

**Ví dụ 3.5.** Tập hợp  $M_{m \times n}(\mathbb{R})$  (hay đơn giản chỉ viết  $M_{m \times n}$ ) tất cả các ma trận cỡ  $m \times n$ . Hai phép toán trong  $M_{m \times n}$  cũng như thông thường: Phép cộng ma trận và phép nhân vô hướng với ma trận. Vectơ  $\mathbf{0}$  trong trường hợp này là ma trận không (tất cả các phần tử bằng 0).

**Ví dụ 3.6.** Với hai phép toán như trong Ví dụ 3.4, tập hợp  $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ , gồm tất cả các hàm số  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , lập thành một không gian vectơ.

**Tính chất 3.7.** Giả sử  $\mathbf{v}$  là một vectơ bất kỳ trong một không gian vectơ  $V$  và  $a$  là một vô hướng. Khi đó ta có các tính chất sau:

- (a)  $0\mathbf{v} = \mathbf{0}$ .
- (b)  $a\mathbf{0} = \mathbf{0}$ .
- (c) Nếu  $a\mathbf{v} = \mathbf{0}$  thì  $a = 0$  hoặc  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ .
- (d)  $(-1)\mathbf{v} = -\mathbf{v}$ .

*Chứng minh.* (a) Ta có  $0\mathbf{v} = (0 + 0)\mathbf{v} = 0\mathbf{v} + 0\mathbf{v}$ . Cộng hai vế với  $-0\mathbf{v}$  ta có  $0\mathbf{v} = \mathbf{0}$ .

(b) Ta có  $a\mathbf{0} = a(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = a\mathbf{0} + a\mathbf{0}$ . Cộng hai vế với  $-a\mathbf{0}$  ta có  $a\mathbf{0} = \mathbf{0}$ .

(c) Nếu  $a \neq 0$  nhân hai vế  $a\mathbf{v} = \mathbf{0}$  với  $1/a$  về bên trái ta có  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ .

(d) Ta có  $(-1)\mathbf{v} + \mathbf{v} = ((-1) + 1)\mathbf{v} = 0\mathbf{v} = \mathbf{0}$ . Do đó  $(-1)\mathbf{v} = -\mathbf{v}$ .

□

Cho trước một không gian vectơ  $V$ , chúng ta muốn tìm hiểu liệu có những không gian vectơ khác liên quan đến  $V$  hay không. Chẳng hạn các tập con của  $V$  liệu cùng với hai phép toán trên  $V$  có lập thành các không gian vectơ. Chúng ta sẽ được biết ngay dưới đây.

**Định nghĩa 3.8.** Một tập con  $W$  khác rỗng của một không gian véc tơ  $V$  được gọi là một **không gian véc tơ con** của  $V$  nếu  $W$  cùng với hai phép toán của  $V$  thỏa mãn mười điều kiện trong Định nghĩa 3.1. Để đơn giản chúng ta chỉ gọi *không gian con* thay cho không gian véc tơ con.

Dưới đây là tiêu chuẩn để kiểm tra một tập con là một không gian con thay vì phải kiểm tra cả mười điều kiện.

**Mệnh đề 3.9.** Nếu một tập con  $W$  khác rỗng của không gian véc tơ  $V$  thỏa mãn

$$a\mathbf{u} + b\mathbf{v} \in W \text{ với mọi } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in W \text{ và với mọi } a, b \in \mathbb{R}$$

thì  $W$  là một không gian con của  $V$ .

Từ đó suy ra nếu  $W$  khác rỗng đóng kín với hai phép toán cộng và nhân với vô hướng trong  $V$  thì  $W$  là một không gian con của  $V$ .

*Chứng minh.* Thay  $a = 1$  và  $b = 1$  ta có  $W$  đóng đối với phép cộng véc tơ (Tính chất 1). Thay  $a = 1$  và  $b = 0$  ta có  $W$  đóng đối với phép nhân vô hướng (Tính chất 6). Lấy  $a = b = 0$ , theo Tính chất 3.7 (b) suy ra véc tơ  $\mathbf{0}$  thuộc  $W$ . Lấy  $a = -1$  và  $b = 0$ , theo Tính chất 3.7 (d) ta có với mọi  $\mathbf{w} \in W$  thì  $-\mathbf{w} \in W$  (Tính chất 5). Các tính chất khác thỏa mãn vì  $W$  là tập con của  $V$ .  $\square$

**Ví dụ 3.10.**  $\mathbb{R}$  (tương ứng,  $\mathbb{R}^2$ ) là một không gian con của  $\mathbb{C}$  (tương ứng,  $\mathbb{C}^2$ ).

Xét các tập con của  $\mathbb{R}^2$  sau

$$\mathbb{R}_x = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} \quad \text{và} \quad \mathbb{R}_y = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}.$$

Rõ ràng  $\mathbb{R}_x$  và  $\mathbb{R}_y$  là các không gian con của  $\mathbb{R}^2$ .

**Ví dụ 3.11.** Xét không gian véc tơ các đa thức như trong Ví dụ 3.4. Ta có:

- (a)  $\mathbb{R}[x]_{\leq d}$  là một không gian con của  $\mathbb{R}[x]$ .
- (b)  $\mathbb{R}[x]_{\leq m}$  là một không gian con của  $\mathbb{R}[x]_{\leq n}$  với mọi  $m \leq n$ .

**Ví dụ 3.12.** Xét không gian véc tơ các ma trận như trong Ví dụ 3.4.

- (a) Tập hợp các ma trận đối xứng trong  $M_{n \times n}(\mathbb{R})$  lập thành một không gian con của  $M_{n \times n}(\mathbb{R})$ .
- (b) Tập hợp các ma trận có định thức bằng 0 trong  $M_{n \times n}(\mathbb{R})$  không phải là một không gian con của  $M_{n \times n}(\mathbb{R})$ . (Chỉ cần tìm hai ma trận có định thức bằng 0, sao cho tổng của chúng có định thức khác không.)

**Ví dụ 3.13.** Xét không gian véc tơ các hàm số thực  $\mathcal{F}(\mathbb{R})$  như trong Ví dụ 3.6. Kí hiệu  $C^r(\mathbb{R})$  là tập tất cả các hàm số có đạo hàm liên tục cho đến cấp  $r$ . Nói riêng,  $C^0(\mathbb{R})$  là tập hợp các hàm số thực liên tục,  $C^1(\mathbb{R})$  là tập hợp các hàm số thực khả vi liên tục. Khi đó ta có dãy bao hàm các không gian con như sau:

$$\mathcal{F}(\mathbb{R}) \supset C^0(\mathbb{R}) \supset C^1(\mathbb{R}) \supset C^2(\mathbb{R}) \supset \dots \supset \mathbb{R}[x].$$



### 3.2. Hệ vectơ độc lập tuyến tính và hệ vectơ phụ thuộc tuyến tính

Trong tiết này chúng ta muốn tìm hiểu liệu có một tập hợp các vectơ mà chỉ cần thực hiện các phép toán cộng và nhân vô hướng thì có thể mô tả được tất cả các vectơ trong không gian vectơ  $V$  đã cho hay không? Câu hỏi này đưa đến khái niệm **tập sinh**. Ví dụ trong không gian vectơ 2 chiều ở phổ thông, chỉ cần hai vectơ  $(1, 0)$  và  $(0, 1)$  là có thể mô tả được tất cả các vectơ còn lại. Thật vậy, chẳng hạn muốn mô tả vectơ  $(a, b)$  ta có thể viết

$$(a, b) = a(1, 0) + b(0, 1).$$

Tiếp đến, một câu hỏi tự nhiên đặt ra là làm thế nào để thu gọn một tập sinh càng nhỏ gọn càng tốt. Câu hỏi này đưa đến khái niệm quan trọng **cơ sở** sẽ được trình bày trong tiết sau.

Trước hết chúng ta cần một vài khái niệm chuẩn bị.

#### 3.2.1. Tổ hợp tuyến tính và tập sinh

**Định nghĩa 3.14.** Một vectơ  $\mathbf{v}$  trong một không gian vectơ  $V$  được gọi là một **tổ hợp tuyến tính** của các vectơ  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$  trong  $V$  nếu tồn tại các vô hướng  $a_1, a_2, \dots, a_k$  sao cho

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \dots + a_k\mathbf{v}_k.$$

Ta còn nói  $\mathbf{v}$  có một **biểu thị tuyến tính** qua  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ .

**Ví dụ 3.15.** (a) Trong không gian vectơ  $\mathbb{R}^2$  xét các  $\mathbf{v} = (-1, 7)$ ,  $\mathbf{v}_1 = (1, 2)$  và  $\mathbf{v}_2 = (-1, 1)$ . Ta có biểu thị tuyến tính  $\mathbf{v} = 2\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2$ .

Để tìm biểu thị tuyến tính này ta cần tìm các vô hướng  $x_1$  và  $x_2$  sao cho

$$(-1, 7) = x_1(1, 2) + x_2(-1, 1) \quad \text{hay} \quad \begin{cases} x_1 - x_2 = -1 \\ 2x_1 + x_2 = 7 \end{cases}$$

(b) Trong không gian vectơ  $\mathbb{R}[x]$ , xét các vectơ  $P(x) = 2x^2 - 3x + 7$ ,  $q_1(x) = x(x-1)/2$ ,  $q_2(x) = -x^2 + 1$  và  $q_3(x) = x(x+1)/2$ . Biểu thị tuyến tính của  $P(x)$  qua ba đa thức còn lại như sau

$$P(x) = 12q_1(x) + 7q_2(x) + 6q_3(x).$$

Để tìm biểu thị tuyến tính này ta cần tìm các vô hướng  $a, b, c$  sao cho

$$2x^2 - 3x + 7 = a(x(x-1)/2) + b(-x^2 + 1) + c(x(x+1)/2).$$

Đồng nhất hệ số, ta có hệ phương trình tuyến tính với ba ẩn  $a, b, c$ .

(c) Trong không gian vectơ  $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ , xét các vectơ

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ta có biểu thị tuyến tính  $N = (-1)A + (-1)B + 4C$ , trong khi đó không tồn tại biểu thị tuyến tính cho  $M$  qua  $A, B, C$  (dựa vào các phần tử ở hàng 1 cột 1).

**Định nghĩa 3.16.** Một tập con  $S$  của một không gian vectơ  $V$  được gọi là một **tập sinh** của  $V$  nếu mọi vectơ trong  $V$  đều biểu thị tuyến tính được qua  $S$ . Khi đó ta còn nói  $S$  sinh ra  $V$ .

**Ví dụ 3.17.** (a) Tập hợp  $\{(1, 0), (0, 1)\}$  là một tập sinh của không gian vectơ  $\mathbb{R}^2$ . Thật vậy, mọi vectơ  $\mathbf{v} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$  luôn có biểu thị tuyến tính  $(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$ .

Tổng quát, tập hợp  $\{e_1, \dots, e_n\}$ , trong đó  $e_i$  là vectơ có vị trí thứ  $i$  bằng 1 còn các vị trí khác đều bằng 0, là một tập sinh của không gian vectơ  $\mathbb{R}^n$ . Vì với mọi  $v = (x_1, \dots, x_n)$ , ta có phân tích

$$(x_1, \dots, x_n) = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n.$$

(b) Tập hợp  $\{1, x, x^2\}$  là một tập sinh của  $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ , nhưng không phải là một tập sinh của  $\mathbb{R}[x]$ . Chẳng hạn,  $x^3 \in \mathbb{R}[x]$  không thể biểu thị tuyến tính qua  $\{1, x, x^2\}$ .

(c) Tập hợp

$$E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

là một tập sinh của không gian vectơ  $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ . Thật vậy, với mọi ma trận  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  ta có biểu thị tuyến tính

$$M = aE_{1,1} + bE_{1,2} + cE_{2,1} + dE_{2,2}.$$

**Định nghĩa 3.18.** Giả sử  $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$  là một tập con của một không gian vectơ  $V$ . Kí hiệu  $\mathcal{L}(S)$  là tập hợp tất cả các tổ hợp tuyến tính của  $S$ , tức là

$$\mathcal{L}(S) = \{a_1 \mathbf{v}_1 + a_2 \mathbf{v}_2 + \dots + a_k \mathbf{v}_k \mid a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}\}.$$

Ta gọi  $\mathcal{L}(S)$  là **không gian tuyến tính** (hoặc, **bao tuyến tính**) sinh bởi  $S$ .

Nếu  $S$  là một tập sinh của  $V$  thì  $\mathcal{L}(S) = V$ . Nếu  $S$  không phải là một tập sinh của  $V$  thì  $\mathcal{L}(S)$  là một không gian con của  $V$ . Bằng cách này ta có thể xây dựng được nhiều không gian con của  $V$ . Mệnh đề sau cho ta rõ hơn về điều này.

**Mệnh đề 3.19.** Không gian tuyến tính  $\mathcal{L}(S)$  là một không gian con của  $V$ . Hơn nữa,  $\mathcal{L}(S)$  là không gian con nhỏ nhất của  $V$  chứa  $S$ .

*Chứng minh.* Từ định nghĩa ta có  $\mathcal{L}(S)$  đóng với phép cộng vectơ và phép nhân vô hướng trong  $V$ . Theo Mệnh đề 3.9 tập  $\mathcal{L}(S)$  là một không gian con của  $V$ .

Phần còn lại của định lý dựa vào tính đóng đối với phép cộng và phép nhân vô hướng của một không gian con. Cụ thể, giả sử  $W$  là một không gian con của  $V$  và  $S \subset W$ . Ta cần chứng minh  $\mathcal{L}(S) \subset W$ . Thật vậy, với mọi  $v \in \mathcal{L}(S)$ , viết  $v = a_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + a_k \mathbf{v}_k$ ,  $\mathbf{v}_i \in S \subset W$ . Do tính đóng đối với phép cộng và phép nhân vô hướng trong  $W$  suy ra  $v \in W$ .  $\square$

### 3.2.2. Độc lập tuyến tính và phụ thuộc tuyến tính

Cho trước một tập sinh, muốn thu gọn tập sinh để được một tập sinh 'nhỏ nhất' (sẽ được gọi là một cơ sở) chúng ta cần hai khái niệm cơ bản độc lập tuyến tính và phụ thuộc tuyến tính. *Một hệ sinh sẽ phụ thuộc tuyến tính thì vẫn còn rút gọn được.*

**Định nghĩa 3.20.** Một tập con  $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$  các vectơ của một không gian vectơ  $V$  được gọi là **độc lập tuyến tính** nếu

$$\mathbf{0} = 0\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + \cdots + 0\mathbf{v}_k$$

là cách viết duy nhất vectơ  $\mathbf{0}$  thành một tổ hợp tuyến tính của  $S$ .

Ngược lại,  $S$  được gọi là **phụ thuộc tuyến tính**.

**Ví dụ 3.21.** Các ví dụ dưới đây có thể kiểm tra trực tiếp từ định nghĩa. Sau này chúng ta có thể áp dụng một số kết quả để nhận biết một hệ vectơ độc lập hay phụ thuộc tuyến tính.

- (a) Trong  $\mathbb{R}^3$  các hệ  $\{e_1, e_2, e_3\}$  và  $\{e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3\}$  độc lập tuyến tính. Trong khi đó hệ  $\{e_1, e_2, e_1 + e_2\}$  phụ thuộc tuyến tính.
- (b) Trong  $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$  hệ  $\{1, x, x^2\}$  độc lập tuyến tính, còn hệ  $\{1, x, x^2, 2x^2 - 3x + 4\}$  phụ thuộc tuyến tính.
- (c) Trong  $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  hệ  $\{E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2}\}$  độc lập tuyến tính. Chỉ cần thêm một ma trận khác vào hệ này ta sẽ có một hệ phụ thuộc tuyến tính. Thật vậy, nếu thêm ma trận  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  vào, ta sẽ có đẳng thức

$$aE_{1,1} + bE_{1,2} + cE_{2,1} + dE_{2,2} + (-1)A = \mathbf{0}.$$

Do hệ số  $(-1) \neq 0$  suy ra hệ  $\{E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2}, A\}$  phụ thuộc tuyến tính.

**Mệnh đề 3.22.** Một tập  $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ ,  $k \geq 2$ , là phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi trong  $S$  có ít nhất một vectơ  $\mathbf{v}_i$  có thể viết thành tổ hợp tuyến tính của các vectơ còn lại.

*Chứng minh.* Chứng minh chiều thuận. Giả sử  $S$  phụ thuộc tuyến tính. Khi đó tồn tại các vô hướng  $a_1, \dots, a_k$  không đồng thời bằng 0 sao cho

$$a_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + a_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}.$$

Chọn  $a_i \neq 0$ , chuyển về và chia cho  $a_i$  ta có

$$\mathbf{v}_i = \left(-\frac{a_1}{a_i}\right)\mathbf{v}_1 + \cdots + \left(-\frac{a_k}{a_i}\right)\mathbf{v}_k.$$

Chúng minh chiều ngược. Giả sử có

$$\mathbf{v}_i = a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_k\mathbf{v}_k \text{ (khuyết số hạng } a_i\mathbf{v}_i\text{)}.$$

Khi đó

$$\mathbf{0} = a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_{i-1}\mathbf{v}_{i-1} + (-1)\mathbf{v}_i + a_{i+1}\mathbf{v}_{i+1} + \cdots + a_k\mathbf{v}_k$$

có vô hướng  $-1 \neq 0$  ở số hạng  $1\mathbf{v}_i$ . Do đó  $S$  phụ thuộc tuyến tính.  $\square$

Từ mệnh đề trên ta có ngay các hệ quả dưới đây.

**Hệ quả 3.23.** Hai vectơ trong một không gian vectơ  $V$  lập thành một hệ phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi một vectơ bằng tích một vô hướng với vectơ còn lại.

**Hệ quả 3.24.** Giả sử  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k-1}, \mathbf{v}_k\}$  là một tập sinh một không gian vectơ  $V$  và  $\mathbf{v}_k$  biểu thị tuyến tính được qua các vectơ  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k-1}$ . Khi đó  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k-1}\}$  cũng là một tập sinh của  $V$ .

Hệ quả thứ hai ở trên hữu ích khi muốn thu gọn một hệ sinh.

### 3.3. Cơ sở và số chiều của một không gian vectơ

Trong tiết này chúng ta sẽ trình bày các khái niệm quan trọng 'cơ sở' và 'chiều' trong Đại số tuyến tính. Đặc biệt, nhờ có khái niệm 'chiều', trong phần cuối cùng của tiết này chúng ta có thể mô tả được tập nghiệm của một hệ phụ thuộc tuyến tính một cách hình học.

#### 3.3.1. Cơ sở và số chiều

**Định nghĩa 3.25.** Một tập con  $\mathcal{B}$  của một không gian vectơ  $V$  được gọi là một cơ sở của  $V$  nếu  $\mathcal{B}$  sinh ra  $V$  và  $\mathcal{B}$  độc lập tuyến tính.

**Ví dụ 3.26.** (a) Trong không gian vectơ  $\mathbb{R}^3$ ,  $\{e_1, e_2, e_3, e_1+e_2\}$  là một tập sinh nhưng không phải là một cơ sở. Bỏ đi vectơ cuối cùng,  $\{e_1, e_2, e_3\}$  là một cơ sở.

Không gian vectơ  $\mathbb{R}^n$  có một cơ sở gồm  $\{e_1, \dots, e_n\}$ , cơ sở này còn được gọi là **cơ sở chính tắc** của  $\mathbb{R}^n$ .

