Интервальные оценки

① Основные понятия

Рассматривается осн. задача МС:

Дано: с.в. X, закон распределения которой известен с точностью до в-ра $\vec{\theta}=(\theta_1,\dots,\theta_r)$ неизв. пар-в.

Требуется: оценить значение $\vec{\theta}$.

Ранее для решения этой задачи использовалось построение точ. оценок. Далее в кач-ве значения неизв. пар-ра θ_j принималось

$$\theta_j := \hat{\theta}_j(\vec{x}),$$

где $\hat{\theta}_j$ – соотв. точ. оценка.

Недостатком этого подхода явл. отсутствие вероятностных характеристик точности оценивания неизв. пар-ра.

Для исправления этой ситуации разработаны интервальные оценки.

(online) Лекция 8 12.04.24

Опр Интервальной оценкой с коэффициентом доверия γ (γ-уровня γ) параметра θ наз. пару статистик $\underline{\theta}(\vec{X})$ и $\overline{\theta}(\vec{X})$ таких, что

$$P\{\underline{\theta}(\vec{X})<\theta<\overline{\theta}(\vec{X})\}=\gamma$$

Опр Доверительным интервалом уровня γ (γ-доверительным интервалом) наз. интервал

$$(\underline{\theta}(\vec{x});\overline{\theta}(\vec{x})),$$

отв. выборочным значениям статистик

$$\underline{\theta}(\vec{X}) \text{ и } \overline{\theta}(\vec{X}).$$

Замечание: 1) Из определения следует, что дов. интервал явл. выборочным значением инт. оценки. Однако в дальнейшем в случаях, когда из контекста ясно, о чем идет речь, мы иногда будем нарушать введенную терминологию, называя, например, дов. интервалом интервал со случ. границами.

2) При построении дов. инт. возможна ситуация, когда он не накрывает теор. значение оц. пар-ра. Вер-ть такого события

$$1-\gamma=P\{\theta\notin(\underline{\theta}(\vec{X}),\overline{\theta}(\vec{X}))\}.$$

3) С. в.

$$l(\vec{X})=\overline{\theta}(\vec{X})-\underline{\theta}(\vec{X}),$$

называемая размахом γ-дов. интервала, явл. вероятностной хар-кой точности оценивания неизв. пар-ра.

При этом для каждой реализации $\vec{x}$ случайной выборки $\vec{X}$ значение $l(\vec{x})$ равно длине соотв. интервала.

② Построение инт. оценок.

Пусть X – с.в., з-н распр. кот. известен с точностью до пар-ра θ.

Опр. Статистика $T(\vec{X}, \theta)$ наз. <u>центральной</u>, если закон ее распределения не зависит от θ.

Пример.

$X \sim N(\theta, \sigma^2)$, θ - неизв., σ^2 - изв.

Покажем, что $T(\vec{X}, \theta) = \dfrac{\theta - \bar{X}}{\sigma}\sqrt{n}$ яв. центральной.

С.в. T явл. лин. ф. от с.в. X_i, $i = \overline{1,n}$, имеющих одинаковое с X распр.

$$\vec{X} = (X_1, \ldots, X_n)$$

$$X_i \sim N(\theta, \sigma^2) \quad X\sim$$

$$\bar{X} = \frac{1}{n}X_1 + \ldots + \frac{1}{n}X_n \Rightarrow \bar{X} \sim N(\ldots, \ldots)$$

$$T = \underbrace{\frac{\theta}{\sigma}\sqrt{n}}_{const} - \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\bar{X} \Rightarrow T \sim N(m_T, \sigma_T^2)$$

$$m_T = MT = \ldots = 0$$

$$\sigma_T^2 = \ldots = 1$$

$$\Rightarrow T(\vec{X}, \theta) \sim N(0,1)$$

Т.о. статистика T явл. центральной.

! Само значение T от θ <u>зависит</u>.

Покажем, как центральная статистика м.б. использована для построения дов. интервалов.

