Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

Отчет по лабораторной работе №2 по курсу «Математическая статистика»

Тема Интервальные оценки

Студент Фам Минь Хиеу

Группа ИУ7-62Б

Оценка (баллы) ______

Преподаватель Власов П. А.

Москва — 2024 г.

Задание

Цель работы: Построение доверительных интервалов для математического ожидания и дисперсии нормальной случайной величины.

1. Для выборки объема n из нормальной генеральной совокупности X реализовать в виде программы на ЭВМ

   (a) вычисление точечных оценок $\hat{\mu}(\vec{X}_n)$ и $S^2(\vec{X}_n)$ математического ожидания MX и дисперсии DX соответственно;

   (b) вычисление нижней и верхней границ $\underline{\mu}(\vec{X}_n)$, $\overline{\mu}(\vec{X}_n)$ для γ-доверительно интервала для математического ожидания MX;

   (c) вычисление нижней и верхней границ $\underline{\sigma}^2(\vec{X}_n)$, $\overline{\sigma}^2(\vec{X}_n)$ для γ-доверительн интервала для дисперсии DX;

2. вычислить $\hat{\mu}$ и S^2 для выборки из индивидуального варианта;

3. для заданного пользователем уровня доверия γ и N – объёма выборки из индивидуального варианта:

   (a) на координатной плоскости Oyn построить прямую $y = \hat{\mu}(\vec{x_N})$, также графики функций $y = \hat{\mu}(\vec{x}_n)$, $y = \underline{\mu}(\vec{x}_n)$ и $y = \overline{\mu}(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N;

   (b) на другой координатной плоскости Ozn построить прямую $z = S^2(\vec{x_N})$, также графики функций $z = S^2(\vec{x}_n)$, $z = \underline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ и $z = \overline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N.

1 Теоретические сведения

1.1 Определение γ-доверительного интервала для значения параметра распределения случайной величины

Дана случайная величина X, закон распределения которой известен с точностью до неизвестного параметра θ.

Интервальной оценкой с уровнем доверия γ (γ-доверительной интервальной оценкой) параметра θ называют пару статистик $\underline{\theta}(\vec{X}), \overline{\theta}(\vec{X})$ таких, что

$$P\{\underline{\theta}(\vec{X}) < \theta < \overline{\theta}(\vec{X})\} = \gamma$$

Поскольку границы интервала являются случайными величинами, то для различных реализаций случайной выборки $\vec{X}$ статистики $\underline{\theta}(\vec{X}), \overline{\theta}(\vec{X})$ могут принимать различные значения.

Доверительным интервалом с уровнем доверия γ (γ-доверительным интервалом) называют интервал $(\underline{\theta}(\vec{x}), \overline{\theta}(\vec{x}))$, отвечающий выборочным значениям статистик $\underline{\theta}(\vec{X}), \overline{\theta}(\vec{X})$.

1.2 Формулы для вычисления границ γ-доверительного интервала для математического ожидания и дисперсии нормальной случайной величины

Формулы для вычисления границ γ-доверительного интервала для математического ожидания:

$$\underline{\mu}(\vec{X}_n) = \overline{X} + \frac{S(\vec{X}) t^{St(n-1)}_{\frac{1-\gamma}{2}}}{\sqrt{n}} \tag{1.1}$$

$$\overline{\mu}(\vec{X}_n) = \overline{X} + \frac{S(\vec{X}) t^{St(n-1)}_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}} \tag{1.2}$$

$\overline{X}$ – выборочное среднее;

$S(\vec{X}) = \sqrt{S^2(\vec{X})}$ – квадратный корень из исправленной выборочной дисперсии;

n – объем выборки;

γ – уровень доверия;

$t^{St(n-1)}_{\alpha}$ – квантиль уровня α распределения Стьюдента с $n-1$ степенями свободы.

Формулы для вычисления границ γ-доверительного интервала для дисперсии:

$$\underline{\sigma}^2(\vec{X}_n) = \frac{(n-1)S^2(\vec{X})}{t^{\chi^2(n-1)}_{\frac{1+\gamma}{2}}} \tag{1.3}$$

$$\overline{\sigma}^2(\vec{X}_n) = \frac{(n-1)S^2(\vec{X})}{t^{\chi^2(n-1)}_{\frac{1-\gamma}{2}}} \tag{1.4}$$

$S^2(\vec{X})$ – исправленная выборочная дисперсия;

n – объем выборки;

γ – уровень доверия;

$t^{\chi^2(n-1)}_{\alpha}$ – квантиль уровня α распределения $\chi^2(n-1)$ с $n-1$ степенями свободы.