(b) Trong  $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ ,  $\{1, x, x^2\}$  là một cơ sở, còn  $\{1, x, x^2, 2x^2 - 3x + 4\}$  là một tập sinh nhưng không phải là một cơ sở.

(c)  $\{E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2}\}$  là một cơ sở của  $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ . Tổng quát,  $\{E_{i,j} \mid i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n\}$  là một cơ sở của  $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ .

**Mệnh đề 3.27.** Giả sử một không gian vectơ  $V$  có một cơ sở gồm  $n$  vectơ và  $S = \{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m\}$  là một tập con của  $V$ . Khi đó, nếu  $m > n$  thì tập  $S$  phụ thuộc tuyến tính.

Phát biểu một cách tương đương, nếu  $S$  độc lập tuyến tính thì  $m \leq n$ .

*Chứng minh.* Giả sử  $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$  là một cơ sở của  $V$ . Khi đó, mỗi vectơ  $\mathbf{w}_j$  đều có thể biểu thị tuyến tính qua  $\mathcal{B}$ .

$$\begin{aligned}\mathbf{w}_1 &= a_{11}\mathbf{v}_1 + \dots + a_{n1}\mathbf{v}_n \\ \mathbf{w}_2 &= a_{12}\mathbf{v}_1 + \dots + a_{n2}\mathbf{v}_n \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \mathbf{w}_m &= a_{1m}\mathbf{v}_1 + \dots + a_{nm}\mathbf{v}_n\end{aligned}$$

Để chứng minh  $S$  phụ thuộc tuyến tính chúng ta cần tìm các vô hướng  $x_1, \dots, x_m$  không đồng thời bằng 0, sao cho

$$x_1\mathbf{w}_1 + \dots + x_m\mathbf{w}_m = \mathbf{0}. \quad (3.1)$$

hay

$$x_1(a_{11}\mathbf{v}_1 + \dots + a_{n1}\mathbf{v}_n) + x_2(a_{12}\mathbf{v}_1 + \dots + a_{n2}\mathbf{v}_n) + \dots + x_m(a_{1m}\mathbf{v}_1 + \dots + a_{nm}\mathbf{v}_n) = \mathbf{0}.$$

nhóm lại theo  $v_j$ , ta có

$$(x_1a_{11} + x_2a_{12} + \dots + x_ma_{1m})\mathbf{v}_1 + \dots + (x_1a_{n1} + x_2a_{n2} + \dots + x_ma_{nm})\mathbf{v}_n = \mathbf{0}.$$

Do  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$  là một cơ sở của  $V$ , đẳng thức cuối tương đương với

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m &= 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m &= 0 \end{cases}$$

Đây là hệ phương trình tuyến tính thuần nhất có số ẩn nhiều hơn số phương trình ( $m > n$ ), do đó có vô số nghiệm không tầm thường. Chỉ cần chọn một trong số đó ta có điều cần chứng minh (3.1).  $\square$

Mệnh đề trên là chìa khóa để chứng minh kết quả quan trọng sau đây. Kết quả này sẽ giúp chúng ta định nghĩa được khái niệm chiều của một không gian vectơ.

**Định lý 3.28.** Nếu một không gian vectơ  $V$  có một cơ sở gồm  $n$  phần tử thì mọi cơ sở của nó đều có  $n$  phần tử.

*Chứng minh.* Giả sử  $\mathcal{B}$  là một cơ sở của  $V$  có  $n$  phần tử. Xét một cơ sở bất kì  $\mathcal{B}'$  khác có  $m$  phần tử. Áp dụng Mệnh đề 3.27 cho cơ sở là  $\mathcal{B}$  và tập  $S = \mathcal{B}'$  ta có  $m \leq n$ . Tương tự, cho cơ sở là  $\mathcal{B}'$  và tập  $S = \mathcal{B}$  ta có  $n \leq m$ . Vậy  $m = n$ .  $\square$

**Định nghĩa 3.29.** Nếu một không gian vectơ  $V$  có một cơ sở gồm  $n$  phần tử thì  $V$  được gọi là một **không gian vectơ hữu hạn chiều** và số  $n$  được gọi là **chiều** của  $V$ . Nếu một không gian vectơ khác  $\{0\}$  không tồn tại một cơ sở hữu hạn phần tử thì được gọi là một **không gian vectơ vô hạn chiều**. Theo qui ước, không gian vectơ tầm thường  $\{0\}$  có chiều bằng 0.

Từ Ví dụ 3.26 ta có:

**Ví dụ 3.30.** (a)  $\mathbb{R}^n$  có chiều bằng  $n$ .

(b)  $\mathbb{R}[x]_{\leq n}$  có chiều bằng  $n+1$ ;  $\mathbb{R}[x]$  là một không gian vectơ vô hạn chiều.

(c)  $M_{m \times n}$  có chiều bằng  $m \times n$ .

Từ đây về sau, để đơn giản chúng ta dùng kí hiệu  $\dim V$  cho chiều của không gian vectơ  $V$ . Kết quả dưới đây giúp ta xác định tọa độ của một vectơ đối với một cơ sở cho trước.

### 3.3.2. Tọa độ và chuyển cơ sở

Thuật ngữ tọa độ khá quen thuộc với chúng ta trong hệ tọa độ Descartes<sup>3</sup>.

**Mệnh đề 3.31.** Giả sử  $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$  là một cơ sở của một không gian vectơ  $V$ . Khi đó, mọi vectơ của  $V$  có một biểu thị tuyến tính duy nhất qua các vectơ trong  $\mathcal{B}$ .

*Chứng minh.* Do  $\mathcal{B}$  là một hệ sinh nên sự tồn tại biểu thị tuyến tính là rõ ràng. Ta chỉ cần chứng minh tính duy nhất. Giả sử có một vectơ  $\mathbf{v} \in V$  có hai biểu thị tuyến tính:

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + \dots + a_n\mathbf{v}_n = b_1\mathbf{v}_1 + \dots + b_n\mathbf{v}_n.$$

Chuyển vế ta có:  $(a_1 - b_1)\mathbf{v}_1 + \dots + (a_n - b_n)\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$ . Do  $\mathcal{B}$  là một hệ độc lập tuyến tính (vì  $\mathcal{B}$  là một cơ sở), suy ra

$$a_1 - b_1 = \dots = a_n - b_n = 0, \text{ hay } a_i = b_i \forall i.$$

Vậy tính duy nhất được chứng minh. □

**Định nghĩa 3.32.** Cho trước một cơ sở  $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$  của một không gian vectơ  $V$ . Theo Mệnh đề 3.31, tồn tại duy nhất các vô hướng  $x_1, \dots, x_n$  sao cho

$$\mathbf{v} = x_1\mathbf{v}_1 + \dots + x_n\mathbf{v}_n.$$

Bộ  $(x_1, \dots, x_n)$  được gọi **tọa độ của  $\mathbf{v}$  đối với cơ sở  $\mathcal{B}$** . Ta kí hiệu

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

---

<sup>3</sup>René Descartes (Pháp, 1596-1650). Ông xây dựng khái niệm hệ tọa độ đề các (tiếng Việt).

**Ví dụ 3.33.** (a) Trong không gian vectơ  $\mathbb{R}^2$ , vectơ  $\mathbf{v} = (2e_1 + 3e_2)$  có tọa độ  $(2, 3)$  đối với cơ sở chính tắc  $\{e_1, e_2\}$ . Vectơ này có tọa độ  $(3, 2)$  đối với cơ sở  $\{e_2, e_1\}$ , xem thêm ở Chú ý bên dưới. Đối với cơ sở  $\{e_1, e_1 + e_2\}$ , giả sử  $\mathbf{v}$  có tọa độ  $(x, y)$ . Khi đó

$$2e_1 + 3e_2 = xe_1 + y(e_1 + e_2), \quad \text{hay } (x + y - 2)e_1 + (y - 3)e_2 = \mathbf{0}.$$

Từ đó có  $(x, y) = (-1, 3)$ . Do đó,  $\mathbf{v}$  có tọa độ  $(-1, 3)$  đối với cơ sở  $\{e_1, e_1 + e_2\}$ .

(b) Trong không gian vectơ  $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$  xét hai cơ sở sau

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1 &= \{p_0(x) = 1, p_1(x) = x, p_2(x) = x^2\} \\ \mathcal{B}_2 &= \{q_1(x) = x(x - 1)/2, q_2(x) = -x^2 + 1, q_3(x) = x(x + 1)/2\} \end{aligned}$$

Biểu thị tuyến tính của đa thức  $P(x) = 2x^2 - 3x + 7$  trong hai cơ sở này là

$$P(x) = 7p_0(x) - 3p_1(x) + 2p_2(x) = 12q_1(x) + 7q_2(x) + 6q_3(x).$$

Do đó, tọa độ của  $P(x)$  đối với cơ sở  $\mathcal{B}_1$  là  $(7, -3, 2)$  và đối với cơ sở  $\mathcal{B}_2$  là  $(12, 7, 6)$ .

**Chú ý 3.34.** Như ở trong Ví dụ trên ta thấy tọa độ của một vectơ phụ thuộc vào cơ sở. Cách viết cơ sở  $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  như là một tập hợp cũng không thật chính xác. Khi viết như vậy, chúng ta ngầm hiểu đã cố định thứ tự, hay có thể đồng nhất  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  với vectơ hàng  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ . Chẳng hạn phải hiểu cơ sở  $\{e_1, e_2\}$  khác với cơ sở  $\{e_2, e_1\}$ , xem ví dụ trên.

Dưới đây ta có biểu thức liên hệ giữa các tọa độ-cơ sở.

**Định nghĩa 3.35.** Giả sử  $V$  là một không gian vectơ  $n$  chiều. Ma trận  $C$  được gọi là **ma trận chuyển cơ sở** từ cơ sở  $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  sang cơ sở  $\mathcal{B}' = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$  nếu

$$(\beta_1, \dots, \beta_n) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)C, \quad \text{hay } \mathcal{B}' = \mathcal{B}C. \quad (3.2)$$

**Chú ý 3.36.** Chúng ta cần chứng minh tính đúng đắn của định nghĩa trên, tức là tồn tại duy nhất ma trận  $C$  thỏa mãn (3.2). Thật vậy, giả sử  $C = (c_{ij})_{n \times n}$ . Đồng thức (3.2) tương đương với

$$\beta_j = c_{1j}\alpha_1 + \dots + c_{nj}\alpha_n, \quad \text{với } j = 1, \dots, n.$$

Do đó thứ cột  $j$  của ma trận  $C$  xác định duy nhất và bằng  $[\beta_j]_{\mathcal{B}}$ .

**Mệnh đề 3.37.** Nếu  $C$  là ma trận chuyển từ cơ sở  $\mathcal{B}$  sang cơ sở  $\mathcal{B}'$  thì  $C^{-1}$  là ma trận chuyển từ cơ sở  $\mathcal{B}'$  sang cơ sở  $\mathcal{B}$ .

*Chứng minh.* Giả sử  $C'$  là ma trận chuyển từ cơ sở  $\mathcal{B}'$  sang cơ sở  $\mathcal{B}$ . Để chứng minh  $C' = C^{-1}$  ta sẽ chứng minh  $CC' = C'C = I_n$ .

Thật vậy, theo định nghĩa

$$\mathcal{B}' = \mathcal{B}C = (\mathcal{B}'C')C = \mathcal{B}'(C'C).$$

Mặt khác

$$\mathcal{B}' = \mathcal{B}'I_n.$$

Lập luận tương tự như trong Chú ý 3.36, ta có  $C'C = I_n$ .

Tương tự ta cũng có  $CC' = I_n$ .  $\square$

**Mệnh đề 3.38.** *Giả sử  $C$  là ma trận chuyển cơ sở như trên. Một vectơ  $\mathbf{v} \in V$  có tọa độ tương ứng đối với hai cơ sở  $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  và  $\mathcal{B}' = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$  là  $(x_1, \dots, x_n)$  và  $(y_1, \dots, y_n)$ . Khi đó:*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \text{hay } [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = C [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}'} \quad (3.3)$$

Hay, một cách tương đương

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \text{hay } [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}'} = C^{-1} [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}.$$

*Chứng minh.* Trong cơ sở  $\mathcal{B}'$ , ta có:

$$\mathbf{v} = y_1\beta_1 + \dots + y_n\beta_n = y_1(c_{11}\alpha_1 + \dots + c_{n1}\alpha_n) + \dots + y_n(c_{1n}\alpha_1 + \dots + c_{nn}\alpha_n).$$

Nhóm lại theo  $\alpha_j$

$$\mathbf{v} = (c_{11}y_1 + \dots + c_{1n}y_n)\alpha_1 + \dots + (c_{n1}y_1 + \dots + c_{nn}y_n)\alpha_n.$$

Mặt khác trong cơ sở  $\mathcal{B}$  ta có:

$$\mathbf{v} = x_1\alpha_1 + \dots + x_n\alpha_n.$$

Dựa vào tính duy nhất trong Mệnh đề 3.31, ta có

$$x_i = c_{i1}y_1 + \dots + c_{in}y_n, \quad \text{với } i = 1, \dots, n.$$

Từ đó ta có đẳng thức cần chứng minh.  $\square$

Để minh họa cho các công thức 3.2 và 3.3, xét ví dụ cụ thể dưới đây.

**Ví dụ 3.39.** Trong  $\mathbb{R}^2$  xét hai cơ sở

$$\mathcal{B} = \{2e_1 + e_2, e_1\} \quad \text{và} \quad \mathcal{B}' = \{-e_1 + e_2, e_1 + e_2\}.$$

Giả sử một vectơ  $\mathbf{v}$  có tọa độ  $(3, 5)$  đối với cơ sở  $\mathcal{B}$ . Hãy tìm tọa độ của  $\mathbf{v}$  đối với cơ sở  $\mathcal{B}'$ .



Trước hết chúng ta tìm ma trận chuyển  $C$  từ  $\mathcal{B}$  sang  $\mathcal{B}'$ . Giả sử  $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$ . Theo công thức (3.2), ta có:

$$\begin{aligned} (-e_1 + e_2, e_1 + e_2) &= (2e_1 + e_2, e_1) \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} -e_1 + e_2 &= (2e_1 + e_2)c_{11} + e_1c_{21} \\ e_1 + e_2 &= (2e_1 + e_2)c_{12} + e_1c_{22} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} -e_1 + e_2 &= (2c_{11} + c_{21})e_1 + c_{11}e_2 \\ e_1 + e_2 &= (2c_{12} + c_{22})e_1 + c_{12}e_2 \end{cases} \end{aligned}$$

Đồng nhất hệ số hai vế, ta có

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Áp dụng công thức 3.3, ta có tọa độ của  $\mathbf{v}$  đối với cơ sở  $\mathcal{B}'$  là

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}'} = C^{-1} [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 \\ 3/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

### 3.3.3. Hạng của một ma trận và hệ phương trình tuyến tính

**Định nghĩa 3.40.** Giả sử  $A$  là một ma trận cỡ  $m \times n$ . Khi đó:

1. **Không gian hàng** là không gian con của  $\mathbb{R}^n$  sinh bởi  $m$  vectơ hàng của  $A$ .
2. **Không gian cột** là không gian con của  $\mathbb{R}^m$  sinh bởi  $n$  vectơ cột của  $A$ .

**Định lý 3.41.** Nếu qua một dãy biến đổi hàng sơ cấp ma trận  $A$  đưa về ma trận  $B$  thì không gian hàng của  $A$  và  $B$  bằng nhau.

*Chứng minh.* Ta chỉ cần chứng minh đối với một biến đổi hàng sơ cấp.

Trường hợp biến đổi hàng là hoán đổi hàng hoặc nhân một hàng với một hằng số khác 0 rõ ràng không gian hàng của  $B$  bằng không gian hàng của  $A$ .

Xét phép biến đổi hàng còn lại, chẳng hạn  $cH_j + H_i$  (cộng  $c$  lần hàng  $j$  vào hàng  $i$ ). Kí hiệu  $\mathbf{v}_k$  ( $1 \leq k \leq m$ ) là vectơ hàng  $k$  của  $A$ . Khi đó không gian hàng của  $A$  và của  $B$  tương ứng là

$$\mathcal{L}(\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}) \text{ và } \mathcal{L}(\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i + c\mathbf{v}_j, \dots, \mathbf{v}_m\}),$$

trong đó  $\mathbf{v}_i + c\mathbf{v}_j$  ở vị trí chỉ số  $i$ .

Rõ ràng  $\mathcal{L}(\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i + c\mathbf{v}_j, \dots, \mathbf{v}_m\}) \subset \mathcal{L}(\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\})$ . Do  $\mathbf{v}_i = (\mathbf{v}_i + c\mathbf{v}_j) - c\mathbf{v}_j$  nên ta cũng có bao hàm thức ngược lại.  $\square$

**Hệ quả 3.42.** Giả sử  $R$  là dạng bậc thang của một ma trận  $A$ . Khi đó các vectơ hàng khác không lập thành một cơ sở của không gian hàng của  $A$ .

*Chứng minh.* Giả sử  $R$  có  $r$  vectơ hàng khác không gồm  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$  và  $(m-r)$  vectơ hàng còn lại (phía dưới cùng) là các vectơ không. Theo mệnh đề trên, ta chỉ cần chứng minh  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\}$  là một hệ độc lập tuyến tính. Xét vectơ  $\mathbf{w} = a_1\mathbf{v}_1 + \dots + a_r\mathbf{v}_r$ . Từ dạng bậc thang ta có các tọa độ của vectơ  $\mathbf{w}$  có dạng  $(*, a_1, *, a_2, *, \dots, *, a_r, *)$ , trong đó  $*$  hoặc là một số số 0 hoặc là trống (tức là có  $a_i$  liền sau bởi  $a_{i+1}$ ). Do đó, nếu  $a_1\mathbf{v}_1 + \dots + a_r\mathbf{v}_r = \mathbf{0}$  thì  $a_1 = \dots = a_r = 0$ . Vậy  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\}$  là một hệ độc lập tuyến tính.  $\square$

Áp dụng hệ quả trên, trong ví dụ sau chúng ta sẽ tìm các cơ sở cho không gian hàng và không gian cột của ma trận.

**Ví dụ 3.43.** Xét ma trận cỡ  $3 \times 3$  trong Ví dụ 1.15 ở Chương 1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ở Ví dụ 1.15, chúng ta ma trận bậc thang rút gọn của  $A$  là

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Theo Hệ quả 3.42 ở trên, không gian hàng của  $A$  có cơ sở gồm hai vectơ hàng đầu tiên của ma trận ở trên, tức là  $\{(1, 0, 1), (0, 1, -1)\}$ .

Để tìm cơ sở cho không gian cột, chúng ta đưa ma trận chuyển vị  $A^t$  về dạng bậc thang. Thực hiện các phép biến đổi hàng đối với  $A^t$  để đưa về dạng bậc thang, ta có kết quả:

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Do đó, không gian hàng của  $A^t$  có cơ sở gồm  $\{(1, 2, 1), 0, 1, 2/3\}$ . Hay một cách tương đương, không gian cột của  $A$  có cơ sở gồm  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2/3 \end{pmatrix} \right\}$ .

**Định lý 3.44.** *Chiều của không gian hàng và của không gian cột của một ma trận luôn bằng nhau.*

*Chứng minh.* Giả sử  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  là ma trận đã cho. Gọi  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$  và  $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n$  tương ứng là  $m$  vectơ hàng và  $n$  vectơ cột của  $A$ .

