Пусть X – случайная величина, з-н распределения которой известен с точностью до параметра θ.

Опр. <u>Точечной оценкой параметра θ</u> называется статистика $\hat{\theta}(\vec{X})$, выборочное значение которой принимается в качестве значения этого параметра (θ).

То есть $\theta = \hat{\theta}(\vec{x})$

($\vec{x}$ – реализация, $\vec{X}$ – случ. выборка)

Пример. (*) Пусть X – сл. вел., закон распр-я кот. неизвестен, и ее мат. ож.

$$m = M[X]$$

в качестве оценки m можно рассмотреть следующие статистики

$$\hat{m}_1(\vec{X}) = \bar{X};$$

$$\hat{m}_2(\vec{X}) = \frac{1}{2}\left(X_{(1)} + X_{(n)}\right);$$

$$\hat{m}_3(\vec{X}) = \begin{cases} X_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}, & n \text{ – нечет.} \\ \frac{1}{2}\left[X_{(n/2)} + X_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}\right], & n \text{ – чёт.} \end{cases}$$

$$\hat{m}_4(\vec{X}) = e^{\bar{X}+1}$$

Известно, что $X_i \sim X$ – ген. сов-ть

29.03.24. **Лекция 6.**

~Качество статистики по отношению к оцениваемому параметру определяется следующими свойствами:

1) несмещенность;
2) эффективность;
3) состоятельность.

② Несмещенность точечной оценки

Опр Оценка $\hat{\theta}$ неизвестного параметра θ наз. несмещенной, если

$$M[\hat{\theta}(\vec{X})] = \theta \quad (\text{если } \exists M[\hat{\theta}])$$

Пример. (см. (*))

1. для $\hat{m}_1$:

$$M[\hat{m}_1(\vec{X})] = M[\bar{X}] = M\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right] = M[X]\cdot\frac{1}{n}\cdot n = m$$

т.е. $\hat{m}_1$ - несмещенная оценка для m.

2. $$\hat{\sigma}^2(\vec{X}) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \bar{X})^2$$

Можно доказать, что

$$M[\hat{\sigma}^2(\vec{X})] = \frac{n-1}{n}\sigma^2 \neq \sigma^2$$

т.е. $\hat{\sigma}^2$ - смещенная оценка для σ

! **Замечание:** статистику можно исправить

$$S^2(\vec{X}) = \frac{n}{n-1}\hat{\sigma}^2(\vec{X}) = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \bar{X})^2$$

S^2 - несмещенная оценка (исправленная выборочная дисперсия)

③ Состоятельность точечной оценки

Опр Оценка $\hat{\theta}$ параметра θ наз. состоятельной, если при $n \to \infty$ (n - объем выборки) эта оценка сходится по вероятности к теор. значению θ, т.е.

$$\hat{\theta}(\vec{X}) \xrightarrow[n\to\infty]{P} \theta$$

Пример Пусть X - с.в.

$\exists MX = m$, $DX = \sigma^2$

Тогда $M[\bar{X}] = m$

$$D[\bar{X}] = D\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right] = \frac{1}{n^2}\cdot n\cdot\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

В соответствии со 2м нер-вом Чебышева:

для $\forall\varepsilon > 0$: $P\{|\bar{X} - m| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

т.е.

$$\bar{X} \xrightarrow[n\to\infty]{P} m$$

т.е. $\bar{X}$ - состоятельная оценка для m.

8 **Замечание:** Можно показать, что начальные и центральные выб. моменты порядка k явл. состоятельными оценками своих теор. аналогов (при усл. $\exists$-я последних); при этом для $k \geqslant 2$ эти оценки явл. смещенными.

$\hat{M}_i(\vec{X})$ - нач.

$\hat{\nu}_i(\vec{X})$ - центр.

(4) Эффективная точечная оценка.

Пусть 1) X - случ. вел., закон распределения которой известен с точностью до параметра θ.

2) $\hat{\theta}(\vec{X})$ - точечная оценка пар-ра θ.

3) $\hat{\theta}$ и все точ. оценки данного раздела имеют дисперсию $< \infty$.

Опр. Оценка $\hat{\theta}_1$ наз. более эффективной оценкой пар-ра θ, чем $\hat{\theta}_2$, если

$$D[\hat{\theta}_1(\vec{X})] < D[\hat{\theta}_2(\vec{X})].$$

Опр. Оценка $\hat{\theta}$ параметра θ наз. эффективной, если она обладает наименьшей дисперсией среди всех несмещенных оценок этого параметра.

При этом $\hat{\theta}$ - так же несмещенная.

! Замечание: Часто говорят не об эффективной оценке "вообще", а об эффективной оценке в некотором классе оценок (напр. лин. оценок)

Опр. Положим, что Θ - некоторый класс несмещенных оценок параметра θ.

Оценка $\hat{\theta}$ наз. эффективной в классе Θ, если она обладает наим. дисперсией среди всех оценок этого класса.

Пример. Пусть X - с.в.

$MX = m$

$DX = \sigma^2$

Покажем, что выборочное среднее явл. эфф. оценкой для m в классе лин. оценок.

Произв. оценка данного класса

$$\hat{\mu}(\vec{X}) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k X_k$$

Условие несмещенности

$$m = M[\hat{\mu}(\vec{X})] = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k M X_k = m \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1$$

Второе требование эффективности

$$D[\hat{\mu}(\vec{X})] \to \min_{\{\alpha_k\}}$$

$$D[\hat{\mu}(\vec{X})] = D\left[\sum_{k=1}^{n} \alpha_k X_k\right] = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 DX_k = \sigma^2 \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2$$

Получаем задачу условной оптимизации

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 \to \min \\ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow \alpha_k = \frac{1}{n}, \quad k = 1, \dots, n$

$\Rightarrow$ Оценка $\bar{X}$ является эфф. оценкой для m в классе линейных оценок.