Будем предполагать, что

а) X – с. в., закон распределения кот. зависит от неизв. пар. θ;

б) $\gamma \in (0,1)$ – выбранный уровень доверия;

в) $T(\vec{X}, \theta)$ – центр. стат-ка;

г) T явл. непрер.;

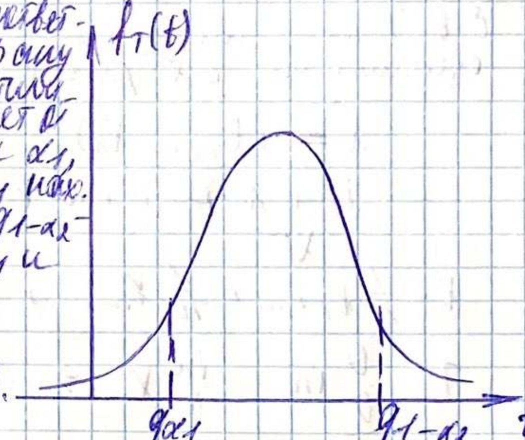
д) ф-я $F_T(t)$ расп. статистики T явл. монотонно возрастающей на мн-ве

$$\{t \in \mathbb{R}: 0 < F_T(t) < 1\};$$

е) T явл. монотонно возрастающей ф-ей пар-ра θ.

Выберем значения $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ так, чтобы $\alpha_1 + \alpha_2 = 1-\gamma$, при этом $\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_2 \geq 0$.

Пусть q_{α_1} и $q_{1-\alpha_2}$ – квантили соответствующих уровней с. в. T. В силу предположений (в) и (г) эти квантили определены однозначно и не зависят от пар-ра θ. В соотв-и с выбором α_1, α_2 и определением слева от q_{α_1} нах. α_1 кг вер. массы, а справа от $q_{1-\alpha_2}$ – α_2 кг вер. массы. Между q_{α_1} и $q_{1-\alpha_2}$ расп. γ кг вер-ти. Согласно св-вам непр. с. в.:



$$\gamma = P\{q_{\alpha_1} < T(\vec{X}, \theta) < q_{1-\alpha_2}\}.$$

В соотв. с (е) T как ф-я пар-ра θ обратима

$$\Rightarrow \gamma = P\{T^{-1}(\vec{X}, q_{\alpha_1}) < \theta < T^{-1}(\vec{X}, q_{1-\alpha_2})\}.$$

Замечание Построенный γ-доверит. интервал зависит от выбора значений α_1 и α_2. Как правило, полагают

$$\alpha_1 = \alpha_2 \text{ и, след., } \alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1-\gamma}{2}$$

В нек. случаях поступают иначе. Например, если положить $\alpha_2 = 1$, то

$$\alpha_1 = 1-\gamma, \quad q_{1-\alpha_2} = +\infty$$

и $\underline{\theta}(\vec{X}) = T^{-1}(\vec{X}, q_{\alpha_1})$, $\overline{\theta}(\vec{X}) = +\infty$,

т.е. мы получим нижнюю γ-дов. границу для θ.

Аналогично при $\alpha_1 = 0$ – верхняя γ-дов.

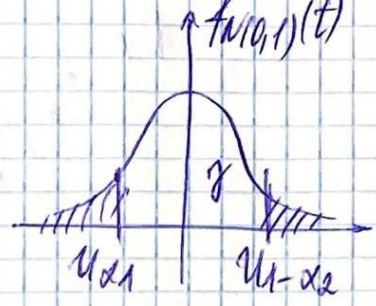
Пример.

$X \sim N(\theta, \sigma^2)$; $\quad T(\vec{X}, \theta) = \frac{\theta - \bar{X}}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,1)$.

Построим γ-дов. инт-л для θ.

$$\gamma = P\{u_{\alpha_1} < T(\vec{X}, \theta) < u_{1-\alpha_2}\}.$$

u – квантили.



$$\{u_{\alpha_1} < T(\vec{X}, \theta) < u_{1-\alpha_2}\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{u_{\alpha_1} < \frac{\theta - \bar{X}}{\sigma}\sqrt{n} < u_{1-\alpha_2}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\underbrace{\bar{X} + \frac{\sigma u_{\alpha_1}}{\sqrt{n}}}_{\underline{\theta}(\vec{X})} < \theta < \underbrace{\bar{X} + \frac{\sigma u_{1-\alpha_2}}{\sqrt{n}}}_{\overline{\theta}(\vec{X})}\right\}.$$

Замечание: 1) построенная инт. оценка пар. θ – мат. ож. н. с. в. при изв. дисп. имеет размах

$$l(\vec{X}) = \overline{\theta} - \underline{\theta} = (u_{1-\alpha_2} - u_{\alpha_1})\frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

явл. детерм. величиной для $\forall\ \alpha_1, \alpha_2, \sigma$.

