05.04.24. Лекция 7.

⑤ Методы построения точечных оценок

Мы изучим 2 метода:

а) Метод моментов,

б) метод max правдоподобия.

I. Метод моментов

Пусть 1) X – с.в., з-н распределения известен с точностью до вектора неизв. параметров $\vec{\theta} = (\theta_1, ..., \theta_r)$;

2) $\exists$ r первых моментов с.в. X.

Метод моментов:

1) Найдем выражения для r первых начальных моментов с.в. X.
Т.к. закон распр-я с.в. X зависит от пар-ров $\theta_1, ..., \theta_r$, то и теор. моменты могут зависеть от них:

$$m_k(\theta_1, ..., \theta_r) = M[X^k], \; k = \overline{1;r}.$$

2) Приравняем теор. моменты к их выборочным аналогам.
Получим систему из r уравнений (в общем случае нелинейных):

$$\begin{cases} m_1(\theta_1, ..., \theta_r) = \hat{m}_1(\vec{X}) \\ \cdots \\ m_r(\theta_1, ..., \theta_r) = \hat{m}_r(\vec{X}) \end{cases} \quad (*)$$

3) ~~$P\theta_1 = 0$~~
Решим систему (*) отн-но параметров $\theta_1, ..., \theta_r$:

$$\begin{cases} \theta_1 = \hat{\theta}_1(\vec{X}) \\ \cdots \\ \theta_r = \hat{\theta}_r(\vec{X}) \end{cases}$$ – искомые точечные оценки.

Замечание: 1) Некоторые уравнения системы (*) иногда записываются отн. центральных, а не начальных моментов:

$$\mathring{m}_k(\theta_1, ..., \theta_r) = \hat{\mathring{m}}_k(\vec{X}).$$

Выбор м/у центр. и нач. моментами делают исходя из того, что система (*) должна решаться как можно проще

2) Поскольку выборочные моменты $\hat{m}_k(\vec{X})$, $\hat{\overset{\circ}{m}}_k(\vec{X})$ явл. ~~сост~~ состоятельными оценками своих теор. аналогов, то при условии непр. зависимости решения системы (*) от выб. моментов оценки пар-ров, полученные с исп. этого метода, будут сост.

3) Т. к. при $k \geq 2$ выб. моменты явл. смещёнными оценками своих теор. аналогов, то и оценки, полученные по методу моментов, также могут быть смещёнными.

Пример

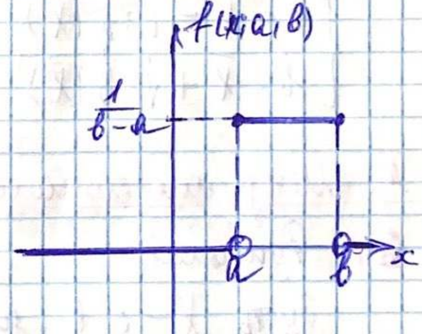
Пусть $X \sim R[a, b]$,

где a, b — неизвестны

Построим точечные оценки для a, b с исп. метода моментов.

Решение

$$f(x, a, b) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$



1) Найдем выражения для $r = 2$ теор. моментов.

$$m_1(a, b) = MX = \frac{a+b}{2}$$

$$\overset{\circ}{m}_2(a, b) = DX = \frac{(b-a)^2}{12}$$

2) Соотв. выборочные моменты

$$\hat{m}_1(\vec{X}) = \bar{X}$$

$$\hat{\overset{\circ}{m}}_2(\vec{X}) = \hat{\sigma}^2(\vec{X}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\bar{X} - X_i)^2$$

Составим систему

$$\begin{cases} \frac{a+b}{2} = \bar{X} \\ \frac{(b-a)^2}{12} = \hat{\sigma}^2(\vec{X}) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b = 2\overline{X} \\ (b-a)^2 = 12\hat{\sigma}^2(\vec{X}) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2\overline{X} - b \\ (2b - 2\overline{X})^2 = 12\hat{\sigma}^2(\vec{X}) \end{cases}$$

$$4(b-\overline{X})^2 = 12\hat{\sigma}^2(\vec{X})$$

$$b - \overline{X} = \pm\sqrt{3}\,\hat{\sigma}(\vec{X})$$

$$b = \overline{X} \pm \sqrt{3}\,\hat{\sigma}(\vec{X})$$

$$\cancel{a = \overline{X}}$$

$$\begin{cases} a = \overline{X} \mp \sqrt{3}\,\hat{\sigma}(\vec{X}) \\ b = \overline{X} \pm \sqrt{3}\,\hat{\sigma}(\vec{X}) \end{cases}$$

