2) $\hat{\sigma}^2_{\text{омп}}$:

$$\left.\frac{\partial \ln[L(a,\sigma^2,\vec{x})]}{\partial \sigma}\right|_{\sigma=\hat{\sigma}_{\text{омп}}} = 0$$

$$\left.-\frac{n}{\sigma}-\frac{1}{2}(-2)\frac{1}{\sigma^3}\cdot\sum_{k=1}^{n}(x_k-a)^2\right|_{\sigma=\hat{\sigma}_{\text{омп}}} = 0$$

$$n = \frac{1}{\hat{\sigma}^2_{\text{омп}}}\cdot\sum_{k=1}^{n}(x_k-a)^2$$

$$\hat{\sigma}^2_{\text{омп}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k-a)^2$$ - смещённая

14.03.24. Семинар 6.

Д/з: (а1) $X \sim B(n, \theta)$, θ - неизв. параметр. (отвечает за вер-ть успеха)

выб: $\vec{x} = (x_1, \dots, x_m)$, $X_k \sim X$, $k=\overline{1,m}$

$\hat{\theta}$ - омп.

1) составить $L(\vec{x}, \theta)$
2) $\arg\max_{\theta} L(\vec{x}, \theta) = \hat{\theta}$

Решение:

1) $$L(\vec{x},\theta) = \prod_{i=1}^{m} C_n^{x_i}\theta^{x_i}(1-\theta)^{(n-x_i)}$$

$$c + \ln(L(\vec{x},\theta)) = \sum_{i=1}^{m} x_i \cdot \ln(\theta) + \left(\sum_{i=1}^{m}(n-x_i)\right)\cdot \ln(1-\theta)$$

2) $$\left.\frac{\partial \ln(L(\vec{x},\theta))}{\partial \theta}\right|_{\hat{\theta}} = \frac{1}{\hat{\theta}}\left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right) - \frac{1}{1-\hat{\theta}}\cdot\left(\sum_{i=1}^{m}(n-x_i)\right) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{m}(n-x_i)\cdot\hat{\theta} = \sum_{i=1}^{m} x_i - \hat{\theta}\sum_{i=1}^{m} x_i$$

$$nm\hat{\theta} = \sum_{i=1}^{m} x_i \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{m} x_i}{nm}$$

Ответ

3) Несмещенность:

$$M[\hat{\theta}] = M\left[\sum_{i=1}^{m} X_i / nm\right] = \frac{\sum_{i=1}^{m} M[X_i]}{nm} = \frac{m \cdot n \cdot \theta}{mn} = \theta$$

$\Rightarrow$ оценка несмещенная.

4) Состоятельность:

$$\hat{\theta}(\vec{X}) \xrightarrow{P} \theta$$

необходимо д-ть:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P\{|\hat{\theta} - \theta| \geq \varepsilon\} \xrightarrow[m \to \infty]{} 0$$

$$P\left\{\left|\sum_{i=1}^{m} X_i \frac{1}{nm} - \theta\right| \geq \varepsilon\right\} \xrightarrow[m \to \infty]{} 0$$

$$\cancel{\lim_{m \to \infty}\left(\frac{1}{nm}\sum_{i=1}^{m} X_i\right) = \{\text{по теор.}\} = \lim_{m \to \infty} \frac{1}{n}}$$

Д-во: $X \sim B(n, \theta)$

$+\ DX = n\theta(1-\theta)$, т.е. DX_i огр. в сов-ти

$MX = n\theta$

$\Rightarrow$ по th Чебышева:

$$(\forall \varepsilon > 0) \quad P\left\{\left|\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} X_k - \frac{\sum_{i=1}^{m} MX_k}{m}\right| \geq \varepsilon\right\} \xrightarrow[m \to \infty]{} 0$$

$$P\left\{\left|\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} X_k - \theta n\right| \geq \varepsilon\right\} \xrightarrow[m \to \infty]{} 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\forall \tfrac{\varepsilon}{n} > 0} \quad P\left\{\left|\frac{1}{mn}\sum_{k=1}^{m} X_k - \theta\right| \geq \varepsilon / n\right\} \xrightarrow[m \to \infty]{} 0, \text{ ч.т.д.}$$

№2

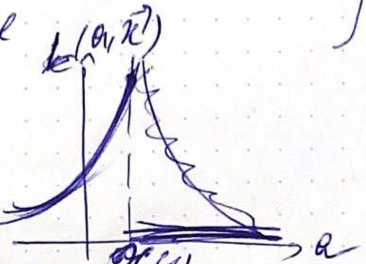
$$f_X(a, x) = \begin{cases} e^{a-x}, & x \geq a \\ 0, & x < a \end{cases}, \quad a \text{ — неизвестный пар-р.}$$

$(x_1, \dots, x_n) \to \hat{a}$ — МП-оценку.

