08.02.24. семинар 1.

л/р : $\frac{3}{9/10}$; вначале – семинары в часы л/р.
РК – 9/10 нед.

Предельные теоремы теории вероятностей.

① неравенства Чебышева

Th1 1е нер-во Чебышева

Пусть 1) $X \geq 0$ (т.е. $P\{X<0\}=0$)
2) $\exists MX$

Тогда $\forall \varepsilon > 0$ $P\{X \geq \varepsilon\} \leq \frac{MX}{\varepsilon}$ – 1е нер-во Чебышева

Th2 2е нер-во Чебышева

Пусть 1) X – сл. вел.
2) $\exists DX$

$\exists DX \Rightarrow \exists MX$

Тогда $\forall \varepsilon > 0$ $P\{|X-MX| \geq \varepsilon\} \leq \frac{DX}{\varepsilon^2}$ – 2е нер-во Чебышева

№1 По результатам большого числа наблюдений средний суточный расход воды в нек. населенном пункте составляет 50000 л.

а) Оценить вер-ть того, что в нек. случ. выбр. день расход воды превысит 150000 л.

б) Как изм-ся эта оценка, если доп-но известно, что ср.кв. отклонение сут. расхода воды сост-ет 5000 л.

Решение:

1) Пусть X – сл. величина, прин. значения, равные сут. расходу воды в этом нас. пункте, л.

Тогда
1) $X \geq 0$
2) $MX = 50000$
3) $DX = (5000)^2 = 25000000 (л^2) = 25 \cdot 10^6 (л^2)$

Нужно оценить $P\{X \geq 150000\}$.

2) $X \geq 0 \Rightarrow$ 1е нер-во Чебышева

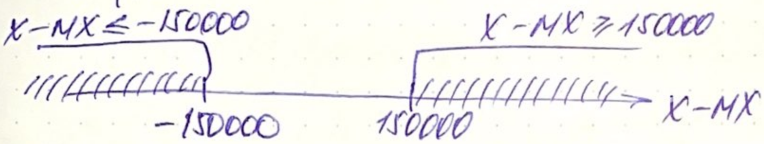
$$P\{X \geq \varepsilon\} \leq \frac{MX}{\varepsilon}$$

$$P\{X \geq 150000\} \leq \frac{50000}{150000} = \frac{1}{3}$$

3) 2^e нер-во Чебышева

$$\{ P\{|X-MX|\geq \varepsilon\} \leq \frac{DX}{\varepsilon^2}$$

$$P\{X \geq 150000\} = P\{X-MX \geq 150000-MX\} \leq P\{|X-MX| \geq 150000-MX\} \ominus$$



$$\ominus P\{|X-MX| \geq 150000-MX\} \leq \left\{ \begin{matrix} 2^e \text{ нер-во} \\ \text{Чебышева} \end{matrix} \right\} \leq \frac{DX}{(150000-MX)^2} =$$

$$= \frac{25\cdot 10^6}{10^{10}} = \frac{25}{10^4} = \frac{1}{400}$$

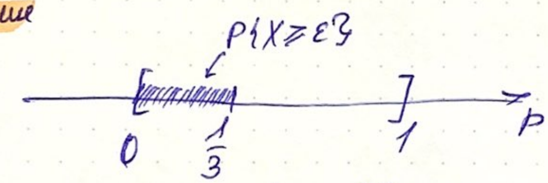
$$\Rightarrow P\{X \geq 150000\} \leq \frac{1}{400}$$

Ответ: а) с исп. $1^{го}$ нер. Чеб: $P\{X\geq \varepsilon\} \leq \frac{1}{3}$

б) с исп. $2^{го}$ нер. Чеб: $P\{X\geq \varepsilon\} \leq \frac{1}{400}$

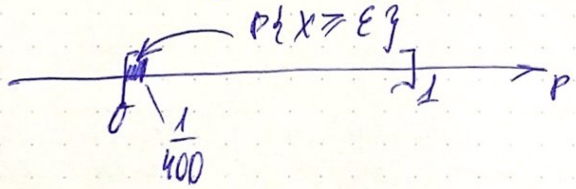
Замечание

(а)



– слишком неточно

(б)



– более полезная оценка, т.к. диапазон уже

Если в (б) более широкий диапазон – противоречие.

