Проверка статистических гипотез*

для нормально распределенной генеральной совокупности $X \sim \mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$

	Основная гипотеза H_0	Конкур. гипотеза H_1	Статистика T и ее закон распределения при H_0	Условие, определяющее критическую область W
I. σ изв.	$\mu=\mu_0$	$\mu<\mu_0$	$T(\vec{X})=\dfrac{\mu_0-\overline{X}}{\sigma}\sqrt{n}\sim \mathrm{N}(0,1)$	$T(\vec{X})\geqslant u_{1-\alpha}$
		$\mu>\mu_0$		$T(\vec{X})\leqslant -u_{1-\alpha}$
		$\mu\neq\mu_0$		$\lvert T(\vec{X})\rvert\geqslant u_{1-\alpha/2}$
II. σ неизв.	$\mu=\mu_0$	$\mu<\mu_0$	$T(\vec{X})=\dfrac{\mu_0-\overline{X}}{S(\vec{X})}\sqrt{n}\sim \mathrm{St}(n-1)$	$T(\vec{X})\geqslant t_{1-\alpha}$
		$\mu>\mu_0$		$T(\vec{X})\leqslant -t_{1-\alpha}$
		$\mu\neq\mu_0$		$\lvert T(\vec{X})\rvert\geqslant t_{1-\alpha/2}$
III. σ1 и σ2 изв.	$\mu_1=\mu_2$	$\mu_1>\mu_2$	$T(\vec{X}_{n_1},\vec{Y}_{n_2})=$ $=\dfrac{\overline{X}_{n_1}-\overline{Y}_{n_2}}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}}\sim \mathrm{N}(0,1)$	$T(\vec{X}_{n_1},\vec{Y}_{n_2})\geqslant u_{1-\alpha}$
		$\mu_1\neq\mu_2$		$\lvert T(\vec{X}_{n_1},\vec{Y}_{n_2})\rvert\geqslant u_{1-\alpha/2}$
IV. σ1=σ2 и неизв.	$\mu_1=\mu_2$	$\mu_1>\mu_2$	$T(\vec{X}_{n_1},\vec{Y}_{n_2})=\dfrac{\overline{X}_{n_1}-\overline{Y}_{n_2}}{\sqrt{1/n_1+1/n_2}}\times$ $\times\dfrac{\sqrt{n_1+n_2-2}}{\sqrt{(n_1-1)S^2(\vec{X}_{n_1})+(n_2-1)S^2(\vec{Y}_{n_2})}}$ $\sim \mathrm{St}(n_1+n_2-2)$	$T(\vec{X}_{n_1},\vec{Y}_{n_2})\geqslant t_{1-\alpha}$
		$\mu_1\neq\mu_2$		$\lvert T(\vec{X}_{n_1},\vec{Y}_{n_2})\rvert\geqslant t_{1-\alpha/2}$
V.	$\sigma=\sigma_0$	$\sigma>\sigma_0$	$T(\vec{X})=\dfrac{S^2(\vec{X})}{\sigma_0^2}(n-1)\sim \chi^2(n-1)$	$T(\vec{X})\geqslant h_{1-\alpha}$
		$\sigma<\sigma_0$		$T(\vec{X})\leqslant h_{\alpha}$
		$\sigma\neq\sigma_0$		$\left[T(\vec{X})\leqslant h_{\alpha/2}\right]\vee\left[T(\vec{X})\geqslant h_{1-\alpha/2}\right]$
VI.	$\sigma_1=\sigma_2$	$\sigma_1>\sigma_2$	$T(\vec{X}_{n_1},\vec{Y}_{n_2})=$ $=\dfrac{S^2(\vec{X}_{n_1})}{S^2(\vec{Y}_{n_2})}\sim \mathrm{F}(n_1-1,n_2-1)$	$T(\vec{X}_{n_1},\vec{Y}_{n_2})\geqslant \mathrm{F}_{1-\alpha}(n_1-1,n_2-1)$
		$\sigma_1<\sigma_2$		
		$\sigma_1\neq\sigma_2$		$\left[T\geqslant \mathrm{F}_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)\right]\vee$ $\vee\left[T\geqslant 1/\mathrm{F}_{1-\alpha/2}(n_2-1,n_1-1)\right]$

* $\overline{X}$ – выборочное среднее, S^2 – исправленная выборочная дисперсия,
α – уровень значимости критерия, u_q, t_q, h_q, F_q – квантили уровня q соответствующих распределений.