Он будет минимальным при $\alpha_1 = \alpha_2$.

Тогда

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1-\gamma}{2},$$

$$1 - \alpha_2 = 1 - \frac{1-\gamma}{2} = \frac{1+\gamma}{2}.$$

$$u_{1-\alpha_2} = u_{\frac{1+\gamma}{2}}; \quad u_{\alpha_1} = -u_{1-\alpha_1} = -u_{\frac{1+\gamma}{2}}.$$

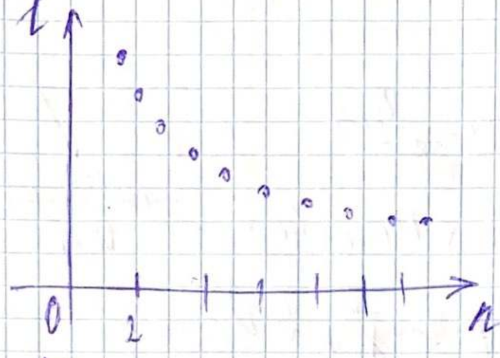
(т.к. ф. пл. станд. норм. расп. явл. четной)

Т.о. $\underline{\theta}(\vec{X}) = \bar{X} - \frac{\sigma u_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}}$,

$\overline{\theta}(\vec{X}) =$

$$l = \frac{2\sigma u_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}}$$

2) Очевидно, что при $\gamma \to 1-0$ (слева) размах дов. интервала $l(\vec{X}) \to +\infty$.
Это означает, что чем более достоверную оценку мы хотим построить, тем менее определенной эта оценка будет.



Для исправления ситуации можно только увеличением объема выборки (при сохранении размаха)

Пример.

Пусть $X \sim N(\theta, \sigma^2)$, где θ, σ^2 — неизв.
Построим γ-дов. инт-л для θ.
Т.к. σ^2 — неизв., используем испр. выб. дисперсию

$$S^2(\vec{X}) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2.$$

В этом случае статистика примет вид

$$T(\vec{X},\theta) = \frac{\theta-\bar{X}}{S(\vec{X})}\sqrt{n} \sim St(n-1).$$

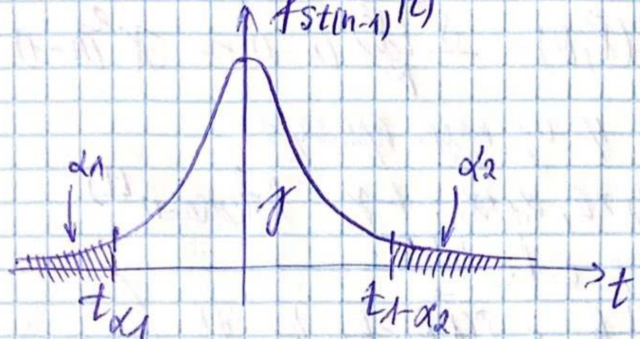
Для установления з-на распр-я:

$$T(\vec{X},\theta) = \frac{\frac{\theta-\bar{X}}{\sigma}\sqrt{n}}{\frac{S(\vec{X})}{\sigma}} = \frac{\frac{\theta-\bar{X}}{\sigma}\sqrt{n}}{\sqrt{(n-1)\frac{S^2(\vec{X})}{\sigma^2}}}\sqrt{n-1} = \frac{\xi}{\sqrt{\eta}}\sqrt{n-1},$$

где $T_0 = \xi = \frac{\theta-\bar{X}}{\sigma}\sqrt{n}$, $\eta = \frac{(n-1)S^2(\vec{X})}{\sigma^2}$.