2^e нер. Чебышева дало сущ-но более точную оценку, т.к. оно дополнительно исп. инф. о величине дисперсии.

№2

Известно, что $X\geq 0$, $MX=1$, $\sigma=0.2$

С исп. 1-го и 2-го нер-в Чебышева оценить вер-ти событий: (а) $\{0.5 \leq X < 1.5\}$

(б) $\{0.75 \leq X < 1.35\}$

(в) $\{X < 2\}$.

Решение:

а.1) $P\{0.5 \leq X < 1.5\} \leq \left\{ \begin{matrix} P\{0.5 \leq X\} \leq \\ P\{X < 1.5\} \geq \end{matrix} \right.$

не дает оценки

а.2) $P\{0.5 \leq X < 1.5\} = P\{0.5-MX \leq X-MX < 1.5-MX\}$.

② Закон больших чисел

Пусть 1) $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ – (бесконечная) последовательность сл. вел.

2) $\exists MX_i = m_i$, $i \in \mathbb{N}$

Опр. Говорят, что посл-ть сл. вел. $X_1, X_2, \dots$ удовлетворяет (слабому) закону больших чисел, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_i m_i\right| \geq \varepsilon\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad (*)$$

Замечание

1) Обозначим $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$

$$\begin{cases} \overline{X}_1 = X_1 \\ \overline{X}_2 = \frac{1}{2}(X_1 + X_2) \\ \overline{X}_3 = \frac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3) \\ \dots \end{cases}$$

2) С исп. этого обозначения условие (*) можно записать в виде

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P\{|\overline{X}_n - \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_i}_{\text{детерм. величина}}| \geq \varepsilon\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Вып-е ЗБЧ для посл-ти $X_1, X_2, \dots$ означает, что при достаточно больших n сл. вел. $\overline{X}_n$ теряет случайный характер, вырождаясь в детерм. величину.

Th Чебышева (достаточное условие выполнимости ЗБЧ для посл-ти сл. вел.)

Пусть 1) $X_1, X_2, \dots$ – посл-ть попарно нез. с. в.

2) $\exists MX_i = m_i$, $i \in \mathbb{N}$

3) $\exists DX_i = \sigma_i^2$, $i \in \mathbb{N}$

4) $\exists C > 0 \ \forall i \in \mathbb{N} \ \sigma_i^2 \leq C$.
(дисперсии огр. в совок-ти)

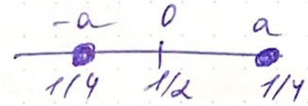
Тогда посл-ть $X_1, X_2, \dots$ удовл. ЗБЧ.

№1 Дана посл-ть $X_1, X_2, \dots$ незав. сл. вел. Выяснить, удовл-ли эта посл-ть ЗБЧ, если зак. распр-я с.в. X_i задан табл., где $a = const > 0$

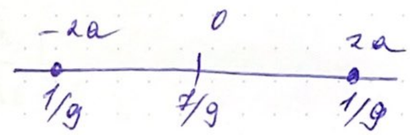
X_i	$-ia$	0	ia
p	$\frac{1}{(i+1)^2}$	$1-\frac{2}{(i+1)^2}$	$\frac{1}{(i+1)^2}$

Замеч.

X_1	$-a$	0	a
p	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$



X_2	$-2a$	0	$2a$
p	$\frac{1}{9}$	$\frac{7}{9}$	$\frac{1}{9}$



...

Решение:

Проверим условие th Чебышева

15.02.24: 1) $X_1, X_2, \dots$ - пос. незав. с.в. (по усл.)

2) $\exists MX_i = 0$

3) $DX_i = M[X_i^2] - \cancel{(MX_i)^2}^{\,0} = M[X_i^2] = 2(ia)^2\frac{1}{(i+1)^2} + 0 + (ia)^2\frac{2}{(i+1)^2} =$
$= \frac{(ia)^2}{2(i+1)^2}$

(а) $\frac{i}{i+1} \le 1 \Rightarrow \left(\frac{i}{i+1}\right)^2 \le 1 \Rightarrow \sigma_i^2 \le 2a^2 = C$

(б) $\lim\limits_{i\to\infty} \sigma_i^2 = 2a^2 \lim\limits_{i\to\infty}\left(\frac{i}{i+1}\right)^2 = 2a^2 \Rightarrow \sigma_i^2, i \in N$ - огр. посл-ть

Т.о. дисперсии ограничены в совок-ти $\Rightarrow X_1, X_2, \dots$ удовл. ЗБЧ

15.02.24. Семинар 2

Имеется игральная кость со смещенным центром. Сколько необх. провести опытов бросания кости, чтобы установить вероятность выпадения "6" с точностью $\delta = 0.01$ и доверять получ. оценке с вероятностью $\alpha = 0.99$?