$\hat{\sigma}(\vec{X}) > 0$, $a < b \Rightarrow$ выбираем следующее решение:

$$\begin{cases} a = \overline{X} - \sqrt{3}\,\hat{\sigma}(\vec{X}) \\ b = \overline{X} + \sqrt{3}\,\hat{\sigma}(\vec{X}) \end{cases} \quad \text{– Ответ}$$

II. Метод максимального правдоподобия

~~Опр. Функция~~

Пусть X – с. в., закон распределения которой известен с точностью до $\vec{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_r)$ неизв. пар-ов.

Опр. Функцией правдоподобия случ. выборки $\vec{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ из ген. сов-ти X наз. ф-я

$$L(\vec{X}, \vec{\theta}) = p(X_1, \vec{\theta}) \cdot \ldots \cdot p(X_n, \vec{\theta}),$$

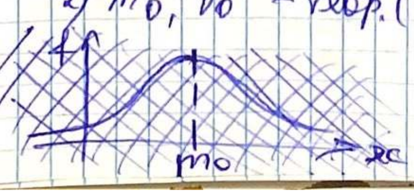
где $$p(X_i, \vec{\theta}) = \begin{cases} P\{X = X_i\}, \text{ если } X \text{ – дискр. с. в.} \\ f(X_i, \vec{\theta}), \text{ если } X \text{ – непр. с. в.} \end{cases}$$

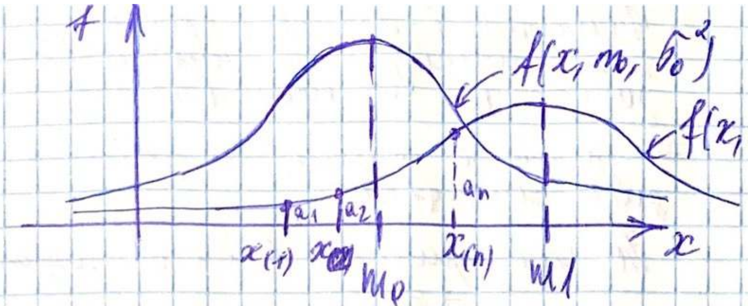
(здесь f – ф-я пл-ти с. в. X)

Пример.

Пусть 1) $X \sim N(m, \sigma^2)$, где m, σ^2 – неизв.

2) m_0, σ_0^2 – теор. ("истинные") значения неизв. пар-в.





Предположим в кач-ве неизв. пар-ров выбрали приближ. значения

$$m = m_1, \quad \sigma^2 = \sigma_1^2.$$

Понаблюдаем за реализациями с.в. X.
Т.к. m_0, σ_0^2 — истинные значения параметров, то реализации с.в. X будут группироваться в районе m_0.

Тогда $L(\vec{x}, m_1, \sigma_1^2) = f(x_1, m_1, \sigma_1^2)\cdot\ldots\cdot f(x_n, m_1, \sigma_1^2) = a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n$

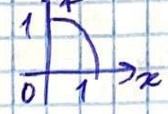
Из иллюстрации видно, что чем ближе значения m_1, σ_1^2 к соотв. теор. значениям m_0, σ_0^2, тем большее значение принимает ф-я $L(\vec{x}, m_1, \sigma_1^2)$.

Метод макс. правдоподобия

в качестве точечных оценок параметров принимают такие значения, которые максимизируют функцию правдоподобия при всевозможных реализациях случ. выборки, т.е.

$$\hat{\vec{\theta}}(\vec{X}) = \arg\max_{\vec{\theta}} L(\vec{X}, \vec{\theta}).$$

$f(x) = 1 - x^2$, $x = [0, 1]$



$\max_x f(x) = 1$

$\arg\max_x f(x) = 0$

Замечание 1) Часто для решения задачи

$$L(\vec{X}, \vec{\theta}) \to \max_{\theta}$$

рассм. необх. условия extr ФНП:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(\vec{X}, \vec{\theta})}{\partial \theta_1} = 0, \\ \dots \\ \dfrac{\partial L(\vec{X}, \vec{\theta})}{\partial \theta_r} = 0. \end{cases} \quad (**)$$

— наз. ур-ями правдоподобия.

(это возможно, если L как ф-я неизв. пар. явл. дифф.)

