16.05.24! Семинар 10.
Проверка параметрических гипотез.

Пусть X - с.в., закон распределения которой неизвестен.

Опр. Стат. гипотезой наз. любое утв-е отн. закона распределения с.в. X.

Опр. Стат. гипотеза наз. простой, если она полностью (однозначно) ~~опр~~ задает з-н расп. с.в. X. В противном случае она наз. сложной.

Опр. Стат. гипотеза наз. параметрической, если она явл. утв-ем о значениях пар-в закона расп., общий вид кот. изв.

Общая схема.

1) Форм. гипотеза H_0 (осн.) и (конкур) H_1

$H_0 H_1 = \varnothing$, но, возм., $H_0 + H_1$ не исчерпывают все возм. случаи

Опр. Правило, посредством которого принимается решение об ист. H_0 или H_1, наз. стат. критерием.

Как правило, стат. критерий задается с исп. так называемого крит. множества. $W \subseteq X_n$, а решающее правило имеет вид

$$\vec{x} \in W \Rightarrow \begin{cases} \text{отвергнуть } H_0, \\ \text{принять } H_1 \end{cases}$$

$$\vec{x} \in X_n \setminus W \Rightarrow \begin{cases} \text{отвергнуть } H_1, \\ \text{принять } H_0 \end{cases}$$

$\boxed{N1}$
Пример.

Станок-автомат должен изготавливать шарики номинальным диаметром 10 мм. При изучении выборки из $n=16$ шариков получено среднее значение диаметра 10.3 мм. Известно, что ~~погреш~~ СКО диаметра равно 1 мм. При уровне значимости $\alpha = 0.05$ проверить гипотезу о том, что среднее значение диаметра изг. шариков действительно сост-ет 10 мм. Расп. контр. признака - норм.

Решение:

Формализация задачи:

Пусть X - с.в., принимающая значение, равное диаметру изг. станком шариков, мм.

Из условия $X \sim N(m, \sigma^2)$, где m - неизв., $\sigma = 1$ мм

$H_0 = \{m = m_0\}$

Сформулируем конкурирующую гипотезу H_1:

(а) $H_1 = \{m \neq m_0\}$ - двусторонний критерий
(б) $H_1 = \{m > m_0\}$ } односторонние критерии
(в) $H_1 = \{m < m_0\}$ - не будем, т.к. $\bar{x} = 10.3 > 10 = m_0$

Как правило, конк. гипотезу выбирают так, чтобы она отвечала "наиболее похожему с точки зрения практики" результату.

Т.о. $H_0 = \{ m = m_0 \}$ против $H_1 = \{ m \neq m_0 \}$.

(с помощью шпаргалки выбираем строку I.)

Рассмотрим статистику

$$T(\vec{X}) = \frac{\bar{X} - m_0}{\sigma}\sqrt{n} \underset{\text{при } H_0}{\sim} N(0,1)$$

$$W = \{ \vec{x} : |T(\vec{x})| \geq \underset{\text{квантиль } N(0,1)}{u_{1-\alpha/2}} \}$$

Вычисление

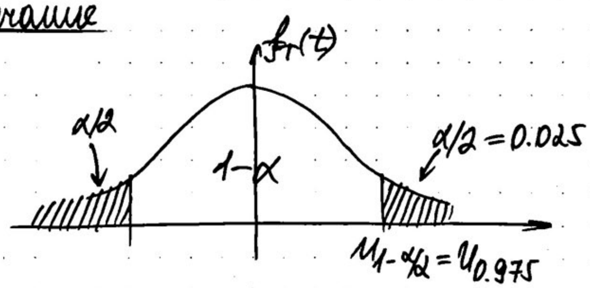
$$T(\vec{x}) = \frac{\bar{x} - 10}{1}\sqrt{16} = \frac{0.3}{1} \cdot 4 = 1.2$$

$$u_{1-\frac{\alpha}{2}} = u_{1-0.025} = u_{0.975} = 1.96$$

$|1.2| \overset{?}{\geq} 1.96$ – неверно $\Rightarrow \vec{x} \notin W \Rightarrow$ принять H_0, отвергнуть H_1

Ответ: При уровне зн. $\alpha = 0.05$ можно считать, что номинальный диаметр шариков равен 10 мм.