Решение:

$$P\{|\eta - p| < \delta\} \ge \alpha$$

где η – оценка, получ. из опыта подбрас-я.
p – вер-ть выпадения "6".
n – кол-во подбрасываний

$$p = \frac{n_6}{n}$$

$$M(\eta) = p$$

~~2е нер-во Чебышева:~~

$$\eta = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k, \text{ где } \xi_k = \begin{cases} 1, & \text{если в эксп. выпала "6"} \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

- дискр. сл. в.
- $P\{\xi_k\} = p$

$$M(\eta) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M(\xi_k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p = p$$

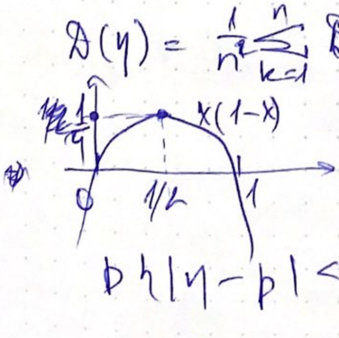
2е нер-во Чебышева:

$$\forall \varepsilon > 0: \; P\{|\xi - M\xi| \ge \varepsilon\} \le \frac{D\xi}{\varepsilon^2}$$

$$\Leftrightarrow P\{|X - MX| < \varepsilon\} \ge 1 - \frac{DX}{\varepsilon^2}$$

$$P\{|\eta - p| < \delta\} \ge 1 - \frac{D\eta}{\delta^2}$$

$$D(\eta) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} D\xi_k = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} p(1-p) = \frac{np(1-p)}{n^2} = \frac{p(1-p)}{n}$$



$$p(1-p) \le \frac{1}{4}$$

$$P\{|\eta - p| < \delta\} \ge 1 - \frac{p(1-p)}{n\delta^2} \ge 1 - \frac{1}{4n\delta^2} \ge \alpha$$

$$1 - \frac{1}{4n\delta^2} \ge \alpha \qquad 0.01 \le \frac{1}{4n \cdot 10^{-4}}$$

$$\boxed{n \ge \frac{1}{4 \cdot 10^{-6}} = \frac{1000000}{4} = 250000}$$

~~ЗБЧ~~

~~попарно незав. с.в.~~

Пусть ~~1) $X_1, X_2, \dots$ — посл-ть с.в., опр. на одном вер. пр-ве.~~

~~2) $\exists MX_i = m_i,\ i \in N$~~

~~Говорят, что эти~~

ЗБЧ.

Пусть 1) дана посл-ть незав с.в. $\xi_1, \xi_2, \dots$

2) $\exists M\xi_k,\ \exists D\xi_k,\ k \in N$

3) $\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} D\xi_k \to 0$

Тогда ~~нужна~~ $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M\xi_k$

Если $M\xi_k = a$, то $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k \xrightarrow{P} a$

Если $D\xi_k \leq C$, ЗБЧ справ.

$$\xi_k \xrightarrow[n\to\infty]{P} \xi \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0:\ P\{|\xi-\xi_k|>\varepsilon\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

N

Задан закон распределения попарно незав. с.в. $\xi_1, \xi_2, \dots$. Выяснить, справедлив ли ЗБЧ для указан

a_{kj}	$-\sqrt{k}$	0	$\sqrt{k}$
$P\{\xi_k = a_{kj}\}$	$\frac{1}{2k}$	$1-\frac{1}{k}$	$\frac{1}{2k}$

Решение:

Проверка ~~нужна~~ усл. th Чебышева

$$M\xi_k = \sum_{j=1}^{3} a_{kj} P\{\xi_k = a_{kj}\} = -\sqrt{k}\cdot\frac{1}{2k} + 0 + \sqrt{k}\cdot\frac{1}{2k} = 0$$

$$D\xi_k = M(\xi_k^2) - 0 = \sum_{j=1}^{3} a_{kj}^2 P\{\xi_k = a_{kj}\} = k\cdot\frac{1}{2k} + 0 + k\cdot\frac{1}{2k} = 1$$

