2) Равномерно наиболее мощный критерий существует в лек частных случаях при проверке гипотез о значениях одномерных пар-ров.

Пример

Пусть $X \sim N(m, \sigma^2)$, где σ^2 – изв., m – неизв.

Рассм. задачу проверки

$H_0 = \{m = m_0\}$ против $H_1 = \{m > m_0\}$

1) Ранее рассматривалась задача проверки $H_0 = \{m = m_0\}$ против $H_1 = \{m = m_1\}$, в ходе решения которой получено крит. мн-во

$$W = \{\vec{x} \in X_n : \sum_{i=1}^{n} x_i \geq n m_0 + \sigma u_{1-\alpha} \sqrt{n}\} \quad (5)$$

2) Т.к. ~~построенный критерий~~ построенное в пред. задаче мн-во не зависит от m_1, то критерий из пред. задачи пригоден для проверки гипотез H_0 против $H_1 = \{m = m_1\}$ для произв. $m_1 > m_0$.

По этой причине построенный выше критерий явл. равномерно наиболее мощным и при проверке $H_0 = \{m = m_0\}$ против $H_1 = \{m > m_0\}$.

В тек. задаче крит. мн-во также задается соотн. (5)

03.05.24. Лекция 11

Замечание: Если в условиях предыдущего примера ~~задача~~ рассматривается задача проверки гипотезы $H_0 = \{m = m_0\}$ против $H_1 = \{m < m_0\}$, то аналогичными рассуждениями приходим к выводу, что равномерно наиб. мощный критерий для данной задачи задается крит. множеством

$$W = \{\vec{x} \in X_n : \sum_{i=1}^{n} x_i \leq n m_0 - u_{1-\alpha} \sigma \sqrt{n}\}$$

(размер критерия равен α)

Пример

$X \sim N(m, \sigma^2)$, где σ^2 – изв., m – неизв.

Рассмотрим задачу проверки гипотезы

$H_0 = \underset{\text{простая}}{\{m = m_0\}}$ против $H_1 = \underset{\text{сложная}}{\{m \neq m_0\}}$

Решение:

1) Вспомним результаты двух предыдущих примеров, в которых

стала задача проверки

(а) $H_0=\{m=m_0\}$ против $H_1=\{m>m_0\}$

и (б) $H_0=\{m=m_0\}$ против $H_1=\{m<m_0\}$.

В этих примерах условие, определяющее критические множества, можно записать с использованием статистик

$$T(\vec X, m)=\frac{\bar x-m_0}{\sigma}\cdot\sqrt{n} \underset{\text{при } H_0}{\sim} N(0,1)$$

Если $m=m_0$, то $\bar x\approx m_0 \Rightarrow T$ прин. "малые" по абс. вел.-ю. Если $m\neq m_0$, то $\bar x\gtrless m_0 \Rightarrow T$ прин. "большие" по абс. вел.-ю.

В примере (а):

$$W=\{\vec x\in X_n:\ T(\vec x, m_0)\geq u_{1-\alpha}\}.$$

$\sum_{i=1}^{n} x_i \geq n m_0 + u_{1-\alpha}\sigma\sqrt{n}$;

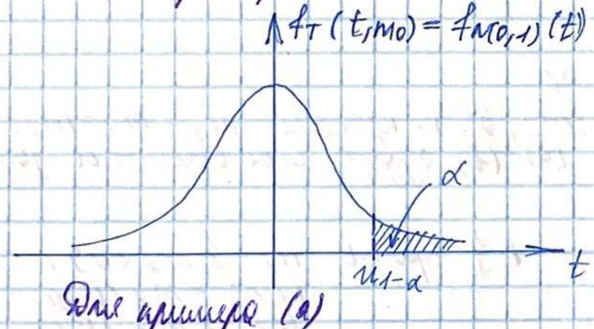
$\bar x \geq m_0+\frac{u_{1-\alpha}\sigma}{\sqrt{n}}$;

$\frac{\bar x-m_0}{\sigma}\sqrt{n}\geq u_{1-\alpha}$

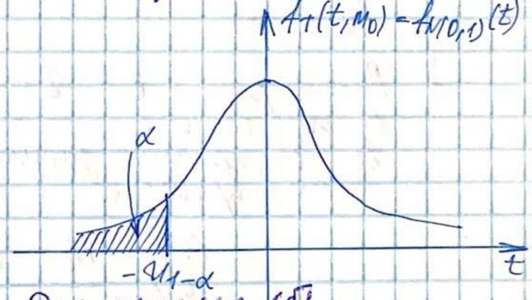
В примере (б):

