Значение функции $\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	Сотые доли x									
0,0	0,0000	0040	0080	0112	0160	0199	0239	0279	0319	0359
0,1	0398	0438	0478	0517	0557	0596	0636	0675	0714	0754
0,2	0793	0832	0871	0910	0948	0987	1026	1064	1103	1141
0,3	1179	1217	1255	1293	1331	1368	1406	1443	1480	1517
0,4	1554	1591	1628	1664	1700	1736	1772	1808	1844	1879
0,5	1915	1950	1985	2019	2054	2088	2123	2157	2190	2224
0,6	2258	2291	2324	2357	2389	2422	2454	2486	2518	2549
0,7	2580	2612	2642	2673	2704	2734	2764	2794	2823	2852
0,8	2881	2910	2939	2967	2996	3023	3051	3079	3106	3133
0,9	3159	3186	3212	3238	3264	3289	3315	3340	3365	3389
1,0	3413	3438	3461	3485	3508	3531	3553	3577	3599	3621
1,1	3643	3665	3686	3708	3729	3749	3770	3790	3810	3830
1,2	3849	3869	3888	3907	3925	3944	3962	3980	3997	4015
1,3	4032	4049	4066	4082	4099	4115	4131	4147	4162	4177
1,4	4192	4207	4222	4236	4251	4265	4279	4292	4306	4319
1,5	4332	4345	4357	4370	4382	4394	4406	4418	4430	4441
1,6	4452	4463	4474	4485	4495	4505	4515	4525	4535	4545
1,7	4554	4564	4573	4582	4591	4599	4608	4616	4625	4633
1,8	4641	4649	4656	4664	4671	4678	4686	4693	4700	4706
1,9	4713	4719	4726	4732	4738	4744	4750	4756	4762	4767
	Десятые доли x									
2,	4773	4821	4861	4893	4918	4938	4953	4965	4974	4981
3,	4987	4990	4993	4995	4997	4998	4998	4999	4999	5000^8

Интерв оценки.

Общ вид закона распред ген совокуп $\vec{X}$	Параметры	Центр стат и её закон распред
$N(m, \sigma^2)$	m - неизв σ^2 - изв Оценить m	$g(\vec{X}, m) = \frac{m - \bar{X}}{\sigma} \cdot \sqrt{n} \sim N(0,1)$
	m - неизв σ^2 - неизв Оценить: m	$g(\vec{X}, m) = \frac{m - \bar{X}}{S(\vec{X})} \sqrt{n} \sim St(n-1)$
	σ^2 - неизв Оценить σ	$g(\vec{X}, \sigma^2) = \frac{(n-1) S^2(\vec{X})}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$
$Exp(\lambda)$	λ - неизв Оценить: λ	$g(\vec{X}, \lambda) = 2\lambda n \bar{X} \sim \chi^2(2n)$

Математическая статистика

РК1

Практика

Год 2020-2021

Вариант 3

Задача 3. Для определения поражающей способности x зенитно-ракетного комплекса было проведено $n = 10$ испытаний, в результате которых получено, что $\bar{x}_n = 0,85$, $\sum_{k=1}^{n}(x_k - \bar{x}_n)^2 = 22,5 \cdot 10^{-3}$. Для $\gamma = 0,9$ построить γ-доверительные интервалы для среднего значения и среднеквадратического отклонения рассматриваемой вероятности. Распределение контролируемого признака считать нормальным.

1) Формализация задачи

Пусть X - случайная величина, принимающая значения, равные поражающей способности ЗРК

Тогда $X \sim N(m, \sigma^2)$

2) $X \sim N(m, \sigma^2)$

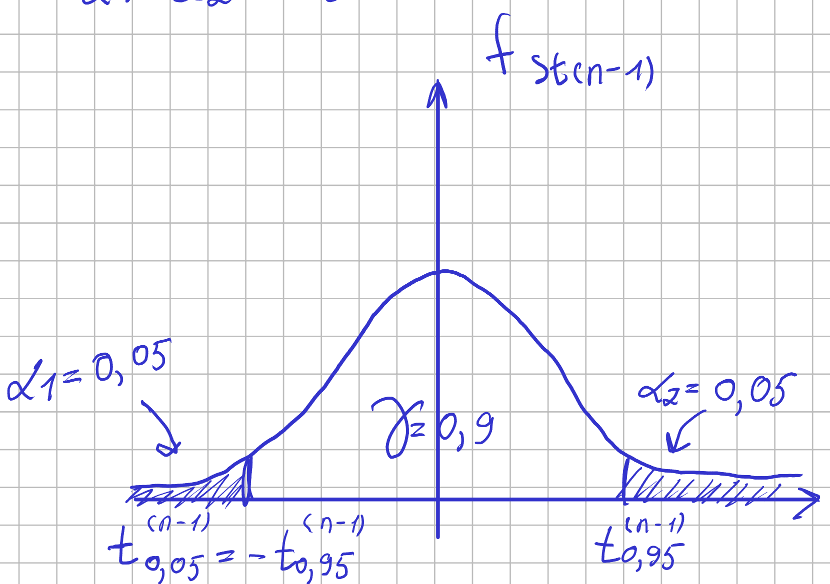
m — неизв

σ^2 — неизв

Оценить m

$$\left.\begin{array}{l} X \sim N(m,\sigma^2) \\ m \text{ — неизв} \\ \sigma^2 \text{ — неизв} \\ \text{Оценить } m \end{array}\right\} g(\vec{X}, m) = \frac{m - \bar{X}}{S(\vec{X})}\sqrt{n} \sim St(n-1)$$

Положим $\alpha_1 = \alpha_2 = \dfrac{1-\gamma}{2} = 0,05$:



$t_{0,95}$ — квантиль уровня 0,95 распред $St(n-1)$

$$P\left\{-t_{0,95}^{(n-1)} < \frac{m-\overline{X}}{S(\vec{X})}\sqrt{n} < t_{0,95}^{(n-1)}\right\} = 0,9$$

$$P\left\{\underbrace{\overline{X} - \frac{S(\vec{X})\cdot t_{0,95}^{(n-1)}}{\sqrt{n}}}_{\underline{m}(\vec{x})} < m < \underbrace{\overline{X} + \frac{S(\vec{X})\cdot t_{0,95}^{(n-1)}}{\sqrt{n}}}_{\overline{m}(\vec{x})}\right\} = 0,9$$

Найдем доверительный интервал для m:

1) $n-1 = 9$

2) $t_{0,95}^{(9)} = 1,833$

3) $S^2(\vec{x}) = \frac{1}{n-1}\underbrace{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}_n)}_{\substack{22,5\cdot 10^{-3} \\ \text{(по условию)}}} = \frac{1}{9}\cdot 22,5\cdot 10^{-3} = 2,5\cdot 10^{-3}$

4) $\frac{S(\vec{x})\, t_{0,95}}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{2,5\cdot 10^{-3}}\cdot 1,833}{\sqrt{10}} = \frac{1,833\cdot 0,5\cdot\sqrt{10}}{100} \simeq 0,029$

5) $\underline{m}(\vec{x}) = \overline{x} - 0,029 = 0,85 - 0,029 = 0,821$

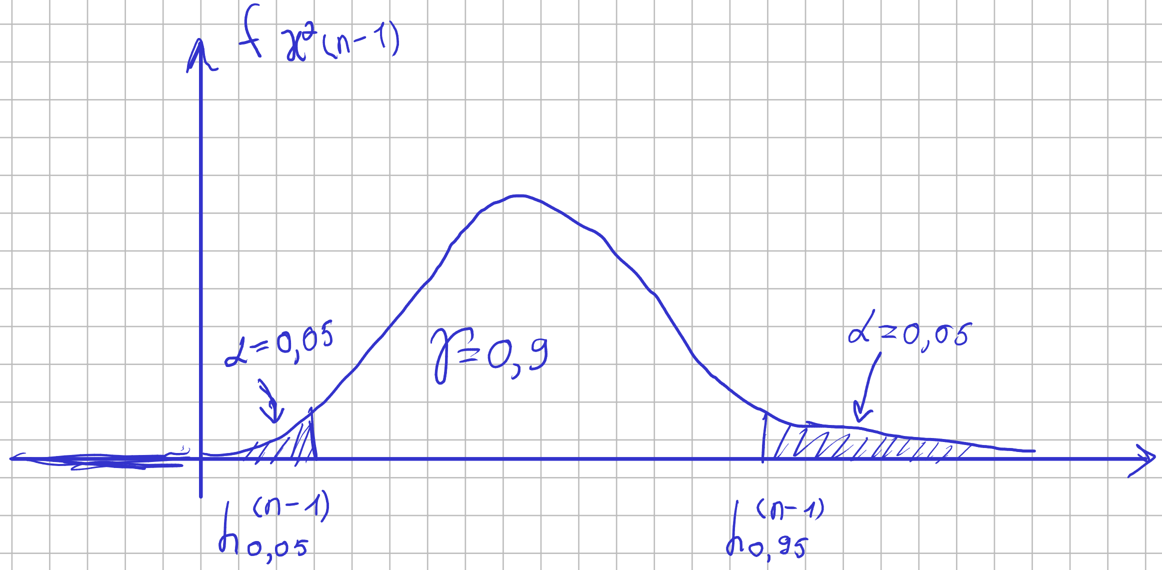
$\overline{m}(\vec{x}) = \overline{x} + 0,029 = 0,85 + 0,029 = 0,879$

0.9-доверительный интервал : $(\underline{m}(\vec{x}), \overline{m}(\vec{x})) = (0.821, 0.879)$

3) Доверительный интервал для σ

$$\left.\begin{array}{l} X \sim N(m, \sigma^2) \\ \sigma^2 - \text{неизв} \\ \text{Оценить } \sigma \end{array}\right\} \Rightarrow g(\vec{X}, \sigma^2) = \frac{(n-1)\,S^2(\vec{X})}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1-\gamma}{2} = 0{,}05$$



$h_{\alpha}^{(n-1)}$ – квантиль уровня α распределения $\chi^2(n-1)$

$$P\left\{ h_{0,05}^{(n-1)} < \frac{(n-1)\,S^2(\vec{X})}{\sigma^2} < h_{0,95}^{(n-1)} \right\} = 0{,}9$$

$$P\left\{ \frac{1}{h_{0,05}^{(n-1)}} > \frac{\sigma^2}{(n-1)\,S^2(\vec{X})} > \frac{1}{h_{0,95}^{(n-1)}} \right\} = 0{,}9$$

$$P\left\{ \underbrace{\sqrt{\frac{(n-1)\,S^2(\vec{X})}{h_{0,95}^{(n-1)}}}}_{\underline{\sigma}(\vec{X})} < \sigma < \underbrace{\sqrt{\frac{(n-1)\,S^2(\vec{X})}{h_{0,05}^{(n-1)}}}}_{\overline{\sigma}(\vec{X})} \right\} = 0{,}9$$

Найдем доверительный интервал для σ:

1) $n-1 = 9$

2) $h_{0,95}^{(9)} = 16{,}919$

$h_{0,05}^{(9)} = 3{,}325$

3) $$S^2(\vec{x}) = \frac{1}{n-1} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x}_n)}_{\substack{22{,}5 \cdot 10^{-3} \\ \text{(по условию)}}} = \frac{1}{9} \cdot 22{,}5 \cdot 10^{-3} = 2{,}5 \cdot 10^{-3}$$

3) $\underline{\sigma}(\vec{x}) = \sqrt{\dfrac{9 \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-3}}{16{,}919}} \approx 0{,}036$

$\overline{\sigma}(\vec{x}) = \sqrt{\dfrac{9 \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-3}}{3{,}325}} \approx 0{,}082$

0.9-доверительный интервал: $(\underline{\sigma}(\vec{x}), \overline{\sigma}(\vec{x})) = (0.036, 0.082)$

<u>Ответ</u>: $m: (0.821, 0.879)$

$\sigma: (0.036, 0.082)$

Вариант 11

Задача 2. Сформулировать и доказать ...