$\Rightarrow$ ЗБЧ вып-ся

[N] ———— " ————

a_{k_j}	$-\sqrt{\ln k}$	$\sqrt{\ln k}$
$P\{\xi_k = a_{k_j}\}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Решение:

$$M\xi_k = \sum_{j=1}^{2} a_{k_j} \cdot P\{\xi_k = a_{k_j}\} = -\sqrt{\ln k}\cdot\frac{1}{2} + \sqrt{\ln k}\cdot\frac{1}{2} = 0$$

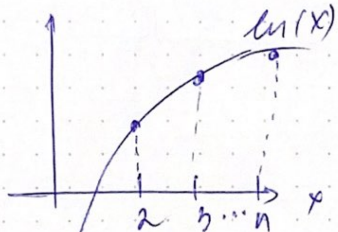
$$D[\xi_k] = M[\xi_k^2] - 0 = \sum_{j=1}^{2} a_{k_j}^2 \cdot P\{\xi_k = a_{k_j}\} =$$

$$= \ln k \, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln k = \ln k$$

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \ln k = \frac{1}{n^2}(\ln(1) + \dots + \ln(n)) \le$$ оценить

1) ф-ла Стирлинга $n! \sim \sqrt{2\pi n}\cdot\frac{n^n}{e^n}$

2) интеграл



$$\ln 1 + \dots + \ln n \le \int_1^{n+1} \ln x \, dx$$

$$\ln k \le \int_k^{k+1} \ln x \, dx$$

$$\int_1^{n+1} \ln x \, dx = x \ln x \Big|_1^{n+1} - \int_1^{n+1} x \cdot \frac{1}{x} dx =$$

$$= x \ln x \Big|_1^{n+1} - \int_1^{n+1} dx = (n+1)\cdot\ln(n+1) - n$$

$$\Rightarrow \frac{\dots}{n^2} \le \frac{(n+1)\ln(n+1) - n}{n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

4/2

Дана пос-ть незав. с.в. $X_1, X_2, \dots$, причем

$$f_{X_i}(t) = c_i e^{-t^2/i}, \quad i \in \mathbb{N}$$

Проверить, удовлетворяет ли эта последовательность ЗБЧ.

<u>Решение:</u>

X_i — с.в., расп. по ~~нормально станд. закону распр.~~ норм. закону

$X_i \sim N\left(0, \frac{i}{2}\right)$, т.е. $m_i = 0$,

$$\sigma_i^2 = \frac{i}{2}$$

$$c_i = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{i}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{\pi i}}$$

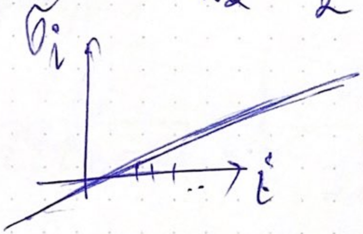
Проверим усл. th Чебышева:

1) $X_1, X_2, \dots$ — незав. с.в.

2) $\exists MX_i = 0$

3) ~~$DX_i = M[X_i^2] - (MX_i)^2 = M[X_i^2] =$~~

$DX_i = \frac{i}{2}$



$\Rightarrow \sigma_i^2$ не огр.

~~$\Rightarrow X_1, X_2, \dots$ не удовл. ЗБЧ?~~

4) Условие (3) th Чебышева можно заменить более слабым условием (см. док-во th Чеб.):

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 = 0 \qquad (3')$$

Проверим условие (3')

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2} = \frac{1}{2} \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot \frac{1+n}{2} = \frac{1}{4} \lim_{n \to \infty} \frac{1+n}{n} =$$

$$= \frac{1}{4} \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{4} \neq 0$$

$\Rightarrow \sigma_i^2$ не ограничены в совок.

но! нельзя утв., что не удов.

Замечание: если для посл-ти с.в. вып-ся усл. th Чеб., то (эта посл. удовл. з-ну ЗБЧ) говорят, что эта посл-ть удовл. з-ну б.ч. в форме Чебышева

В нашем примере посл-ть $X_1, X_2, \ldots$ не удовл. ЗБЧ в форме Чеб., но при этом, возможно, удовл. ЗБЧ.