$$W=\{\vec x\in X_n:\ T(\vec x, m_0)\leq -u_{1-\alpha}\}.$$

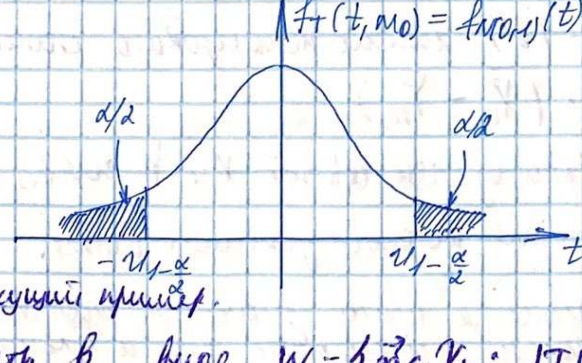
К этим примерам можно сделать иллюстрации:



Для примера (а)



Для примера (б)



Текущий пример.

Эти идеи можно обобщить для решения текущего примера, т.к. очевидно, что в пользу гипотезы H_1 свидетельствуют значения статистики T, которые являются "большими" по абс. величине, т.о. критическое множество можно записать в виде $W=\{\vec x\in X_n:\ |T(\vec x, m_0)|\geq u_{1-\frac{\alpha}{2}}\}$.

Пример

$X\sim N(m,\sigma^2)$, где m,σ^2 – неизв.

Рассмотрим задачи проверки

(а) $H_0=\{m=m_0\}$ (сложная, т.к. σ^2 – неизв.) против $H_1=\{m>m_0\}$

(б) —— " —— " —— $H_1=\{m<m_0\}$

(в) —— " —— " —— $H_1=\{m\neq m_0\}$

Решение:

Рассмотрим статистику $T(\vec{X}, m_0) = \dfrac{\bar{X} - m_0}{S(\vec{X})}\sqrt{n} \underset{\text{при } H_0}{\sim} St(n-1)$.

По аналогии с предыдущими примерами критические мн-ва для критериев, используемых при решении задач (а) - (в), можно записать в виде:

(а) $W = \{\vec{x} \in X_n : T(\vec{x}, m_0) \geq \underset{\text{квантиль ур. } 1-\alpha\ St(n-1)}{t_{1-\alpha}^{(n-1)}}\}$

(б) $W = \{\vec{x} \in X_n : T(\vec{x}, m_0) \leq -t_{1-\alpha}^{(n-1)}\}$

(в) $W = \{\vec{x} \in X_n : |T(\vec{x}, m_0)| \geq t_{1-\alpha/2}^{(n-1)}\}$.

Пример.

Пусть 1) $X \sim N(m_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(m_2, \sigma_2^2)$;

2) m_1, m_2 - неизв.; σ_1^2, σ_2^2 - изв.;

3) X, Y - независ.

Рассмотрим задачи проверки гипотезы

(а) $\underset{\text{сложная, т.к. не опр. з. распр. однозн.}}{H_0 = \{m_1 = m_2\}}$ против $\underset{\text{сложная}}{H_1 = \{m_1 < m_2\}}$,

(б) ——— " ——— $H_1 = \{m_1 > m_2\}$,

(в) ——— " ——— $H_1 = \{m_1 \neq m_2\}$.

Решение:

1) Рассмотрим с.в. $Z = X - Y$.

В этом случае $Z \sim N(m_Z, \sigma_Z^2)$, причем $m_Z = m_1 - m_2$.

По этой причине задачи (а)-(в) будут эквивалентны задачам проверки

(а') $H_0 = \{m_Z = 0\}$ против $H_1 = \{m_Z < 0\}$,

(б') ——— " ——— $H_1 = \{m_Z > 0\}$,

(в') ——— " ——— $H_1 = \{m_Z \neq 0\}$.

2) Для решения задач (а') - (в') можно использовать статистику вида

$$T(\vec{X}_{n_1}, \vec{Y}_{n_2}) = c \cdot (\bar{X}_{n_1} - \bar{Y}_{n_2}),$$

где $\vec{X}_{n_1}, \vec{Y}_{n_2}$ - сл. выборки из ген. сов-тей X и Y соотв.,

$c = const$, значение которой уточним ниже.

Понятно, что "малые", близкие к нулю значения статистики T будут свидетельствовать в пользу истинности H_0, а "большие" значения - в пользу истинности H_1.

3) Закон распределения статистики T.

$\bar{X}_{n_1}, \bar{Y}_{n_2}$ явл. линейными комбинациями норм. с.в. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ они имеют норм. распределение $\Rightarrow$ T также имеет нормальное распр-е: $T \sim N(m_T, \sigma_T^2)$.

$m_T = M[T] = cM[\bar{X}_{n_1}] - cM[\bar{Y}_{n_2}] = c(m_1 - m_2) = \left\{\begin{matrix}\text{при } H_0, \\ \text{т.е. } m_1 = m_2\end{matrix}\right\} = 0$.