Giả sử  $r$  là chiều của không gian hàng của  $A$ . Xét một cơ sở của không gian hàng này gồm  $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_r\}$ , với  $\mathbf{b}_i = (b_{i1}, \dots, b_{in}) \in \mathbb{R}^n$ . Ta viết các biểu thị tuyến tính của các vectơ hàng  $\mathbf{v}_i$  qua cơ sở  $\mathcal{B}$ :

$$\mathbf{v}_i = c_{i1}\mathbf{b}_1 + \dots + c_{ir}\mathbf{b}_r, \quad \text{với } i = 1, \dots, m$$

hay

$$(a_{i1}, \dots, a_{in}) = c_{i1}(b_{11}, \dots, b_{1n}) + \dots + c_{ir}(b_{r1}, \dots, b_{rn}), \quad \text{với } i = 1, \dots, m.$$

Do đó

$$a_{ij} = c_{i1}b_{1j} + \cdots + c_{ir}b_{rj}, \quad \text{với } i = 1, \dots, m \text{ và } j = 1, \dots, n.$$

Ta thu được đẳng thức giữa các vectơ cột

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} = b_{1j} \begin{pmatrix} c_{11} \\ \vdots \\ c_{m1} \end{pmatrix} + \cdots + b_{rj} \begin{pmatrix} c_{1r} \\ \vdots \\ c_{mr} \end{pmatrix}, \quad \text{với } j = 1, \dots, n.$$

Như vậy tất cả các vectơ cột của  $A$  biểu thị tuyến tính được qua  $r$  vectơ cột. Do đó

$$\dim(\text{không gian cột của } A) \leq r = \dim(\text{không gian hàng của } A).$$

Thực hiện các bước tương tự như trên đối với ma trận  $A^t$ , do không gian cột (tương ứng, hàng) của  $A^t$  là không gian hàng (tương ứng, cột) của  $A$ , ta có

$$\dim(\text{không gian hàng của } A) \leq \dim(\text{không gian cột của } A).$$

Vậy chiều của hai không gian hàng và cột này bằng nhau.  $\square$

**Định nghĩa 3.45.** Chiều của không gian hàng (hay của không gian cột) của một ma trận  $A$  gọi là **hạng** của  $A$  và được kí hiệu bởi  $\text{rank } A$ .

Bây giờ chúng ta quay trở lại hệ phương trình tuyến tính. Trước hết, xét hệ phương trình tuyến tính thuần nhất  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , trong đó  $A$  là một ma trận cỡ  $m \times n$  và  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^t$ .

**Mệnh đề 3.46.** Tập nghiệm  $Z_A$  của hệ phương trình  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  là một không gian con của  $\mathbb{R}^n$ .

*Chứng minh.* Hệ phương trình  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  luôn luôn có nghiệm tầm thường  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  do đó  $Z_A \neq \emptyset$ . Với mọi  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in Z_A$  và với mọi vô hướng  $a, b$  ta có:

$$A(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}) = A(a\mathbf{x}) + A(b\mathbf{y}) = a(A\mathbf{x}) + b(A\mathbf{y}).$$

Theo Mệnh đề 3.9 ta có điều phải chứng minh.  $\square$

**Định lý 3.47.** Chiều của không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  thỏa mãn hệ thức

$$\dim Z_A = n - \text{rank } A.$$

*Chứng minh.* Giả sử  $r = \text{rank } A$ , khi đó dạng bậc thang  $R$  của  $A$  có  $r$  hàng khác không, còn các hàng còn lại bên dưới đều bằng không. Bằng cách đổi biến (không làm thay đổi hạng) ta có thể coi góc trái của  $R$  là ma trận đơn vị  $I_r$ . Do đó hệ phương trình  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  tương đương với

$$\begin{pmatrix} I_r & : & B \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0},$$

trong đó  $B = (b_{ij})$  là một ma trận có cỡ  $r \times (n - r)$ . Phương trình cuối cùng của hệ này có dạng

$$x_r + b_{r1}x_{r+1} + \cdots + b_{r(n-r)}x_n = 0.$$

Mỗi bộ  $(x_{r+1}, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-r}$  xác định duy nhất  $x_r$  và giải ngược từ dưới lên cũng xác định duy nhất  $x_{r-1}, \dots, x_1$ . Tức là nghiệm của hệ  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  có  $n - r$  tham số tự do.

Vậy  $\dim \mathcal{Z}_A = n - \text{rank } A$ .  $\square$

**Ví dụ 3.48.** Chúng ta có thể kiểm chứng đẳng thức trong định lý trên dựa vào các ví dụ 1.14 và 1.15 (chỉ xét hệ thuần nhất) ở trong Chương 1.

**Định lý 3.49.** *Giả sử  $\mathbf{x}_0$  là một nghiệm nào đó của hệ phương trình tuyến tính  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ . Khi đó tập nghiệm của hệ phương trình tuyến tính  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  có dạng*

$$\mathbf{x}_0 + \mathcal{Z}_A = \{\mathbf{x}_0 + \mathbf{z} \mid \mathbf{z} \in \mathcal{Z}_A\}.$$

*Chứng minh.* Giả sử  $\mathbf{y}_0$  là một nghiệm bất kì của hệ phương trình  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , tức là  $A\mathbf{y}_0 = \mathbf{b}$ . Khi đó

$$A(\mathbf{y}_0 - \mathbf{x}_0) = A\mathbf{y}_0 - A\mathbf{x}_0 = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

Do đó  $\mathbf{y}_0 - \mathbf{x}_0 \in \mathcal{Z}_A$ . Điều này tương đương với  $\mathbf{y}_0 \in \mathbf{x}_0 + \mathcal{Z}_A$ .  $\square$

Định lý trên cho ta một mô tả hình học cho tập nghiệm của hệ phương trình tuyến tính tổng quát  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ . Tập nghiệm  $\mathbf{x}_0 + \mathcal{Z}_A$  có thể coi là tịnh tiến của không gian vectơ  $\mathcal{Z}_A$  theo vectơ  $\mathbf{x}_0$ . Tuy nhiên việc liệu có tồn tại một nghiệm  $\mathbf{x}_0$  vẫn chưa rõ ràng. Mệnh đề sau đây là câu trả lời cho điều này.

**Mệnh đề 3.50.** *Hệ phương trình tuyến tính  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  có nghiệm khi và chỉ khi vectơ  $\mathbf{b}$  thuộc không gian cột của ma trận  $A$ .*

*Chứng minh.* Với  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ,  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^t$  và  $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_m)^t$ , ta có

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Từ đó ta có ngay khẳng định cần chứng minh.  $\square$

Chúng ta kết thúc chương bằng một ví dụ liên quan đến hai kết quả trên và cho chúng ta tính chất hình học của tập nghiệm của một hệ phương trình tuyến tính tổng quát.

**Ví dụ 3.51.** Quay trở lại Ví dụ 1.15 ở Chương 1, với hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 + x_2 = 5 \end{cases}$$

Ma trận hệ số đưa về dạng bậc thang rút gọn  $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Do đó

chiều của không gian hàng bằng 2, tức là tập nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất liên kết là một không gian vectơ một chiều. Điều này có thể suy ra từ Định lý 3.47 hoặc tính trực tiếp từ ma trận bậc thang rút gọn  $R$ . Thật vậy, từ ma trận  $R$ , hệ phương trình tuyến tính thuần nhất tương ứng  $R\mathbf{x} = \mathbf{0}$  có vô số nghiệm dạng  $(-s, s, s)$  ( $s \in \mathbb{R}$ ). Về mặt hình học, nếu xét trong hệ tọa độ  $Ox_1x_2x_3$ , đây là đường thẳng  $\ell_0$  đi qua gốc tọa độ và điểm  $(-1, 1, 1)$ .

Quay trở lại hệ phương trình ban đầu, ở Ví dụ 1.15 ta có tập nghiệm có dạng  $(3 - s, 2 + s, s)$  ( $s \in \mathbb{R}$ ). Đây là đường thẳng  $\ell$  thu được từ  $\ell_0$  bởi phép tịnh tiến theo vectơ  $(3, 2, 0)$ . Ở đây,  $(3, 2, 0)$  là một nghiệm riêng của hệ phương trình tổng quát. Điều này mô tả cho Định lý 3.49 ở trên.

### Bài tập chương 3

**3.1.** Tập nào dưới đây lập thành một không gian vectơ?

- (a) Tất cả các đa thức  $p(x)$  có bậc bằng 3.
- (b) Tất cả các đa thức  $p(x)$  có hệ số của  $x^3$  bằng 0.
- (c) Tất cả các đa thức  $p(x)$  có hệ số của  $x^3$  bằng 1.
- (d) Tất cả các đa thức  $p(x)$  thỏa mãn  $p(1) = p(2) = 0$ .

**3.2.** Tập nào dưới đây lập thành một không gian vectơ?

- (a) Tất cả các ma trận  $3 \times 3$  có các phần tử trên đường chéo chính khác 0, các phần tử còn lại bằng 0.
- (b) Tất cả các ma trận đường chéo  $3 \times 3$ .

**3.3.** Kí hiệu  $V_3$  là tập hợp tất cả các ma trận  $3 \times 3$ . Giả sử "phép cộng" của hai ma trận được định nghĩa bởi  $M + N = MN$  (tích ma trận thông thường). Liệu  $V$  với "phép cộng" như thế có lập thành một không gian vectơ hay không? Nếu không, hãy chỉ ra điều kiện nào không thỏa mãn.

**3.4.** Nếu có thể, hãy viết  $\mathbf{v}$  như là một tổ hợp tuyến tính của  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ .

- (a)  $\mathbf{v} = (-5, 0, 2)$ ,  $\mathbf{v}_1 = (1, 3, 5)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (2, 4, 6)$ ,  $\mathbf{v}_3 = (1, 2, 4)$ .
- (b)  $\mathbf{v} = (-5, 0, 2)$ ,  $\mathbf{v}_1 = (1, 3, 5)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (2, 4, 6)$ ,  $\mathbf{v}_3 = (1, 2, 3)$ .
- (c)  $\mathbf{v} = (1, 2, 3, 4)$ ,  $\mathbf{v}_1 = (1, 3, 5, 0)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (0, 2, 4, 6)$ ,  $\mathbf{v}_3 = (1, 0, 2, 4)$ .

**3.5.** Xác định xem tập  $W$  nào dưới đây là một không gian vectơ con của  $\mathbb{R}^2$ .

- (a)  $W = \{(x, y) | y = 3x\}$ .

(b)  $W = \{(x, y) | y = 3x + 1\}$ .

(c)  $W = \{(x, y) | x \geq 0\}$ .

(d)  $W = \{(x, y) | y = x^2\}$ .

**3.6.** Xác định xem tập  $W$  nào dưới đây là một không gian véc tơ con của  $\mathbb{R}^3$ .

(a)  $W = \{(x, y, z) | 2x + 3y + 5z = 0\}$ .

(b)  $W = \{(x, y, z) | 2x + 3y + 5z = 1\}$ .

(c)  $W = \{(x, y, z) | x \geq 0\}$ .

(d)  $W = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ .

**3.7.** Kiểm tra xem tập  $S$  cho dưới đây có: (i) sinh ra  $\mathbb{R}^3$ ; (ii) độc lập tuyến tính; (iii) là một cơ sở của  $\mathbb{R}^3$  hay không.

(a)  $S = \{(1, 3, 5), (2, 4, 6)\}$

(b)  $S = \{(1, 3, 5), (2, 4, 6), (1, 2, 3)\}$

(c)  $S = \{(1, 3, 5), (2, 4, 6), (1, 2, 4)\}$

(d)  $S = \{(1, 3, 5), (2, 4, 6), (1, 2, 3), (1, 2, 4)\}$

**3.8.** Xác định xem tập  $S$  sau đây có phải là cơ sở của  $\mathbb{R}[x]_3$  không. Nếu có, tìm ma trận chuyển cơ sở từ  $\{1, x, x^2, x^3\}$  sang  $S$ .

(a)  $S = \{1 + x, x + x^2, x^2 + x^3, 1 + x^3\}$ .

(b)  $S = \{1 + 2x, x + 2x^2, x^2 + 2x^3, 2 + x^3\}$ .

**3.9.** Tìm cơ sở và chiều của không gian nghiệm của các hệ phương trình tuyến tính thuần nhất sau.

(a)  $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 - 7x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$  (b)  $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 0 \\ 2x_1 + x_2 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$  (c)  $\begin{cases} x_1 + 5x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$

**3.10.** Tìm hạng và một cơ sở của không gian véc tơ hàng cho mỗi trường hợp sau.

(a)  $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$  (b)  $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 6 \\ -1 & 16 & 14 \\ 7 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  (c)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 9 \end{pmatrix}$

**3.11.** Tìm tọa độ của véc tơ  $\mathbf{v}$  trong cơ sở  $\mathcal{B}$  (không chính tắc) của  $\mathbb{R}^n$ .

(a)  $\mathbf{v} = (3, 5)$  và  $\mathcal{B} = \{(1, 2), (4, 5)\}$ .

(b)  $\mathbf{v} = (1, 2, 3)$  và  $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$ .

(c)  $\mathbf{v} = (3, 1, 6)$  và  $\mathcal{B} = \{(1, 2, 0), (1, 2, 3), (0, -6, 2)\}$ .

**3.12.** Tìm tọa độ của véc tơ  $\mathbf{v}$  trong cơ sở  $\mathcal{B}'$  của  $\mathbb{R}^n$ .

(a)  $\mathcal{B}' = \{(0, 1), (1, 2)\}$  và  $\mathbf{v} = (3, 5)$  trong  $\mathcal{B} = \{(1, 2), (4, 5)\}$ .

(b)  $\mathcal{B}' = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$  và  $\mathbf{v} = (1, 2, 3)$  trong  $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$ .

**3.13.** Tìm ma trận chuyển giữa hai cơ sở  $\mathcal{B}$  và  $\mathcal{B}'$  của  $\mathbb{R}^n$ .

(a)  $\mathcal{B} = \{(1, 2), (-1, 0)\}$  và  $\mathcal{B}' = \{(1, -1), (3, 1)\}$ .

(b)  $\mathcal{B} = \{(1, 2, 3), (0, 1, 0), (1, 0, 1)\}$  và  $\mathcal{B}' = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ .

**3.14.** Cho tập  $S = \{p_0(x), p_1(x), \dots, p_n(x)\}$  gồm các đa thức trong  $\mathbb{R}[x]$ .

(a) Giả sử  $\deg p_k(x) = k$  (với  $k = 0, \dots, n$ ). Liệu  $S$  có phải là một cơ sở của  $\mathbb{R}[x]_{\leq d}$  hay không?

(b) Ngược lại, giả sử  $S$  là một cơ sở của  $\mathbb{R}[x]_{\leq d}$ . Liệu có phải các đa thức trong  $S$  luôn có bậc bằng  $0, 1, \dots, n$  hay không?

**3.15.** Với  $V = C^1(\mathbb{R})$  là không gian véc tơ các hàm khả vi liên tục  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

(a) Chứng minh rằng  $\{f \in V | f' = 5f\}$  là một không gian con của  $V$ .

(b) Chứng minh rằng  $\{f \in V | f' = 5f + 1\}$  không phải là một không gian con của  $V$ .

**3.16.** Với  $V = C^1(\mathbb{R})$  như trong bài tập trước. Xác định chiều của không gian con sinh bởi tập các hàm sau

(a)  $\{\sin^2 x, \cos^2 x, \cos 2x, \sin 2x\}$ .

(b)  $\{\sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x\}$ .

(c)  $\{e^x, e^{2x}, e^{3x}\}$ .

**3.17.** Giả sử  $V_1$  và  $V_2$  là hai không gian con của không gian véc tơ  $V$ . Chứng minh hoặc đưa ra phản chứng (qua phản ví dụ) rằng các tập sau là các không gian con của  $V$ .

(a)  $V_1 \cup V_2$  (tập hợp gồm các véc tơ thuộc  $V_1$  hoặc  $V_2$ ).

(b)  $V_1 \cap V_2$  (tập hợp gồm các véc tơ thuộc  $V_1$  và  $V_2$ ).

(c)  $V_1 + V_2$  (tập hợp gồm các véc tơ  $\mathbf{v} \in V$ , viết được thành tổng  $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$  với  $\mathbf{v}_1 \in V_1$  và  $\mathbf{v}_2 \in V_2$ ).

**3.18.** Giả sử  $\dim V < \infty$ . Chứng minh rằng

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2).$$

Đặc biệt, trong trường hợp  $V_1 \cap V_2 = \mathbf{0}$ , kí hiệu  $V_1 \oplus V_2$  thay cho  $V_1 + V_2$ . Khi đó

$$\dim(V_1 \oplus V_2) = \dim V_1 + \dim V_2.$$

Ta gọi  $V_1 \cap V_2$ ,  $V_1 + V_2$  và  $V_1 \oplus V_2$  tương ứng là **giao**, **tổng** và **tổng trực tiếp** của hai không gian con  $V_1$  và  $V_2$ .

**3.19.** Xét hai không gian con của  $V = \mathbb{R}^3$ , gồm

$$V_1 = \{(x, y, z) | x + y + z = 0\} \text{ và } V_2 = \{(x, y, z) | x = y = z\}.$$

Hãy mô tả hình học các không gian  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $V_1 \cap V_2$  và  $V_1 + V_2$ . Kiểm chứng đẳng thức về số chiều trong bài tập trước đối với trường hợp này.

**3.20.** Câu hỏi tương tự như bài trên, với  $V_1$  là mặt phẳng  $Oxy$  và  $V_2$  là mặt phẳng  $Oyz$ .

# Chương 4

## Ảnh xạ tuyến tính

---

4.1. Định nghĩa . . . . .	49
4.2. Tọa độ, cơ sở và chuyển cơ sở . . . . .	49
4.3. Hạt nhân và ảnh . . . . .	49
Bài tập chương 4 . . . . .	49

---

Trọng tâm của chương này là tìm hiểu các ánh xạ giữa các không gian véc tơ có tính chất bảo toàn các phép toán. Các ánh xạ này được gọi là các ánh xạ tuyến tính.

### 4.1. Định nghĩa

**Định nghĩa 4.1.** Một ánh xạ  $f : V \rightarrow W$  giữa các không gian véc tơ được gọi là một **ánh xạ tuyến tính** nếu cả hai điều kiện sau được thỏa mãn:

- (i)  $f$  bảo toàn đối với phép cộng

$$f(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = f(\mathbf{v}_1) + f(\mathbf{v}_2), \text{ với mọi } \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V.$$

- (ii)  $f$  bảo toàn đối với phép nhân vô hướng

$$f(a\mathbf{v}) = af(\mathbf{v}), \text{ với mọi } a \in \mathbb{R}, \mathbf{v} \in V.$$

**Nhận xét 4.2.** Hai điều kiện trong định nghĩa trên có thể viết gộp thành một điều kiện như sau:

$$f(a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2) = a_1f(\mathbf{v}_1) + a_2f(\mathbf{v}_2), \text{ với mọi } a_1, a_2 \in \mathbb{R}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V.$$

**Ví dụ 4.3.** (a) Ánh xạ  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  xác định bởi  $f(x) = ax + b$ , với  $a, b \in \mathbb{R}$  cho trước, là một ánh xạ tuyến tính khi và chỉ khi  $b = 0$ . Thật vậy, khi  $b = 0$ ,  $f(x) = ax$ . Do đó, với mọi  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  và với mọi  $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ , ta có:

$$f(a_1x_1 + a_2x_2) = a(a_1x_1 + a_2x_2) = a_1(ax_1) + a_2(ax_2) = a_1f(x_1) + a_2f(x_2).$$

Vậy  $f$  là một ánh xạ tuyến tính khi  $b = 0$ .