Задача 3. Вероятность того, что случайно выбранный студент факультета сдаст сессию без "троек", равна 0,1. Оценить вероятность того, что среди $n = 100$ наудачу выбранных студентов этого факультета доля хорошистов будет заключена в интервале $(0,05; 0,2)$.

1) Формализуем задачу

Поскольку было выбрано $n = 100$ студентов, то доле, равной 0.05 от общего кол-ва студентов, будет соответствовать 5 человек, аналогично для доли 0.2 будет 20 человек

2) По теореме Муавра-Лапласа:

Пусть 1) проводится $n = 100 >> 1$ экспериментов по схеме Бернулли с вероятностью успеха $p = 0.1$ ($q = 1 - p = 0.9$)
2) k - общее число успехов среди n испытаний (кол-во хорошистов)

Тогда

$$P\{k_1 \le k \le k_2\} \approx \Phi_0(x_2) - \Phi_0(x_1), \text{ где}$$

$$x_i = \frac{k_i - np}{\sqrt{npq}}, \quad i = \overline{1,2}$$

3) Имеем:

$$P\{5 \le k \le 20\} \approx \Phi_0\left(\frac{20 - 100 \cdot 0,1}{\sqrt{100 \cdot 0,1 \cdot 0,9}}\right) - \Phi_0\left(\frac{5 - 100 \cdot 0,1}{\sqrt{100 \cdot 0,1 \cdot 0,9}}\right) =$$

$$= \Phi_0\left(\frac{10}{3}\right) - \Phi_0\left(\frac{-5}{3}\right) = \Phi_0(3,33) + \Phi_0(1,66) \approx$$

$$\approx 0,4995 + 0,4515 = 0,951$$

Ответ: 0,951

Вариант 7

Задача 3. *Случайная величина являются средним арифметическим независимых одинаково распределенных случайных величин, дисперсия каждой из которых равна* 5. *Сколько нужно взять таких величин, чтобы случайная величина с вероятностью, не меньшей* $0,9973$, *отклонялась от своего математического ожидания не более чем на* $0,01$?

Пусть X - случайная величина, принимающая значения, равные среднему арифметическому независимых одинаково распределенных случайных величин Yi, $i = \overline{1, n}$

Тогда MX =m, DX = σ^2

Поскольку X является линейной комбинацией независимых одинаково распределнных случайных величин Yi, i = 1,n, то X имеет такое же распределение, следовательно:
MYi = m, DYi = $\sigma^2 = 5$

Имеем:

$$P\{|X - m| \leq 0{,}01\} = P\left\{\frac{|X-m|}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{0{,}01}{\sigma/\sqrt{n}}\right\} =$$

$$\left.\begin{cases} Y_1, Y_2, \ldots - \text{последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин} \\ \exists\, MY_i = m,\ \exists\, DY_i - \sigma^2 \end{cases}\right\} \Rightarrow \text{для последов } Y_1, Y_2, \ldots \text{ выполняется ЦПТ}$$

$$= P\left\{\underline{|Z_n|} \leq \frac{0{,}01}{\sigma/\sqrt{n}}\right\} = \left\{\begin{array}{l}\text{т. к. для Y1, Y2, ... выполняется ЦПТ} \\ \Rightarrow Z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} T \sim N(0,1)\end{array}\right\} \approx$$

$$\approx \left\{\begin{array}{l}\text{т.к. } n >> 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow Z_n \sim N(0,1)\end{array}\right\} = 2\Phi_0\left(\frac{0{,}01}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \geq 0{,}9973$$

$$2\Phi_0\left(\frac{0{,}01\sqrt{n}}{\sqrt{5}}\right) \geq 0{,}9973$$

$$\Phi_0\left(\frac{0{,}01}{\sqrt{5}}\sqrt{n}\right) \geq 0{,}49865$$

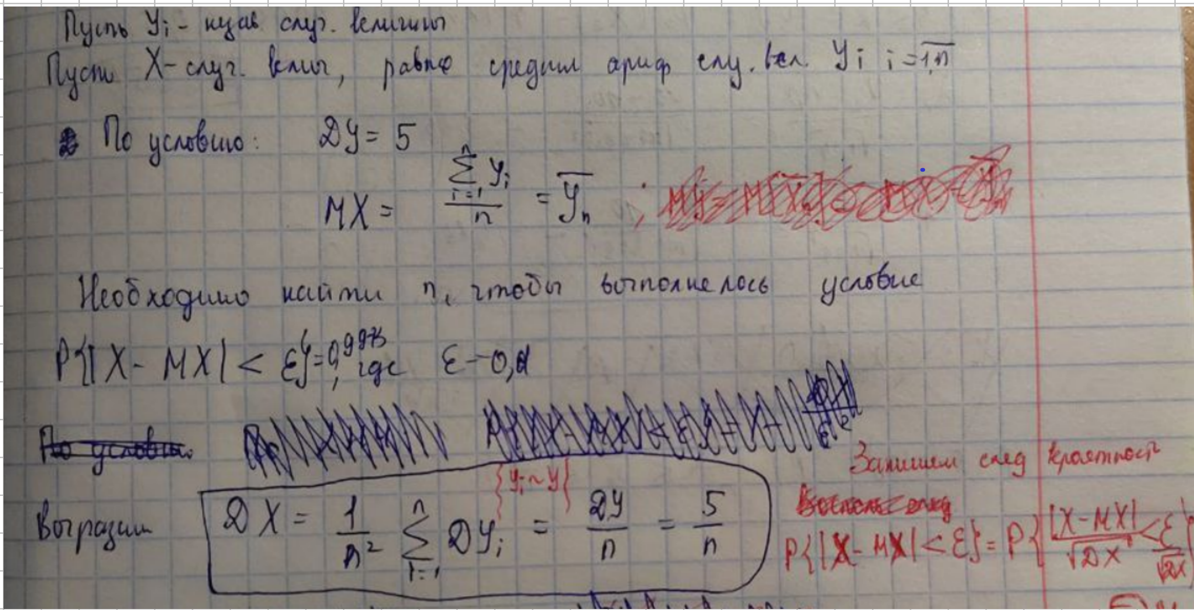
$$\frac{0{,}01\sqrt{n}}{\sqrt{5}} \geq 3$$

$$\sqrt{n} \geq 300\sqrt{5}$$

$$n \geq 90.000 \cdot 5 = 450.000$$

Ответ: $n \geq 450{,}000$

Формализация (вариант Иры):


Пусть Y_i - НУДВ случ. величины

Пусть X - случ. велич., равная средним арифм. случ. вел. Y_i $i=\overline{1,n}$

По условию: $DY = 5$

$$MX = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n} = \overline{Y_n}$$

Необходимо найти n, чтобы выполнялось условие

$P\{|X - MX| < \varepsilon\} = 0{,}9973$, где $\varepsilon = 0{,}01$

~~По условию~~

Выразим $\boxed{DX = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} DY_i = \frac{DY}{n} = \frac{5}{n}}$ $\{Y_i \sim Y\}$

Запишем след. кратность

~~Воспольз. след.~~

$$P\{|X - MX| < \varepsilon\} = P\left\{\frac{|X-MX|}{\sqrt{DX}} < \frac{\varepsilon}{\sqrt{DX}}\right\}$$

Вариант 15

Задача 3. Для определения кучности стрельбы из некоторого оружия было проведено $n = 50$ выстрелов по плоской мишени. Построить γ-доверительный интервал для среднеквадратичного отклонения расстояния от места попадания пули до центра мишени, если $\bar{x} = 4$ см. Принять $\gamma = 0,9$, распределение контролируемого признака считать экспоненциальным.

1) Формализация задачи

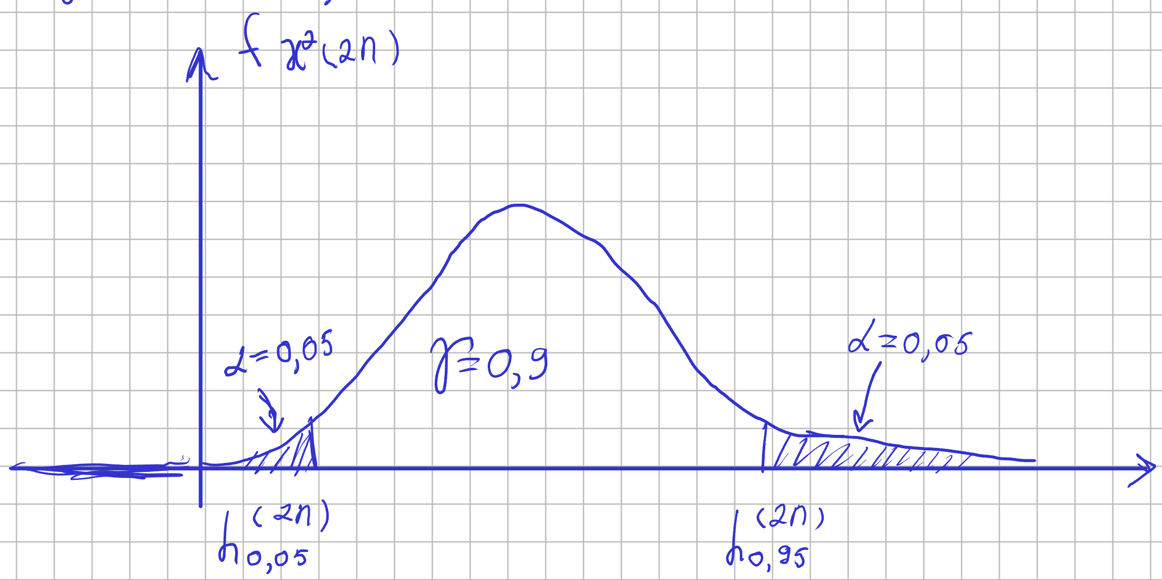
Пусть X - случайная величина, принимающая значения равные, расстоянию от места попадания пули до центра мишени

Тогда $X \sim Exp(\lambda)$

2) $X \sim Exp(\lambda)$
λ – неизв
Оценить: λ

$\Rightarrow g(\vec{X}, \lambda) = 2\lambda n \bar{X} \sim \chi^2(2n)$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1-\gamma}{2} = 0,05$$



$h_\alpha^{(2n)}$ – квантиль уровня α распределения $\chi^2(2n)$

$$P\left\{ h_{0,05}^{(2n)} \le 2\lambda n \bar{X} \le h_{0,95}^{(2n)} \right\} = 0,9$$

$$P\left\{ \underbrace{\frac{h_{0,05}^{(2n)}}{2n\bar{X}}}_{\underline{\lambda}(\vec{x})} \le \lambda \le \underbrace{\frac{h_{0,95}^{(2n)}}{2n\bar{X}}}_{\overline{\lambda}(\vec{X})} \right\} = 0,9$$

Найдем доверительный интервал для λ:

1) $2n = 2 \cdot 50 = 100$

2) $h_{0,05}^{(2n)} = 77,93$

$h_{0,95}^{(2n)} = 124,34$

3) $\overline{\lambda}(\vec{x}) = \dfrac{124,34}{100 \cdot 4} \approx 0,311$

$\underline{\lambda}(\vec{x}) = \dfrac{77,93}{100 \cdot 4} \approx 0,195$

0.9-доверительный интервал для λ : $(\underline{\lambda}(\vec{x}), \overline{\lambda}(\vec{x})) = (0.195, 0.311)$

4) Для σ:

Поскольку $DX = \dfrac{1}{\lambda^2} \Rightarrow \sigma = \dfrac{1}{\lambda} \Rightarrow$

$\Rightarrow (\underline{\sigma}(\vec{x}), \overline{\sigma}(\vec{x})) = \left(\dfrac{1}{\overline{\lambda}(\vec{x})}, \dfrac{1}{\underline{\lambda}(\vec{x})}\right) = \left(\dfrac{1}{0,311}, \dfrac{1}{0,195}\right) = (3.215, 5.128)$

<u>Ответ</u>: $(3.215, 5.128)$

Вариант 17

Задача 3. Для контроля работы вакуумной электропечи используют вакуумметр, систематическая ошибка которого равна нулю, а среднеквадратичное отклонение составляет $\sigma = 0,5 \cdot 10^{-3}$ Па. Считая, что ошибки измерителя распределены по нормальному закону, найти точность измерения величины вакуума, полученного на основании $n = 500$ замеров, гарантированную с вероятностью (надежностью) $p = 0,95$.

1) Формализация задачи

Пусть Y - случайная величина, принимающая значения, равные величине ошибки измерения

Тогда $MY = m_Y = 0$, $DY = \sigma^2 = (0,5 \cdot 10^{-3})^2$

Пусть a - величина вакуума

Пусть X = $Y + a$ - случайная величина, принимающая значения, равные результатам измерений

Тогда $MX = M[Y+a] = MY + a = 0 + a = a = m_x$

$DX = D[Y+a] = DY = (0,5 \cdot 10^{-3})^2 = \sigma_x^2$

Пусть Xi - случайная величина, принимающая значения, равные результату при i-ом измерении

Тогда $X_i \sim X$, $i = \overline{1,n} \Rightarrow$

$\Rightarrow MX_i = m_x$, $DX_i = \sigma_x^2$, $i = \overline{1,n}$

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Имеем:

$$P\{|\overline{X}_n - m_x| \le \varepsilon\} = P\left\{\frac{|\overline{X}_n - m_x|}{\sigma_x/\sqrt{n}} \le \frac{\varepsilon}{\sigma_x/\sqrt{n}}\right\} =$$

$X_1, X_2, \ldots$ — последов независ одинаково распред случ велич
$\exists MX = m_x$, $\exists DX = \sigma_x^2$
$\Rightarrow$ для последов $X_1, X_2, \ldots$ выполн ЦПТ

$\textcircled{=}$ $P\left\{|Z_n| < \dfrac{\varepsilon}{\sigma_x/\sqrt{n}}\right\} = \left\{\begin{array}{l}\text{Т.к. для } X_1, X_2, \ldots \text{ выполн ЦПТ} \\ \Rightarrow Z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} T \sim N(0,1)\end{array}\right\} \approx$

$\approx \left\{\begin{array}{l}\text{Т.к. } n = 500 \gg 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow Z_n \sim N(0,1)\end{array}\right\} = 2\Phi_0\left(\dfrac{\varepsilon}{\sigma_x/\sqrt{n}}\right) = 0,95$

$$2\Phi_0\left(\frac{\varepsilon\cdot\sqrt{500}}{0,5\cdot 10^{-3}}\right) = 0,95$$

$$\Phi_0\left(\frac{\varepsilon\cdot 10\sqrt{5}}{0,5\cdot 10^{-3}}\right) = 0,475$$

$$\frac{10\sqrt{5}\cdot\varepsilon}{0,5\cdot 10^{-3}} = 1,96$$

$$\varepsilon = \frac{1,96\cdot 0,5\cdot 10^{-3}}{10\sqrt{5}} \approx 4,38\cdot 10^{-5}$$

<u>Ответ:</u> $\varepsilon = 4,38\cdot 10^{-5}$

Вариант 25

Задача 3.

Для исследования теоретического значения высоты подъема воздушного фонарика было закуплено $n = 100$ фонариков. Считая распределение высоты подъема фонарика нормальной случайно величиной, определить с какой вероятностью средняя высота подъема будет больше своего теоретического значения на величину более $0,5\sigma$, если σ – среднеквадратичное отклонение высоты подъема?

1) Формализация задачи

Пусть X - случайная величина, принимающая значения, равные высоте подъема фонарика

Тогда MX = m, DX = σ^2

Пусть Xi - случайная величина, принимающая значения, равные высоте подъема i-го фонарика

Тогда $X_i \sim X$, $i=\overline{1,n}$ =>

=> $MX_i = m$, $DX_i = \sigma^2$, $i=\overline{1,n}$

$\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ – наблюденное средняя высота подъёма

2) Требуется оценить:

$$P\{|\overline{X_n} - m| > 0,5\sigma\} = P\left\{\frac{|\overline{X_n} - m|}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{0,5\sigma}{\sigma/\sqrt{n}}\right\} =$$

$\left\{\begin{array}{l} X_1, X_2, \ldots \text{ – последов независ одинаково распред случ величин} \\ \exists MX_i = m,\ \exists DX_i = \sigma^2,\ i=\overline{1,n} \end{array}\right\}$ => для последов $X_1, X_2, \ldots$ выполн ЦПТ

(*)

$$= P\{|Y_n| > 0,5\sqrt{n}\} = 1 - P\{|Y_n| \leq 0,5\sqrt{n}\} =$$

$\left\{\begin{array}{l} \text{т.к. для } X_1, X_2, \text{ выполн ЦПТ} => \\ => Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} Z \sim N(0,1) \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} \text{т.к. } n = 100 >> 1 => \\ => Y_n \sim N(0,1) \end{array}\right\} =$

$\approx 1-2\Phi_0(0{,}5\sqrt{n}) = 1-2\Phi_0(5) \approx 1-1 \approx 0$

Ответ: 0

(*), т.к.: $P\{|Y_n| > 0{,}5\sqrt{n}\} = P\{-\infty < Y_n < -0{,}5\sqrt{n}\} +$

$+ P\{0{,}5\sqrt{n} < Y_n < +\infty\}$

Используем опр обратной вер:

$P\{|Y_n| > 0{,}5\sqrt{n}\} = 1 - P\{|Y_n| \leq 0{,}5\sqrt{n}\} = 1 - P\{-0{,}5\sqrt{n} \leq Y_n \leq 0{,}5\sqrt{n}\}$

Логично!

Вариант 24

3. Вероятность p того, что при одном выстреле боец попадет в "десятку", равна 0.7. Оценить вероятность того, что в серии из $n = 30$ выстрелов частота попадания этим бойцом в "десятку" отклонится от p не более чем на $\varepsilon = 0.15$.

1) Пусть X - случайная величина, принимающая значение, равное кол-ву попаданий в "десятку"

Пусть $\frac{X}{n}$ - случайная величина, принимающая значение, равное частоте попадания в "десятку" при n выстрелах

Тогда

$$X \sim B(n, p), \quad n=30, \ p=0,7 \ (q=1-p=0,3)$$

$$MX = np = 30 \cdot 0,7 = 21$$

$$DX = npq = 30 \cdot 0,7 \cdot 0,3 = 6,3$$

$\varepsilon = 0,15$

Кирилл лох

2) По теореме Муавра-Лапласа:

1) Проводится n = 30 >> 1 экспериментов по схеме Бернулли с вероятностью успеха p = 0.7
2) k - общее число успехов среди испытаний (кол-во попаданий в "10")

Тогда:

$$P\{k_1 \le k \le k_2\} \approx \Phi_0(x_2) - \Phi_0(x_1), \text{ где}$$

$$x_i = \frac{k_i - np}{\sqrt{npq}}, \quad i = \overline{1,2}$$

3) Имеем:

$$P\left\{\left|\frac{X}{n} - p\right| \le \varepsilon\right\} = P\{|X - np| \le \varepsilon n\} =$$

$$= P\{-\varepsilon n \le X - np \le \varepsilon n\} = P\{-\varepsilon n + np \le X \le \varepsilon n + np\} \approx$$

$$\approx \Phi_0\left(\frac{\varepsilon n + \cancel{np} - \cancel{np}}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi_0\left(\frac{-\varepsilon n + \cancel{np} - \cancel{np}}{\sqrt{npq}}\right) = 2\Phi_0\left(\frac{\varepsilon n}{\sqrt{npq}}\right) =$$

$$= 2\Phi_0\left(\frac{4,5}{2,51}\right) = 2\Phi_0(1,79) = 2 \cdot 0,4633 = 0,9266$$

Ответ: 0,9266

Год 2019-2020

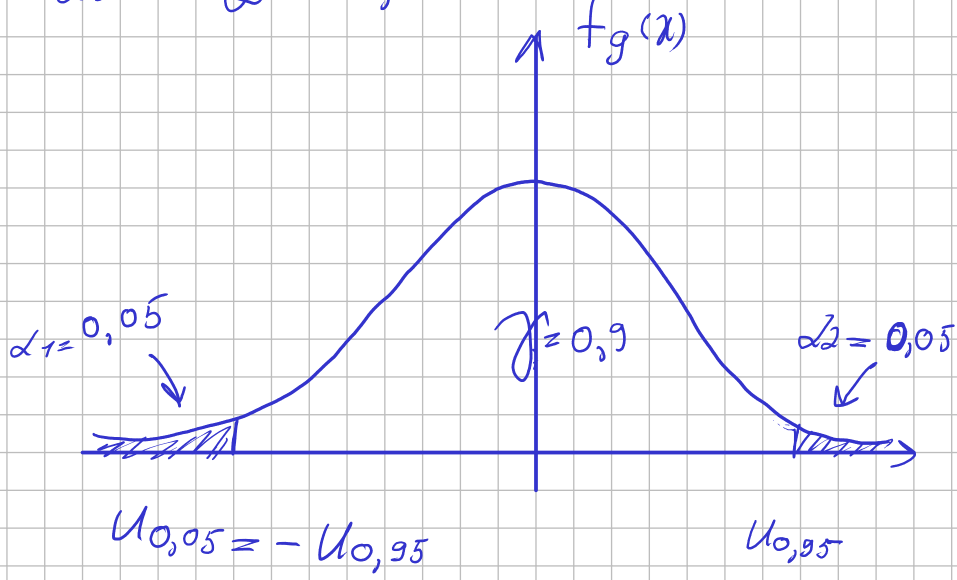
Билет 1

2. Пусть $X \sim N(m, \sigma^2)$, где значение m неизвестно, а $\sigma^2 = 4$. Построить для m доверительный интервал уровня $\gamma = 0.9$, если после $n = 16$ испытаний получены значения $\overline{x} = 3.52$, $S^2(\overrightarrow{x}) = 1.21$.

1) $X \sim N(m, \sigma^2)$
m – неизв
σ^2 – известно
Оценить m

$$\left.\begin{array}{l} X \sim N(m,\sigma^2) \\ m\text{ – неизв} \\ \sigma^2\text{ – известно} \\ \text{Оценить } m \end{array}\right\} \Rightarrow g(\overrightarrow{X}, m) = \frac{m - \overline{X}}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,1)$$

2) $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1-\gamma}{2} = 0{,}05$



$$P\left\{-u_{0,95} < \frac{m - \overline{X}}{\sigma}\sqrt{n} < u_{0,95}\right\} = 0{,}9$$

$$P\left\{\underbrace{\overline{X} - \frac{\sigma \cdot u_{0,95}}{\sqrt{n}}}_{\underline{m}(\overrightarrow{X})} < m < \underbrace{\overline{X} + \frac{\sigma \cdot u_{0,95}}{\sqrt{n}}}_{\overline{m}(\overrightarrow{X})}\right\} = 0{,}9$$

3) Найдём довер интерв:

1) $u_{0,95} = 1{,}645$

2) $\sqrt{n} = \sqrt{16} = 4$

3) $\frac{\sigma \cdot u_{0,95}}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{4} \cdot 1{,}645}{4} = \frac{1{,}645}{2} = 0{,}8225$

4) $$\left.\begin{array}{l} \underline{m}(\overrightarrow{x}) = 3{,}52 - 0{,}8225 = 2{,}6975 \\ \overline{m}(\overrightarrow{x}) = 3{,}52 + 0{,}8225 = 4{,}3425 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{(2{,}6975,\ 4{,}3425)}$$

1. Непрерывная случайная величина X имеет плотность распределения

$$f_X(x) = \frac{3\lambda^3}{x^4}, \qquad x \geqslant \lambda,$$

где значение $\lambda > 0$ неизвестно. Для оценки параметра λ используется статистика

$$\hat{\lambda}\left(\vec{X}\right) = \frac{3n-1}{3n} \min_{k=\overline{1,n}} \{X_k\},$$

где $\vec{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ — случайная выборка из генеральной совокупности X. Является ли оценка $\hat{\lambda}\left(\vec{X}\right)$ а) несмещенной; б) эффективной по Рао-Крамеру?

а) Проверим несмещенность

$$M[\hat{\lambda}] \overset{?}{=} \lambda$$

$$M[\hat{\lambda}] = M\left[\frac{3n-1}{3n} \min_{k=\overline{1,n}}\{X_k\}\right] = \left\{ Y = \min_{k=\overline{1,n}}\{X_k\} \right\} =$$

$$= M\left[\frac{3n-1}{3n} Y_n\right] =$$

а) $$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{\lambda}^{x} \frac{3\lambda^3}{t^4} dt = 3\lambda^3 \int_{\lambda}^{x} t^{-4} dt = 3\lambda^3 \cdot \frac{t^{-3}}{-3}\Big|_{\lambda}^{x} =$$

$$= -\lambda^3 \cdot x^{-3} + \lambda^3 \cdot \lambda^{-3} = 1 - \frac{\lambda^3}{x^3}$$

б) $$F_Y(y) = P\{Y<y\} = 1 - P\{Y>y\} = 1 - P\{(X_1>y)\cdot\ldots\cdot(X_n>y)\} =$$

$$= 1 - \prod_{i=1}^{n} P\{X_i>y\} = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - P\{X_i<y\}) = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - F_{X_i}(y)) =$$

$$= 1 - \prod_{i=1}^{n}\left(1 - \left(1 - \frac{\lambda^3}{y^3}\right)\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\lambda^3}{y^3}\right) = 1 - \frac{\lambda^{3n}}{y^{3n}}$$

в) $$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \frac{3n \cdot \lambda^{3n}}{y^{3n+1}}$$

2) $M[Y] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y \cdot f_Y(y)\,dy = \int\limits_{\lambda}^{+\infty} y \cdot \frac{3n \cdot \lambda^{3n}}{y^{3n+1}}\,dy = 3n\lambda^{3n} \int\limits_{\lambda}^{+\infty} y^{-3n}\,dy =$

$= 3n \cdot \lambda^{3n} \cdot \frac{y^{-3n+1}}{-3n+1}\Big|_{\lambda}^{+\infty} = \cancel{\frac{3n \cdot \lambda^{3n}}{-3n+1}} \cdot 0 - \frac{3n \cdot \lambda^{3n}}{-3n+1} \cdot \lambda^{-3n+1} =$

$= \frac{3n}{3n-1} \cdot \lambda$

$= \frac{3n-1}{3n} M[Y] = \frac{\cancel{3n-1}}{\cancel{3n}} \cdot \frac{\cancel{3n}}{\cancel{3n-1}} \cdot \lambda = \lambda = \lambda \Rightarrow$ несмещ

б) Эффективность по Рао

1) $e(\hat{\lambda}) = \frac{1}{I(\lambda) \cdot D[\hat{\lambda}]}$

Если $e(\hat{\lambda}) = 1 \Rightarrow \hat{\lambda}$ – эффективна по Рао

2) $D[\hat{\lambda}] = D\left[\frac{3n-1}{3n} \min\limits_{k=\overline{1,n}} \{X_k\}\right] = \frac{9n^2-6n+1}{9n^2} D\left[\min\limits_{k=\overline{1,n}} \{X_k\}\right] =$

$= \{\text{согласно а)}\} = \frac{9n^2-6n+1}{9n^2} D[Y] =$

$D[Y] = M[Y^2] - (MY)^2 = $

$M[Y^2] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^2 \cdot f_Y(y)\,dy = \int\limits_{\lambda}^{+\infty} y^2 \cdot \frac{3n \cdot \lambda^{3n}}{y^{3n+1}}\,dy = 3n \cdot \lambda^{3n} \int\limits_{\lambda}^{+\infty} y^{-3n+1}\,dy =$

$= 3n \cdot \lambda^{3n} \cdot \frac{y^{-3n+2}}{-3n+2}\Big|_{\lambda}^{+\infty} = \frac{3n \cdot \lambda^{3n}}{-3n+2} \cdot 0 + \frac{3n \cdot \lambda^{3n}}{3n-2} \lambda^{-3n+2} =$

$= \frac{3n}{3n-2} \lambda^2$

$= \frac{3n}{3n-2} \lambda^2 - \left(\frac{3n\lambda}{3n-1}\right)^2 = \frac{3n\lambda^2}{3n-2} - \frac{9n^2\lambda^2}{(3n-1)^2}$

$$= \frac{9n^2-6n+1}{9n^2}\cdot\left(\frac{3n\lambda^2}{3n-2}-\frac{9n^2\lambda^2}{(3n-1)^2}\right)=\frac{(3n-1)^2}{3\cancel{9n^2}}\cdot\frac{\cancel{3}n\lambda^2}{3n-2}-$$

$$-\frac{\cancel{(3n-1)^2}}{\cancel{9n^2}}\cdot\frac{\cancel{9n^2}\lambda^2}{\cancel{(3n-1)^2}}=\frac{(3n-1)^2\cdot\lambda^2}{3n(3n-2)}-\lambda^2$$

3) $I(\lambda)=?$

$$I(\lambda)=M\left[\left(\frac{\partial\ln L}{\partial\lambda}\right)^2\right]$$

а) Составим ф-ию правдоподобия:

$$L(\vec{X},\lambda)=p(X_1,\lambda)\cdot\ldots\cdot p(X_n,\lambda)=$$

$$=\left\{\begin{array}{l} X - \text{непр случ велич} \Rightarrow \\ \Rightarrow p(X_i,\lambda)=f(X_i,\lambda)=\frac{3\lambda^3}{X_i^4}\end{array}\right\}=3^n\lambda^{3n}\cdot\prod_{i=1}^{n}X_i^4$$

б) Тогда:

$$\ln L(\vec{X},\lambda)=n\cdot\ln 3+3n\ln\lambda+\ln\prod_{i=1}^{n}X_i^4$$

в) Дифференц по неизв парам-ру:

$$\frac{\partial\ln L(\vec{X},\lambda)}{\partial\lambda}=3n\cdot\frac{1}{\lambda}$$

г) Возводим в квадрат:

$$\left(\frac{\partial\ln L(\vec{X},\lambda)}{\partial\lambda}\right)^2=\frac{9n^2}{\lambda^2}$$