$\sigma_T^2 = D[T] = D[c(\bar{X}_{n_1} - \bar{Y}_{n_2})] = \left\{\begin{matrix}X, Y - \text{незав.} \\ \Rightarrow \bar{X}_{n_1}, \bar{Y}_{n_2} - \\ \text{незав.}\end{matrix}\right\} = c^2\left(D[\bar{X}_{n_1}] - D[\bar{Y}_{n_2}]\right) \textcircled{=}$

$\ominus \; c^2\left(\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}\right) = 1$ ← требование

$\Rightarrow \; c = \frac{1}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$. Таким образом приходим к статистике

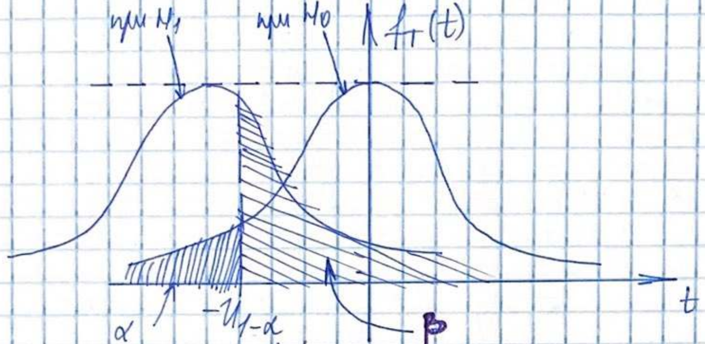
$$T(\vec{X}_{n_1}, \vec{Y}_{n_2}) = \frac{\overline{X}_{n_1} - \overline{Y}_{n_2}}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}} \underset{\text{при } H_0}{\sim} N(0,1)$$

3) Т.о. критические множества для задач (а) - (в) можно записать в виде:

(а) $W = \{(\vec{x}_{n_1}, \vec{y}_{n_2}): \; T(\vec{x}_{n_1}, \vec{y}_{n_2}) \le -u_{1-\alpha}\}$,

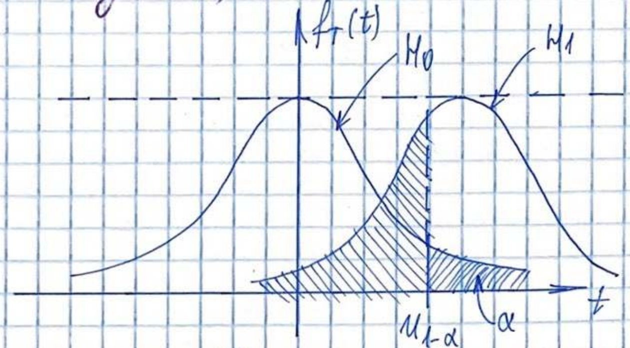
(б) $W = \{(\vec{x}_{n_1}, \vec{y}_{n_2}): \; T(\vec{x}_{n_1}, \vec{y}_{n_2}) \geq u_{1-\alpha}\}$,

(в) $W = \{(\vec{x}_{n_1}, \vec{y}_{n_2}): \; |T(\vec{x}_{n_1}, \vec{y}_{n_2})| \geq u_{1-\frac{\alpha}{2}}\}$.

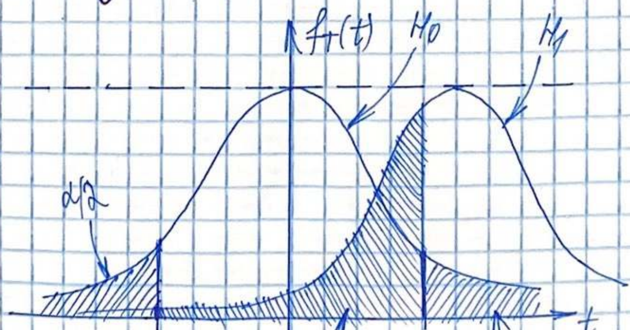


для (а)

$! \; \beta = P\{\vec{x} \notin \underset{H_0}{W} \mid H_1\}$



для (б)



для (в)

Пример.

Пусть
1) $X \sim N(m_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(m_2, \sigma_2^2)$;
2) m_1, m_2 – неизв., σ_1^2, σ_2^2 – неизв;
3) X, Y – независ.
4) $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ – неизвестны, но равны.
обозначим

Рассмотрим задачи проверки:

(а) $H_0 = \{m_1 = m_2\}$ против $H_1 = \{m_1 < m_2\}$,
(б) ——— " ——— $H_1 = \{m_1 > m_2\}$
(в) ——— " ——— $H_1 = \{m_1 \neq m_2\}$.

Решение: