22.03.24. Лекция 5.

Основные распределения, используемые в МС.

① Гамма-функция.

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} \cdot e^{-x}\, dx$$

Интеграл
- несобственный
- сходится при $\alpha > 0$

Свойства гамма-функции

1° $\Gamma(\alpha)$ является бесконечное число раз дифференцируемой ф-ей на $(0; +\infty)$, кроме того

$$\Gamma^{(k)}(\alpha) = \int_0^{+\infty} \ln^k(x)\, x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx$$

2° Для $\alpha > 0$

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$$

3° $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x}\, dx = 1$

4° Из 2° и 3° следует

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \Gamma(n+1) = n!$$

5° $\Gamma(1/2) = \int_0^{+\infty} x^{-1/2} e^{-x}\, dx = \left\{ \begin{array}{l} t = \sqrt{x} \\ x = t^2 \\ dx = 2t\,dt \end{array} \right\} = 2\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$

6° $\Gamma(n+1/2) = (n-1/2)\Gamma(n-1/2) = \ldots = (n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2})\ldots\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\overbrace{\Gamma(1/2)}^{\sqrt{\pi}}$

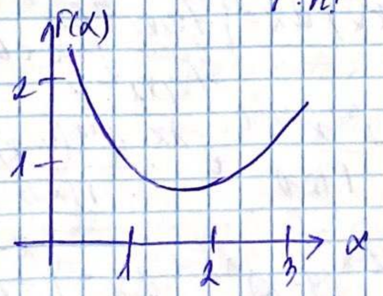
$$\Gamma(n+1/2) = \frac{2n-1}{2}\cdot\frac{2n-3}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi}$$

Рассмотрим числитель

$$(2n-1)(2n-3)\cdot\ldots\cdot 1 = \frac{2n\cdot(2n-1)(2n-2)(2n-3)\ldots 2\cdot 1}{\underbrace{2n\cdot(2n-2)(2n-4)\ldots\cdot 2}_{2^n n!}} = \frac{(2n)!}{2^n n!}$$

- $\Gamma(n+1/2) = \dfrac{(2n)!}{4^n n!}\sqrt{\pi}$

7°



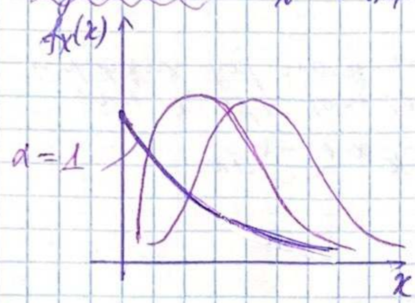
$\min\limits_{\alpha>0}\Gamma(\alpha) \approx 1,46$

② Гамма-распределение

Опр. Говорят, что непр. с. в. X имеет гамма-распределение с параметрами λ, α, если ее ф-я плотности распределения вероятностей имеет вид:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Обозначение: $X \sim \Gamma(\lambda, \alpha)$



! Замечание: Экспоненциальное распр-е является частным случаем гамма-распр-я. (при $\alpha = 1$):

$$Exp(\lambda) = \Gamma(\lambda, 1)$$

Th распределение суммы гамма-величин

Пусть 1) $X_1 \sim \Gamma(\lambda, \alpha_1)$;
2) $X_2 \sim \Gamma(\lambda, \alpha_2)$;
3) X_1, X_2 - независимые.

Тогда
$$X_1 + X_2 \sim \Gamma(\lambda, \alpha_1 + \alpha_2)$$

Док-во:

$Y = X_1 + X_2$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1X_2}(x, y-x)\,dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Если } x<0, \text{ то } f_{X_1X_2}=0. \\ \text{Если } y-x<0, \text{ то } f_{X_1X_2}=0 \end{array} \right\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} + \int_{0}^{y} + \int_{0}^{\infty} = \int_0^y \frac{\lambda^{\alpha_1} x^{\alpha_1 - 1}}{\Gamma(\alpha_1)} \cdot e^{-\lambda x} \cdot \frac{\lambda^{\alpha_2}(y-x)^{\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_2)} e^{-\lambda(y-x)}\,dx =$$

$$= \frac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2} \cdot e^{-\lambda y}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \cdot \int_0^y x^{\alpha_1-1}(y-x)^{\alpha_2-1}\,dx = \left\{ \begin{array}{l} x = y \cdot t, \ dx = y\,dt \\ t \in (0, 1) \\ t=0 \Rightarrow x=0 \\ t=1 \Rightarrow x=y \end{array} \right. =$$

$$= \frac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2} \cdot e^{-\lambda y}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \cdot y^{\alpha_1+\alpha_2-1} \cdot B(\alpha_1, \alpha_2).$$

Опр. Функция $B(\alpha_1, \alpha_2) \triangleq \int_0^1 t^{\alpha_1-1}(1-t)^{\alpha_2-1}dt$

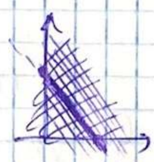
Чтобы доказать утверждение теоремы, осталось доказать, что

$$B(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}$$

$$\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha_1-1} \cdot e^{-x}dx \cdot \int_0^{+\infty} x^{\alpha_2-1} \cdot e^{-x}dx =$$

$$= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} x^{\alpha_1-1} \cdot y^{\alpha_2-1} \cdot e^{-(x+y)} \cdot dx\, dy =$$

Введем $z = x + y$



$z = x+y$

$$= \left\{\begin{matrix} z = x+y \\ x = x \\ dy = dz \end{matrix}\right\} = \int_0^{+\infty} dz \int_0^{z} x^{\alpha_1-1} \cdot (z-x)^{\alpha_2-1} e^{-z} dx =$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-z}dz \cdot \int_0^{z} x^{\alpha_1-1} \cdot (z-x)^{\alpha_2-1} dx = \left\{\begin{matrix} x = z \cdot t \\ dx = z\,dt \end{matrix}\right\} =$$

$$= \int_0^{+\infty} z^{\alpha_1+\alpha_2-1} \cdot e^{-z}dz \cdot B(\alpha_1, \alpha_2) = \Gamma(\alpha_1+\alpha_2)B(\alpha_1, \alpha_2)$$

Теорема доказана.