При этом $D[\bar{X}] = \sigma^2/n$

Th (о единственности эфф. оценки)

Пусть даны две оценки $\hat{\theta}_1$ и $\hat{\theta}_2$ и данные оценки являются эффективными

Тогда $\hat{\theta}_1(\vec{X})$ и $\hat{\theta}_2(\vec{X})$ совпадают с вероятностью 1. (различаются на мн-ве меры 0)

т.е. $\forall \varepsilon > 0: \quad P\{|\hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_2| < \varepsilon\} = 1$

Док-во: По условию $D[\hat{\theta}_1] = D[\hat{\theta}_2] = \sigma^2$

Возьмем $\hat{\theta}_* = \dfrac{\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2}{2}$

$M[\hat{\theta}_*] = \theta \Rightarrow \hat{\theta}_*$ яв. несмещенной.

$$\sigma^2 \le D[\hat{\theta}_*] = D\left[\frac{\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2}{2}\right] = \frac{1}{4}\left(D[\hat{\theta}_1] + 2\operatorname{cov}(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) + D[\hat{\theta}_2]\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sigma^2 + \operatorname{cov}(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)\right] \le \left\{\operatorname{cov}(\xi, \eta) \le \sqrt{D(\xi) D(\eta)}\right\} \le \sigma^2$$

$\Rightarrow D[\hat{\theta}_*] = \sigma^2 \Rightarrow \operatorname{cov}(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) = \sigma^2$

$$D[\hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_2] = D[\hat{\theta}_1] - \operatorname{cov}(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) + D[\hat{\theta}_2] = 2\sigma^2 - 2\sigma^2 = 0$$

II нер. Чебышева для с. в. $\hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_2$

$$\forall \varepsilon > 0: \quad P\{|\hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_2| < \varepsilon\} \ge 1 - \frac{\overbrace{D[\hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_2]}^{0}}{\varepsilon^2} = 1, \text{ чтд.}$$

Пусть X – ген. совокупность, закон расп. которой известен с точностью до параметра β.

$\vec{X} = (X_1, \dots, X_n)$ – случайная выборка объема n данной ген. сов-ти

Опр. Функцией правдоподобия наз. функция

$$L(\beta, \vec{x}) = p(\beta, x_1) \dots p(\beta, x_n),$$

где $p(\beta, x) = \begin{cases} P_\beta\{X = x\}, & \text{если } X \text{ – дискр. с. в.} \\ f_X(\beta, x), & \text{если } X \text{ – непр. с. в.} \end{cases}$

Замечание Из опр-я следует, что в зав-ти от типа случайной величины (ген. сов-ти) L – либо совместная вероятность, либо совм. плотность вероятности случ. выборки $\vec{X}$ в точке x.

С другой стороны, L – параметрическое семейство функций.

След. th требует "условий регулярности" L.

[illegible]

Пусть задан зависящий от пар-ра β закон расп. ген. сов-ти X, получена ф-я правдоподобия $L(\beta, \vec{x})$.

Условие регулярности
(X – непрерывного типа)

1) Пусть D – область допустимых значений β. L – дифференцируема по β в области D.

2) $\dfrac{\partial L(\beta, \vec{x})}{\partial \beta}$ имеет конечную дисперсию;

3) Для любой статистики $\theta(\vec{X})$ имеет место равенство

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \int_{\mathbb{R}^n} \theta(\vec{x}) L(\beta, \vec{x})\, d\vec{x} = \int_{\mathbb{R}^n} \theta(\vec{x}) \frac{\partial L(\beta, \vec{x})}{\partial \beta}\, d\vec{x}$$

$$(d\vec{x} = dx_1 \cdot \ldots \cdot dx_n)$$

Th Рао-Крамера

Пусть 1) $L(\beta, \vec{x})$ - регулярное семейство
2) параметр β - неизв.
3) $b(\vec{X})$ - несмещенная статистика для β.

Тогда 1) $$D[b(\vec{X})] \geq \frac{1}{J(\beta)} \quad (*), \text{ где } J(\beta) = M\left[\left(\frac{\partial \ln L(\beta, \vec{X})}{\partial \beta}\right)^2\right] = D\left[\frac{\partial \ln L(\beta, \vec{X})}{\partial \beta}\right]$$

$J(\beta)$ наз. количеством информации (по Фишеру).

2) равенство в $(*)$ достигается $\Leftrightarrow$ выполнено равенство
$$k[b(\vec{X}) - \beta] = \frac{\partial \ln L(\beta, \vec{X})}{\partial \beta},$$
где $k = \pm J(\beta)$

Док-во: Поскольку $L(\beta, \vec{x}) = \prod_{k=1}^{n} f_X(\beta, x_k)$ - совместная пл-ть вероятности расп. выборки $\vec{X}$ в т. $\vec{x}$

из условия нормировки следует
$$1 = \int_{R^n} L(\beta, \vec{x}) d\vec{x}$$
$$0 = \frac{\partial 1}{\partial \beta} = \int_{R^n} \frac{\partial L(\beta, \vec{x})}{\partial \beta} d\vec{x} = \int_{R^n} \frac{\partial \ln L(\beta, \vec{x})}{\partial \beta} L(\beta, \vec{x}) d\vec{x}$$