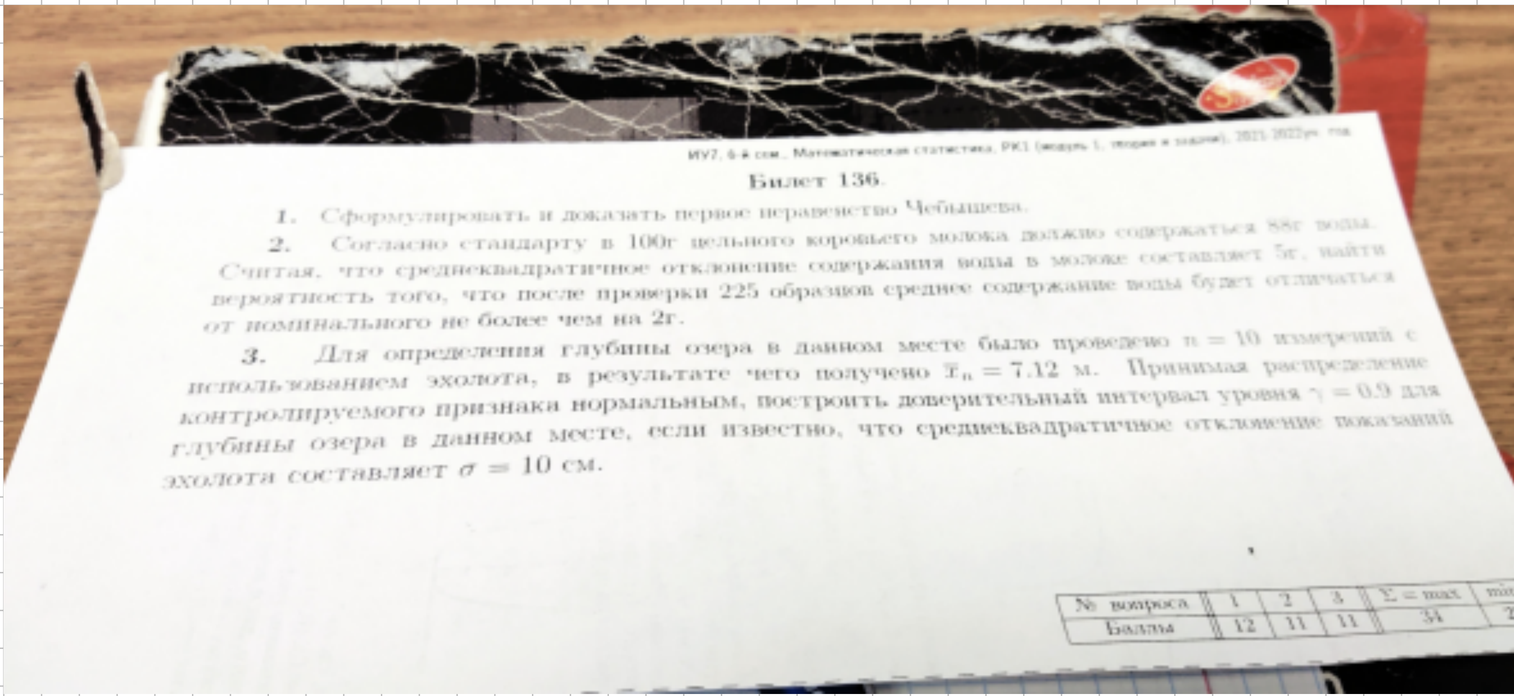
д) Т.о.

$$I(\lambda)=M\left[\left(\frac{\partial\ln L(\vec{X},\lambda)}{\partial\lambda}\right)^2\right]=M\left[\frac{9n^2}{\lambda^2}\right]=\frac{9n^2}{\lambda^2}$$

4) Получим:

$$e(\hat{\lambda}) = \frac{1}{I(\lambda)\cdot D(\hat{\lambda})} = \frac{1}{\frac{9n^2}{\lambda^2}\cdot\left(\frac{(3n-1)^2\cdot\lambda^2}{3n(3n-2)} - \lambda^2\right)} =$$

$$= \frac{3n-2}{3n} \neq 1 \Rightarrow \hat{\lambda}$$ – не эффектив по Рао


ИУ7, 6-й сем., Математическая статистика, РК1 (модуль 1, теория и задачи), 2021-2022уч. год

Билет 136.

1. Сформулировать и доказать первое неравенство Чебышева.

2. Согласно стандарту в 100г цельного коровьего молока должно содержаться 88г воды. Считая, что среднеквадратичное отклонение содержания воды в молоке составляет 5г, найти вероятность того, что после проверки 225 образцов среднее содержание воды будет отличаться от номинального не более чем на 2г.

3. Для определения глубины озера в данном месте было проведено $n = 10$ измерений с использованием эхолота, в результате чего получено $\overline{x}_n = 7.12$ м. Принимая распределение контролируемого признака нормальным, построить доверительный интервал уровня $\gamma = 0.9$ для глубины озера в данном месте, если известно, что среднеквадратичное отклонение показаний эхолота составляет $\sigma = 10$ см.

№ вопроса	1	2	3	$\Sigma = \max$	min
Баллы	12	11	11	34	2

№2

Формализация

Пусть X - случайная величина, принимающая значения, равные содержанию воды в коровьем молоке

Тогда $MX = m$

$\sigma = 5 \Rightarrow DX = 25$

Пусть Xi - случайная величина, принимающая значения, равные содержанию воды в коровьем молоке i-го образца

$X_i \sim X, \; i = \overline{1,n} \Rightarrow MX_i = m, \; DX_i = 25$

$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

2) Требуется оценить:

$$P\{|\overline{X}_n - m| < 2\} = P\left\{\frac{|\overline{X}_n - m|}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{2\sqrt{n}}{\sigma}\right\} =$$

$\begin{cases} X1, X2, \ldots \text{ - последовательность независ. одинаково распределенных случайных величин} \\ \exists M X_i = m, \exists D X_i = \sigma^2, i = \overline{1,n} \end{cases} \Rightarrow X_1, X_2, \ldots$ вып. ЦПТ [для послед.]

$$\textcircled{=} P\left\{|Y_n| \le \frac{2\sqrt{n}}{\sigma}\right\} = \left\{\begin{array}{l} \text{т.к. для } X_1, X_2, \ldots \text{ вып. ЦПТ} \Rightarrow \\ \Rightarrow Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} Z \sim N(0,1) \end{array}\right\} =$$

$$= \left\{\begin{array}{l} \text{т.к. } n = 225 \gg 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow Y_n \sim N(0,1) \end{array}\right\} = 2\Phi_0\left(\frac{2\sqrt{n}}{\sigma}\right) = \ldots$$

№3

1) Пусть a - истинное значение глубины озера

ε - случайная величина, принимающая значения, равные ошибке измерения эхолота

$\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$, где $\sigma = 0.1$

$X = a + \varepsilon$ — случайная величина, принимающая значения, равные показаниям эхолота

$X \sim N(m_x, \sigma_x^2)$, где

$m_x = M[a + \varepsilon] = a$

$\sigma_x^2 = D[a + \varepsilon] = \sigma^2$

2) $X \sim N(a, \sigma^2)$

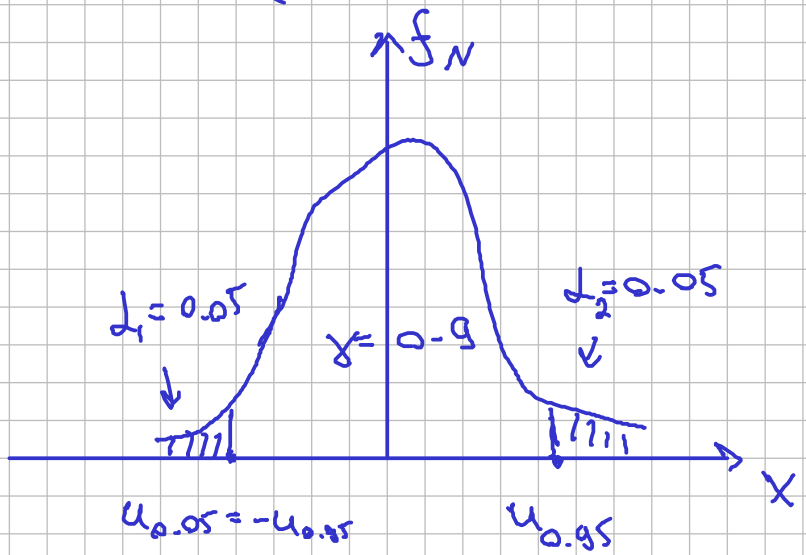
a - неиз.

σ^2 - изв.

Оценить: a

$$\Rightarrow g(\vec{X}, a) = \frac{a - \bar{X}}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,1)$$

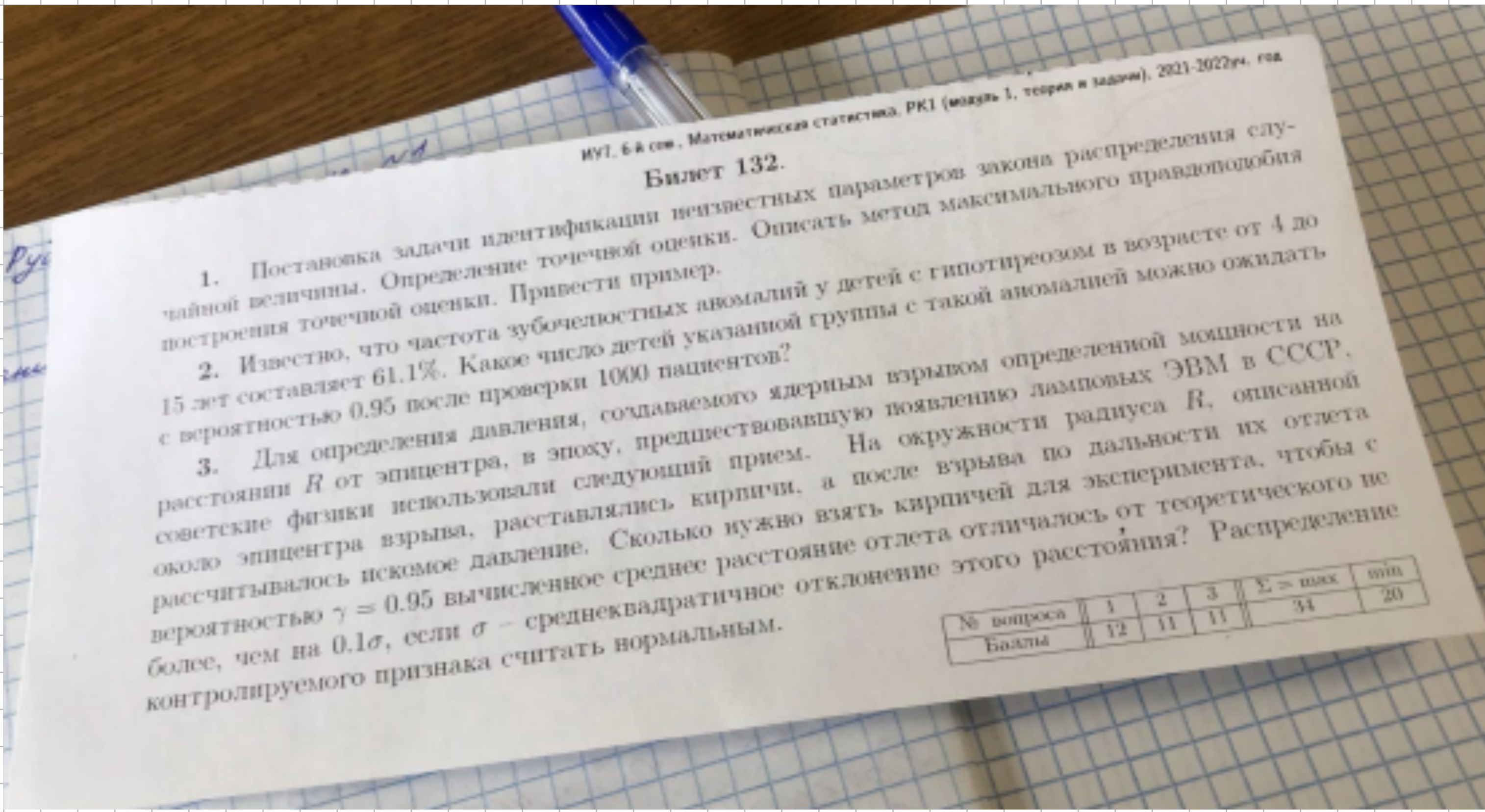
$$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1-\gamma}{2} = 0.05$$