Решение:

1) $$L(a, \vec{x}) = \begin{cases} \prod_{i=1}^{n} e^{a - x_i}, & (\forall i)(x_i \geq a) \\ 0 & \text{иначе} \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \prod_{i=1}^{n} e^{a - x_i}, & x_{(1)} \geq a \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$



$$\prod_{i=1}^{n} e^{a-x_i} \to max, \quad x_{(1)} \geq a$$

$$\hat{a} = x_{(1)}$$

---

2) Метод моментов

(основан на состоятельности моментов)

$$\begin{cases} \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \\ S_0^k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} (X_k - \bar{X})^k \end{cases}$$

$$M[S_0^2] \neq DX$$

$$M\left[\frac{n}{n-1} S_0^2\right] = DX$$

$$\begin{cases} \bar{x} = \dots \\ S_0^k = \dots \end{cases}$$

Теоретические моменты: $\begin{cases} MX = \varphi_1(\vec{\beta_m}) \\ \dots \\ M[X - MX]^m = \varphi_m(\vec{\beta_m}) \end{cases}$

Метод моментов:

$$\begin{cases} \vec{x} = \varphi_1(\vec{\beta_m}) \\ \dots \\ S_0^m(\vec{x}) = \varphi_m(\vec{\beta_m}) \end{cases}$$

$$S^3(\vec{x}) = \frac{n^2}{(n-1)(n-2)} S_0^3$$

$\boxed{N}$

Расп-е Пуассона.
Оценить λ методом моментов

Решение:

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

$$MX=\lambda$$

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k$$

Применим метод моментов к полученному рав-ву:

$$MX\Big|_{\lambda=\hat{\lambda}}=\overline{x}$$

$$\Rightarrow \hat{\lambda}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k$$

Ответ

$\boxed{N}$

Нормальное распределение.
Оценить a, σ^2 методом моментов $(\hat{a}, \hat{\sigma}^2)$

Решение:

$$X\sim N(a,\sigma^2)$$

$$\begin{cases}\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_n\\ S^2(\vec{X})=\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k-\overline{X})^2\end{cases}$$ – выборочные моменты

Теоретические моменты:

$$\begin{cases}MX=a\\ DX=\sigma^2\end{cases}$$

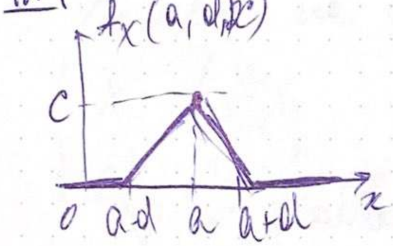
Составим систему

$$\begin{cases}MX\Big|_{\substack{a=\hat{a}\\ \sigma=\hat{\sigma}^2}}=\overline{x}\\ DX\Big|_{\substack{a=\hat{a}\\ \sigma=\hat{\sigma}^2}}=\cancel{\frac{1}{n-1}}S^2(\vec{x})\end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{a} = \bar{x} \\ \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum\limits_{k=1}^{n} (x_k - \bar{x})^2 \end{cases}$$

Ответ ↑

$\boxed{\text{IV}}$



закон Симпсона.

Дана реализация $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$

Получить $\hat{a}, \hat{d}$ методом моментов.

Решение

Теор. моменты
$$\begin{cases} MX = \frac{a-d + a + a+d}{3} = a \\ DX = M[(X-MX)^2] = \frac{(a-d-a)^2 + (a-a)^2 + (a+d-a)^2}{3} = \\ = \frac{2d^2}{3} \end{cases}$$

~~Выб. моменты~~ $\cancel{\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}}$

$\cancel{MX = \int_{a-d}^{a+d} x\,dx = \frac{x^2}{2}}$

$\cancel{MX = \frac{x^2}{2}\Big|_{a-d}^{a+d} = \frac{(a+d)^2 - (a-d)^2}{2} = \frac{(a+d-a+d)(a+d+a-d)}{2}}$

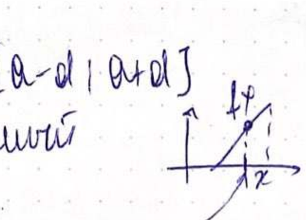
$\cancel{= \frac{2d \cdot 2a}{2} = 2ad}$

Усл. нормировки: $C = \frac{1}{d}$

~~MX =~~

Ищем f_X на отр. $[a-d, a+d]$

Параметр s – введенный
$s \in [0, 1]$



$$\begin{cases} x = (a-d)(1-s) + a \cdot s \text{ – параметризовали } x \\ f_X = 0 \cdot (1-s) + s \cdot \frac{1}{d} \end{cases}$$

$$x-(a-\alpha)=S\cdot(-a+\alpha+a)$$

$$S=\frac{x-(a-\alpha)}{\alpha}$$

$$f_X=\frac{x-(a-\alpha)}{\alpha^2}$$

$$f_X(a,\alpha,x)=\begin{cases}0, & x\notin[a-\alpha;a+\alpha]\\ \frac{x-(a-\alpha)}{\alpha^2}, & x\in[a-\alpha;a].\\ \dots\end{cases}$$

21.03.24. **Семинар 7.**

В методе макс. правдоподобия две величины мы находим так, будто заранее другие:

$X \sim N(a, \sigma^2)$

$$\begin{cases}\hat{a}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k\\ \hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k-a)^2\end{cases}$$

! Замечание: данные оценки - отдельные - оценка $\hat{\sigma}^2$ исходит из известности a, оценка $\hat{a}$ исходит из известности σ^2

Как решить задачу, не исходя из известности?

~необходимо совместно решать систему.

$L(a,\sigma^2,\vec{x})$ - функция 2х аргументов. $(a, \hat{\sigma}^2)$

$$L(a,\sigma^2,\vec{x})=C-n\ln\sigma-\frac{1}{2\sigma^2}\cdot\sum_{k=1}^{n}(x_k-a)^2$$

$$\begin{cases}\frac{\partial \ln L}{\partial a}=-\frac{1}{2\sigma^2}\cdot\sum_{k=1}^{n}2(x_k-a)\cdot(-1)=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{k=1}^{n}(x_k-a)\\ \frac{\partial \ln L}{\partial \sigma}=-\frac{n}{\sigma}-\frac{-2}{2\sigma^3}\sum_{k=1}^{n}(x_k-a)^2=-\frac{n}{\sigma}+\frac{1}{\sigma^3}\cdot\sum_{k=1}^{n}(x_k-a)^2\end{cases}$$

$\Rightarrow$ Необходимое условие экстремума $\frac{\partial \ln L}{\partial a}=0$, $\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma}=0$

$\hat{a}=\dots$

$\hat{\sigma}^2=\dots$

Далее необходимо проверить доп. условие

Условие локального максимума.
(удовл. ф-ии $f(x,y)$)

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{1}{1!}\left[f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y\right] +$$
$$+ \frac{1}{2!}\left[f''_{xx}(x_0,y_0)\Delta x^2 + 2f''_{xy}(x_0,y_0)\Delta x\Delta y + f''_{yy}(x_0,y_0)\Delta y^2\right] + O(\Delta x^2 + \Delta y^2)$$

$\Delta x = x - x_0$
$\Delta y = y - y_0$

Если будет доказано, что в какой-то выколотой окрестности точки (x_0, y_0) будет выполнено

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) < 0, \quad (*)$$

то $f(x_0,y_0)$ – max, (x_0,y_0) – доставляет локальный макс f

$(*) \Rightarrow \ln f(x,y) < \ln f(x_0,y_0)$

Для $\forall \Delta x, \Delta y$: $\Delta x^2 + \Delta y^2 \neq 0$

$$f''_{xx}(x_0,y_0)\Delta x^2 + 2f''_{xy}(x_0,y_0)\Delta x\Delta y + f''_{yy}(x_0,y_0)\Delta y^2 < 0.$$

(мы хотим, чтобы поверхность была выпуклая вверх.