Билеты 2, 30, 37, 44, 51, 65, 72, X

Производитель лазерных дальномеров утверждает, что среднеквадратическое отклонение показаний его изделий составляет не более $\sigma_{\text{пор}} = 1$ мм. Покупатель провел серию из $n = 10$ измерений, в результате чего получил $S(\vec{x}) = 1.34$ мм. Считая распределение показаний пробора нормальным, с использованием одностороннего критерия проверить гипотезу о том, что продавец необманывает покупателя. Принять уровень значимости $\alpha = 0.05$.

1) Пусть X - случайная величина, принимающая значения, равные показаниям прибора.

Из условия: $X \sim N(m, \sigma^2)$, где m — неизв, σ — неизв; $\sigma_0 = 1$ мм

2) Основная гипотеза:

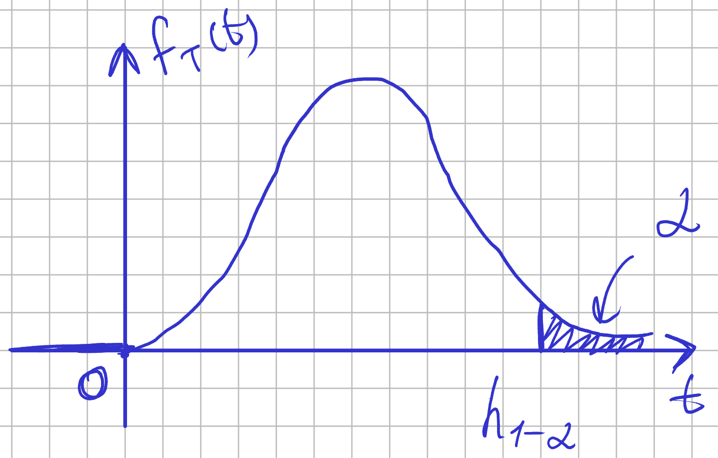
H0 = {продавец не обманывает покупателя} = $\{\sigma = \sigma_0\}$

Конкурирующая гипотеза:

H1 = {продавец обманывает покупателя} = $\{\sigma > \sigma_0\}$

3) Используем статистику:

$$T(\vec{X}) = \frac{S^2(\vec{X})}{\sigma_0^2}(n-1) \sim \chi^2(n-1)$$



Критическое множество:

$$W = \{\vec{x} : T(\vec{x}) \geq h_{1-\alpha}\}$$

...

Билет 8, 29, 50

Руководство школы утверждает, что школа обеспечивает подготовку выпускников для сдачи экзамена по математике с результатом не менее 62 баллов. Баллы, полученные при тестировании контрольной группы из $n = 7$ школьников, записаны в вектор $\vec{x} = (44,\ 53,\ 58,\ 55,\ 60,\ 55,\ 70)$. С использованием одностороннего критерия при уровне значимости $\alpha = 0.05$ проверить гипотезу о справедливости слов руководства школы. Распределение контролируемого показателя считать нормальным, среднеквадратическое отклонение принять равным 4.

1) Формализация задачи

Пусть X - случайная величина, принимающая значения, равные баллам, полученным при тестировании

По условию: $X \sim N(m, \sigma^2)$, где m – неизв, $\sigma^2 = 4^2$ – изв

2) Основная гипотеза:

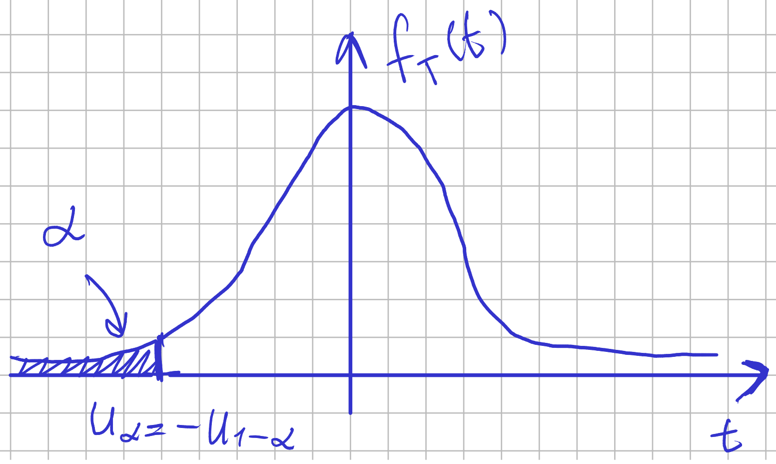
H0 = {школа не обманывает} = {m = m0}

Конкурирующая гипотеза:

H1 = {школа обманывает} = {m < m0}

3) Используем статистику:

$$T(\vec{X}) = \frac{\overline{X} - m_0}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,1)$$



Критическое множество:

$$W = \{\vec{x} : T(\vec{x}) \leq -u_{1-\alpha}\}$$

...

Билет 66

Для определения класса (тестируемого) вольтметра были произведены измерения стабилизированного источника напряжения: $n = 7$ измерений проводились эталонным вольтметром и $m = 11$ измерений произведены тестируемым вольтметром. В результате для эталонного вольтметра получено значение $S(\vec{x}) = 1$ В, а для тестируемого — $S(\vec{y}) = 1.5$ В. Пренебрегая несовершенством стибилизатра и полагая, что ошибки измерителей подчинены нормальному закону, с уровнем значимости $\alpha = 0.05$ проверить гипотезу о том, что тестируемый прибор имеет точность НЕ ХУЖЕ (??? закрыто пальцем) эталонного.

1) Формализация задачи

Пусть a - истинное значение измерения вольтметра

Пусть ε_1 - случайная величина, принимающая значения, равные величине ошибок измерения эталонного вольтметра

По условию: $\varepsilon_1 \sim N(m_1, \sigma_1^2)$, где m_1 – неизв, σ_1^2 – неизв

Пусть $X = a + \varepsilon_1$ – случайная величина, принимающая значения, равные результату измерения э. вольтметра

Пусть ε_2 - случайная величина, принимающая значения, равные величине ошибок измерения тестируемого вольтметра

По условию: $\varepsilon_2 \sim N(m_2, \sigma_2^2)$, где m_2 – неизв, σ_2^2 – неизв

Пусть $Y = a + \varepsilon_2$ – случайная величина, принимающая значения, равные результату измерения т. вольтметра

2) Основная гипотеза

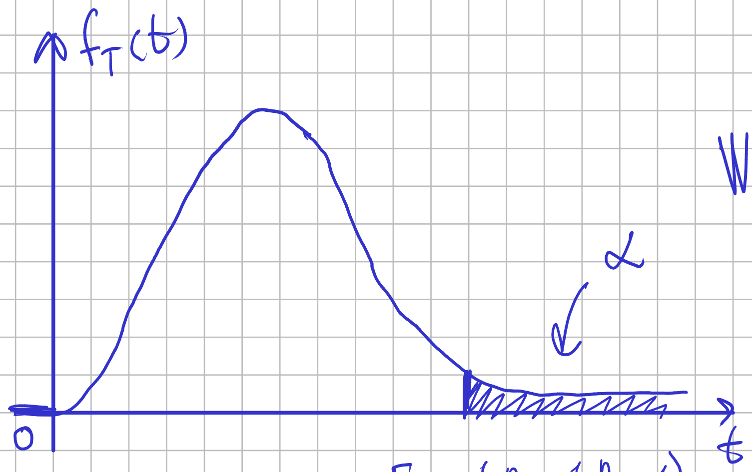
H0 = {точность тестируемого не хуже эталонного} = $\{\sigma_1 = \sigma_2\}$

Конкурирующая гипотеза:

H0 = {точность тестируемого хуже эталонного} = $\{\sigma_1 < \sigma_2\}$

3) Рассмотрим статистику:

$$T(\vec{X}_{n_1}, \vec{Y}_{n_2}) = \frac{S^2(\vec{X}_{n_1})}{S^2(Y_{n_2})} \sim F(n_1-1, n_2-1)$$



$F_{1-\alpha}(n_1-1, n_2-1)$

Критическое множество:

$$W = \{(\vec{x}, \vec{y}) : T(\vec{x}, \vec{y}) \geq F_{1-\alpha}(n_1-1, n_2-1)\}$$

...