$$P\left\{-u_{0.95} \le \frac{m - \bar{X}}{\sigma}\sqrt{n} \le u_{0.95}\right\} = 0.9$$

$$P\left\{\underbrace{\bar{X} - \frac{\sigma \cdot u_{0.95}}{\sqrt{n}}}_{\underline{m}(\vec{x})} \le m \le \underbrace{\bar{X} + \frac{\sigma \cdot u_{0.95}}{\sqrt{n}}}_{\overline{m}(\vec{x})}\right\} = 0.9$$

Далее вычисления ...



ИУ7, 6-й сем., Математическая статистика. РК1 (модуль 1, теория и задачи). 2021-2022уч. год

Билет 132.

1. Постановка задачи идентификации неизвестных параметров закона распределения случайной величины. Определение точечной оценки. Описать метод максимального правдоподобия построения точечной оценки. Привести пример.

2. Известно, что частота зубочелюстных аномалий у детей с гипотиреозом в возрасте от 4 до 15 лет составляет 61.1%. Какое число детей указанной группы с такой аномалией можно ожидать с вероятностью 0.95 после проверки 1000 пациентов?

3. Для определения давления, создаваемого ядерным взрывом определенной мощности на расстоянии R от эпицентра, в эпоху, предшествовавшую появлению ламповых ЭВМ в СССР, советские физики использовали следующий прием. На окружности радиуса R, описанной около эпицентра взрыва, расставлялись кирпичи, а после взрыва по дальности их отлета рассчитывалось искомое давление. Сколько нужно взять кирпичей для эксперимента, чтобы с вероятностью $\gamma = 0.95$ вычисленное среднее расстояние отлета отличалось от теоретического не более, чем на 0.1σ, если σ – среднеквадратичное отклонение этого расстояния? Распределение контролируемого признака считать нормальным.

№ вопроса	1	2	3	Σ = max	min
Баллы	12	11	11	34	20

№ 2

1) Формализация

Пусть X - случайная величина, принимающая значение, равное количеству детей с зубочелюстными аномалиями

Пусть $\frac{X}{n}$ - случайная величина, принимающая значение, равное частоте зубочелюстных аномалий у детей среди n пациентов

Тогда

$X \sim B(n, p)$, где $n = 1000$, $p = 0.611$ $(q = 1 - p = 0.389)$

$MX = np = \ldots$

$DX = npq = \ldots$

2) По теореме Муавра-Лапласа

1) проводится n = 1000 >> 1 экспериментов по схеме Бернулли с вероятностью успеха p = 0.7
2) k - общее число успехов среди n испытаний (кол-во детей с аном.)

Тогда

$$P\{k_1 \le k \le k_2\} \approx \Phi_0(x_2) - \Phi_0(x_1), \text{ где}$$

$$x_i = \frac{k_i - np}{\sqrt{npq}}, \; i = \overline{1,2}$$

3) Имеем

$$P\left\{\left|\frac{X}{n} - p\right| \le \varepsilon\right\} = P\{|X - np| \le \varepsilon n\} = P\{-\varepsilon n \le X - np \le \varepsilon n\} =$$

$$= P\{np - \varepsilon n \le X \le np + \varepsilon n\} \approx \Phi_0\left(\frac{\varepsilon n}{\sqrt{npq}}\right) + \Phi_0\left(\frac{\varepsilon n}{\sqrt{npq}}\right)$$

В нашем случае:

$$2\Phi_0\left(\frac{\varepsilon n}{\sqrt{npq}}\right) = 0.95$$

$$\Phi_0\left(\frac{\varepsilon n}{\sqrt{npq}}\right) = 0.475$$

$$\Phi_0(1.96) \approx 0.475 \Rightarrow \frac{\varepsilon n}{\sqrt{npq}} = 1.96$$

$$\varepsilon = \frac{1.96 \cdot \sqrt{pq}}{\sqrt{n}} \approx 0.03$$

Тогда

$$np - \varepsilon n \le X \le np + \varepsilon n \Rightarrow 611 - 30 \le X \le 611 + 30 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 581 \le X \le 641$$ Ответ: от 581 до 641

№ 3

1) Формализация

Пусть X - случайная величина, принимающая значения, равные расстоянию отлета кирпичей после взрыва

$X \sim N(m, \sigma^2)$, где m - неизв.
σ - изв.

Пусть Xi - случайная величина, принимающая значение, равное расстоянию отлета i-го кирпича после взрыва

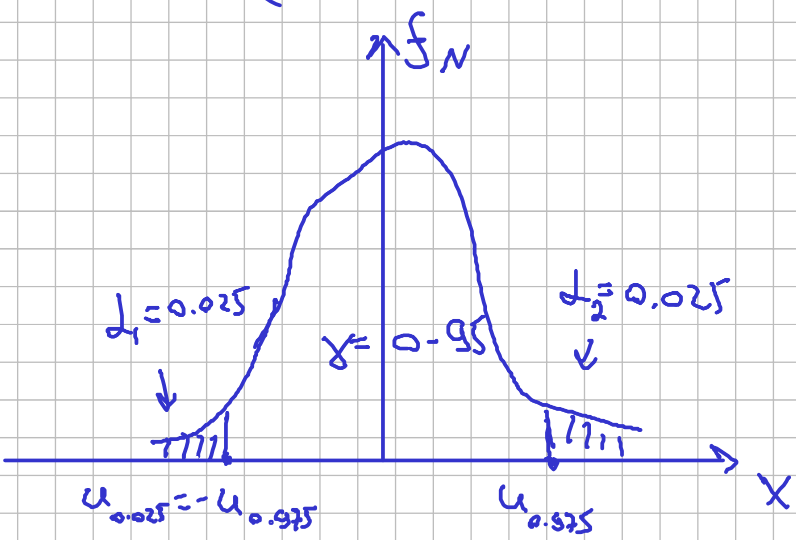
Тогда $X_i \sim X$, $i=\overline{1,n}$, $MX_i = m$, $DX_i = \sigma^2$

$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ - наблюденное среднее расстояние отлета

2) $X \sim N(m, \sigma^2)$
m - неизв.
σ^2 - изв.
Оценить: m

$$g(\vec{X}, m) = \frac{m - \bar{X}}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,1)$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1-\gamma}{2} = 0.025$$



$$P\left\{-u_{0.975} \leq \frac{m-\bar{X}}{\sigma}\sqrt{n} \leq u_{0.975}\right\}=0.95$$

$$P\left\{|m-\bar{X}| \leq u_{0.975}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\}=0.95$$

По условию

$$P\left\{|m-\bar{X}| \leq 0.1\sigma\right\} \geq 0.95$$

Следовательно

$$u_{0.975}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=0.1\sigma \Rightarrow \sqrt{n}=\frac{u_{0.975}}{0.1} \Rightarrow n=\left(\frac{u_{0.975}}{0.1}\right)^2$$

$$n=\left(\frac{1.96}{0.1}\right)^2=384.16$$

Ответ: $n=385$

ИУ7, 6-й сем., Математическая статистика, РК1 (модуль 1, теория и задачи), 2021-2022уч. год

Билет 129.

1. Сформулировать и доказать второе неравенство Чебышева.

2. ГОСТ 29322-2014 устанавливает, что сетевое напряжение в электических системах в странах-членах МЭК должно составлять 230В ± 10%. Считая, что закон распределения напряжения одинаков для всех источников и имеет среднеквадратичное отклонение 15 В, найти вероятность того, что после проверки величины напряжения в 100 независимых источниках на территории России его наблюденное среднее значение окажется в допустимых границах.

3. Непрерывная случайная величина X имеет функцию плотности $f(x) = Cx^{7\theta}$, $x \in [0, 1]$, где $C = 7\theta + 1$. С использованием метода моментов построить точечную оценку параметра θ.