2 Практическая часть

2.1 Код программы

```
X = [-14.34,-16.97,-14.09,-14.74,-16.69,-13.85,-15.55,-14.62,-13.30...
 ,-15.52,-14.75,-16.51,-17.15,-16.87,-15.06,-13.60,-14.48,-14.71,-14.17,...
 -13.88,-14.55,-15.37,-14.81,-16.05,-17.06,-15.86,-15.12,-15.98,-14.16,...
 -15.81,-15.06,-16.19,-16.22,-16.19,-14.87,-15.62,-15.86,-15.25,-16.34,...
 -14.44,-14.72,-15.17,-15.24,-14.44,-15.93,-14.87,-16.53,-15.76,-15.12,...
 -12.91,-16.06,-16.06,-14.89,-15.57,-13.59,-16.84,-13.88,-14.33,-15.45,...
 -16.58,-16.05,-14.34,-13.55,-16.78,-14.15,-14.28,-14.40,-13.98,-16.23,...
 -15.35,-14.77,-15.61,-15.59,-15.64,-14.76,-17.18,-15.13,-15.01,-14.21,...
 -13.91,-16.55,-15.44,-14.03,-16.44,-15.57,-15.07,-16.28,-16.30,-15.74,...
 -14.03,-14.85,-15.73,-15.81,-14.42,-14.14,-15.14,-15.49,-16.42,-14.22,...
 -14.20,-17.17,-15.82,-14.96,-14.75,-14.98,-13.64,-14.00,-17.29,-14.51,...
 -16.18,-15.70,-15.07,-14.28,-14.55,-13.85,-15.36,-15.74,-14.61,-16.32,-15.34];

N = length(X);

mu = mean(X);
fprintf('mu = %.6f\n', mu);

s_2 = var(X);
fprintf('s_2 = %.6f\n', s_2);

gamma = 0.9;
alpha = (1.0 - gamma) / 2.0;
fprintf('gamma = %.2f, apha = %.6f, N = %d\n', gamma, alpha, N);

[lmu, umu] = getMXBorders(gamma, s_2, mu, N);
fprintf('%.6f < MX < %.6f\n', lmu, umu);

[ls, hs] = getDXBorders(gamma, s_2, N);
fprintf('%.6f < DX < %.6f\n', ls, hs);

figure(1);
grid on;
hold on;
xlabel('n');
ylabel('\mu');
graphMX(X, N, gamma);

figure(2);
grid on;
hold on;
xlabel('n');
```

```
ylabel('\sigma');
graphDX(X, N, gamma);
```

```
function [lm, hm] = getMXBorders(gamma, s_2, mu, n)

    alpha = (1.0 + gamma) / 2.0; % alpha1 = alpha2

    quantile = tinv(alpha, n - 1);

    border = (sqrt(s_2) * quantile) / sqrt(n);

    lm = mu - border;
    hm = mu + border;
end
```

```
function [ls, hs] = getDXBorders(gamma, s_2, n)

    alpha1 = (1 + gamma) / 2;
    alpha2 = (1 - gamma) / 2;

    quantile1 = chi2inv(alpha1, n - 1);
    quantile2 = chi2inv(alpha2, n - 1);

    ls = ((n - 1) * s_2) / quantile1;
    hs = ((n - 1) * s_2) / quantile2;
end
```

```
function graphMX(X, n, gamma)
    mus = zeros(n, 1);
    s2s = zeros(n, 1);
    lowerMus = zeros(n, 1);
    upperMus = zeros(n, 1);

    for i = 1:n
        currentSample = X(1:i);
        [mus(i)] = mean(currentSample);
        [s2s(i)] = var(currentSample);
        [lowerMus(i), upperMus(i)] = getMXBorders(gamma, s2s(i), mus(i), i);
    end
    plot([1, n], [mus(n), mus(n)], 'b');
    plot(lowerMus, 'g--');
    plot(upperMus, 'r-.');
    plot(mus, 'm:', 'Linewidth',2);
    legend('\mu\^(x_N)', '_{--}\mu^(x_n)', '^{--}\mu^(x_n)', '\mu\^(x_n)');
end
```

```
function graphDX(X, n, gamma)
    s2s = zeros(n, 1);
```

```
    lowerSigma = zeros(n, 1);
    upperSigma = zeros(n, 1);

    for i = 1:n
        currentSample = X(1:i);
        [s2s(i)] = var(currentSample);
        [lowerSigma(i), upperSigma(i)] = getDXBorders(gamma, s2s(i), i);
    end

    plot([1, n], [s2s(n), s2s(n)], 'b');
    plot(lowerSigma, 'g--');
    plot(upperSigma, 'r-.');
    plot(s2s, 'm:', 'Linewidth',2);
    legend('S^2(x_N)', '_{--}\sigma^2(x_n)', '^{--}\sigma^2(x_n)', 'S^2(x_n)');
end
```