4) Подставим значения

1) $T(\vec{x}, \vec{y}) = \dfrac{1}{2{,}25} = \dfrac{100}{225}$

2) $F_{1-\alpha}(6, 10) = N$

3) Верно ли, что

$\dfrac{100}{225} \geq N \Rightarrow$ если верно $\Rightarrow$ принять H_1, отклонить H_0;

если не верно $\Rightarrow$ принять H_0, отклонить H_1

Билет 5, 19, 33, 54

В обычные дни среднее количество абонентских вызовов через ячейку (соту) мобильной связи в селе Новые Чешуйки не превышает 97. Однако если в селе происходит торжественное событие (день рождения, свадьба, похороны и т. д.), в село съезжаются родственники и количество вызовов растет. 30 мая 2021 года оператор мобильной связи зафиксировал через эту ячейку 146 вызовов. С уровнем значимости $\alpha = 0.05$ проверить гипотезу о том, что в этот день в Новых Чешуйках не имело место торжественное событие. Количество вызовов через ячейку мобильной связи принять распределенным по закону Пуассона.

Ебать

Билет 4, 46

Согласно применяемому при рыболовстве нормативу, длина выловленных рыб (пленгаса) не должна быть менее 38 мм. Если средняя длина выловленных рыб меньше, то их необходимо выпускать. Значения длин (в сантиметрах) $n = 7$ случайно выбранных рыб из улова записаны в вектор $\vec{x} = (30,\ 35,\ 43,\ 34,\ 36,\ 31,\ 39)$. При уровне значимости $\alpha = 0.05$ проверить гипотезу о том, что улов соответствует нормативу. Среднеквадратическое отклонение взять равным 2 см.

1) Формализация задачи

Пусть X - случайная величина, принимающая значения, равные длине выловленных рыб

По условию: $X \sim N(m, \sigma^2)$, где m – неизв, $\sigma^2 = 2^2$ – изв

2) Основная гипотеза:

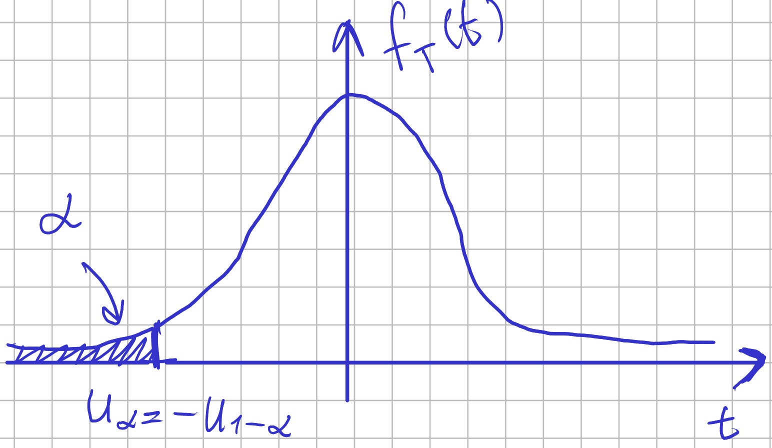
H0 = {улов соответсвует нормативу} = {m = m0}

Конкурирующая гипотеза:

H1 = {улов не соответсвует нормативу} = {m < m0}

3) Используем статистику:

$$T(\vec{X}) = \frac{\overline{X} - m_0}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,1)$$



Критическое множество:

$$W = \{\vec{x} : T(\vec{x}) \leq -u_{1-\alpha}\}$$

...

Билет 34, 69

Некоторая страна отличается высоким уровнем коррупции, численное выражение которого власти определяют как отношение совокупного объема украденных средств к общему объему зарплаты в стране за тот же период. Если занчение этго показателя не превосходит 55%, то власти не предпринимают никаких антикоррупционных мер; в противном случае они опасаются последствий и дают указания силовым структурам. В 2020 году Счетная палата ежемесячно рассчитывала этот показатель, по эти значениям получено $\overline{x} = 52.5\%$. Считая, что контрлируемый параметр распределен по нормальному закону, с уровнем значимости $\alpha = 0.05$ проверить гипотезу о том, что уровень воровства в стране не требует от правительства приняетия особых мер, если среднеквадратичное отклонение рассматриваемого показателя составляет $\sigma = 2\%$.