Khi  $b \neq 0$ , nếu  $f$  là một ánh xạ tuyến tính thì  $f(0+0) = f(0) + f(0)$ . Tuy nhiên đẳng thức này suy ra  $b = b + b$ , hay  $b = 0$  (mâu thuẫn). Vậy  $f$  không thể là một ánh xạ tuyến tính khi  $b \neq 0$ .



- (b) Các ánh xạ  $f$  và  $g$  từ  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  xác định bởi  $f(x) = x^2$  và  $g(x) = e^x$  không phải là các ánh xạ tuyến tính. Chẳng hạn:

$$f(1+1) \neq f(1) + f(1), \quad g(1+1) \neq g(1) + g(1).$$

- (c) Ánh xạ  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , xác định bởi  $f(x, y) = ax + by$  (với  $a, b \in \mathbb{R}$ ), là một ánh xạ tuyến tính.

- (d) Ánh xạ  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , xác định bởi

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{21}x + a_{22}y \end{pmatrix}$$

là một ánh xạ tuyến tính.

- (e) Ánh xạ  $D : C^1(\mathbb{R}) \rightarrow C^0(\mathbb{R})$  từ không gian vectơ các hàm số thực khả vi liên tục đến không gian vectơ các hàm số thực liên tục, xác định bởi  $D(f) = f'$  là một ánh xạ tuyến tính.
- (f) Ánh xạ  $\det : M_{n \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ , biến  $A \mapsto \det(A)$ , không phải là một ánh xạ tuyến tính.

Mệnh đề dưới đây là một tổng quát hóa cho ví dụ (d) ở trên.

**Mệnh đề 4.4.** Giả sử  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ . Khi đó, ánh xạ  $f$  xác định bởi

$$f(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$$

là một ánh xạ tuyến tính từ  $\mathbb{R}^n$  đến  $\mathbb{R}^m$ .

Trong đẳng thức trên  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  được hiểu là vectơ cột, hay là một ma trận cỡ  $n \times 1$ . Chẳng hạn, với  $m = 3$  và  $n = 2$ :

$$f(\mathbf{v}) = A\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{21}x + a_{22}y \\ a_{31}x + a_{32}y \end{pmatrix}.$$

*Chứng minh.* Ta chứng minh cho trường hợp  $m = 3$  và  $n = 2$ , trường hợp tổng quát chứng minh hoàn toàn tương tự. Với mọi vectơ  $\mathbf{v}_1 = (x_1, y_1)^t$ ,  $\mathbf{v}_2 = (x_2, y_2)^t$  và với mọi  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  ta có:

$$\begin{aligned} f(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2) &= A(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1x_1 + c_2x_2 \\ c_1y_1 + c_2y_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}(c_1x_1 + c_2x_2) + a_{12}(c_1y_1 + c_2y_2) \\ a_{21}(c_1x_1 + c_2x_2) + a_{22}(c_1y_1 + c_2y_2) \\ a_{31}(c_1x_1 + c_2x_2) + a_{32}(c_1y_1 + c_2y_2) \end{pmatrix} \\ &= c_1 \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}y_1 \\ a_{31}x_1 + a_{32}y_1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} a_{11}x_2 + a_{12}y_2 \\ a_{21}x_2 + a_{22}y_2 \\ a_{31}x_2 + a_{32}y_2 \end{pmatrix} \\ &= c_1f(\mathbf{v}_1) + c_2f(\mathbf{v}_2). \end{aligned}$$

Vậy  $f$  là một ánh xạ tuyến tính. □

Ngoài tính chất bảo toàn các tổ hợp tuyến tính, ta có các tính chất cơ bản khác của ánh xạ tuyến tính như sau:

**Mệnh đề 4.5.** Nếu  $f : V \rightarrow W$  là một ánh xạ tuyến tính thì

$$(a) \quad f(\mathbf{0}) = \mathbf{0};$$

$$(b) \quad f(-\mathbf{v}) = -f(\mathbf{v}), \text{ với mọi } \mathbf{v} \in V.$$

*Chứng minh.* (a)  $f(\mathbf{0}) = f(0\mathbf{v}) = 0f(\mathbf{v}) = \mathbf{0};$

$$(b) \quad f(-\mathbf{v}) = f((-1)\mathbf{v}) = (-1)f(\mathbf{v}) = -f(\mathbf{v}).$$

□

## 4.2. Ma trận của một ánh xạ tuyến tính

Như đã thấy trong nhiều ví dụ ánh xạ tuyến tính  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , ánh xạ được định nghĩa bằng nhân bên trái với một ma trận cỡ  $m \times n$ . Trong tiết này, chúng ta sẽ chứng minh mỗi ánh xạ tuyến tính giữa các không gian vectơ hữu hạn chiều tổng quát đều có thể xác định bởi một ma trận khi cố định trước cơ sở.

**Mệnh đề 4.6.** Giả sử  $f : V \rightarrow W$  là một ánh xạ tuyến tính,  $B$  và  $B'$  tương ứng là cơ sở của  $V$  và  $W$ , với  $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  và  $B' = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_m\}$ . Nếu tọa độ của  $f(\mathbf{v}_j)$  trong cơ sở  $B'$  được cho bởi

$$[f(\mathbf{v}_j)]_{B'} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, \text{ với } j = 1, \dots, n,$$

và đặt  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  là ma trận có các vectơ cột là  $[f(\mathbf{v}_j)]_{B'}$  như ở trên, thì

$$[f(\mathbf{v})]_{B'} = A[\mathbf{v}]_B, \text{ với mọi } \mathbf{v} \in V.$$

*Chứng minh.* Giả sử  $[\mathbf{v}]_B = (x_1, \dots, x_n)$ , tức là  $\mathbf{v} = x_1\mathbf{v}_1 + \dots + x_n\mathbf{v}_n$ . Khi đó:

$$f(\mathbf{v}) = f(x_1\mathbf{v}_1 + \dots + x_n\mathbf{v}_n) = x_1f(\mathbf{v}_1) + \dots + x_nf(\mathbf{v}_n).$$

Do đó:

$$\begin{aligned} [f(\mathbf{v})]_{B'} &= [x_1f(\mathbf{v}_1) + \dots + x_nf(\mathbf{v}_n)]_{B'} = x_1[f(\mathbf{v}_1)]_{B'} + \dots + x_n[f(\mathbf{v}_n)]_{B'} \\ &= x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = A(x_1, \dots, x_n)^t = A[\mathbf{v}]_B. \end{aligned}$$

□

**Định nghĩa 4.7.** Ma trận  $A$  ở Mệnh đề trên được gọi là **ma trận của  $f$**  trong cặp cơ sở  $B$  và  $B'$ .

**Ví dụ 4.8. Tìm ma trận của một ánh xạ tuyến tính.**

- (a) Giả sử  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  là một ánh xạ tuyến tính. Khi đó ma trận của  $f$  trong cặp cơ sở chính tắc của  $\mathbb{R}^n$  và  $\mathbb{R}^m$  được xác định bởi

$$A = (a_{ij})_{m \times n} = (f(\mathbf{e}_1) | \dots | f(\mathbf{e}_n)), \text{ trong đó } f(\mathbf{e}_j) = (a_{1j}, \dots, a_{mj})^t.$$

Chẳng hạn, tìm ma trận của ánh xạ tuyến tính  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  trong cặp cơ sở chính tắc, với

$$f(x, y) = (x + 2y, 3x - y, 4x + 5y).$$

Trước hết, ta tìm  $f(\mathbf{e}_1)$  và  $f(\mathbf{e}_2)$ :

$$f(\mathbf{e}_1) = f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ và } f(\mathbf{e}_2) = f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Vậy ma trận cần tìm là } (f(\mathbf{e}_1) | f(\mathbf{e}_2)) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

- (b) Xét ánh xạ  $f$  như trên, nhưng với cặp cơ sở  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\}$  và  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3\}$ . Ta có:

$$f(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, f(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Trong cơ sở  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3\}$ , các vectơ này có tọa độ tương ứng là  $(7/2, 3/2, -4)^t$  và  $(11, 1, -9)^t$ . Vậy ma trận cần tìm là  $\begin{pmatrix} 7/2 & 11 \\ 3/2 & 1 \\ -4 & -9 \end{pmatrix}$ .

**Ví dụ 4.9. Xét ánh xạ tuyến tính**

$$D : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \rightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq 1}, \quad D(p) = p'.$$

Ta tìm ma trận của  $D$  trong cặp cơ sở  $B = \{1, x, x^2\}$  và  $B' = \{1, x\}$  theo định nghĩa. Ta có:

$$D(1) = 0, D(x) = 1, D(x^2) = 2x.$$

Do đó:

$$[D(1)]_{B'} = (0, 0)^t, [D(x)]_{B'} = (1, 0)^t, [D(x^2)]_{B'} = (0, 2)^t.$$

$$\text{Vậy ma trận cần tìm là } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Ví dụ 4.10. Xác định ánh xạ tuyến tính nếu cho biết ma trận.**

Giả sử ánh xạ tuyến tính  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  có ma trận trong cặp cơ sở chính tắc là

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Xét một vectơ  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ , giả sử tọa độ của nó trong cơ sở chính tắc là  $(x, y, z)^t$ . Khi đó, theo định nghĩa, tọa độ của  $f(\mathbf{v})$  trong cơ sở chính tắc là

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + y + 4z \\ 2x - 5y + z \end{pmatrix}.$$

Vậy ánh xạ  $f$  xác định bởi  $f(x, y, z) = (3x + y + 4z, 2x - 5y + z)$ .

**Mệnh đề 4.11.** Giả sử  $f : U \rightarrow V$  và  $g : V \rightarrow W$  là các ánh xạ tuyến tính. Khi đó ánh xạ hợp thành  $g \circ f : U \rightarrow W$  xác định bởi

$$(g \circ f)(\mathbf{u}) = g(f(\mathbf{u}))$$

cũng là một ánh xạ tuyến tính.

Hơn nữa, nếu  $M$  là ma trận của  $f$  trong cặp cơ sở  $(B_U, B_V)$  và  $N$  là ma trận của  $g$  trong cặp cơ sở  $(B_V, B_W)$  thì ma trận của  $g \circ f$  trong cặp cơ sở  $(B_U, B_W)$  là ma trận tích  $NM$ .

*Chứng minh.* Với mọi  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in U$  và  $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ , ta có:

$$\begin{aligned} (g \circ f)(a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2) &= g(f(a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2)) = g(a_1f(\mathbf{u}_1) + a_2f(\mathbf{u}_2)) \\ &= a_1g(f(\mathbf{u}_1)) + a_2g(f(\mathbf{u}_2)) = a_1(g \circ f)(\mathbf{u}_1) + a_2(g \circ f)(\mathbf{u}_2). \end{aligned}$$

Do đó  $g \circ f$  là một ánh xạ tuyến tính.

Xét  $\mathbf{u}$  là một vectơ bất kì trong  $U$ , khi đó  $f(\mathbf{u})$  và  $(g \circ f)(\mathbf{u})$  lần lượt là các vectơ trong  $V$  và  $W$ . Theo định nghĩa của ma trận của ánh xạ tuyến tính, ta có

$$[(g \circ f)(\mathbf{u})]_{B_W} = N[f(\mathbf{u})]_{B_V} = N(M[\mathbf{u}]_{B_U}) = (NM)[\mathbf{u}]_{B_U}.$$

Từ đó có thể chứng minh ma trận của  $g \circ f$  trong cặp cơ sở  $(B_U, B_W)$  là ma trận tích  $NM$ . Bạn đọc có thể chứng minh bước cuối cùng này như một bài tập.  $\square$

Tiếp theo, chúng ta xét trường hợp riêng, đối với các ánh xạ tuyến tính từ  $V$  vào chính nó.

**Định nghĩa 4.12.** Một ánh xạ tuyến tính từ  $V$  vào  $V$  được gọi là một **tự đồng cấu (tuyến tính)** của  $V$ .

Khi xét ma trận của một tự đồng cấu, thông thường ta dùng chung một cơ sở. Ta gọi ma trận của  $f : V \rightarrow V$  trong cặp cơ sở  $B$  và  $B$  là **ma trận của  $f$  trong cơ sở  $B$** . Mệnh đề và định nghĩa tiếp sau đây được dùng nhiều trong chương sau. Ta bỏ qua chứng minh của Mệnh đề này.

**Mệnh đề 4.13.** Giả sử  $A$  và  $A'$  tương ứng là ma trận của một tự đồng cấu  $f$  trong cơ sở  $B$  và  $B'$ . Nếu  $C$  là ma trận chuyển cơ sở từ  $B$  sang  $B'$  thì  $A' = C^{-1}AC$ .

**Định nghĩa 4.14.** Hai ma trận vuông  $A$  và  $B$  có cùng cỡ  $n$  được gọi là **đồng dạng** nếu tồn tại ma trận vuông  $C$  cỡ  $n$  khả nghịch sao cho  $B = C^{-1}AC$ .

Kết quả dưới đây cho thấy hai phép dời hình trong mặt phẳng, gồm phép quay và phép đối xứng qua một trục đều là các ánh xạ tuyến tính. Chúng ta bỏ qua các chứng minh.

**Mệnh đề 4.15.** *Đối với cơ sở chính tắc, ta có:*

- (a) *Ma trận của phép quay xung quanh gốc tọa độ một góc  $\alpha$  theo ngược chiều kim đồng hồ là* 
$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$
- (b) *Ma trận của phép đối xứng qua trục  $Ot$ , trong đó góc  $xOt$  bằng  $\alpha/2$ , là* 
$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}.$$

### 4.3. Hạt nhân và ảnh

**Định nghĩa 4.16.** **Hạt nhân** của ánh xạ tuyến tính  $f : V \rightarrow W$  là tập hợp

$$\text{Ker } f = \{\mathbf{v} \in V \mid f(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\}.$$

**Mệnh đề 4.17.** *Hạt nhân của ánh xạ tuyến tính  $f : V \rightarrow W$  là một không gian con của  $V$ .*

*Chứng minh.* Với mọi  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \text{Ker } f$  và với mọi  $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ , ta có

$$f(a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2) = a_1f(\mathbf{v}_1) + a_2f(\mathbf{v}_2) = a_1\mathbf{0} + a_2\mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Từ Nhận xét 4.2, ta có  $\text{Ker } f$  là một không gian con của  $V$ . □

**Định nghĩa 4.18.** **Ảnh** của ánh xạ tuyến tính  $f : V \rightarrow W$  là tập hợp

$$\text{Im } f = f(V) = \{f(\mathbf{v}) \mid \mathbf{v} \in V\}.$$

**Mệnh đề 4.19.** *Ảnh của ánh xạ tuyến tính  $f : V \rightarrow W$  là một không gian con của  $W$ .*

*Chứng minh.* Với mọi  $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in \text{Im}(f)$  và với mọi  $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ , ta có

$$a_1\mathbf{w}_1 + a_2\mathbf{w}_2 = a_1f(\mathbf{v}_1) + a_2f(\mathbf{v}_2) = f(a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2) \in \text{Im}(f),$$

trong đó  $\mathbf{v}_i \in V$  sao cho  $f(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i$  (với  $i = 1, 2$ ).

Vậy  $\text{Im}(f)$  là một không gian con của  $W$ . □

Từ các Mệnh đề 4.17 và 4.19, hạt nhân và ảnh của một ánh xạ tuyến tính đều là các không gian véc-tơ. Để nghiên cứu các không gian này ta cần tìm hiểu số chiều của chúng, các số chiều này có tên gọi riêng trong định nghĩa sau đây:

**Định nghĩa 4.20.** Giả sử  $f : V \rightarrow W$  là một ánh xạ tuyến tính. Ta gọi chiều của  $\text{Ker}(f)$  và  $\text{Im}(f)$  tương ứng là **số khuyết** và **hạng** của  $f$ . Chúng được kí hiệu tương ứng bởi  $\text{nullity}(f)$  và  $\text{rank}(f)$ .

**Mệnh đề 4.21.** Giả sử  $f : V \rightarrow W$  là một ánh xạ tuyến tính. Khi đó:

(a)  $f$  là một đơn ánh khi và chỉ khi  $\text{Ker}(f) = \{\mathbf{0}\}$ .

(b)  $f$  là một toàn ánh khi và chỉ khi  $\text{rank}(f) = \dim W$ .

*Chứng minh.* (a) Giả sử  $f$  là một đơn ánh. Khi đó  $f(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$  chỉ xảy ra khi  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ , do đó  $\text{Ker}(f) = \{\mathbf{0}\}$ .

Ngược lại, giả sử  $\text{Ker}(f) = \{\mathbf{0}\}$ . Nếu  $f(\mathbf{u}) = f(\mathbf{v})$  thì  $f(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) - f(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ . Do  $\text{Ker}(f) = \{\mathbf{0}\}$ , suy ra  $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{0}$ , hay  $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ . Vậy  $f$  là một đơn ánh.

(b) Giả sử  $f$  là một toàn ánh, tức là  $\text{Im}(f) = W$ . Khi đó

$$\text{rank}(f) = \dim \text{Im}(f) = \dim W.$$

Ngược lại, giả sử  $\text{rank}(f) = \dim W$ , tức là  $\dim \text{Im}(f) = \dim W$ . Ngoài ra  $\text{Im}(f)$  là một không gian con của  $W$ , từ đó suy ra  $\text{Im}(f)$  phải trùng với  $W$ .

□

Kết quả sau đây cho ta mối quan hệ giữa số khuyết và hạng của một ánh xạ tuyến tính.

**Định lý 4.22.** Giả sử  $f : V \rightarrow W$  là một ánh xạ tuyến tính và  $\dim V = n$ . Khi đó

$$\text{nullity}(f) + \text{rank}(f) = n.$$

*Chứng minh.* Giả sử  $A$  là ma trận của  $f$  trong một cặp cơ sở nào đó của  $V$  và  $W$ . Ta có:

$$\text{nullity}(f) = \dim(\text{Ker}(f)) = \dim(\mathcal{Z}_A)$$

và

$$\text{rank}(f) = \dim(\text{Im}(f)) = \dim(\text{không gian cột của } A) = \text{rank}(A),$$

trong đó  $\mathcal{Z}_A$  là tập nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .

Theo Định lý 3.47 trong Chương 3,

$$\dim(\mathcal{Z}_A) + \text{rank}(A) = n.$$

Từ đó ta có đẳng thức cần chứng minh. □

Từ Mệnh đề 4.21 và Định lý 4.22 ở trên ta có quan hệ giữa đơn ánh và toàn ánh của ánh xạ tuyến tính sau đây:

**Mệnh đề 4.23.** Giả sử  $f : V \rightarrow W$  là một ánh xạ tuyến tính và giả sử  $\dim V = \dim W = n$ . Khi đó:  $f$  là một đơn ánh khi và chỉ khi  $f$  là một toàn ánh.

*Chứng minh.* Theo Mệnh đề 4.21 (a),  $f$  là một đơn ánh khi và chỉ khi  $\text{Ker}(f) = \{0\}$ , điều này tương đương với  $\dim \text{Ker}(f) = 0$ . Mặt khác, theo Định lý 4.22

$$\dim \text{Ker}(f) = n - \text{rank}(f).$$

Do đó,  $\dim \text{Ker}(f) = 0$  tương đương với  $\text{rank}(f) = n$ . Theo Mệnh đề 4.21 (b), điều này tương đương với  $f$  là một toàn ánh.  $\square$

**Định nghĩa 4.24.** Hai không gian vectơ  $V$  và  $W$  được gọi là **đẳng cấu với nhau**, kí hiệu  $V \cong W$ , nếu tồn tại một ánh xạ tuyến tính  $f : V \rightarrow W$  và  $f$  là một song ánh. Một  $f$  như vậy được gọi là một **đẳng cấu**.