Замечание



№2

Два штурмана определяли пеленг маяка, используя различные пеленгаторы.
Результаты: у первого: $n_1 = 4$ среднее значение $70.2°$;
у второго: $n_2 = 9$ —— " —— $70.5°$;
С использованием двуст. критерия проверить гипотезу о том, что различие результатов связаны со случайными ошибками. Уровень значимости: $\alpha = 0.05$.
Ошибки этих пеленгаторов расп. по норм. закону с СКО $\sigma = 0.05°$.

Решение:

1) Формализация задачи.
Пусть X – с.в., прин. значение, равные показаниям 1го пеленгатора

$$X = \underset{\text{"истинное" величина пеленга}}{a} + \mathcal{E}_1$$

$\mathcal{E}_1 \sim N(\hat{m}_1, \sigma^2)$ – ошибка 1го пеленгатора $\Rightarrow X \sim N(m_1, \sigma^2)$, где $m_1 = \hat{m}_1 + a$

Аналогично:

Пусть Y — ——— " ——————— 2-го пелингатора.
$Y = a + \varepsilon_2$,
$\varepsilon_2 \sim N(\hat{m}_2; \sigma^2)$

Тогда $Y \sim N(m_2, \sigma^2)$, где $m_2 = \hat{m}_2 + a$

2) $H_0 = \{$различия вызваны случайными ошибками$\} = \{m_1 = m_2\}$.
$H_1 = \{m_1 \neq m_2\}$ (двусторонний критерий)

Рассмотрим статистику
$$T(\vec{X}_{n_1}, \vec{Y}_{n_2}) = \frac{\bar{X}_{n_1} - \bar{Y}_{n_2}}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}} \underset{\text{при } H_0}{\sim} N(0,1)$$

$W = \{(\vec{x}_{n_1}, \vec{y}_{n_2}) : |T(\vec{x}_{n_1}, \vec{y}_{n_2})| \geq u_{1-\alpha/2}$

Вычисление:

$$T(\vec{x}_{n_1}, \vec{y}_{n_2}) = \frac{70.2 - 70.5}{\underset{0.05}{\sigma}\sqrt{1/4 + 1/9}} = \frac{-0.3}{0.05 \cdot \frac{\sqrt{13}}{6}} = -\frac{30 \cdot 6}{5 \cdot \sqrt{13}} = -\frac{36}{\sqrt{13}} \approx -9.98$$

$|-9.98| \geq 1.96$ — верно $\Rightarrow (\vec{x}_{n_1}, \vec{y}_{n_2}) \in W \Rightarrow$ принимаем H_1, отвергаем H_0

$u_{1-\alpha/2} = u_{0.975} = 1.96$

Ответ: принимаем, что различие вызвано не случайными причинами.

$\boxed{N3}$

Известно, что дисперсия измерений коэф-та трения двух поверхностей с исп. некоторой процедуры составляет 0.1. После изменения процедуры было проведено $n = 26$ измерений, в рез. которых получено значение испр. выб. дисперсии 0.2. Проверить гипотезу о том, что в результате изменения процедуры дисперсия измерений не изменилась. Рез-ты измерений распр. по норм. з-ну. $\alpha = 0.01$.

Решение:

1) Формализация задачи
Пусть X — с.в., прин. значение, равные результатам измерений коэф-та трения с исп. обновл. процедуры.

$X \sim N(m, \sigma^2)$, m — неизв., σ^2 — неизв.

2) $H_0 = \{$дисперсия не изм.$\} = \{\sigma^2 = \sigma_0^2\}$, $\sigma_0^2 = 0.1$
$H_1 = \{\sigma^2 > \sigma_0^2\}$ — одност. критерий (т.к., если дисперсия уменьшилась, то качество измерений стало выше).

Рассмотрим статистику
$$T(\vec{X}) = \frac{S^2(\vec{X})}{\sigma^2}(n-1) \underset{\text{при } H_0}{\sim} \chi^2(n-1)$$

$W = \{\vec{x} : T(\vec{x}) \geq h_{1-\alpha}^{(25)}\}$

Вычисление: $T(\vec{x}) = \frac{0.2}{0.1} \cdot 25 = 50$; $h_{1-\alpha}^{(25)} = h_{0.99}^{(25)} = 44.314$

$50 \geqslant 44.31$ – верно $\Rightarrow \vec{x} \in W \Rightarrow$ принимаем H_1, отвергаем H_0.

<u>Ответ</u>: принимаем, что дисперсия увеличилась.

<u>Замечание</u>