1) Формализация задачи

Пусть X - случайная величина, принимающая значения, равные отношению совокупного объема украденных средств к общему объему зарплаты в стране за месяц

По условию: $X \sim N(m, \sigma^2)$, где m - неизв
$\sigma = 2\%$

2) Основная гипотеза:

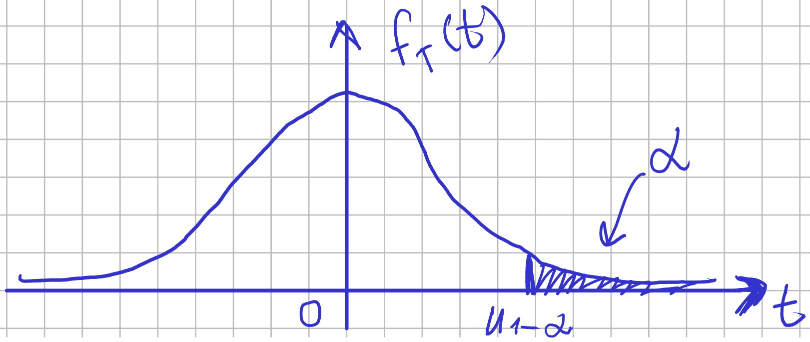
H0 = {уровень воровства в стране не требует вмешательств} = {m = m0}

Конкурирующая гипотеза:

H1 = {уровень воровства в стране требует вмешательств} = {m > m0}

с
3) Расммотрим гипотезу:

$$T(\vec{X}) = \frac{\overline{X} - m_0}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,1)$$



Критическое множество:

$$W = \{\vec{x} : T(\vec{x}) \geq u_{1-\alpha}\}$$

...

Билет 28, 49

Каждый день Виктор Васильевич ездит на работу и обратно в своем служебном автомобиле. При этом установлено, что средний расход топлива в дни, когда нет осадкв, не превышает 20 литров, а в дни с осадками этот же показатель больше 23 леитров. Принимая, что дневной расход топлива автомобилей Виктора Васильевича имеет нормальное распределение со среднеквадритичным отклоненением $\sigma = 2$ л, на основе собранных в течение $n = 5$ дней данных о расходе топлива проверить гиптезу о том, что в эти дни не было осадков. Значения расхода топлива (в литрах) в эти дни записаны в вектор $\vec{x} = (21.3,\ 22.5,\ 19.0,\ 18.5,\ 20.5)$; принять уровень значимости $\alpha = 0.1$.

1) Формализация задачи

Пусть X - случайная величина, принимающая значения, равные расходу топлива

По условию: $X \sim N(m, \sigma^2)$ – m – неизв, $\sigma = 2$ л

2) Основная гипотеза:

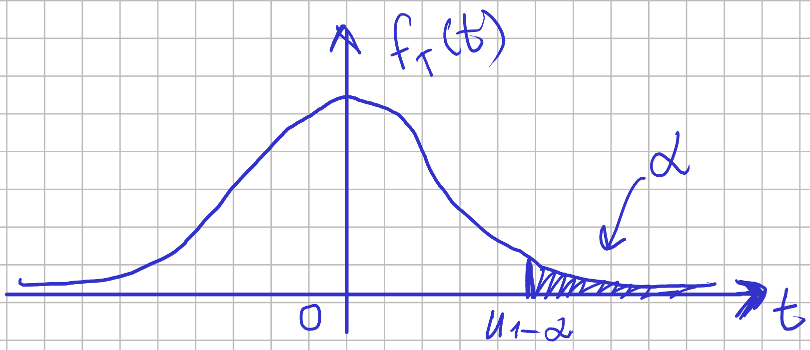
H0 = {осадков в выбранные дни не было} = {m = m0}

Конкурирующая гипотеза:

H1 = {осадки в выбранные дни были} = {m > m0}

3) Рассмотрим гипотезу:

$$T(\vec{X}) = \frac{\overline{X} - m_0}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,1)$$



Критическое множество:

$$W = \{\vec{x} : T(\vec{x}) \geq u_{1-\alpha}\}$$

. . .