Chúng ta kết thúc chương bằng một kết quả quan trọng sau:

**Định lý 4.25.** Hai không gian vectơ hữu hạn chiều  $V$  và  $W$  là đẳng cấu với nhau nếu và chỉ nếu chúng có cùng số chiều.

*Chứng minh.* Giả sử có một đẳng cấu  $f : V \rightarrow W$ . Khi đó  $\dim(\text{Ker}(f)) = 0$  suy ra  $\dim V = \dim(\text{Im}(f))$  (theo Định lý 4.22). Mặt khác,  $\dim(\text{Im}(f)) = \dim W$  (do  $f$  là toàn cấu). Vậy  $\dim V = \dim W$ .

Chiều ngược lại, giả sử  $V$  và  $W$  có các cơ sở tương ứng là  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$  và  $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n\}$ . Xét ánh xạ tuyến tính định nghĩa bởi ma trận đơn vị đối với cặp cơ sở này. Hạng của ma trận này bằng  $n$ , do đó ánh xạ tuyến tính này là một toàn ánh. Mệnh đề 4.23 suy ra ánh xạ này là một song ánh.  $\square$

## Bài tập chương 4

**4.1.** Xác định những ánh xạ nào dưới đây là ánh xạ tuyến tính. Nếu là ánh xạ tuyến tính, hãy tìm ma trận trong cặp cơ sở chính tắc.

- (a)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y) = (2x + 3, 3y + 2)$ .
- (b)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y) = (2x + 3y, 3x - 2y)$ .
- (c)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y) = (x + a, y + b)$ ,  $a$  và  $b$  không đồng thời bằng 0 (phép tịnh tiến trong mặt phẳng).
- (d)  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (2x, 3z, 2y)$ .
- (e)  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y, z) = (x + 2y - z, x + z)$ .
- (f)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, f(x, y) = (x, -y, x + 2y)$ .

**4.2.** (a) Giả sử  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  là một ánh xạ tuyến tính sao cho  $f(1, 0) = (3, 5)$  và  $f(1, 1) = (4, 7)$ . Xác định  $f(2, 3)$ .

- (b) Giả sử  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  là một ánh xạ tuyến tính sao cho  $f(1, 0, 0) = (3, 5)$ ,  $f(1, 1, 0) = (2, 4)$  và  $f(1, 1, 1) = (4, 7)$ . Xác định  $f(1, 2, 3)$ .

**4.3.** Giả sử  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  là tự đồng cấu xác định bởi

$$f(x, y) = (x + y, x - y)$$

và giả sử  $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$  là một cơ sở với

$$\mathbf{u}_1 = (0, 1) \text{ và } \mathbf{u}_2 = (1, 1).$$

Hãy tìm ma trận của  $f$  đối với cơ sở  $B$ .

**4.4.** Giả sử  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  là ánh xạ tuyến tính xác định bởi

$$f(x, y) = (x + 2y, x, 0).$$

Hãy tìm ma trận của  $f$  đối với cặp cơ sở  $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$  và  $B' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ , trong đó

$$\mathbf{u}_1 = (-2, 4), \quad \mathbf{u}_2 = (1, 3), \quad \mathbf{v}_1 = (1, 1, 0), \quad \mathbf{v}_2 = (1, 1, 1), \quad \mathbf{v}_3 = (2, 0, 0).$$

**4.5.** Giả sử  $D : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \rightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$  là ánh xạ xác định bởi  $D(p) = p'$  (đạo hàm của đa thức  $p$ ). Hãy tìm ma trận của  $D$  đối với cơ sở  $\{p_1, p_2, p_3\}$  trong các trường hợp sau:

(a)  $p_1 = 1, p_2 = x, p_3 = x^2$ .

(b)  $p_1 = 3, p_2 = 3x - 2, p_3 = 8x^2 + 3x - 2$ .

**4.6.** Giả sử  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  là tự đồng cấu mà ma trận của nó đối với cơ sở chính tắc là  $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Hãy tìm một cơ sở của  $\text{Ker}(f)$  và một cơ sở của  $\text{Im}(f)$ .

**4.7.** Xét ánh xạ  $f : \mathbb{R}[x]_{\leq 3} \rightarrow \mathbb{R}$ , với  $f(ax^3 + bx^2 + cx + d) = a + b + c + d$ .

(a) Chứng minh rằng  $f$  là một ánh xạ tuyến tính.

(b) Tìm số khuyết và hạng của  $f$ .

(c) Tìm một cơ sở của  $\text{Ker}(f)$  và  $\text{Im}(f)$ .

**4.8.** Trả lời các câu hỏi như bài tập trước đối với  $f : \mathbb{R}[x]_{\leq 3} \rightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ , với  $f(p) = p + p'$ .

**4.9.** Xác định xem ánh xạ tuyến tính với ma trận trong cơ sở chính tắc cho dưới đây là (i) đơn ánh; (ii) toàn ánh; (iii) song ánh:

$$(a) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad (b) B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad (c) C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$



**4.10.** Cho  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $f(x, y) = (2x, x - y, y)$  và  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $g(x, y, z) = (z, x)$ . Hãy tìm các ma trận của  $f \circ g$  và  $g \circ f$  đối với cơ sở chính tắc.

**4.11.** Giả sử  $A$  là ma trận của  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , phép quay một góc  $\alpha$  theo ngược chiều kim đồng hồ, đối với cơ sở chính tắc. Hãy tìm  $A^n$ .

**4.12.** Hãy tìm ma trận của  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , phép quay một góc  $\alpha$  theo ngược chiều kim đồng hồ quanh trục  $Oz$ , đối với cơ sở chính tắc.

**4.13.** Hãy tìm ma trận của  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , phép đối xứng qua mặt phẳng  $Oyz$ , đối với cơ sở chính tắc.

**4.14.** Giả sử  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  là hợp thành của phép đối xứng qua trục  $Ox$  và phép quay xung quanh trục  $Oy$  một góc  $60^\circ$  theo ngược chiều kim đồng hồ. Tìm ma trận của  $f$  trong cơ sở chính tắc và  $f(1, 1, 2)$ .

**4.15.** Tính số khuyết của ánh xạ tuyến tính  $f$  trong mỗi trường hợp sau:

(a)  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^6$  với hạng bằng 2.

(b)  $f : \mathbb{R}^7 \rightarrow \mathbb{R}^5$  với hạng bằng 5.

(c)  $f : \mathbb{R}[x]_{\leq 4} \rightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$  có hạng bằng 1.

(d)  $f : M_{3 \times 3}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$  có hạng bằng 5.

**4.16.** Giả sử  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  là tự đồng cấu mà ma trận của nó đối với cơ sở chính tắc là  $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 7 & 0 \end{pmatrix}$ . Chứng minh rằng:

(a) Hạt nhân của  $f$  là một đường thẳng đi qua gốc tọa độ. Hãy tìm phương trình đường thẳng này.

(b) Ảnh của  $f$  là một mặt phẳng đi qua gốc tọa độ. Hãy tìm phương trình mặt phẳng này.

**4.17.** Giả sử  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  là tự đồng cấu mà ma trận đối với cơ sở chính tắc là  $A$ . Xác định xem trong các trường hợp sau trường hợp nào tồn tại  $f^{-1}$ , nếu tồn tại, hãy tìm  $f^{-1}(x, y)$ :

$$(a) A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \quad (b) A = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \quad (c) A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

**4.18.** Xác định xem ánh xạ tuyến tính  $f$  trong các trường hợp sau có phải là một đơn ánh hay không?

(a)  $f : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \rightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$  với  $f(p(x)) = p(x + 1)$ .

(b)  $f : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \rightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$  với  $f(p) = xp$ .

**4.19.** Giả sử  $A$  đồng dạng với  $B$  và  $B$  đồng dạng với  $C$ . Chứng minh rằng  $A$  đồng dạng với  $C$ .

**4.20.** Giả sử  $A$  đồng dạng với  $B$ . Chứng minh rằng  $A^2$  đồng dạng với  $B^2$ . Liệu  $A^n$  có đồng dạng với  $B^n$ , với mọi  $n \geq 3$ ?

# Chương 5

## Phép biến đổi tuyến tính

---

5.1. Phép biến đổi tuyến tính . . . . .	51
5.2. Vectơ riêng và Giá trị riêng . . . . .	51
5.3. Chéo hóa ma trận . . . . .	51
Bài tập chương 5 . . . . .	51

---

Trọng tâm của chương này các phép biến đổi tuyến tính (hay các tự đồng cấu). Cụ thể, vấn đề chính của chương là: Xét một phép biến đổi tuyến tính  $f : V \rightarrow V$ , cần tìm một cơ sở cho  $V$  để ma trận của  $f$  đối với cơ sở này là một ma trận đường chéo. Khi đó ta có thể hiểu  $f$  một cách dễ dàng hơn, chẳng hạn việc tính  $f(v)$  và  $f^n(v)$  (ánh xạ hợp thành  $n$  lần của  $f$ ).

Đi tìm câu trả lời cho câu hỏi này dẫn đến một vấn đề quan trọng trong đại số tuyến tính, đó là chéo hóa một ma trận.

### 5.1. Vectơ riêng và giá trị riêng

**Định nghĩa 5.1.** Một **giá trị riêng** của một ma trận vuông  $A$  cỡ  $n \times n$  là một vô hướng  $\lambda$  sao cho tồn tại một vectơ  $\mathbf{v}$  khác vectơ không sao cho

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}.$$

Vectơ  $\mathbf{v}$  được gọi là một **vectơ riêng tương ứng với giá trị riêng  $\lambda$** .

**Chú ý 5.2.** Trong định nghĩa trên, cần chú ý điều kiện  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ . Đồng thức  $A\mathbf{0} = \lambda\mathbf{0}$ , luôn luôn đúng với mọi vô hướng  $\lambda$ .

Trong định nghĩa của giá trị riêng và vectơ riêng, đồng thức  $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$  tương đương với

$$(A - \lambda I_n)\mathbf{v} = \mathbf{0}. \quad (5.1)$$

Do đó,  $\lambda$  là một giá trị riêng của  $A$  khi và chỉ khi hệ phương trình tuyến tính thuần nhất (5.1) có nghiệm không tầm thường. Không gian nghiệm của hệ phương trình này là một không gian vectơ con của  $\mathbb{R}^n$  và nó được gọi là **không gian riêng** của  $A$  ứng với giá trị riêng  $\lambda$ .

Từ lập luận trên, ta có kết quả sau:

**Mệnh đề 5.3.** *Giả sử  $A$  là một ma trận vuông cỡ  $n$ . Khi đó:*

(a) *Một vô hướng  $\lambda$  là một giá trị riêng của  $A$  khi và chỉ khi*

$$\det(A - \lambda I_n) = 0.$$

(b) Các vectơ riêng của  $A$  tương ứng với giá trị riêng  $\lambda$  là các nghiệm không tầm thường của hệ

$$(A - \lambda I_n)\mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

**Định nghĩa 5.4.** Phương trình  $\det(A - \lambda I_n) = 0$  được gọi là **phương trình đặc trưng** của  $A$ . Ta có

$$\det(A - \lambda I_n) = (-1)^n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0$$

là một đa thức bậc  $n$  theo biến  $\lambda$ . Đa thức này được gọi là **đa thức đặc trưng** của  $A$ , ta kí hiệu

$$P_A(x) = (-1)^n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

**Các bước tìm giá trị riêng và vectơ riêng:**

Bước 1: Tính đa thức đặc trưng  $P_A(x)$ .

Bước 2: (Tìm giá trị riêng) Tìm nghiệm thực của phương trình  $P_A(x) = 0$ , đó là tất cả các giá trị riêng của  $A$ .

Bước 3: (Tìm vectơ riêng) Ứng với mỗi giá trị riêng  $\lambda_i$ , giải hệ phương trình tuyến tính thuần nhất  $(A - \lambda_i I_n)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ . Tập nghiệm là không gian riêng tương ứng với giá trị riêng  $\lambda_i$ . Thông thường chúng ta đưa ra một cơ sở cho mỗi không gian riêng này.

**Ví dụ 5.5.** Cho  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$ . Khi đó, đa thức đặc trưng của  $A$  theo biến  $x$  là

$$P_A(x) = \det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 3-x & 2 \\ 3 & 8-x \end{vmatrix} = x^2 - 11x + 18.$$

Phương trình  $x^2 - 11x + 18 = 0$  có hai nghiệm  $x = 2$  và  $x = 9$ . Vậy ma trận  $A$  có hai giá trị riêng  $\lambda_1 = 2$  và  $\lambda_2 = 9$ .

Ứng với giá trị riêng  $\lambda_1 = 2$ , giải hệ phương trình  $(A - 2I_2)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ , hay

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Hệ có nghiệm  $x_1 = -2t$  và  $x_2 = t$ , với  $t \in \mathbb{R}$  tùy ý. Do đó,  $(-2t, t)$  (với  $t \neq 0$ ) là vectơ riêng ứng với giá trị riêng  $\lambda_1 = 2$ . Không gian riêng ứng với giá trị riêng này là không gian tuyến tính sinh bởi vectơ  $(-2, 1)$ .

Ứng với giá trị riêng  $\lambda_2 = 9$ , giải hệ phương trình  $(A - 9I_2)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ , ta có  $(t, 3t)$  (với  $t \neq 0$ ) là vectơ riêng ứng với giá trị riêng  $\lambda_2 = 9$ . Không gian riêng ứng với giá trị riêng này là không gian tuyến tính sinh bởi vectơ  $(1, 3)$ .

**Ví dụ 5.6.** Cho  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ . Đa thức đặc trưng  $P_A(x) = (x-1)(x-2)^2$ . Do đó  $A$  có các giá trị riêng gồm  $\lambda_1 = 1$  và  $\lambda_2 = 2$ .

Với  $\lambda_1 = 1$ , giải hệ phương trình tuyến tính thuần nhất  $(A - I_3)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ , ta có không gian riêng là một không gian một chiều sinh bởi vectơ  $(1, 0, 1)$ .

Với  $\lambda_2 = 2$ , giải hệ phương trình tuyến tính thuần nhất  $(A - 2I_3)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ , ta có không gian riêng là một không gian hai chiều sinh bởi các vectơ  $(0, -1, 1)$  và  $(1, 2, 0)$ .

**Ví dụ 5.7.** Ma trận  $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$  có đa thức đặc trưng  $P_A(x) = x^2 + x - 1$ . Đa thức này không có nghiệm thực nên ma trận  $A$  không có giá trị riêng.

Bây giờ chúng ta có thể định nghĩa giá trị riêng và vectơ riêng cho một phép biến đổi tuyến tính.

**Định nghĩa 5.8.** Giả sử  $f : V \rightarrow V$  là một phép biến đổi tuyến tính. Một số  $\lambda$  được gọi là một **giá trị riêng** của  $f$  nếu tồn tại một vectơ  $\mathbf{v}$  khác vectơ không sao cho  $f(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$ . Vectơ  $\mathbf{v}$  được gọi là một **vectơ riêng** của  $f$  ứng với giá trị riêng  $\lambda$ .

Giả sử  $A$  là ma trận của  $f$  trong một cơ sở nào đó của  $V$ . Theo chương trước, ta có:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

trong đó  $(x_1, \dots, x_n)$  và  $(y_1, \dots, y_n)$  tương ứng là tọa độ của  $\mathbf{v}$  và  $f(\mathbf{v})$  trong cơ sở đã cho. Do đó  $f(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$  tương đương với

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

hay  $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ , tức là  $\lambda$  là một giá trị riêng và  $\mathbf{v}$  là một vectơ riêng tương ứng của  $A$ .

**Ví dụ 5.9.** Cho phép biến đổi tuyến tính  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , với  $f(x, y) = (3x + 2y, 3x + 8y)$ . Tìm các giá trị riêng và các không gian riêng tương ứng của  $f$ .

Trong cơ sở chính tắc  $f$  có ma trận  $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$ . Ma trận này chính là ma trận trong Ví dụ 5.5, do đó các giá trị riêng và các không gian riêng của  $f$  trùng với  $A$ . Xem kết quả tính toán trong Ví dụ 5.5.

## 5.2. Chéo hóa ma trận

**Định nghĩa 5.10.** Một ma trận vuông  $A$  cỡ  $n$  được gọi là **chéo hóa được** nếu  $A$  đồng dạng với một ma trận đường chéo  $D$ , tức là tồn tại một ma trận

vuông  $C$  cỡ  $n$  khả nghịch sao cho

$$C^{-1}AC = D.$$

**Định lý 5.11.** *Giả sử  $A$  là một ma trận vuông cỡ  $n$ . Khi đó  $A$  chéo hóa được khi và chỉ khi  $A$  có  $n$  vectơ riêng độc lập tuyến tính.*

*Chứng minh. Chiều thuận.* Giả sử  $A$  chéo hóa được. Khi đó, theo định nghĩa tồn tại một ma trận vuông  $C$  khả nghịch sao cho  $C^{-1}AC = D$  là một ma trận đường chéo. Giả sử  $C = (\mathbf{c}_1 | \mathbf{c}_2 | \cdots | \mathbf{c}_n)$  ( $\mathbf{c}_j$  là vectơ cột thứ  $j$ ) và  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  là các phần tử trên đường chéo chính của  $D$ . Khi đó:

$$A(\mathbf{c}_1 | \mathbf{c}_2 | \cdots | \mathbf{c}_n) = (\mathbf{c}_1 | \mathbf{c}_2 | \cdots | \mathbf{c}_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

hay  $(A\mathbf{c}_1 | A\mathbf{c}_2 | \cdots | A\mathbf{c}_n) = (\lambda_1\mathbf{c}_1 | \lambda_2\mathbf{c}_2 | \cdots | \lambda_n\mathbf{c}_n)$ . Do đó:

$$A\mathbf{c}_1 = \lambda_1\mathbf{c}_1, \dots, A\mathbf{c}_n = \lambda_n\mathbf{c}_n.$$

Vì  $C$  khả nghịch nên  $\{\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n\}$  là một hệ vectơ độc lập tuyến tính, do đó từ các đẳng thức ở trên,  $A$  có  $n$  vectơ riêng  $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n$  độc lập tuyến tính.

**Chiều ngược lại.** Giả sử  $A$  có  $n$  vectơ riêng  $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n$  độc lập tuyến tính với các giá trị riêng tương ứng  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Khi đó

$$A\mathbf{c}_1 = \lambda_1\mathbf{c}_1, \dots, A\mathbf{c}_n = \lambda_n\mathbf{c}_n$$

hay  $AC = CD$ , với  $C = (\mathbf{c}_1 | \cdots | \mathbf{c}_n)$  và  $D$  là ma trận đường chéo có các phần tử trên đường chéo gồm  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Do  $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n$  độc lập tuyến tính nên ma trận  $C$  khả nghịch. Từ đó ta có  $C^{-1}AC = D$ , vì vậy  $C$  chéo hóa được.  $\square$

Chúng ta thừa nhận kết quả sau đây.