№2

1) Формализация

Пусть X - случайная величина, принимающая значения, равные напряжению в электических системах

$$MX = m$$

$$DX = \sigma^2 = 225$$

Пусть Xi - случайная величина, принимающая значение, равное напряжение в i-ой электрической системе

Тогда $X_i \sim X$, $i = \overline{1,n} \Rightarrow MX_i = m$, $DX_i = \sigma^2$, $i = \overline{1,n}$

$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ - наблюденное среднее значение ; $\varepsilon = 23$

2) Требуется оценить

$$P\{|\overline{X}_n - m| \le \varepsilon\} = P\left\{\frac{|\overline{X}_n - m|}{\sigma/\sqrt{n}} \le \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right\} =$$

$\Big\{$ X1, X2, ... - последовательность независ. одинаково распределенных случайных величин

$\exists MX_i = m$, $\exists DX_i = \sigma^2$, $i = \overline{1,n}$ $\Big| \Rightarrow$ для послед. $X_1, X_2, \dots$ вып. ЦПТ $\Big\}$

$\Rightarrow P\left\{|Y_n| \le \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right\} = \left\{\begin{array}{l} \text{т.к. для } X_1, X_2, \dots \text{ вып. ЦПТ} \Rightarrow \\ \Rightarrow Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} Z \sim N(0,1) \end{array}\right\} =$

$= \left\{\begin{array}{l} \text{т.к. } n = 100 \gg 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow Y_n \sim N(0,1) \end{array}\right\} = 2\Phi_0\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 2\Phi_0\left(\frac{23\cdot 10}{15}\right) \approx$

≈ 1

№ 3

$f(x) = Cx^{7\theta},\ x \in [0,1],$ где $C = 7\theta + 1$

$r = 1 \Rightarrow 1$ уравнение

$m_1(\theta) = \hat{m}_1(\vec{X})$

$\hat{m}_1(\vec{X}) = \bar{X}$

$m_1(\theta) = MX = \int\limits_0^1 x C x^{7\theta}\, dx = \int\limits_0^1 C x^{7\theta+1}\, dx = C\left(\frac{x^{7\theta+2}}{7\theta+2}\right)\Big|_0^1 =$

$= C \cdot \frac{1}{7\theta+2} = \frac{7\theta+1}{7\theta+2}$

$\frac{7\theta+1}{7\theta+2} = \bar{X}$

$7\theta + 1 = 7\theta\bar{X} + 2\bar{X}$

$\theta(7 - 7\bar{X}) = 2\bar{X} - 1 \Rightarrow \theta = \frac{2\bar{X}-1}{7-7\bar{X}}$

$\hat{\theta} = \frac{2\bar{X}-1}{7-7\bar{X}}$

ИУ7, 6-й сем., Математическая статистика, РК1 (модуль 1, теория и задачи), 2021-2022 уч. год

Билет 133.

1. Для последовательности случайных величин сформулировать определения сходимости по вероятности и слабой сходимости. Сформулировать закон больших чисел.

2. Вероятность того, что случайно выбранный студент факультета сдаст сессию без "троек", равна 0.1. Оценить вероятность того, что среди $n = 100$ наудачу выбранных студентов этого факультета доля хорошистов будет заключена в интервале $(0.05, 0.2)$.

3. Непрерывная случайная величина X имеет функцию плотности $f(x) = Cx^{3\theta}$, $x \in [0, 3]$, где $C = (3\theta + 1)/(3^{3\theta+1})$. С использованием метода моментов построить точечную оценку параметра θ.

№ вопроса	1	2	3	Σ = max
	12	11	11	34

№ 3

$$f(x) = Cx^{3\theta},\ x \in [0,3], \text{ где } C = \frac{3\theta+1}{3^{3\theta+1}}$$

$r=1 \Rightarrow$ одно уравнение

$$m_1(\theta) = \hat{m}_1(\vec{X})$$

$$\hat{m}_1(\vec{X}) = \bar{X}$$

$$m_1(\theta) = MX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \int_0^3 x \cdot C \cdot x^{3\theta}\,dx = \int_0^3 C x^{3\theta+1}\,dx =$$

$$= C\left(\frac{x^{3\theta+2}}{3\theta+2}\right)\Bigg|_0^3 = C \cdot \frac{3^{3\theta+2}}{3\theta+2} = \frac{(3\theta+1)\,3^{3\theta+2}}{3^{3\theta+1}\cdot(3\theta+2)} =$$

$$= \frac{9\theta+3}{3\theta+2}$$

$$\frac{9\theta+3}{3\theta+2} = \bar{X} \Rightarrow \theta = \frac{2\bar{X}-3}{9-3\bar{X}}$$

$$\hat{\theta} = \frac{2\bar{X}-3}{9-3\bar{X}}$$

Билет 139.

1. Сформулировать определение случайной выборки и выборки, вариационного ряда. Записать выражения для функций распределения случайной выборки и крайних членов вариационного ряда.

2. Пусть X – случайная величина, для которой $MX = 3$, $DX = 4$. С использованием второго неравенства Чебышева оценить вероятности событий $\{X \geqslant 7\}$ и $\{0 < X < 9\}$.

3. Непрерывная случайная величина X имеет функцию плотности $f(x) = \theta^{2-x}\ln\theta$, $x \geqslant 2$. С использованием метода моментов построить точечную оценку параметра θ.

№2

$$P\{|X-MX| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{DX}{\varepsilon^2}$$

а) $P\{X \geqslant 7\} = P\{X - MX \geqslant 7 - MX\} \leqslant P\{|X-MX| \geqslant 7-MX\} \leqslant$

$\leqslant \frac{DX}{\varepsilon^2}$, где $\varepsilon = 7 - MX \Rightarrow$

$$\Rightarrow P\{X \geqslant 7\} \leqslant \frac{DX}{(7-MX)^2}$$

$$P\{X \geqslant 7\} \leqslant \frac{4}{16} = \frac{1}{4} \Rightarrow P\{X \geqslant 7\} \leqslant 0.25$$

б) $P\{0 < X < 9\} = P\{0 - MX < X - MX < 9 - MX\} =$

$= P\{-3 < X - MX < 6\} \geqslant P\{|X - MX| < 3\} \geqslant 1 - \frac{DX}{\varepsilon^2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow P\{0 < X < 9\} \geqslant 1 - \frac{DX}{\varepsilon^2}$$

$$P\{0 < X < 9\} \geqslant 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

№3

$$f(x) = \theta^{2-x} \ln\theta, \quad x \geqslant 2$$

$v = 1 \Rightarrow$ одно уравнение

$$m_1(\theta) = \hat{m}_1(\vec{X})$$

$$\hat{m}_1(\vec{X}) = \bar{X}$$

$$m_1(\theta) = MX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \int_2^{+\infty} x\,\theta^{2-x} \ln\theta\,dx = -\int_2^{+\infty} x\,\theta^{2-x} \ln\theta\,d(2-x) =$$

$$= -\int_2^{+\infty} x \ln\theta\, d\left(\frac{\theta^{2-x}}{\ln\theta}\right) = -\int_2^{+\infty} x\, d(\theta^{2-x}) = \left\{ \begin{matrix} \text{по} \\ \text{частям} \end{matrix} \right\} =$$

$$= -x\theta^{2-x}\Big|_2^{+\infty} + \int_2^{+\infty} \theta^{2-x}\,dx = 2 - \frac{\theta^{2-x}}{\ln\theta}\Big|_2^{+\infty} = 2 + \frac{1}{\ln\theta}$$

Тогда

$$2 + \frac{1}{\ln\theta} = \bar{X}$$

$$2\ln\theta + 1 = \bar{X}\ln\theta$$

$$\ln\theta(2 - \bar{X}) = -1$$

$$\ln\theta = -\frac{1}{2-\bar{X}}$$

$$\theta = e^{-\frac{1}{2-\bar{X}}}$$

$$\hat{\theta} = e^{-\frac{1}{2-\bar{X}}}$$

Билет 134.

1. Постановка задачи идентификации неизвестных параметров закона распределения случайной величины. Определение точечной оценки. Определение эффективной оценки. Показать, что выборочное среднее является эффективной оценкой математического ожидания в классе линейных оценок.

2. Проверить, удовлетворяет ли последовательность X_n, $n \in \mathbb{N}$, независимых случайных величин закону больших чисел в форме Чебышева (возможно, с ослабленным условием), если функция плотности распределения вероятностей случайной величины X_n этой последовательности имеет вид $f_{X_n}(x) = \sqrt{n}e^{-\sqrt{n}x}$, $x > 0$.

3. Для определения напряжения в электросети поселка N было проведено $n = 50$ измерений, в результате которых получено $\overline{x}_n = 192$ В, $S^2(\vec{x}_n) = 400$ В^2. Считая распределение контролируемого признака нормальным, построить доверительный интервал уровня $\gamma = 0.9$ для среднего значения напряжения в сети.

№2

$$f_{X_n}(x) = \sqrt{n}e^{-\sqrt{n}x}, \quad x>0$$

Проверим три условия ЗБЧ в форме Чебышева

1) Последовательность (X1, ..., Xn) - независимые случайные величины

+

$$2)\ MX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_x dx = \int_0^{+\infty} x \cdot \sqrt{n} e^{-\sqrt{n}x} dx = -\int_0^{+\infty} x e^{-\sqrt{n}x} d(-\sqrt{n}x) =$$

$$= -\int_0^{+\infty} x\, d e^{-\sqrt{n}x} = \left\{ \begin{matrix} \text{по} \\ \text{частям} \end{matrix} \right\} = -x \cdot e^{-\sqrt{n}x}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{n}x} dx =$$

$$= 0 - \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot e^{-\sqrt{n}x}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$DX = M[X^2] - (MX)^2 =$$

$$M[X^2] = \int_0^{+\infty} x^2 \sqrt{n} e^{-\sqrt{n}x} dx = -\int_0^{+\infty} x^2 d e^{-\sqrt{n}x} = \left\{ \begin{matrix} \text{по} \\ \text{частям} \end{matrix} \right\} =$$

$$= -x^2 e^{-\sqrt{n}x} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{n}x} dx^2 = 2\int_0^{+\infty} x e^{-\sqrt{n}x} dx =$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{n}} \int_0^{+\infty} x d e^{-\sqrt{n}x} = \ldots = \frac{2}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{2}{n}$$

$$= \frac{2}{n} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n}$$

$+$

$$\boxed{3') \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 = 0}$$

$$3) \lim_{n\to\infty} \sigma^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

$+$

$$3') \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{n \cdot \sigma^2}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sigma^2}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

Ответ: удовлетворяет ЗБЧ

№3

Формализация

Пусть X - случайная величина, принимающая значения, равные напряжению в сети

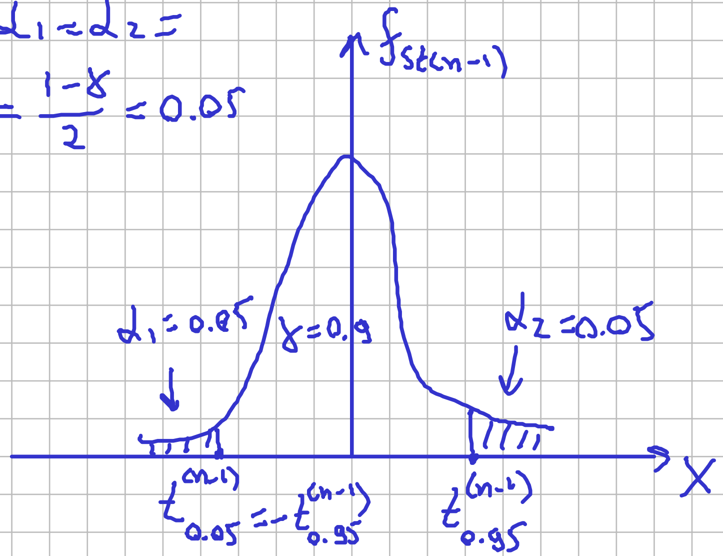
$X \sim N(m, \sigma^2)$, где m - неизв.