2) Функция L является произведением как минимум n множителей, зависящих от неизв. пар-ров
$\Rightarrow$ диффер-е ф-ии L по этим пар-рам затруднительно.
По этой причине вместо задачи

$$L(\vec{X},\vec{\theta}) \longrightarrow \max_{\vec{\theta}}$$

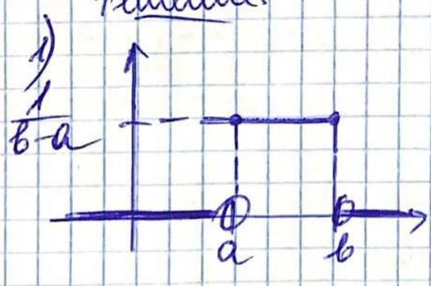
часто рассм. экв. задачу

$$\ln L(\vec{X},\vec{\theta}) \longrightarrow \max_{\vec{\theta}}.$$

(Эти задачи экв-ны т.к. $\ln$ – монотонно возрастающая ф-я)
В этом случае ур-я правдоподобия примут вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \ln L(\vec{X},\vec{\theta})}{\partial \theta_1} = 0, \\ \dfrac{\partial \ln L(\vec{X},\vec{\theta})}{\partial \theta_r} = 0 \end{cases}$$

Пример
$X \sim R[a,b]$,
где a, b – неизв. пар-ры.
Построим для a, b оценки max правдоподобия.
Решение.
1)



$$f(x,a,b) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a,b] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

2) Составим ф-ю правдоподобия

$$L(\vec{X},a,b) = \{X\text{–непр. с.в.}\} = f(X_1,a,b)\cdot\ldots\cdot f(X_n,a,b) =$$

ошибка
$$= \frac{1}{b-a}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{b-a} = \frac{1}{(b-a)^n}$$

$$\ln L(\vec{X},a,b) = -n\ln(b-a)$$

Уравнение правдоподобия

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \ln L}{\partial a} = \dfrac{n}{b-a} = 0 \\ \dfrac{\partial \ln L}{\partial b} = -\dfrac{n}{b-a} = 0 \end{cases} \Rightarrow n = 0 \ (?!)$$

3) Выше выражение для L записано неверно, т.к. если хотя бы один элемент выборки $\notin [a, b]$, то $f(\ldots) = 0$ и, след., $L(\vec{X}, a, b) = 0$

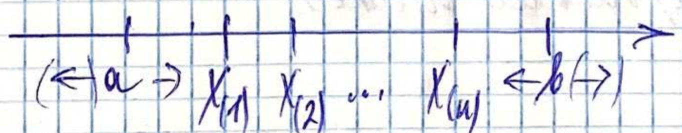
Правильное выражение:

$$L(\vec{X}, a, b) = \begin{cases} \dfrac{1}{(b-a)^n}, & \text{если } X_{(1)} \geq a,\ X_{(n)} \leq b \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Дифференцирование L по a, b затруднительно, т.к. от a, b зависят границы области, где $f(\ldots) > 0$.

Попробуем решить задачу максимизации L "в лоб", без уравнений правдоподобия.

Из первой строчки выражения для L видно, что чем меньше разность $(b-a)$, тем большие значения принимает L.



~~При сближении a и b возможна сит~~

Если $a \leq X_{(1)}$ и $b \geq X_{(n)}$ (***), то $L > 0$. При сближении a и b возможна ситуация, когда a окажется правее $X_{(1)}$ или b окажется левее $X_{(n)}$ — в любом из этих случаев $L = 0$.

Т.о. нужно a и b максимально сблизить так, чтобы при этом выполнялись нер-ва (***).

Т.о. $\hat{a}(\vec{X}) = X_{(1)}$, $\hat{b}(\vec{X}) = X_{(n)}$.

Замечание: Как видно, оценки для пар-ров a и b, полученные с исп. метода моментов и метода max правдоподобия, различаются.

Интервальные оценки

① Основные понятия

Рассматривается основная задача МС:

Дано: с.в. X, закон распределения которой известен с точностью до в-ра $\vec{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_r)$ неизв. пар-в.

Требуется: оценить значение $\vec{\theta}$.

Ранее для решения этой задачи использовалось построение точ. оценок. Далее в кач-ве значения неизв. пар-ра θ_j принималось

$$\theta_j := \hat{\theta}_j(\vec{x}),$$

где $\hat{\theta}_j$ – соотв. точ. оценка.

Недостатком этого подхода явл. отсутствие вероятностных характеристик точности оценивания неизв. пар-ра.

Для исправления этой ситуации разработаны интервальные оценки.

Опр. Интервальной оценкой.