**Mệnh đề 5.12.** *Các vectơ riêng ứng với các giá trị đôi một khác nhau lập thành một hệ độc lập tuyến tính.*

**Mệnh đề 5.13.** *Giả sử ma trận  $A$  vuông cỡ  $n$  có  $k$  giá trị riêng phân biệt  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ . Nếu  $\mathcal{B}_i$  là cơ sở của không gian riêng ứng với giá trị riêng  $\lambda_i$  thì  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_k$  là một hợp rời và  $\mathcal{B}$  là một hệ vectơ độc lập tuyến tính.*

*Chứng minh.* Theo Mệnh đề 5.12 thì các tập  $\mathcal{B}_i$  không có phần tử chung, do đó  $\mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_k$  là một hợp rời. Giả sử có một tổ hợp tuyến tính của các vectơ trong  $\mathcal{B}$  bằng  $\mathbf{0}$ . Nhóm các phần tử trong cùng một tổ hợp tuyến tính của  $\mathcal{B}_i$  với nhau, ta thu được

$$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \cdots + \mathbf{v}_k = \mathbf{0}, \quad \mathbf{v}_i \in \mathcal{B}_i.$$

Như vậy  $\mathbf{v}_i$  là giá trị riêng ứng với vectơ riêng  $\lambda_i$ . Theo Mệnh đề 5.12 thì điều này không thể xảy ra.  $\square$

**Hệ quả 5.14.** Nếu ma trận vuông  $A$  cỡ  $n$  có  $n$  giá trị riêng đôi một khác nhau thì  $A$  chéo hóa được.

*Chứng minh.* Gọi  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$  là  $n$  vectơ riêng ứng với các giá trị riêng đôi một khác nhau  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Theo Mệnh đề 5.13 thì  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$  là một hệ độc lập tuyến tính. Vì vậy theo Định lý 5.11 ma trận  $A$  chéo hóa được.  $\square$

**Định nghĩa 5.15.** Giả sử  $\lambda$  là một giá trị riêng của ma trận  $A$ . **Số bội đại số** của  $\lambda$  là số bội của nghiệm  $x = \lambda$  của phương trình  $P_A(x) = 0$ . **Số bội hình học** của  $\lambda$  là số chiều của không gian riêng tương ứng với giá trị riêng  $\lambda$ .

Dưới đây là các điều kiện cần và đủ để ma trận  $A$  là chéo hóa được. Các điều kiện này dễ dàng kiểm tra một cách thực hành hơn so với điều kiện trong Định lý 5.11.

**Định lý 5.16.** Giả sử  $A$  là một ma trận vuông cỡ  $n$  và  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  là các giá trị riêng của  $A$ . Khi đó các khẳng định sau là tương đương:

- (a)  $A$  chéo hóa được.
- (b) Tập  $\mathcal{B}$  trong Mệnh đề 5.13 gồm  $n$  vectơ.
- (c) Số bội đại số của mỗi giá trị riêng bằng số bội hình học của nó.

*Chứng minh.* Chúng ta thừa nhận kết quả này.  $\square$

#### Các bước để chéo hóa một ma trận $A$ :

Bước 1: Tìm tất cả các giá trị riêng và không gian riêng tương ứng của  $A$ . Tính số chiều của các không gian riêng.

Bước 2: Kiểm tra điều kiện chéo hóa được. (Điều kiện (c) trong Định lý 5.16).

Bước 3: Nếu ma trận  $A$  chéo hóa được, tìm các cơ sở cho các không gian riêng. Viết  $C$  là ma trận gồm các vectơ cột là các vectơ cơ sở (xem trong chứng minh của Định lý 5.11). Khi đó  $C$  là ma trận cần tìm để  $C^{-1}AC$  là ma trận đường chéo.

**Ví dụ 5.17.** (a) Xét  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$  trong Ví dụ 5.6. Ma trận  $A$  có

các giá trị riêng gồm  $\lambda_1 = 1$  và  $\lambda_2 = 2$ . Đa thức đặc trưng  $P_A(x) = (x-1)(x-2)^2$  cho thấy số bội đại số của  $\lambda_1$  bằng 1 và của  $\lambda_2$  bằng 2. Cũng theo ví dụ 5.6, số bội hình học cũng vậy. Do đó ma trận  $A$  chéo hóa được. Theo ví dụ 5.6, ta có cơ sở của các không gian riêng, từ đó

lấy  $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Ta có:

$$C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- (b) Ma trận  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix}$  có 2 giá trị riêng  $\lambda_1 = 1$  và  $\lambda_2 = 2$  trong đó  $\lambda_1$  có số bội đại số (bằng 2) khác với số bội hình học (bằng 1), vậy  $A$  không chéo hóa được.

### 5.3. Một vài ứng dụng của chéo hóa ma trận

#### 5.3.1. Tính lũy thừa một ma trận

**Ví dụ 5.18.** Xét  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$  như trong Ví dụ 5.5. Tính  $A^n$ .

Theo Ví dụ 5.5, đặt  $C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ . Khi đó  $C^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ . Ta có

$$C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Do đó:

$$C^{-1}A^nC = (C^{-1}AC)^n = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 9^n \end{pmatrix}.$$

Vậy

$$\begin{aligned} A^n &= C \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 9^n \end{pmatrix} C^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 9^n \end{pmatrix} \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 9^n + 6 \cdot 2^n & 2 \cdot 9^n - 2 \cdot 2^n \\ 3 \cdot 9^n - 3 \cdot 2^n & 6 \cdot 9^n + 2^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Giả sử  $f : V \rightarrow V$  là một phép biến đổi tuyến tính. Một cách truy hồi ta có phép biến đổi tuyến tính  $f^k : V \rightarrow V$ , ở đây

$$f^k = f \circ \dots \circ f \text{ (} k \text{ lần)}.$$

Khi đó

$$f^k(\mathbf{v}) = A^k \mathbf{v},$$

trong đó  $A$  là một ma trận của  $f$  trong một cơ sở nào đó của  $V$ . Vì vậy việc tính  $f^k$  quy về việc tính  $A^k$ .

#### 5.3.2. Tìm số hạng tổng quát của dãy truy hồi tuyến tính

**Ví dụ 5.19.** Tính số hạng tổng quát của dãy số định nghĩa một cách truy hồi như sau:

$$x_1 = 1, x_2 = 6, x_n = 5x_{n-1} - 6x_{n-2}, \text{ với } n \geq 3$$

.

Đặt

$$a_n = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Khi đó:

$$a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad a_n = Aa_{n-1} = \dots = A^{n-2}a_2.$$

Do đó bài toán quy về việc tính lũy thừa của  $A$  ở tiết trước.

## Bài tập chương 5

**5.1.** Tính đa thức đặc trưng, giá trị riêng, cơ sở của các không gian riêng trong các trường hợp sau:

$$(a) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad (b) \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}, \quad (c) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (d) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

**5.2.** Giả sử  $A$  là ma trận trong mỗi trường hợp ở bài tập trước. Hãy tính  $A^n$ .

**5.3.** Hãy chéo hóa các ma trận sau nếu có thể:

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad (b) \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & -2 \end{pmatrix}, \quad (c) \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 4 & -6 & 3 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

**5.4.** Hãy cho ví dụ cho mỗi trường hợp sau:

- (a) Ma trận  $C$  dùng để chéo hóa một ma trận  $A$  (tức là  $C^{-1}AC$  là một ma trận đường chéo) là không duy nhất.
- (b) Một ma trận khả nghịch nhưng không chéo hóa được.
- (c) Một ma trận chéo hóa nhưng không khả nghịch.

**5.5.** Giả sử ma trận  $A$  có đa thức đặc trưng  $P_A(x) = (x-1)^2(x-3)(x-4)^3$ . Hãy trả lời các câu hỏi sau đây và giải thích tại sao:

- (a) Kích thước của ma trận  $A$ ?
- (b) Ma trận  $A$  có khả nghịch không?
- (c)  $A$  có bao nhiêu không gian riêng? Chiều của mỗi không gian riêng này có thể bằng bao nhiêu?

**5.6.** Cho  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Hãy tìm các giá trị riêng và cơ sở của các không gian riêng của các ma trận  $A$  và  $A^{10}$ .

**5.7.** Tính định thức của  $A$  nếu biết rằng đa thức đặc trưng của  $A$  bằng

- (a)  $P_A(x) = x^3 + 2x^2 - 20x - 15$ ;
- (b)  $P_A(x) = x^3 - 13x^2 - 2x + 52$ .

**5.8.** Chứng minh bằng 2 cách, rằng phép quay một góc  $\alpha \in (0, \pi)$  ngược chiều kim đồng hồ, xung quanh gốc tọa độ trong mặt phẳng  $Oxy$  không có giá trị riêng. (Gợi ý: Đa thức đặc trưng; Hình học của vectơ riêng.).

**5.9.** Chứng minh rằng phép lấy đối xứng trục qua một đường thẳng xuyên gốc tọa độ luôn luôn có hai giá trị riêng  $\pm 1$ . Mô tả hình học các không gian riêng tương ứng với hai giá trị riêng này.



**5.10.** Cho dãy Fibonacci  $1, 1, 2, 3, 5, \dots$ , tức là  $f_1 = 1, f_2 = 1, f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$  (với mọi  $n \geq 3$ ). Đặt

$$x_n = \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Chứng minh rằng  $x_n = Ax_{n-1}$  và  $x_n = A^{n-2}x_2$ .

(b) Hãy tính  $A^k$ , từ đó tính số hạng tổng quát của dãy Fibonacci.

**5.11.** Tính số hạng tổng quát của dãy số định nghĩa một cách truy hồi như sau:

(a)  $x_1 = 1, x_2 = 6, x_n = 4x_{n-1} + 5x_{n-2}$ , với  $n \geq 3$ .

(b)  $x_1 = 3, x_2 = 7, x_n = 4x_{n-1} - 4x_{n-2}$ , với  $n \geq 3$ .

**5.12.** Cho dãy số định nghĩa một cách truy hồi như sau:

$$x_1 = r, x_2 = s, x_n = ax_{n-1} + bx_{n-2}, \text{ với } n \geq 3.$$

Giả sử  $\lambda_1$  và  $\lambda_2$  là các giá trị riêng của ma trận  $\begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Chứng minh rằng:

(a) Nếu  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  thì  $x_n = c_1\lambda_1^{n-1} + c_2\lambda_2^{n-1}$ , với  $c_1, c_2$  là các vô hướng nào đó.

(b) Nếu  $\lambda_1 = \lambda_2$  thì  $x_n = (c_1 + c_2(n-1))\lambda^{n-1}$ , với  $c_1, c_2$  là các vô hướng nào đó.

Trong cả hai trường hợp, các vô hướng  $c_1, c_2$  có thể tính từ  $r$  và  $s$ .

**5.13.** Hãy tìm một cơ sở để ma trận của tự đồng cấu đối với cơ sở đó trong mỗi trường hợp sau là một ma trận đường chéo:

(a)  $f : \mathbb{R}_2 \rightarrow \mathbb{R}_2$  với  $f(x, y) = (x + 2y, 2x + 4y)$ ;

(b)  $g : \mathbb{R}_3 \rightarrow \mathbb{R}_3$  với  $g(x, y, z) = (-2x + 2y - z, 2x + y - 2z, -3x - 6y)$ ;

(c)  $D : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \rightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq 1}$  với  $D(f) = f'$  (đạo hàm của  $f$ ).

**5.14.** Giả sử  $\pi_{\mathbf{u}} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  xác định bởi  $\pi_{\mathbf{u}}(\mathbf{v})$  là hình chiếu của vectơ  $v$  xuống vectơ  $\mathbf{u}$  cố định trước trong  $\mathbb{R}^2$ .

(a) Chứng minh rằng  $\pi_{\mathbf{u}}$  là một tự đồng cấu. Tìm ma trận của  $A$  trong cơ sở chính tắc.

(b) Chứng minh rằng các giá trị riêng của  $\pi_{\mathbf{u}}$  là 0 và 1.

(b) Hãy tìm một cơ sở để ma trận của  $\pi_{\mathbf{u}}$  đối với cơ sở đó là một ma trận đường chéo

**5.15.** Chứng minh rằng nếu ma trận  $A$  có một giá trị riêng là  $\lambda$  và  $\mathbf{v}$  là một vectơ riêng tương ứng với  $\lambda$  thì ma trận  $A^{-1}$  có một giá trị riêng là  $1/\lambda$  và  $\mathbf{v}$  là một vectơ riêng tương ứng.

**5.16.** Chứng minh rằng nếu ma trận  $A$  cỡ  $n \times n$  có một giá riêng là  $\lambda$  và  $\mathbf{v}$  là một vectơ riêng tương ứng với  $\lambda$ , và  $c$  là một vô hướng, thì ma trận  $A - cI_n$  có một giá trị riêng là  $\lambda - c$  và  $\mathbf{v}$  là một vectơ riêng tương ứng.

**5.17.** Áp dụng hai bài tập 5.15 và 5.16 hãy tìm các giá trị riêng và cơ sở của các không gian riêng của

$$(a) A^{-1}; \quad (b) A + 3I_3; \quad (c) A - 2I_3.$$

Ở đây  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$

**5.18.** Giả sử  $A$  là một ma trận khả nghịch. Chứng minh rằng nếu ma trận  $A$  chéo hóa được thì ma trận nghịch đảo  $A^{-1}$  cũng chéo hóa được.

**5.19.** Chứng minh rằng nếu ma trận  $A$  chéo hóa được thì ma trận chuyển vị  $A^t$  cũng chéo hóa được.

**5.20.** Cho  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . Đặt  $M = (a - d)^2 + 4bc$ .

- (a) Chứng minh rằng  $A$  chéo hóa được (tương ứng, không chéo hóa được) nếu  $M > 0$  (tương ứng,  $M < 0$ ).
- (b) Hãy cho 2 ví dụ chứng tỏ khi  $M = 0$ , ma trận  $A$  có hoặc không chéo hóa được.

# Chương 6

## Trực giao hóa và ứng dụng

Chương này chúng ta sẽ bàn về ma trận đối xứng và ứng dụng trong việc khảo sát các đường và mặt bậc hai.

### 6.1. Tích vô hướng, độ dài vectơ và trực giao

Trong tiết này sẽ đưa ra khái niệm trực giao, trọng tâm là trình bày phương pháp trực giao hóa Gram-Schmidt.

#### 6.1.1. Tích vô hướng

**Định nghĩa 6.1.** Giả sử  $\mathbf{u}$  và  $\mathbf{v}$  là các vectơ (cột) trong  $\mathbb{R}^n$ . Khi đó số thực  $\mathbf{u}^t \mathbf{v}$  được gọi là **tích vô hướng** của  $\mathbf{u}$  và  $\mathbf{v}$ , kí hiệu bởi  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ . Cụ thể:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n.$$

Từ định nghĩa ta có các tính chất sau:

1.  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$  (tính đối xứng).
2.  $(c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot (c\mathbf{v})$ .
3.  $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ .

**Định nghĩa 6.2.** Hai vectơ trong  $\mathbb{R}^n$  được gọi là **trực giao** (với nhau) nếu tích vô hướng của chúng bằng 0.

**Định nghĩa 6.3.** **Độ dài** của một vectơ  $\mathbf{v}$  trong  $\mathbb{R}^n$  định nghĩa bởi:

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}.$$

Giả sử  $c$  là một vô hướng khác không. Khi đó:

$$c\mathbf{v} = (cv_1, \dots, cv_n) \text{ và } \|c\mathbf{v}\| = \sqrt{c^2 v_1^2 + \cdots + c^2 v_n^2} = |c| \|\mathbf{v}\|.$$

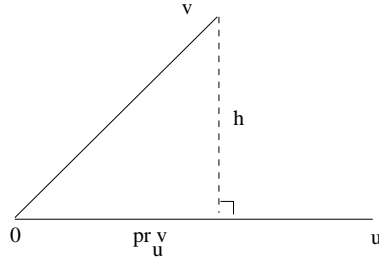
Do đó nhân vectơ  $\mathbf{v}$  khác vectơ không với  $1/\|\mathbf{v}\|$  ta được vectơ  $(1/\|\mathbf{v}\|)\mathbf{v}$  có độ dài bằng 1. Ta gọi phép nhân  $(1/\|\mathbf{v}\|)\mathbf{v}$  để được một vectơ (có độ dài) đơn vị và cùng phương với  $\mathbf{v}$  là phép **chuẩn hóa** vectơ.

**Ví dụ 6.4.** Chuẩn hóa vectơ  $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$  trong  $\mathbb{R}^3$  ta có vectơ

$$(1/\|\mathbf{v}\|)\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$

### Chiếu một vectơ lên một đường thẳng

Giả sử  $\mathbf{u}$  và  $\mathbf{v}$  là các vectơ trong  $\mathbb{R}^n$ , trong đó  $\mathbf{u}$  khác vectơ không. Gọi  $\ell$  là đường thẳng đi qua gốc tọa độ và có  $\mathbf{u}$  là một vectơ chỉ phương. Kí hiệu  $\text{pr}_{\mathbf{u}}\mathbf{v}$  là hình chiếu của  $\mathbf{v}$  lên  $\ell$ ,  $\text{pr}_{\mathbf{u}}\mathbf{v} = c\mathbf{u}$  với  $c$  là một vô hướng nào đó. Để xác định  $\text{pr}_{\mathbf{u}}\mathbf{v}$  ta sẽ đi xác định  $c$ . Vectơ  $\mathbf{h} = \mathbf{v} - \text{pr}_{\mathbf{u}}\mathbf{v}$  trực giao với  $\mathbf{u}$ , do



Hình 6.1

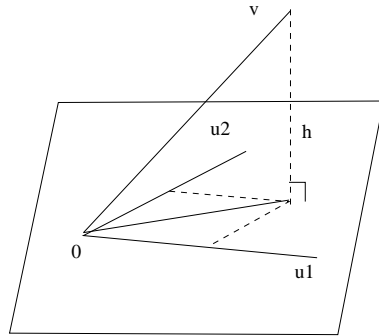
đó:

$$0 = (\mathbf{v} - \text{pr}_{\mathbf{u}}\mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} = (\mathbf{v} - c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} - c\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}.$$

Vậy  $c = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$ , do đó  $\text{pr}_{\mathbf{u}}\mathbf{v} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}\mathbf{u}$ .

### Chiếu một vectơ lên mặt phẳng

Giả sử  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$  và  $\mathbf{v}$  là các vectơ trong  $\mathbb{R}^n$ , trong đó  $\mathbf{u}_1$  và  $\mathbf{u}_2$  độc lập tuyến tính. Gọi  $\mathcal{P}$  là mặt phẳng đi qua gốc tọa độ căng bởi  $\mathbf{u}_1$  và  $\mathbf{u}_2$ . Kí hiệu  $\text{pr}_{\mathcal{P}}\mathbf{v}$  là hình chiếu của  $\mathbf{v}$  lên  $\mathcal{P}$ ,  $\text{pr}_{\mathcal{P}}\mathbf{v} = c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2$  với  $c_1$  và  $c_2$  là các vô hướng nào đó. Để xác định  $\text{pr}_{\mathcal{P}}\mathbf{v}$  ta sẽ đi xác định  $c_1$  và  $c_2$ . Vectơ  $\mathbf{h} = \mathbf{v} - \text{pr}_{\mathcal{P}}\mathbf{v}$



Hình 6.2

trực giao với  $\mathcal{P}$ , do đó:

$$0 = (\mathbf{v} - c_1\mathbf{u}_1 - c_2\mathbf{u}_2) \cdot \mathbf{u}_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_i - c_i\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_i, \text{ với } i = 1, 2.$$

Vậy  $c_i = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_i}{\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_i}$ , do đó  $\text{pr}_{\mathcal{P}}\mathbf{v} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_2}{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2}\mathbf{u}_2$ .