Из пред. примера $\xi \sim N(0,1)$.
Также можно показать, что $\eta \sim \chi^2(n-1)$ и ξ и η — независимы.

Т.о. $T(\vec{X}, \theta) \sim St(n-1)$ явл. центральной



Аналогично выберем $\alpha_1, \alpha_2 > 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1 - \gamma$

$$P\{t_{\alpha_1} < T < t_{1-\alpha_2}\} = \gamma;$$

$$\{t_{\alpha_1} < T(\vec{X}, \theta) < t_{1-\alpha_2}\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \left\{\bar{X} + \frac{S t_{\alpha_1}}{\sqrt{n}} < \theta < \bar{X} + \frac{S t_{1-\alpha_2}}{\sqrt{n}}\right\}.$$

Т.о.
$$\underline{\theta}(\vec{X}) = \bar{X} + \frac{S(\vec{X}) t_{\alpha_1}}{\sqrt{n}};$$
$$\overline{\theta}(\vec{X}) = \bar{X} + \frac{S(\vec{X}) t_{1-\alpha_2}}{\sqrt{n}}.$$

Замечание: при $\alpha_1 = \alpha_2$ (аналогично) т.к. $f_{St}(t)$ — четная ф.

- $\underline{\theta}(\vec{X}) = \bar{X} - \frac{S(\vec{X}) t_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}}$;
- $\overline{\theta}(\vec{X}) = \bar{X} + \frac{S(\vec{X}) t_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}}$

Размах:
$$l = \frac{2 S(\vec{X}) t_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}}.$$

Пример.

Пусть $X \sim N(m,\theta)$, m, θ — неизв.

Построим γ-дов. инт-л для θ (дисперсии)

$$T(\vec{X},\theta) = \frac{S^2(\vec{X})}{\theta}(n-1) \sim \chi^2(n-1) \text{ — центр. стат-ка.}$$

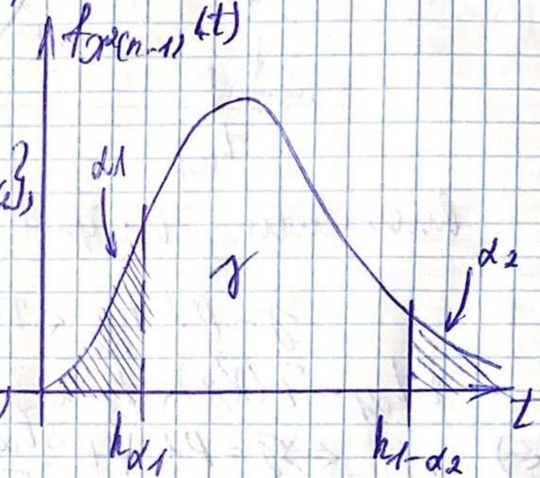
(совп. с γ из пред. примера)

Выбираем $\alpha_1, \alpha_2 > 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1-\gamma$.

С исп. св-в непр. с.в.:

$$\gamma = P\{h_{\alpha_1} < T(\vec{X},\theta) < h_{1-\alpha_2}\},$$

(h — квантили)



$$\{h_{\alpha_1} < T(\vec{X},\theta) < h_{1-\alpha_2}\} \Leftrightarrow$$

... (возведение в -1 степень)

$$\Leftrightarrow \left\{\frac{(n-1)S^2(\vec{X})}{h_{1-\alpha_2}} < \theta < \frac{(n-1)S^2(\vec{X})}{h_{\alpha_1}}\right\}$$

$$\Rightarrow \underline{\theta}(\vec{X}) = \frac{(n-1)S^2(\vec{X})}{h_{1-\alpha_2}},$$

$$\overline{\theta}(\vec{X}) = \frac{(n-1)S^2(\vec{X})}{h_{\alpha_1}}.$$

! Замечание: $\alpha_1 = \alpha_2$:

$$h_{\alpha_1} = h_{\frac{1-\gamma}{2}}; \quad h_{1-\alpha_2} = h_{\frac{1+\gamma}{2}}$$

! $f_{\chi^2(n-1)}(t)$ не явл. четной.