Следствие 1 Пусть 1) с.в. $X_i \sim \Gamma(\lambda, \alpha_i)$, $i = 1, \dots, n$.

2) с.в. X_i — независимые

Тогда

$$X_1 + \dots + X_n \sim \Gamma(\lambda, \alpha_1 + \dots + \alpha_n)$$

3 Распределение χ^2

Пусть 1) $X_1, \dots, X_n$ — независимые случайные величины

2) $X_i \sim N(0,1)$, $i = 1, \dots, n$

3) $Y = X_1^2 + \dots + X_n^2$

Опр. В этом случае говорят, что с.в. Y имеет распределение χ^2 ("хи-квадрат") с n степенями свободы.

Обозначение: $Y \sim \chi^2(n)$

Замечание 1) Распределение $\chi^2(1)$ получается, если положить $X \sim N(0,1)$, а $Y = X^2$.

Тогда

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-y/2}, & y > 0 \\ \nexists, & y = 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \quad \Big\} \; 0,\ y \le 0$$

(можно заменить, т.к. нам "неважно" какое значение f в конкр. т.)

$$\chi^2(1) = \Gamma(1/2, 1/2)$$

2) Доказанная выше теорема для гамма-распределения дает следствие для случая $\chi^2(n)$:

$$\chi^2(n) = \Gamma(1/2, \underbrace{\tfrac{1}{2} + \dots + \tfrac{1}{2}}_{n\text{-раз}}) = \Gamma(1/2, n/2)$$

3) Если (1) $Y_1, \dots, Y_m$ – незав. с. в.

(2) $Y_i \sim \chi^2(n_i)$, $i = 1, \dots, m$

Тогда

$$Y_1 + \dots + Y_m \sim \chi^2(n_1 + \dots + n_m)$$

4 Распределение Фишера

Пусть 1) X_1, X_2 – незав. с. в.

2) $X_i \sim \chi^2(n_i)$, $i = 1, 2$;

3) $\theta = \dfrac{X_1/n_1}{X_2/n_2}$.

Опр. В этом случае говорят, что с. в. θ имеет распределение Фишера со степенями свободы n_1 и n_2.

Обозначение: $\theta \sim F(n_1, n_2)$

Можно показать, что

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \frac{1}{B(n_1/2, n_2/2)} \cdot \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}} \cdot \frac{x^{n_1/2 - 1}}{\left(1 + \frac{n_1}{n_2} x\right)^{\frac{n_1+n_2}{2}}}, & x > 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Замечание 1) Если $\vartheta \sim F(n_1, n_2)$, то

$$\frac{1}{\vartheta} \sim F(n_2, n_1)$$

⑤ Распределение Стьюдента

Пусть 1) $X \sim N(0,1)$

2) $Y \sim \chi^2(n)$

3) X, Y – незав. с. в.

4) $$\vartheta = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$$

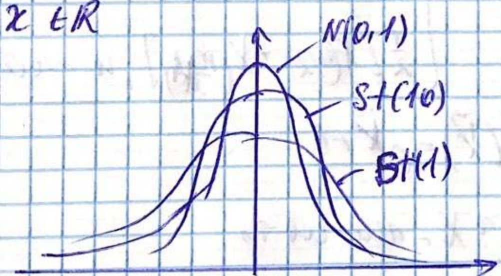
Опр. В этом случае говорят, что с. в. ϑ имеет распределение Стьюдента с n степенями свободы.

Обозначение: $\vartheta \sim St(n)$ (так не везде)

Можно показать, что

$$f_\vartheta(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi n} \cdot \Gamma(n/2)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

$x \in R$



Точечные оценки

① Предварительные сведения

Рассмотрим вторую основную задачу М. С.:

X – случайная величина, для которой известен общий вид ее закона распределения, но который зависит от одного или нескольких неизвестных параметров;

Требуется оценить неизв. параметры

Для решения этой задачи используется два подхода:
1) построение точечных оценок
2) построение доверительных оценок (интервалов)

Пусть X – случайная величина, з-н распределения которой известен с точностью до параметра θ.

Опр. Точечной оценкой параметра θ называется статистика $\hat{\theta}(\vec{X})$, выборочное значение которой принимается в качестве значения этого параметра (θ).

То есть $\theta = \hat{\theta}(\vec{x})$

($\vec{x}$ – реализация, $\vec{X}$ – случ. выборка)

Пример. Пусть X – сл. вел., закон расп-я кот. неизвестен, и ее мат. ож.

$$m = M[X]$$

в качестве оценки m можно рассмотреть следующие статистики

$$\hat{m}_1(\vec{X}) = \bar{X};$$

$$\hat{m}_2(\vec{X}) = \frac{1}{2}\left(X_{(1)} + X_{(n)}\right);$$

$$\hat{m}_3(\vec{X}) = \begin{cases} X_{(\frac{n+1}{2})}, & n \text{ – нечет.} \\ \frac{1}{2}\left[X_{(n/2)} + X_{(\frac{n}{2}+1)}\right], & n \text{ – чет.} \end{cases}$$

$$\hat{m}_4(\vec{X}) = e^{\bar{X}+1}$$

Известно, что $X_i \sim X$ – ген. сов-ть