### Tổng quát: Chiếu một vectơ lên một không gian con

Giả sử  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$  và  $\mathbf{v}$  là các vectơ trong  $\mathbb{R}^n$ , trong đó  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$  độc lập tuyến tính. Gọi  $W$  là không gian con của  $\mathbb{R}^n$  sinh bởi  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ . Kí hiệu  $\text{pr}_W\mathbf{v}$  là hình chiếu của  $\mathbf{v}$  lên  $W$ . Tương tự như các phép chiếu trước, ta có kết quả sau:

**Mệnh đề 6.5.** Hình chiếu của  $\mathbf{v}$  lên  $W$  là

$$\text{pr}_W \mathbf{v} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1} \mathbf{u}_1 + \cdots + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_k}{\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{u}_k} \mathbf{u}_k.$$

Ngoài ra vectơ  $\mathbf{h} = \mathbf{v} - \text{pr}_W \mathbf{v}$  trực giao với  $W$ .

### 6.1.2. Trực giao hóa Gram-Schmidt

**Định lý 6.6** (Quá trình trực giao hóa Gram-Schmidt). Giả sử  $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k\}$  là một cơ sở của một không gian con  $W$  của  $\mathbb{R}^n$ . Định nghĩa:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \mathbf{x}_1, \\ \mathbf{v}_2 &= \mathbf{x}_2 - \left( \frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{x}_2}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1} \right) \mathbf{v}_1, \\ \mathbf{v}_3 &= \mathbf{x}_3 - \left( \frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{x}_3}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1} \right) \mathbf{v}_1 - \left( \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{x}_3}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2} \right) \mathbf{v}_2, \\ &\vdots \\ \mathbf{v}_k &= \mathbf{x}_k - \left( \frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{x}_k}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1} \right) \mathbf{v}_1 - \left( \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{x}_k}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2} \right) \mathbf{v}_2 - \cdots - \left( \frac{\mathbf{v}_{k-1} \cdot \mathbf{x}_k}{\mathbf{v}_{k-1} \cdot \mathbf{v}_{k-1}} \right) \mathbf{v}_{k-1}, \end{aligned}$$

và

$$W_i = \mathcal{L}\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_i\}, \text{ với } i = 1, \dots, k.$$

Khi đó,  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i\}$  là một cơ sở trực giao của  $W_i$  với  $i = 1, \dots, k$ . Đặc biệt  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$  là một cơ sở trực giao của  $W$ .

*Chứng minh.* Theo cách định nghĩa các vectơ  $\mathbf{v}_i$  ( $i = 2, \dots, k$ ):

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_i &= \mathbf{x}_i - \left( \frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{x}_i}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1} \right) \mathbf{v}_1 - \left( \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{x}_i}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2} \right) \mathbf{v}_2 - \cdots - \left( \frac{\mathbf{v}_{i-1} \cdot \mathbf{x}_i}{\mathbf{v}_{i-1} \cdot \mathbf{v}_{i-1}} \right) \mathbf{v}_{i-1} \\ &= \mathbf{x}_i - \text{pr}_{W_{i-1}} \mathbf{x}_i. \end{aligned}$$

Theo Mệnh đề 6.5 vectơ  $\mathbf{v}_i$  trực giao với  $W_{i-1}$ . Vậy  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i\}$  là một hệ trực giao với  $i = 1, \dots, k$ .

Ta sẽ chứng minh  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i\}$  là một cơ sở của  $W_i$  với  $i = 1, \dots, k$  bằng qui nạp. Rõ ràng khẳng định đúng khi  $i = 1$ . Giả sử khẳng định đúng đến  $i - 1$ , tức là  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{i-1}\}$  là một cơ sở của  $W_{i-1}$ . Theo cách định nghĩa vectơ  $\mathbf{v}_i$  ta có

$$\mathbf{x}_i = \left( \frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{x}_i}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1} \right) \mathbf{v}_1 + \cdots + \left( \frac{\mathbf{v}_{i-1} \cdot \mathbf{x}_i}{\mathbf{v}_{i-1} \cdot \mathbf{v}_{i-1}} \right) \mathbf{v}_{i-1} + \mathbf{v}_i,$$

do đó  $\mathbf{x}_i \in \mathcal{L}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i\}$ , cùng với giả thiết qui nạp ta có  $W_i \subset \mathcal{L}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i\}$ . Tương tự, cũng theo cách định nghĩa vectơ  $\mathbf{v}_i$  và giả thiết qui nạp ta có  $\mathbf{v}_i \in W_i$ , do đó  $\mathcal{L}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i\} \subset W_i$ . Vậy  $W_i = \mathcal{L}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i\}$ , tức là khẳng định đúng với  $i$ . Định lý được chứng minh.  $\square$

**Ví dụ 6.7.** Giả sử  $W$  là một không gian con của  $\mathbb{R}^3$  sinh bởi  $\mathbf{x}_1 = (2, 1, 0)$  và  $\mathbf{x}_2 = (-2, 0, 1)$ . Để tìm một cơ sở trực chuẩn cho  $W$  ta thực hiện 2 bước:

**Bước 1:** (Quá trình Gram-Schmidt)

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{x}_1 = (2, 1, 0),$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{x}_2 - \left( \frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{x}_2}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1} \right) \mathbf{v}_1 = (-2, 0, 1) - \frac{-4}{5}(2, 1, 0) = \left(-\frac{2}{5}, \frac{4}{5}, 1\right).$$

Khi đó  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$  là một cơ sở trực giao của  $W$ .

**Bước 2:** Lấy chuẩn hóa  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$  ta thu được một cơ sở trực chuẩn của  $W$  là:

$$\left\{ \left( \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0 \right), \left( -\frac{2}{3\sqrt{5}}, \frac{4}{3\sqrt{5}}, \frac{5}{3\sqrt{5}} \right) \right\}.$$

## 6.2. Chéo hóa ma trận đối xứng

**Định nghĩa 6.8.** Một ma trận vuông  $A$  được gọi là **trực giao** nếu  $A$  khả nghịch và  $A^{-1} = A^t$ .

Điều kiện để  $A$  là ma trận trực giao ở trên tương đương với  $A^t A$  là một ma trận đơn vị. Dưới đây ta có tiêu chuẩn dễ tính toán thực hành hơn.

**Mệnh đề 6.9.** Một ma trận vuông  $A$  là trực giao khi và chỉ khi các vectơ cột lập thành một hệ trực chuẩn.

*Chứng minh.* Giả sử  $A^t A = B = (b_{ij})_{n \times n}$  và  $\mathbf{v}_k$  là vectơ cột thứ  $k$  của  $A$ . Khi đó:

$$b_{ij} = \begin{pmatrix} a_{1i} & a_{2i} & \cdots & a_{ni} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} = \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j.$$

Do đó  $A^t A$  là một ma trận đơn vị khi và chỉ khi  $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i = 1$  và  $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = 0$  với mọi  $i \neq j$ . Từ đó, khẳng định được chứng minh.  $\square$

**Mệnh đề 6.10.** Nếu một ma trận  $A$  chéo hóa trực giao được thì  $A$  đối xứng.

*Chứng minh.* Giả sử ma trận  $A$  chéo hóa trực giao được, tức là tồn tại ma trận trực giao  $C$  để  $C^t A C = B$  là một ma trận đường chéo. Ta có:  $A = C B C^t$ . Khi đó:

$$A^t = (C B C^t)^t = (C^t)^t B^t C^t = C B C^t = A.$$

Vậy  $A$  là một ma trận đối xứng.  $\square$

Chúng ta thừa nhận kết quả dưới đây. Chứng minh của kết quả này cần đến kiến thức về số phức và phương trình đa thức, vượt ngoài khuôn khổ của giáo trình này.

**Mệnh đề 6.11.** Nếu  $A$  là một ma trận đối xứng thì  $A$  có đủ  $n$  giá trị riêng (đếm cả bội).

**Mệnh đề 6.12.** Nếu  $A$  là một ma trận đối xứng thì hai vectơ riêng ứng với hai giá trị riêng khác nhau luôn trực giao với nhau.

*Chứng minh.* Giả sử  $\mathbf{u}$  và  $\mathbf{v}$  là hai vectơ riêng ứng với hai giá trị riêng phân biệt  $\lambda$  và  $\mu$ , tức là  $A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$  và  $A\mathbf{v} = \mu\mathbf{v}$ . Sử dụng tính chất  $A^t = A$  và tích vô hướng  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}^t \mathbf{y}$ , ta có:

$$\begin{aligned}\lambda(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) &= (\lambda\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = (A\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = (A\mathbf{u})^t \mathbf{v} = (\mathbf{u}^t A^t) \mathbf{v} \\ &= \mathbf{u}^t (A\mathbf{v}) = \mathbf{u}^t (\mu\mathbf{v}) = \mu(\mathbf{u}^t \mathbf{v}) = \mu(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}).\end{aligned}$$

Vậy  $\lambda(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \mu(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$ . Do  $\lambda \neq \mu$  suy ra  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ , hay  $\mathbf{u}$  và  $\mathbf{v}$  trực giao với nhau.  $\square$

**Nhận xét 6.13.** Trong kết quả trên điều kiện hai giá trị riêng khác nhau là cần thiết, nếu bỏ đi điều kiện này thì hai vectơ riêng tương ứng có thể không trực giao. Chẳng hạn xét  $A$  là ma trận đơn vị  $E_2$ , khi đó hai vectơ  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  và  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  là các vectơ riêng, nhưng không trực giao với nhau.

Ta thừa nhận kết quả dưới đây.

**Bổ đề 6.14.** Giả sử  $A$  là một ma trận đối xứng. Với mỗi giá trị riêng, số bội đại số bằng số bội hình học.

Sử dụng các kết quả trên ta có kết quả quan trọng sau.

**Định lý 6.15.** Giả sử  $A$  là một ma trận đối xứng. Khi đó  $A$  luôn chéo hóa trực giao được.

*Chứng minh.* Theo Mệnh đề 6.11,  $A$  có  $k$  giá trị riêng  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  với số bội đại số lần lượt là  $s_1, \dots, s_k$  và  $s_1 + \dots + s_k = n$  (cỡ của  $A$ ). Theo Bổ đề , không gian riêng  $V_i$  ứng với giá trị riêng  $\lambda_i$  có chiều bằng  $s_i$ . Dùng phương pháp trực giao hóa Gram-Schmidt, sau đó chuẩn hóa, ta thu được một cơ sở trực chuẩn gồm các vectơ riêng cho  $V_i$ . Gọi  $C$  là ma trận có các vectơ cột lần lượt là cơ sở trực chuẩn gồm các vectơ riêng của  $V_1, \dots, V_k$ . Theo Mệnh đề 6.12, các vectơ cột của  $C$  lập thành một cơ sở trực chuẩn của  $\mathbb{R}^n$ . Vì vậy do Mệnh đề 6.9,  $C$  là một ma trận trực giao. Theo chứng minh trong Định lý 5.11 trong chương trước,  $C^{-1}AC$  là ma trận đường chéo.  $\square$

**Ví dụ 6.16.** Giả sử ta cần chéo hóa ma trận  $A = \begin{pmatrix} -19 & 12 \\ 12 & -1 \end{pmatrix}$ . Ma trận này có hai giá trị riêng phân biệt  $\lambda_1 = 5$  và  $\lambda_2 = -25$ , các không gian riêng tương ứng là các không gian một chiều sinh bởi  $(1, 2)$  và  $(-2, 1)$ . Chuẩn hóa ta có các vectơ riêng  $(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$  và  $(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$ . Với  $C = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ , ta có:

$$C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -25 \end{pmatrix}.$$

**Ví dụ 6.17.** Giả sử ta cần chéo hóa ma trận  $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ . Ma trận này có giá trị riêng  $\lambda_1 = -6$  (bội 1) và giá trị riêng  $\lambda_2 = 3$  (bội 2).

Không gian riêng ứng với giá trị riêng  $\lambda_1 = -6$  là không gian một chiều sinh bởi  $(1, -2, 2)$ , hay  $(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$  (sau khi chuẩn hóa).

Không gian riêng ứng với giá trị riêng  $\lambda_2 = 3$  là không gian hai chiều sinh bởi  $\mathbf{x}_1 = (2, 1, 0)$  và  $\mathbf{x}_2 = (-2, 0, 1)$ . Áp dụng quá trình trực giao hóa Gram-Schmidt và sau đó chuẩn hóa (xem Ví dụ 6.7), không gian này có một cơ sở trực chuẩn

$$\{(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0), (-\frac{2}{3\sqrt{5}}, \frac{4}{3\sqrt{5}}, \frac{5}{3\sqrt{5}})\}.$$

$$\text{Chọn } C = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix}. \text{ Ta có } C^{-1}AC = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

### 6.3. Đường và mặt bậc hai

Trong tiết này chúng ta sẽ áp dụng phép chéo hóa trực giao cho bài toán nhận dạng đường và mặt bậc hai.

#### 6.3.1. Dạng toàn phương

Các biểu thức có dạng

$$ax^2 + by^2 + cxy$$

và

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz$$

được gọi là các dạng toàn phương theo các biến  $x, y$  và  $x, y, z$ . Ta có thể viết:

$$ax^2 + by^2 + cxy = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \frac{c}{2} \\ \frac{c}{2} & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

và

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \frac{d}{2} & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & b & \frac{f}{2} \\ \frac{e}{2} & \frac{f}{2} & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Tổng quát ta có định nghĩa sau đây.

**Định nghĩa 6.18.** Một **dạng toàn phương** có  $n$  biến là một hàm số  $Q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  xác định bởi

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t A \mathbf{x}$$

trong đó  $A$  là một ma trận đối xứng cỡ  $n \times n$  cho trước và  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ . Ta gọi  $A$  là **ma trận liên kết với Q**.



**Ví dụ 6.19.** Với  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$  và  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ , dạng toàn phương với ma trận liên kết  $A$  là

$$Q(\mathbf{x}) = (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1^2 + 4x_2^2 + 6x_1x_2.$$

Tổng quát, với  $A = (a_{ij})_{n \times n}$  là một ma trận đối xứng (tức là  $a_{ij} = a_{ji}$ ) và  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^t$  thì dạng toàn phương với ma trận liên kết  $A$  là

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t A \mathbf{x} = a_{11}x_1^2 + \dots + a_{nn}x_n^2 + 2 \sum_{i < j} a_{ij}x_i x_j.$$

**Nhận xét 6.20.** Nếu ma trận  $A$  là một ma trận đường chéo, tức là  $a_{ij} = 0$  (với mọi  $i \neq j$ ) thì  $Q$  có dạng rất đơn giản,  $Q = a_{11}x_1^2 + \dots + a_{nn}x_n^2$ . Trong tiết trước chúng ta đã biết cách chéo hóa trực giao một ma trận đối xứng, bằng cách đó sẽ cho chúng ta một phép đổi biến để  $Q$  có dạng đơn giản như trên.

Thật vậy, giả sử  $C$  là ma trận trực giao để  $C^t A C = B$  là một ma trận đường chéo, với các phần tử trên đường chéo là  $b_1, \dots, b_n$ . Sử dụng phép đổi biến  $\mathbf{x} = C\mathbf{y}$ , hay  $\mathbf{y} = C^{-1}\mathbf{x} = C^t\mathbf{x}$ , ta có:

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t A \mathbf{x} = (C\mathbf{y})^t A (C\mathbf{y}) = \mathbf{y}^t C^t A C \mathbf{y} = \mathbf{y}^t (C^t A C) \mathbf{y} = \mathbf{y}^t B \mathbf{y} = b_1 y_1^2 + \dots + b_n y_n^2.$$

Tóm lại, dạng toàn phương ban đầu trở thành

$$b_1 y_1^2 + \dots + b_n y_n^2.$$

Quá trình trên đây được gọi là **chéo hóa trực giao dạng toàn phương** hay **đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc**.

**Nhận xét 6.21.** Ngoài phương pháp chéo hóa trực giao nói trên, còn có một phương pháp khá phổ biến khác, đó là phương pháp Lagrange. Tuy nhiên, vì chúng ta chỉ quan tâm đến ứng dụng vào hình học của các đường và mặt bậc hai nên phương pháp Lagrange sẽ không bàn đến trong giáo trình này.

Mệnh đề sau đây cho ta thấy phép đổi biến  $\mathbf{x} = C\mathbf{y}$  bằng một ma trận trực giao  $C$  như ở trên giữ nguyên hình dạng của các đường và mặt.

**Mệnh đề 6.22.** *Giả sử  $A$  là một ma trận trực giao cỡ  $n \times n$ . Khi đó phép biến đổi tuyến tính  $f_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , với  $f_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ , biến một cơ sở trực chuẩn thành một cơ sở trực chuẩn.*

*Chứng minh.* Trước hết ta chứng minh  $f_A$  bảo toàn tích vô hướng. Thật vậy, với mọi  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ , ta có:

$$\begin{aligned} f_A(\mathbf{u}) \cdot f_A(\mathbf{v}) &= (A\mathbf{u}) \cdot (A\mathbf{v}) = (A\mathbf{u})^t (A\mathbf{v}) = (\mathbf{u}^t A^t) (A\mathbf{v}) = \mathbf{u}^t (A^t A) \mathbf{v} = \mathbf{u}^t E_n \mathbf{v} = \mathbf{u}^t \mathbf{v} \\ &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}. \end{aligned}$$

Giả sử  $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$  là một cơ sở trực chuẩn của  $\mathbb{R}^n$ . Đặt  $\mathbf{v}_i = f_A(\mathbf{u}_i)$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Khi đó:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i &= f_A(\mathbf{u}_i) \cdot f_A(\mathbf{u}_i) = \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_i = 1, \\ \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j &= f_A(\mathbf{u}_i) \cdot f_A(\mathbf{u}_j) = \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = 0, \text{ với mọi } i \neq j.\end{aligned}$$

Vậy  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$  là một cơ sở trực chuẩn.  $\square$

Với  $f_A$ ,  $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$  và  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$  như trong mệnh đề trên và giả sử  $\mathbf{y} = f_A(\mathbf{x})$ . Giả sử tọa độ của  $\mathbf{x}$  trong cơ sở  $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$  là  $(x_1, \dots, x_n)$ . Khi đó:

$$\mathbf{y} = f_A(\mathbf{x}) = f_A(x_1\mathbf{u}_1 + \dots + x_n\mathbf{u}_n) = x_1f_A(\mathbf{u}_1) + \dots + x_nf_A(\mathbf{u}_n) = x_1\mathbf{v}_1 + \dots + x_n\mathbf{v}_n.$$

Vậy  $\mathbf{y}$  cũng có tọa độ  $(x_1, \dots, x_n)$ .

Phép đổi biến  $\mathbf{x} = C\mathbf{y}$  bằng một ma trận trực giao  $C$ , tương đương với  $\mathbf{y} = C^{-1}\mathbf{x} = A\mathbf{x}$ , với  $A = C^{-1}$  cũng là một ma trận trực giao. Do đó phép đổi biến này trùng với phép biến đổi tuyến tính  $f_A$  nói trên. Vì vậy khi ta xét trong một cặp cơ sở trực chuẩn như trên,  $\mathbf{x}$  và  $f_A(\mathbf{x})$  có cùng tọa độ. Do đó  $f_A$  biến một đường cong (tương ứng, mặt cong) thành một đường cong (tương ứng, mặt cong) bằng nhau.

**Ví dụ 6.23.** Giả sử ta cần đưa dạng toàn phương dưới đây về dạng chính tắc.

$$Q(\mathbf{x}) = 2x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 8x_2x_3.$$

Ma trận liên kết của nó là ma trận đối xứng  $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ . Theo

Ví dụ 6.17, ta có thể chéo hóa ma trận  $A$  như sau

$$C^{-1}AC = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \text{ với } C = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

Dùng phép đổi biến  $\mathbf{y} = C^t\mathbf{x}$ , cụ thể

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \text{ hay } \begin{cases} y_1 &= \frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 \\ y_2 &= \frac{2}{\sqrt{5}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}x_2 \\ y_3 &= -\frac{2}{3\sqrt{5}}x_1 + \frac{4}{3\sqrt{5}}x_2 + \frac{5}{3\sqrt{5}}x_3 \end{cases}$$

dạng toàn phương đã cho có dạng chính tắc  $-6y_1^2 + 3y_2^2 + 3y_3^2$ .