σ^2 - неизв.

Тогда

$$\left.\begin{array}{l} X \sim N(m,\sigma^2) \\ m - \text{неизв.} \\ \sigma^2 - \text{неизв.} \\ \text{Оценить: } m \end{array}\right\} \Rightarrow g(\vec{X}, m) = \frac{m - \bar{X}}{S(\vec{X})}\sqrt{n} \sim St(n-1)$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1-\gamma}{2} = 0.05$$



$$P\left\{-t^{(n-1)}_{0.95} \le \frac{m-\bar{X}}{S(\vec{X})}\sqrt{n} \le t^{(n-1)}_{0.95}\right\} = 0.9$$

$$P\left\{\underbrace{\bar{X} - \frac{S(\vec{X})\, t^{(n-1)}_{0.95}}{\sqrt{n}}}_{\underline{m}(\vec{X})} \le m \le \underbrace{\bar{X} + \frac{S(\vec{X})\, t^{(n-1)}_{0.95}}{\sqrt{n}}}_{\overline{m}(\vec{X})}\right\} = 0.9$$

Далее подсчет ...

Билет 148.

1. Постановка задачи идентификации неизвестных параметров закона распределения случайной величины. Сформулировать определение γ-доверительного интервала. Сформулировать определение центральной статистики и изложить общий алгоритм построения γ-доверительного интервала для скалярного параметра.

2. Средняя насыпная плотность картофеля при температуре 20°C составляет 670 кг/м^3 при среднеквадратичном отклонении 4 кг/м^3, а объем багажника седана Volkswagen Polo (модельного ряда 2014 года) равен 460 л. В каких пределах с вероятностью 0.9 заключена масса картофеля, который можно загрузить в 100 таких седанов?

3. Непрерывная случайная величина X имеет функцию плотности $f(x) = \theta^{5-x}\ln\theta$, $x \geqslant 5$. Построить для параметра θ оценку максимального правдоподобия.

№3

$$f(x) = \theta^{5-x}\ln\theta,\ x \geqslant 5$$

1) Функция правдоподобия

$$L(\vec{X}, \theta) = f(x_1, \theta)\cdot\ldots\cdot f(x_n, \theta) = \theta^{5-x_1}\ln\theta\cdot\ldots\cdot\theta^{5-x_n}\ln\theta =$$

$$= \theta^{5n - \Sigma x_i}\cdot(\ln\theta)^n$$

2) Прологарифмируем

$$\ln L(\vec{X}, \theta) = \ln\theta^{5n-\Sigma x_i} + n\ln(\ln\theta) = \left(5n - \sum_{i=1}^{n} x_i\right)\ln\theta + n\ln(\ln\theta) =$$

$$n(5 - \bar{X}_n)\ln\theta + n\ln(\ln\theta)$$

3) Необходимое условие экстремума

$$\frac{\partial L(\vec{X}, \theta)}{\partial\theta} = \frac{n(5-\bar{X}_n)}{\theta} + \frac{n}{\ln\theta\cdot\theta} = 0$$

$$\frac{n(5-\bar{X}_n)\cdot\ln\theta+n}{\ln\theta\cdot\theta}=0 \Rightarrow n(5-\bar{X}_n)\cdot\ln\theta+n=0$$

$$\begin{cases} n(5-\bar{X}_n)\cdot\ln\theta+n=0 \\ \theta\neq 0 \\ \ln\theta\neq 0 \end{cases}$$

$$\ln\theta=-\frac{1}{5-\bar{X}_n} \Rightarrow \theta=e^{\frac{1}{\bar{X}_n-5}} \Rightarrow \hat{\theta}(\vec{X})=e^{\frac{1}{\bar{X}_n-5}}$$

4) Достаточное условие

$$\left.\frac{\partial^2 L(\vec{X},\theta)}{\partial\theta^2}\right|_{\theta=\hat{\theta}} \overset{?}{<} 0$$

$$\left.\frac{\partial^2 L(\vec{X},\theta)}{\partial^2\theta}\right|_{\theta=\hat{\theta}} = \left.\left(-\frac{n(5-\bar{X}_n)}{\theta^2}-\frac{n(\ln\theta+1)}{(\ln\theta\cdot\theta)^2}\right)\right|_{\theta=\hat{\theta}} =$$

$$=\left.\left(-\frac{n}{\theta^2}\left(5-\bar{X}_n+\frac{\ln\theta+1}{\ln\theta}\right)\right)\right|_{\theta=\hat{\theta}} =$$

$$=-\frac{n}{e^{\frac{2}{\bar{x}_n-5}}}\left(\cancel{5}-\cancel{\bar{X}_n}+1+\cancel{\bar{x}_n}-\cancel{5}\right)=-\frac{n}{e^{\frac{2}{\bar{x}_n-5}}}<0 \text{ - верно}$$

№2

1) Формализация

Пусть X - случайная величина, принимающая значения, равные насыпной плотности картофеля

$X \sim N(m, \sigma^2)$, где m - неизв.

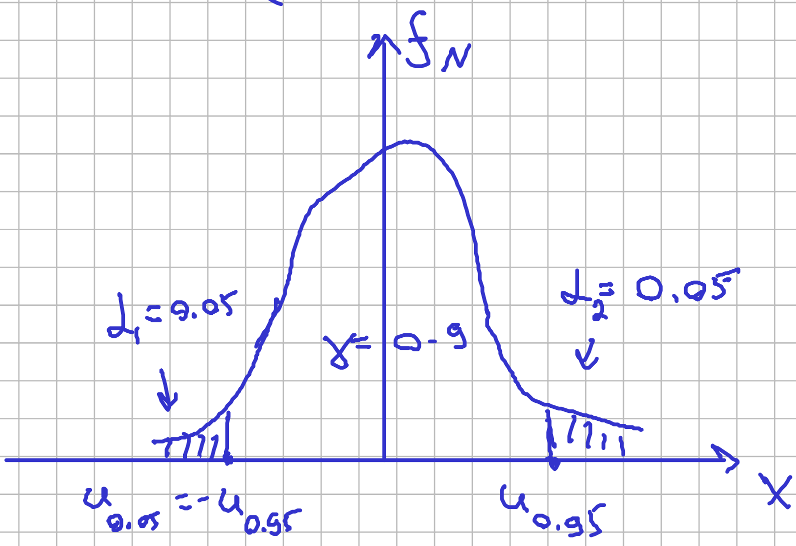
$\sigma^2 = 4$ кг/м³ $= 0.004$ кг/л

$\bar{X} = 670$ кг/м³ $= 0,67$ кг/л

Тогда

$$\left.\begin{array}{l} X \sim N(m, \sigma^2) \\ m - \text{неизв.} \\ \sigma^2 - \text{изв.} \\ \text{Оценить: } m \end{array}\right\} \Rightarrow g(\vec{X}, m) = \frac{m - \bar{X}}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,1)$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1-\gamma}{2} = 0.05$$



$$P\left\{-u_{0.95} < \frac{m - \bar{X}}{\sigma}\sqrt{n} < u_{0.95}\right\} = 0.9$$

$$P\left\{\underbrace{\bar{X} - \frac{\sigma \cdot u_{0.95}}{\sqrt{n}}}_{\underline{m}(\vec{x})} \leq m \leq \underbrace{\bar{X} + \frac{\sigma \cdot u_{0.95}}{\sqrt{n}}}_{\overline{m}(\vec{x})}\right\} = 0.9$$

Интервал для массы, где V = 460 (m = V *ρ)

$$\left(\underline{m}(\vec{x}) \cdot 460,\ \overline{m}(\vec{x}) \cdot 460\right)$$

Билет 156.

1. Сформулировать определения эмпирической функции распределения и выборочной функции распределения. Сформулировать и доказать теорему о сходимости выборочной функции распределения.

2. Вероятность p того, что при одном выстреле боец попадет в "десятку", равна 0.7. Оценить вероятность того, что в серии из $n = 30$ выстрелов частота попадания этим бойцом в "десятку" отклонится от p не более чем на $\varepsilon = 0.15$.

3. Непрерывная случайная величина X имеет функцию плотности $f(x) = Cx^{7\theta}$, $x \in [0, 1]$, где $C = 7\theta + 1$. Построить для параметра θ оценку максимального правдоподобия.

№3

$$f(x) = Cx^{7\theta},\ x \in [0,1],\ C = 7\theta+1$$

$$f(x) = (7\theta+1)x^{7\theta}$$

1) $L(\vec{X},\theta) = f(x_1,\theta)\cdot\ldots\cdot f(x_n,\theta) = (7\theta+1)^n \cdot x^{7n\theta}$

2) $\ln L(\vec{X},\theta) = n\ln(7\theta+1) + 7n\ln x^{\theta}$

3) $\dfrac{\partial \ln L(\vec{X},\theta)}{\partial\theta} = \dfrac{7n}{7\theta+1} + \dfrac{7n\cdot x^{\theta}\ln x}{x^{\theta}}$

$$\frac{7n}{7\theta+1} + 7n\ln x = 0$$

$$\frac{7n}{7\theta+1} = -7n\ln x$$

$$7\theta+1 = -\frac{1}{\ln x} \Rightarrow 7\theta = -\frac{1}{\ln x} - 1 \Rightarrow \theta = -\frac{1}{7}\left(\frac{1}{\ln x}+1\right)$$

$$\hat{\theta}(\vec{X}) = -\frac{1}{7}\left(\frac{1}{\ln x}+1\right)$$

4) Достаточное условие экстремума

$$\left.\frac{\partial^2 L(\vec{X}, \theta)}{\partial \theta^2}\right|_{\theta=\hat{\theta}} \overset{?}{<} 0$$

$$\left.\frac{\partial^2 L(\vec{X}, \theta)}{\partial \theta^2}\right|_{\theta=\hat{\theta}} = -\left.\frac{7n \cdot 7}{(7\theta+1)^2}\right|_{\theta=\hat{\theta}} = -\left.\frac{49n}{(7\theta+1)^2}\right|_{\theta=\hat{\theta}} =$$

$$= -\frac{49n}{\left(-\frac{1}{\ln x}-1+1\right)^2} = -49n \cdot (\ln x)^2 < 0 \text{ - верно}$$

Так как n > 0 и логарифм > 0, то достаточное условие экстремума выполняется