Т.е. $\begin{bmatrix}\Delta x & \Delta y\end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} f''_{xx}(x_0,y_0) & f''_{xy}(x_0,y_0) \\ f''_{xy}(x_0,y_0) & f''_{yy}(x_0,y_0)\end{bmatrix}}_{\text{матрица } D} \begin{bmatrix}\Delta x \\ \Delta y\end{bmatrix}$ – матрица D должна быть отрицательно определенной ~~матрицей~~

Мы проверяем (ищем) условие, при кот. матрица D – отр. опр.

$\Rightarrow$ Чтобы решить задачу, нам нужно проверить для т. экстремума $(\hat{a}, \hat{\sigma})$, является ли она точкой максимума для $\ln L$.

Поэтому необходимо проверить соотв. матрицу 2х производных (частных) (ее отр. определенность).

] Критерий Сильвестра положительно опр. матрицы D.

D - полож. определенная $\Leftrightarrow$ все угловые миноры >0.

D - отрицательно определенная $\Leftrightarrow$ все нечетные миноры <0;
четные — " — >0.

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial a\, \partial \sigma} = -\frac{2}{\sigma^2}\sum_{k=1}^{n}(x_k - a)$$

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \sigma^2} = \frac{n}{\sigma^2} - \frac{3}{\sigma^4}\sum_{k=1}^{n}(x_k - a)^2$$

$$D = \begin{bmatrix} -\frac{n}{\sigma^2} & -\frac{2}{\sigma^3}\sum_{k=1}^{n}(x_k-a)^2 \\ -\frac{2}{\sigma^3}\sum_{k=1}^{n}(x_k-a)^2 & \frac{n}{a} - \frac{3}{\sigma^4}\sum_{k=1}^{n}(x_k-a)^2 \end{bmatrix}$$

$D_{11} < 0$.

Осталось проверить, что $|D| > 0$.

$$|D|\Big|_{\sigma=\hat\sigma} = -\frac{n}{\sigma^2}\cdot\left(\frac{n}{\sigma^2} - \frac{3}{\sigma^4}\sum_{k=1}^{n}(x_k-a)^2\right) - \frac{4}{\sigma^6}\cdot\left[\sum_{k=1}^{n}(x_k-a)\right]^2\Bigg|_{\substack{a=\hat a\\ \sigma=\hat\sigma^2}} =$$

$$= -\frac{n^2}{\hat\sigma^6}\left[\hat\sigma^2 - \frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\hat a)^2\right] - \frac{4}{\hat\sigma^6}\left(\sum_{k=1}^{n}(x_k-\hat a)\right)^2 =$$

$$= \frac{n^2}{\hat\sigma^6}2\hat\sigma^2 - 0 > 0.$$

~~Нерав.~~

Пусть дано распределение, зависящее от параметра β и есть статистика $\hat b(\vec X)$ - несмещенная для β.

Тогда

1) $$D(b(\vec X)) \geq \frac{1}{J(\beta)},$$

где $$J(\beta) = M\left[\left(\frac{\partial \ln L(\beta, \vec x)}{\partial \beta}\right)^2\right]$$ - кол-во информации по Фишеру

2) статистика $\beta(\vec{X})$ удовл.

$$D(\beta(\vec{X})) = \frac{1}{J(\beta)}$$, если она существует,

удовл. равенству

$$\pm J(\beta)\cdot[\beta(\vec{X}) - \beta] = \frac{\partial \ln L(\beta, \vec{X})}{\partial \beta}$$

N

$X \sim B(1, p)$

$\vec{X} = (X_1, \dots, X_n)$

1) Получить $J(p)$

2) Если можно, получить $\hat{p}(\vec{X})$

Решение:

1) а) $L(p, \vec{x}) = \prod_{k=1}^{n} p^{x_k}(1-p)^{x_k} = p^{\sum_{k=1}^{n} x_k}\cdot(1-p)^{\sum_{k=1}^{n} x_k}$

$P_p\{x_k = 0\} = 1-p$

$P_p\{x_k = 1\} = p$

б) $\ln L(p, \vec{x}) = \ln(p)\cdot\sum_{k=1}^{n} x_k + \ln(1-p)\cdot(-\sum_{k=1}^{n} x_k + n) =$

$= n\ln(1-p) + (\ln p - \ln(1-p))\sum_{k=1}^{n} x_k$

в) $\frac{\partial \ln L(p, \vec{x})}{\partial p} = -\frac{n}{1-p} + \left[\frac{1}{p} + \frac{1}{1-p}\right]\sum_{k=1}^{n} x_k = -\frac{n}{1-p} + \frac{1}{p(1-p)}\cdot\sum_{k=1}^{n} x_k$

г) $\left(\frac{\partial \ln L(p, \vec{x})}{\partial p}\right)^2 = \frac{n^2}{(1-p)^2} - \frac{2n}{p(1-p)^2}\sum_{k=1}^{n} x_k + \frac{1}{p^2(1-p)^2}\left[\sum_{k=1}^{n} x_k\right]^2$

28.03.24. семинар 8.