### 6.3.2. Đường và mặt bậc hai

**Định nghĩa 6.24.** Một **đường bậc hai** là tập hợp các điểm trong hệ tọa độ  $Oxy$  thỏa mãn

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

trong đó  $a, b, c, d, e, f$  là các hằng số cho trước và  $a, b, c$  không đồng thời bằng 0.

Thành phần bậc hai trong biểu thức ở trên

$$ax^2 + bxy + cy^2$$

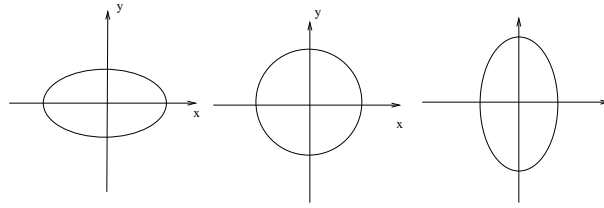
được gọi là **dạng toàn phương liên kết** với đường bậc hai đã cho.

**Nhận xét 6.25.** Giả sử đường cong  $C$  có phương trình định nghĩa là  $f(x, y) = 0$ . Đường cong  $C'$  thu được từ  $C$  bằng một **phép tịnh tiến** bởi vectơ  $(a, b)$  có phương trình định nghĩa là  $f(x - a, y - b) = 0$ . Hai đường cong  $C$  và  $C'$  hoàn toàn bằng nhau, chỉ khác nhau ở vị trí.

Tương tự đối với mặt cong định nghĩa bởi  $f(x, y, z) = 0$ , phương trình định nghĩa của mặt sau phép tịnh tiến bởi vectơ  $(a, b, c)$  là  $f(x - a, y - b, z - c) = 0$ .

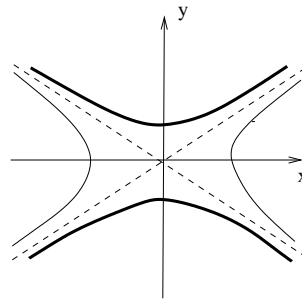
Ở bậc phổ thông, chúng ta đã được làm quen với các đường bậc hai trong mặt phẳng, bao gồm ellipse, hyperbola và parabola. Qua một phép tịnh tiến, chúng ta đưa về dạng chính tắc như sau:

1. Đường ellipse:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a, b \neq 0$ ). Trường hợp  $a = b$  đường ellipse đã cho là đường tròn tâm  $O$  bán kính  $a$ . Xem Hình vẽ 6.3.



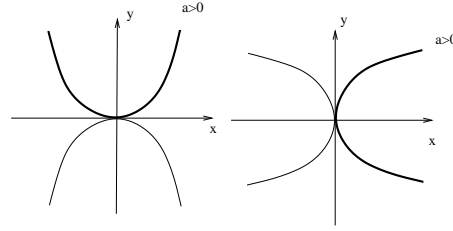
Hình 6.3 Các đường ellipse trong các trường hợp:  $a > b$ ;  $a = b$ ;  $a < b$

2. Đường hyperbola:  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  hoặc  $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a, b \neq 0$ ). Các đường này có hai tiệm cận xiên  $y = \pm(a/b)x$ , đồ thị của chúng tương ứng trong Hình vẽ 6.4 là đường nét nhạt và đường nét đậm.



Hình 6.4 Các đường hyperbola:  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  hoặc  $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

3. Đường parabola: Sau một phép tịnh tiến, đưa về đường cong có phương trình  $y = ax^2$  hoặc  $x = ay^2$  ( $a \neq 0$ ). Đồ thị của  $y = ax^2$  có trục tung là trục đối xứng, hướng lên trên nếu  $a > 0$  hoặc hướng xuống dưới nếu  $a < 0$ . Đồ thị của  $x = ay^2$  có trục hoành là trục đối xứng, hướng sang phải nếu  $a > 0$  hoặc hướng sang trái nếu  $a < 0$ . Trong Hình vẽ 6.5 các đường nét đậm là trường hợp  $a > 0$ , các đường nét nhạt là trường hợp  $a < 0$ .



Hình 6.5 Các đường parabola:  $y = ax^2$  và  $x = ay^2$

**Ví dụ 6.26.** Xét đường bậc hai định nghĩa bởi phương trình

$$x^2 + 3y^2 - 4x + 18y - 5 = 0.$$

Phương trình trên tương đương với

$$(x - 2)^2 + 3(y + 3)^2 = 36, \text{ hay } \frac{(x - 2)^2}{6^2} + \frac{(y + 3)^2}{(2\sqrt{3})^2} = 1.$$

Vậy đường bậc hai ban đầu là một ellipse, nó là ảnh của phép tịnh tiến đường ellipse chính tắc  $\frac{x^2}{6^2} + \frac{y^2}{(2\sqrt{3})^2} = 1$  theo vectơ  $(2, -3)$ .

Trong hai ví dụ tiếp theo đây có xuất hiện số hạng chứa  $xy$ , trong trường hợp này chúng ta cần đến bước đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc.

**Ví dụ 6.27.** Xét đường bậc hai định nghĩa bởi phương trình

$$9x^2 + 6y^2 + 4xy - 10 = 0.$$

Ma trận liên kết với phần toàn phương là  $A = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ . Ma trận  $A$  chéo hóa

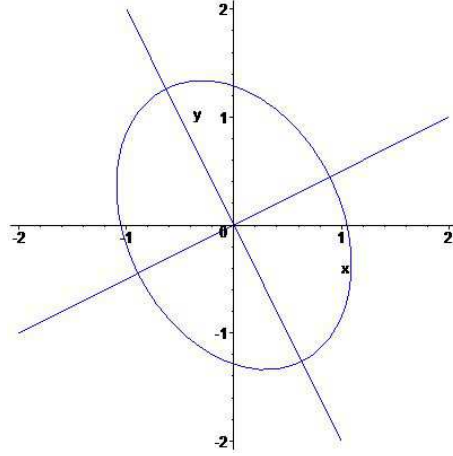
trực giao bởi  $C = \begin{pmatrix} \sqrt{5}/5 & 2\sqrt{5}/5 \\ -2\sqrt{5}/5 & \sqrt{5}/5 \end{pmatrix}$ , cụ thể  $C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$ . Thực

hiện phép đổi biến  $\mathbf{x} = C\mathbf{x}'$ , với  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  và  $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ . Trong hệ tọa độ mới  $Ox'y'$ , đường cong đã cho có phương trình

$$5(x')^2 + 10(y')^2 = 10, \text{ hay } \frac{(x')^2}{2} + (y')^2 = 1.$$

Phương trình sau cùng là phương trình của một đường ellipse. Để vẽ đường ellipse đã cho, chúng ta cần vẽ được hệ tọa độ mới  $Ox'y'$ . Giả sử  $e'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

và  $e'_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  là cơ sở trực chuẩn của hệ  $Ox'y'$ . Tọa độ của  $e'_1$  và  $e'_2$  trong hệ tọa độ  $Oxy$  lần lượt là  $C \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  và  $C \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , tức là véc tơ cột thứ nhất và thứ hai của  $C$ . Trong Hình 6.6, hai đường vuông góc nằm xiên lập thành hệ  $Ox'y'$ , đường ellipse  $\frac{(x')^2}{2} + (y')^2 = 1$  trong hệ tọa độ  $Ox'y'$  cũng chính là đường ellipse ban đầu trong hệ tọa độ  $Oxy$ .



Hình 6.6

**Ví dụ 6.28.** Xét đường bậc hai định nghĩa bởi phương trình

$$9x^2 + 6y^2 + 4xy + \frac{14}{\sqrt{5}}x + \frac{2}{\sqrt{5}}y - 10 = 0.$$

Phần toàn phương của phương trình trên giống như trong Ví dụ 6.27, sử dụng cùng một phép đổi biến phương trình trên trở thành

$$5(x')^2 + 10(y')^2 + 2x' + 6y' = 10.$$

Phương trình trên tương đương với

$$5\left(x' + \frac{1}{5}\right)^2 + 10\left(y' + \frac{3}{10}\right)^2 = \frac{129}{10}.$$

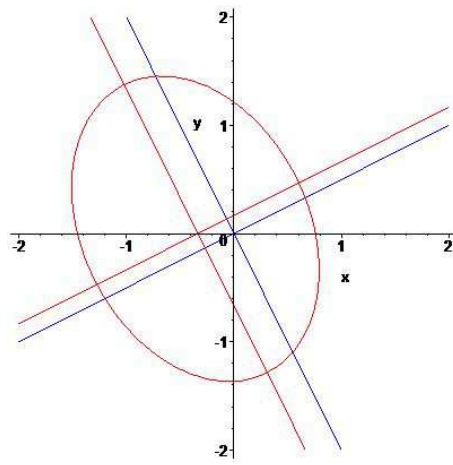
Tương tự như Ví dụ 6.26, ta cần thêm một phép đổi biến  $u = x' + \frac{1}{5}$  và  $v = y' + \frac{3}{10}$  (hay tịnh tiến hệ tọa độ  $Ox'y'$  theo véc tơ  $(-\frac{1}{5}, -\frac{3}{10})$ ) để thu được đường ellipse có phương trình ở dạng chính tắc trong hệ tọa độ mới  $Ouv$

$$5u^2 + 10v^2 = \frac{129}{10} \text{ hay } \frac{u^2}{129/50} + \frac{v^2}{129/100} = 1.$$

Xem Hình vẽ 6.7.

**Định nghĩa 6.29.** Một đường bậc hai được gọi là **không suy biến** nếu nó là một trong các trường hợp đường ellipse, hyperbola hoặc parabola. Các đường bậc hai còn lại được gọi là **suy biến**, chẳng hạn các đường bậc hai gồm 2 đường thẳng; một đường thẳng kép; ...

Đối với các mặt bậc hai, chúng ta cũng làm tương tự như trên. Dưới đây là danh sách các mặt bậc hai không suy biến. Xem Hình vẽ 6.8.



Hình 6.7

## Bài tập chương 6

Trong hai bài tập dưới đây hãy dùng phương pháp Gram-Schmidt để đưa một cơ sở của một không gian con trong  $\mathbb{R}^2$  hoặc  $\mathbb{R}^3$  về một cơ sở trực giao. Hãy chuẩn hóa cơ sở trực giao tìm được.

**6.1.** (a)  $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix};$

(b)  $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

**6.2.** (a)  $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$

(b)  $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$

**6.3.** Tìm một cơ sở trực giao của  $\mathbb{R}^3$  chứa vectơ  $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ . Hãy chuẩn hóa cơ sở tìm được.

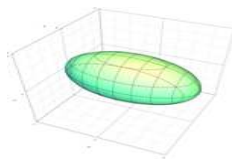
**6.4.** Kiểm tra xem mỗi ma trận dưới đây có phải là ma trận trực giao không, nếu có tìm ma trận nghịch đảo của nó.

(a)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$  (b)  $\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix};$  (c)  $\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$

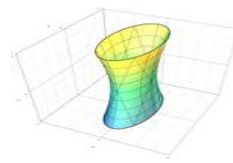
**6.5.** (a) Chứng minh rằng một ma trận trực giao cỡ  $2 \times 2$  phải có dạng

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{hoặc} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$$

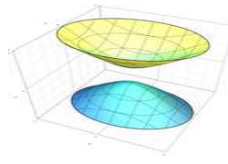
trong đó  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  là một vectơ có độ dài đơn vị.



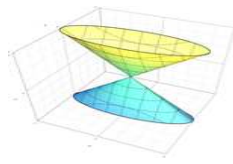
(a) Mặt ellipsoid  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$



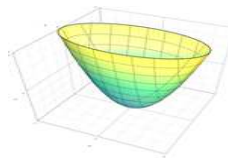
(b) Mặt hyperboloid một tầng  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$



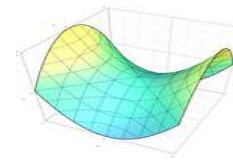
(c) Mặt hyperboloid hai tầng  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$



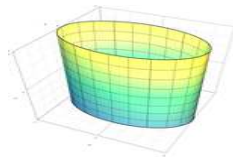
(d) Mặt nón elliptic  $z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$



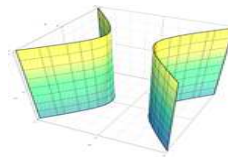
(e) Mặt elliptic paraboloid  $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$



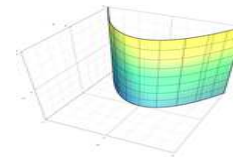
(f) Mặt hyperbolic paraboloid  $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$



(g) Mặt trụ elliptic  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$



(h) Mặt trụ hyperbolic  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$



(i) Mặt trụ parabolic  $x^2 + 2ay = 0$

Hình 6.8 Các mặt bậc hai

- (b) Dùng kết quả câu (a), chứng minh rằng một ma trận trực giao cỡ  $2 \times 2$  phải có dạng

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad \text{hoặc} \quad \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}$$

trong đó  $0 \leq \alpha < 2\pi$ .

**6.6.** Giả sử  $A$  là một ma trận trực giao.

- (a) Ma trận  $A^t$ , ma trận  $A^{-1}$  có phải là các ma trận trực giao không?
- (b) Hoán đổi các hàng của  $A$  hay hoán đổi các cột của  $A$  có thu được ma trận trực giao không?

**6.7.** Hãy chéo hóa trực giao các ma trận sau:

$$(a) \begin{pmatrix} -8 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}; \quad (b) \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}; \quad (c) \begin{pmatrix} 31 & -12 \\ -12 & 21 \end{pmatrix}.$$

**6.8.** Hãy chéo hóa trực giao các ma trận sau:

$$(a) \begin{pmatrix} 2 & -2 & 10 \\ -2 & 11 & 8 \\ 10 & 8 & 5 \end{pmatrix}; \quad (b) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \quad (c) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

**6.9.** Giả sử  $b \neq 0$ . Hãy chéo hóa trực giao ma trận  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ .

**6.10.** Giả sử  $b \neq 0$ . Hãy chéo hóa trực giao mỗi ma trận sau:

$$(a) \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}; \quad (b) \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & b & a \end{pmatrix}; \quad (c) \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}.$$

**6.11.** Hãy đưa các dạng toàn phương sau đây về dạng chính tắc:

(a)  $x_1^2 + 2x_2^2 + 6x_1x_2$ ;

(b)  $x_1x_2$ ;

(c)  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_2x_3$ .

**6.12.** Xác định đường/mặt bậc hai trong các trường hợp sau: (Chỉ rõ các phép biến đổi tọa độ, tịnh tiến, để đưa đường/mặt bậc hai về dạng chính tắc.)

(a) Đường  $x^2 - 2xy + y^2 + 4\sqrt{2}x - 4 = 0$ ;

(b) Đường  $2xy + 2\sqrt{2}x - 1 = 0$ ;

(c) Mặt  $x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 4yz - 4zx + 12 = 0$ ;

(d) Mặt  $2xy + z = 0$ .



Danh sách hình vẽ

Danh sách bảng

# Phần phụ lục

---

---

6.1. Không gian vectơ Euclid . . . . .	53
6.2. Phép biến đổi trực giao và ma trận trực giao . .	53
6.3. Phép biến đổi đối xứng và chéo hóa ma trận đối xứng . . . . .	53
Bài tập chương 6 . . . . .	53

---

## A.1. Số phức và đa thức

### A.1.1. Số phức

**Mệnh đề A.13.** *Tổng và tích của số phức  $z$  và liên hợp phức của nó  $\bar{z}$  đều là các số thực. Cụ thể*

$$(a) \quad z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z).$$

$$(b) \quad z\bar{z} = |z|^2.$$

**Mệnh đề A.14.** *Với mọi số phức  $z, z_1, z_2$  và với mọi số thực  $a$  ta có:*

$$(a) \quad \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2.$$

$$(b) \quad \overline{a\bar{z}} = a\bar{z}.$$

$$(c) \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2.$$

### A.1.2. Đa thức

**Định lý A.15** (Định lý cơ bản của Đại số). *Mọi đa thức với hệ số phức luôn phân tích được thành tích của các đa thức bậc nhất với hệ số phức. Do đó, mọi đa thức bậc  $n$  với hệ số phức luôn có đủ  $n$  nghiệm (đếm cả bội).*

**Bổ đề A.16.** *Nếu một đa thức  $P(x)$  với hệ số thực có một nghiệm phức  $x = z$  thì nó cũng nghiệm phức khác  $x = \bar{z}$  (là số phức liên hợp của  $z$ ).*

*Chứng minh.* Giả sử

$$P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0, a_i \in \mathbb{R}.$$

Theo Mệnh đề A.14, ta có:

$$\begin{aligned}\overline{P(x)} &= \overline{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0} \\ &= \overline{a_n x^n} + \cdots + \overline{a_1 x} + \overline{a_0} \\ &= a_n \overline{x^n} + \cdots + a_1 \overline{x} + a_0 \\ &= a_n (\overline{x})^n + \cdots + a_1 (\overline{x}) + a_0 = P(\overline{x}).\end{aligned}$$

Do đó, nếu  $P(z) = 0$  thì  $P(\overline{z}) = \overline{P(z)} = \overline{0} = 0$ . □

**Định lý A.17.** Mọi đa thức với hệ số thực luôn phân tích được thành tích của các đa thức bậc nhất và bậc hai với hệ số thực.

*Chứng minh.* Giả sử  $P(x)$  là đa thức đã cho. Theo Định lý A.15, ta có phân tích

$$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n),$$

trong đó  $x_i \in \mathbb{C}$  và hệ số  $a$  là một số thực.

Nếu  $x_i$  là một số thực thì  $(x - x_i)$  là đa thức bậc nhất với hệ số thực. Nếu  $z = x_i$  là một số ảo, theo Bổ đề A.16 đa thức  $P(x)$  có cũng nghiệm  $\overline{z}$

□

## A.2. Các phép biến hình trong $\mathbb{R}^2$ và $\mathbb{R}^3$

## A.3. Một số ứng dụng khác của đại số tuyến tính

## A.4. Phần mềm đại số máy tính Sage

# Tài liệu tham khảo

---

## Tiếng Việt

- [1] Nguyễn Hữu Việt Hưng, *Đại số tuyến tính*, NXB ĐHQG HN, 2004.
- [2] Tạ Lê Lợi, *Đại số tuyến tính và Hình học giải tích 1-2*, DH Đà Lạt, 2002.

## Tiếng Anh

- [3] R.A. Beezer, *A First Course in Linear Algebra*, Ver. 2.99, 2012. (Tài liệu mở, có thể lấy miễn phí từ <http://linear.ups.edu>)
- [4] J. Hefferon, *Linear Algebra*, 2013. (Tài liệu mở, có thể lấy miễn phí từ <http://joshua.smcvt.edu/linearalgebra>)
- [5] R. Larson, D.C. Falvo, *Elementary Linear Algebra*, Houghton Mifflin, 6th edition, 2009.
- [6] A.W. Roberts, *Elementary Linear Algebra*, Benjamin/Cummings Publ., 2nd edition, 1985.
- [7] D. Poole, *Linear Algebra: A Modern Introduction*, Thomson Brooks/Cole, 2nd edition, 2006.