2.2 Результат работы программы

Вывод программы

$$\hat{\mu}(\vec{x}_n) = -15.220917$$
$$(\underline{\mu}(\vec{x}_n); \overline{\mu}(\vec{x}_n)) = (-15.369810, -15.072023)$$

$$S^2(\vec{x}_n) = 0.968029$$
$$(\underline{S^2}(\vec{x}_n); \overline{S^2}(\vec{x}_n)) = (0.791935, 1.214997)$$

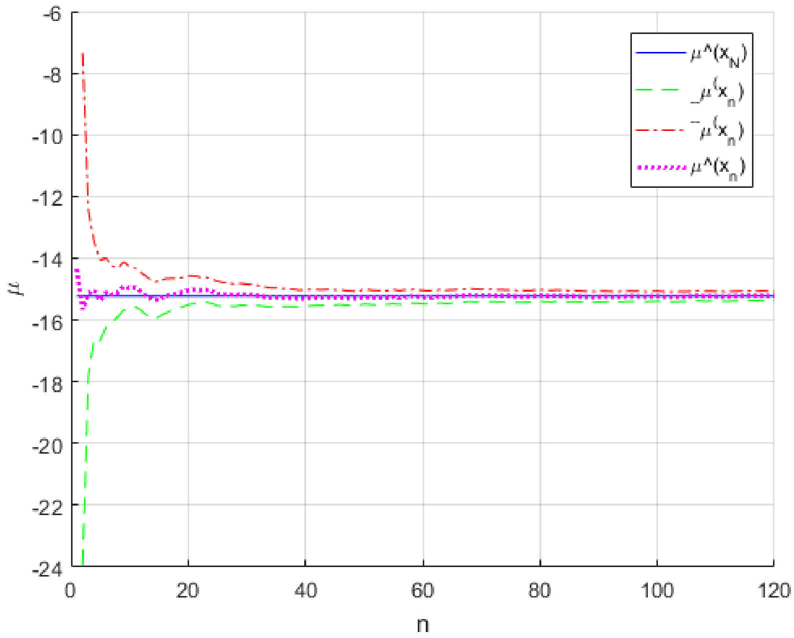

Рисунок 2.1 – Графики для математического ожидания

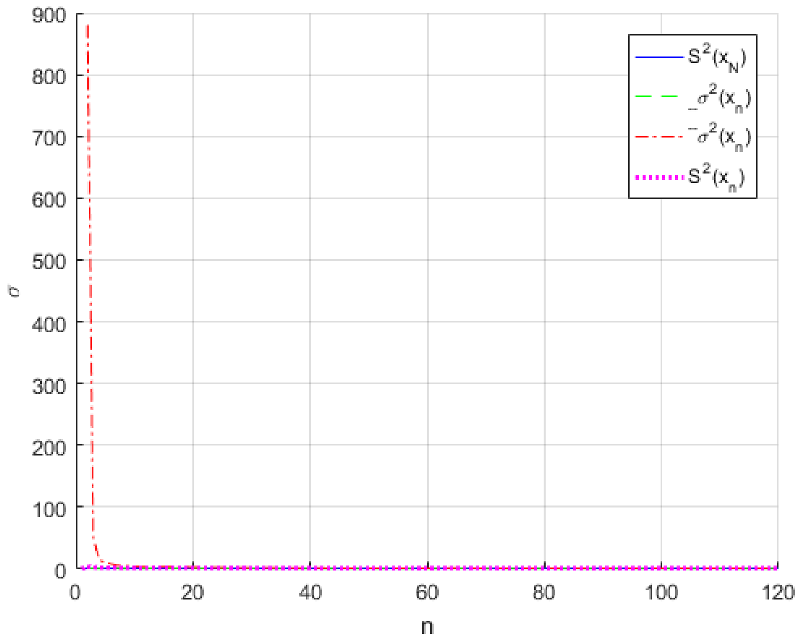

Рисунок 2.2 – Графики для дисперсии