5) Проверим, выполняется ли для посл. $X_1, X_2, \ldots$ определение ЗБЧ

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_i\right|\right.$$

22.02.23. Семинар 3. ~~Пределы~~

Авдейкина
ИУ7-63Б 1
МатСтат

5/2. $X_1, X_2, \dots$ – посл-ть попарно незав. с.в.;
ф-ция плотн распр. с.в. X_i имеет
вид
$$f_{X_i}(t) = C_i e^{-t^2/i}, \quad i \in \mathbb{N}$$
Выяснить, удовлетворяет ли посл-ть ЗБЧ?

1) $X_i \sim N(0, i/2)$

$MX_i = 0, \; DX_i = i/2$

2) Проверим усл. th Чеб.

1 +
2 +
3 ⊖

3) Используем вариант th Чеб., где вместо усл. (3)
используется условие
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} DX_i = 0 \quad (3') \; \ominus$$
$\Rightarrow$ посл-ть $X_1, X_2, \dots$ не удовл. ЗБЧ в форме Чеб.

4) Проверим для посл-ти $X_1, X_2, \dots$ определение ЗБЧ.
$$\forall \varepsilon > 0 \quad P\{ | \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i}_{\overline{X}_n} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_i | \geq \varepsilon \} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$
В тек. примере:
$m_i \equiv 0$, поэтому нужно проверить
условие
$$\forall \varepsilon > 0 \quad P\{ |\overline{X}_n| \geq \varepsilon \} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$
или экв. условие
$$\forall \varepsilon > 0 \quad P\{ |\overline{X}_n| \leq \varepsilon \} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \quad (*)$$
$X_i \sim N(0, i/2) \qquad \overline{X}_n = \frac{1}{n} X_1 + \dots + \frac{1}{n} X_n \Rightarrow \overline{X}_n \sim N(m, \sigma^2)$

$\bar m = M\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} MX_i = 0$

$\bar\sigma^2 = \cancel{D\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}\right]} = D\bar X_n = D\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n^2} D\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] =$

$= \{ X_i,\ i \in \mathbb{N}$ — нез. незав $\} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} DX_i =$

$= \frac{1}{n^2}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{2} = \frac{1}{n^2}\cdot\frac{n+1}{4}\cdot n = \frac{n+1}{4n} =$

$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4n}$

$\bar X_n \sim N\left(0, \frac{1+n}{4n}\right)$

усл-е (*): $P\{|\bar X_n| < \varepsilon\} = P\{-\varepsilon < \bar X_n < \varepsilon\} \approx$

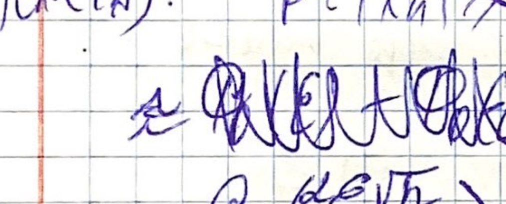
$\approx \Phi_0\left(\frac{\varepsilon - \bar m}{\bar\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{-\varepsilon - \bar m}{\bar\sigma}\right) =$

$= \Phi_0\left(\frac{2\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\right) + \Phi_0\left(\frac{2\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\right) =$

$= 2\Phi_0\left(\frac{2\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\right) =$

$\lim_{n\to\infty}\left(2\Phi_0\left(\frac{2\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\right)\right) = 2\Phi_0(2\varepsilon) \neq 1$

⇒



если $\varepsilon \neq \infty$

⇒ (*) не выполнено

⇒ определение ЗБЧ не выполнено ⇒ посл-ть $X_1, X_2, \ldots$ не удовл. ЗБЧ.

⑧ Центральная предельная теорема.

Th ЦПТ

Пусть 1) $X_1, X_2, \dots$ — посл-ть незав. одинак. распр. с.в.