$X \sim Exp(\lambda)$

1) $J(\lambda)$ — ?

2) $\hat{\lambda}$ — эфф.?

$$f_X = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

Решение:

1) $L(\lambda, \vec{x}) = \prod_{k=1}^{n} f_X(\lambda, x_k)$

$$L(\lambda, \vec{x}) = \prod_{k=1}^{n} \lambda e^{-\lambda x_k} = \lambda^n \cdot e^{-\lambda \sum_{k=1}^{n} x_k}$$

$$\cancel{\frac{\partial L(\lambda, \vec{x})}{\partial \lambda} = n\lambda e^{-\lambda \sum_{k=1}^{n} x_k} - \lambda^n \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot e^{-\lambda \sum_{k=1}^{n} x_k}}$$

$$\ln L(\lambda, \vec{x}) = n \cdot \ln \lambda - \lambda \sum_{k=1}^{n} x_k$$

2: Если $\exists$ет $\hat{\lambda}$ — эфф. ~~статистика~~ статистика для λ, то выполнено одно из равенств

$$\pm J(\lambda)[\hat{\lambda} - \lambda] = \frac{\partial \ln L(\lambda, \vec{x})}{\partial \lambda}$$

$$\frac{\partial \ln L(\lambda, \vec{x})}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} - \lambda \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k$$

$$\left(\frac{\partial \ln L(\lambda, \vec{x})}{\partial \lambda}\right)^2 = \frac{n^2}{\lambda^2} - 2\lambda \left[\sum_{k=1}^{n} x_k\right] + \lambda^2 \left[\sum_{k=1}^{n} x_k\right]^2$$

$$\cancel{J(\lambda) = M\left[\left(\frac{\partial \ln L(\lambda, \vec{x})}{\partial \lambda}\right)^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \left(\frac{n^2}{\lambda^2} - 2\lambda \sum_{k=1}^{n} x_k + \lambda^2 \left[\sum_{k=1}^{n} x_k\right]^2\right)}$$

$\boxed{N}$

$X \sim Exp(1/\theta)$

1) $J(\theta)$ — ?

2) $\hat{\theta}$ — эфф.?

Решение:

1) $L(\frac{1}{\theta}, \vec{x}) = \prod_{k=1}^{n} f_X(\frac{1}{\theta}, x_k) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{1}{\theta} x_k} = \frac{1}{\theta^n} e^{-\frac{1}{\theta} \sum_{k=1}^{n} x_k}$

I) 1) $L(\theta, \vec{x}) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{1}{\theta} \cdot x_k} = \frac{1}{\theta^n} e^{-\frac{1}{\theta} \sum_{k=1}^{n} x_k}$

2) $\ln L(\theta, \vec{x}) = n \ln \frac{1}{\theta} - \frac{1}{\theta} \sum_{k=1}^{n} x_k = -n \ln \theta - \frac{1}{\theta} \sum_{k=1}^{n} x_k$

3) $\frac{\partial \ln L(\theta, \vec{X})}{\partial \theta} = -\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2} \sum_{k=1}^{n} X_k = \frac{1}{\theta^2} \sum_{k=1}^{n} (X_k - \theta)$

$A \triangleq \left(\frac{\partial \ln L(\theta, \vec{X})}{\partial \theta} \right)^2 = \frac{1}{\theta^4} \left[\sum_{k=1}^{n} (X_k - \theta) \right]^2$

$M[A] = \frac{1}{\theta^4} \left(M\left[\sum_{k=1}^{n} (X_k - \theta)^2 + \sum_{k=1}^{n} \sum_{k \neq l} (X_k - \theta)(X_l - \theta) \right] \right) =$