2) $\exists M X_i = m$, $\exists D X_i = \sigma^2$, $i \in \mathbb{N}$

3) $$Y_n = \frac{\overline{X}_n - M[\overline{X}_n]}{\sqrt{D \overline{X}_n}} = \frac{\overline{X}_n - m}{\sigma / \sqrt{n}}, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Тогда

$$Y_n \xrightarrow[n \to \infty]{} Z \sim N(0,1)$$

$$\left(\text{т.е. } \forall x \in \mathbb{R} \quad F_{Y_n}(x) \xrightarrow[n \to \infty]{} F_Z(x) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt \right)$$

Пример

Проводится исследование большой партии однотипных лампочек с целью установления среднего времени их безотказной работы. Для этого из партии отбирают $n = 400$ лампочек и для каждой из них экспериментально находят время работы. Найти вероятность того, что наблюденное среднее будет отличаться от анализир. времени безотк. работы не более, чем на 10000 часов, если известно, что СКО времени работы составляет 80000 часов.

Решение:

1) Пусть X – сл. вел., принимающая значение, равное времени безотк. работы случайно выбранной лампочки из партии, час.

Тогда $MX = m$ – среднее время безотк. (ожид.) работы лампочек из партии

обозн.

неизвестно, хотим оценить.

$DX = \sigma^2 = (8000)^2 = (8 \cdot 10^3)^2$, час^2

Пусть X_i – с. в., принимающая значение, равное времени безотк. работы i-ой лампочки из выборки, час, $i=\overline{1,n}$

Тогда

а) $X_i \sim X$, $i=\overline{1,n}$

б) $MX_i = m$, $DX_i = \sigma^2$

в) $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ – выбл. среднее, кот. получено

Далее будем полагать, что $m \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

$P\{|\overline{X}_n - m| < 10^4\} = \delta$

$Y_n = \frac{\overline{X}_n - M\overline{X}_n}{\sqrt{D\overline{X}_n}} = \frac{\overline{X}_n - m}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

$P\{|\overline{X}_n - m| < \varepsilon\} = \left\{ \begin{array}{l} X_i \text{ – одинаково распр., незав., } MX_i = m \\ DX_i = \sigma \end{array} \right\} =$

$= P\left\{|Y_n| < \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right\} =$ 2

$= \left\{ n = 400 \gg 1 \Rightarrow \text{ЦПТ} \Rightarrow Y_n \underset{\text{прибл}}{\sim} N(0,1) \right\} \approx \Phi_0\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) -$

$- \Phi_0\left(\frac{-\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 2\Phi_0\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 2\Phi_0\left(\frac{10^4 \cdot 20}{8 \cdot 10^4}\right) = 2\cdot\Phi_0(2.5) =$

$\approx 2 \cdot 0.4938 = 0.9876.$

Пример. Проводится $n = 800$ испытаний по схеме Бернулли с вер. $p = 1/4$ успеха в отд. испытании. Оценить вер-ть того, что общее число k успехов в этой серии будет заключено в пром. $[150; 250]$

а) с исп. 2^го^ нер. Чеб.

б) с исп. инт. тк Муавра-Лапласа.

Решение:

1) с исп. 2^го^ нер Чебышева. $P\{|X - MX| \geq \varepsilon\} \leq \frac{DX}{\varepsilon^2}$

Пусть $X_i = \begin{cases} 1, & \text{если в } i\text{-м исп. успех} \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$

$i = \overline{1,n}$

Тогда общее число успехов $k = X = \sum_{i=1}^{n} X_i$

$P\{|X - MX| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{DX}{\varepsilon^2}$

$P\{150 \leq k \leq 250\} = P\{150 \leq X \leq 250\} =$

$MX = M\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} MX_i = np = 800 \cdot \frac{1}{4} = 200$

$DX = \ldots = npq = 800 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = 150$

$$= P\{150-200 \le X - MX \le 250-200\} =$$

$$= P\{-50 \le X - MX \le 50\} = P\{|X-MX| \le 50\} \ge$$

$$\ge 1 - \frac{150}{2500} = \frac{47}{50}$$

2) С исп. ф-лы М-Л

$$P\{k_1 \le k \le k_2\} \approx \Phi_0(x_2) - \Phi_0(x_1)$$

$$x_i = \frac{k_i - np}{\sqrt{npq}}$$

$$P\{150 \le k \le 250\} \approx$$

$$x_2 = \frac{250-200}{\sqrt{150}} = \frac{50}{\sqrt{150}} \approx \frac{50}{12} \approx 4$$

$$x_1 = \frac{150-200}{\sqrt{150}} \approx -4$$