$= \frac{1}{\theta^4} \cdot \sum_{k=1}^{n} M[(X - \theta)^2] = \frac{1}{\theta^4} n \theta^2 = n / \theta^2$

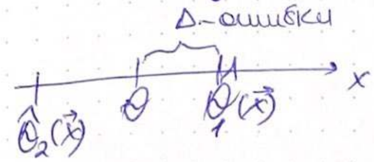
II) $\frac{n}{\theta^2} \cdot [\hat{\theta} - \theta] = \frac{1}{\theta^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \theta) \Rightarrow n\hat{\theta} - n\theta = -\theta n + \sum_{i=1}^{n} x_i$

$\Rightarrow \hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k$

Доверительные оценки

$\hat{\theta}(\vec{x})$ — оценка

$X \sim Exp(\frac{1}{\theta})$



① **Байес:**

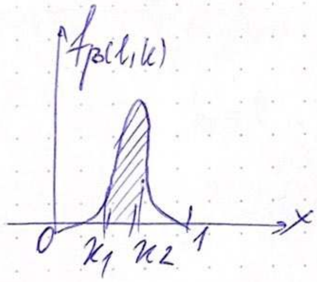
p — ?

n-раз ⇒ реализовалось m (успехов)

$$P\{p \in (x_1, x_2) \mid A_m\} = \frac{\int_{x_1}^{x_2} x^m (1-x)^{n-m}\,dx}{B(m+1, n-m+1)}$$

$A_m = \{$произошло m успехов$\}$ — не случайное

где $B(l,k) \triangleq \int_0^1 x^{l-1}(1-x)^{k-1}\,dx$



Пусть α — уровень доверия (надежность оценки)

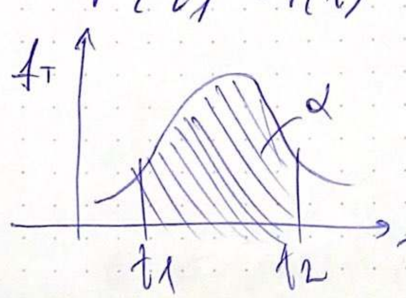
т.е. ⇔ вероятность того, что p попадет в интервал (x_1, x_2)

② **Центральная статистика** (поиск), (распр. кот. не зависит от неизв. пар-ра)

Опр. Пусть дано распр-е ген. сов-ти X, которое зависит от неизв. параметра β.

Тогда статистику $T(\vec{X})$ назовем центральной, если ее распределение не зависит от β.

$$P\{t_1 < T(\vec{X}) < t_2\} = \alpha \text{ — надежность}$$



(№) $X \sim N(a, \sigma^2)$

σ^2 – изв.

построить дов. инт.

для a с уровнем доверия α

Решение:

$\hat{a}(\vec{X}) = \overline{X}$

Как получить центр.?

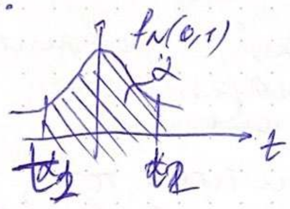
$T(\vec{X})$ – центр. стат. –?

$\hat{a}(\vec{X}) \sim N(a, \sigma^2/n)$

$$\begin{cases} M[\hat{a}(\vec{X})] = a \\ D[\hat{a}(\vec{X})] = D\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} DX_k = \frac{\sigma^2}{n} \end{cases}$$

$$T(\vec{X}) = \frac{\hat{a} - a}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim N(0,1)$$

α:



Опр. Квантилью уровня γ наз. число (для фикс. расп. X) t_γ:

$F_X(t_\gamma) = \gamma$

(непр. с. в.)

$$t_1 = t^{N(0,1)}_{\frac{1-\alpha}{2}} = -t^{N(0,1)}_{\frac{1+\alpha}{2}}$$

$$t_2 = t^{N(0,1)}_{\frac{1+\alpha}{2}}$$

$$\alpha = P\left\{-t^{N(0,1)}_{\frac{1+\alpha}{2}} < T(\vec{X}) < t^{N(0,1)}_{\frac{1+\alpha}{2}}\right\}$$

$$\alpha = P\left\{-t^{N(0,1)}_{\frac{1+\alpha}{2}} < \frac{\overline{X} - a}{\sigma}\sqrt{n} < t^{N(0,1)}_{\frac{1+\alpha}{2}}\right\} =$$