Тогда $\varphi(\vec{X}) = e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}[(X_i - m_1)^2 - (X_i - m_0)^2]}$

$\left\{ \sum_{i=1}^{n}[(X_i - m_1)^2 - (X_i - m_0)^2] = \sum_{i=1}^{n}[X_i^2 - 2m_1X_i + m_1^2 - X_i^2 + 2m_0X_i - m_0^2] = \sum_{i=1}^{n}[-2(m_1 - m_0)X_i + m_1^2 - m_0^2] = -2(m_1 - m_0)\sum_{i=1}^{n}X_i + n(m_1^2 - m_0^2) \right.$

$\Rightarrow \varphi(\vec{X}) = e^{\frac{m_1 - m_0}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}X_i - \frac{n}{2\sigma^2}(m_1^2 - m_0^2)}$

2) Подберем константу C_φ из усл. (1)

$\left\{ P\{\varphi(\vec{X}) \geq C_\varphi | H_0\} = \alpha \quad (1) \right.$

$\varphi(\vec{X}) \geq C_\varphi \Leftrightarrow \ln \varphi(\vec{X}) \geq \ln C_\varphi \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left\{ \ln \varphi(\vec{X}) = \frac{m_1 - m_0}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}X_i - \frac{n}{2\sigma^2}(m_1^2 - m_0^2) \right\} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{m_1 - m_0}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}X_i - \frac{n}{2\sigma^2}(m_1^2 - m_0^2) \geq \ln C_\varphi \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{m_1 - m_0}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}X_i \geq \frac{n}{2\sigma^2}(m_1^2 - m_0^2) + \ln C_\varphi \Leftrightarrow \left\{ : \frac{m_1 - m_0}{\sigma^2} > 0 \right\} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}X_i \geq \underbrace{\frac{n}{2}(m_1 + m_0) + \ln C_\varphi \cdot \frac{\sigma^2}{m_1 - m_0}}_{C = const - обозн.}$

26.04.24. Лекция 10.

Константу C подберем из условия (1), которое примет вид:

$\alpha = P\{\varphi(\vec{X}) \geq C_\varphi | H_0\} = P\{\sum_{i=1}^{n}X_i \geq C \,|\, m = m_0\} =$

$= 1 - P\{\sum_{i=1}^{n}X_i < C \,|\, m = m_0\} = \left\{ \begin{array}{l} X_i \sim N(m_0, \sigma^2) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}X_i \sim N(nm_0, n\sigma^2) \\ m_0 - т.к. \ H_0 \\ n\sigma^2 - т.к. \ X_i, i=\overline{1,n} - н.з./о.в. \end{array} \right\} =$

$= 1 - \Phi\left(\frac{C - nm_0}{\sqrt{n\sigma^2}}\right)$

$\Rightarrow$ условие (1) принимает вид:

$1 - \Phi\left(\frac{C - nm_0}{\sqrt{n\sigma^2}}\right) = \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \Phi\left(\frac{C - nm_0}{\sqrt{n\sigma^2}}\right) = 1 - \alpha \Rightarrow \frac{C - nm_0}{\sqrt{n\sigma^2}} = u_{1-\alpha}$, где $u_{1-\alpha}$ квантиль ст. норм. расп. ур. $1-\alpha$

Т.о. $c = n m_0 + \sigma u_{1-\alpha}\sqrt{n}$.

Т.о. построенный критерий имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \begin{cases} \ge m_0 n + \sigma u_{1-\alpha}\sqrt{n} \Rightarrow \text{принять } H_1, \text{ откл. } H_0 \\ < n m_0 + \sigma u_{1-\alpha}\sqrt{n} \Rightarrow \text{отклонить } H_1, \text{ принять } H_0. \end{cases} \qquad (3)$$

При этом вероятность совершения ошибки 2-го рода:

$$\beta = P\{\vec{X} \in X_n \setminus W \mid H_1\} = P\Big\{\sum_{i=1}^{n} X_i < n m_0 + \sigma u_{1-\alpha}\sqrt{n} \,\Big|\, \underbrace{m = m_1}_{H_1}\Big\} =$$

$$= \Big\{\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(n m_1, n\sigma^2) \text{ т.к. } H_1\Big\} = \Phi\left(\frac{n m_0 + \sigma u_{1-\alpha}\sqrt{n} - n m_1}{\sigma\sqrt{n}}\right) =$$

$$= \Phi\left(u_{1-\alpha} - \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(m_1 - m_0)\right).$$

При фикс. α вероятность β соверш. ошибки 2-го рода не зависит от W, т.е. является константой, поэтому условие $\beta \to \min$ для критерия (3) выполнено автоматически.

Замечание Если в условиях преды. примера рассм. случай $m_0 > m_1$, то, проведя аналог. рассуждение, несложно показать, что

$$W = \Big\{\vec{x} : \sum_{i=1}^{n} x_i \le c\Big\},$$

где $c = n m_0 - \sigma u_{1-\alpha}\sqrt{n}$

(3) Проверка сложных парам. гипотез.

Пусть 1) X – с.в.;

2) $F(x, \theta)$ – ф-я распр. с.в. X;

3) F известна, θ – неизв. пар.

Рассмотрим задачу проверки двух сложных гипотез:

$H_0 = \{\theta \in \Theta_0\}$ против $H_1 = \{\theta \in \Theta_1\}$, // Θ – big theta

где Θ_0 и Θ_1 – мн-ва возм. значений пар-ра θ, $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \varnothing$

Замечание Если $|\Theta_i| = 1$, то соотв. гипотеза H_i будет простой.

Пример а) $\Theta_0 = \{\theta < \theta_0\}$, $\Theta_1 = \{\theta \ge \theta_0\}$

б) $\Theta_0 = \{\theta < \theta_0\}$, $\Theta_1 = \{\theta > \theta_1\}$, $\theta_0 < \theta_1$

В этой ситуации критерий (как и ранее) задается с пом. критического мн-ва $W \subseteq \mathcal{X}_n$, а соотв. решающее правило имеет вид

$$\vec{x} \in W \Rightarrow \begin{cases} \text{откл. } H_0, \\ \text{принять } H_1 \end{cases}$$

$$\vec{x} \in \mathcal{X}_n \setminus W \Rightarrow \begin{cases} \text{принять } H_0, \\ \text{откл. } H_1 \end{cases}$$

Ошибки 1-го и 2-го рода опр. аналогично, но их вероятности теперь могут зависеть от значения неизв. пар-ра:

$$\alpha(\theta) = P\{\vec{X} \in W \mid \theta \in \Theta_0\}$$

$$\beta(\theta) = P\{\vec{X} \in \mathcal{X}_n \setminus W \mid \theta \in \Theta_1\}$$

Опр. Величина

$$\alpha = \sup_{\theta \in \Theta_0} \alpha(\theta)$$

наз. <u>размером критерия</u>.

Опр. <u>Функцией мощности критерия</u> наз. ф-я

$$M(\theta) = P\{\vec{X} \in W \mid \theta\} \quad (4)$$

Замечание: 1) В опр. ф-и мощности использована немного "жаргонная запись": в условии должно стоять утв., т.е. в условии д. б. записана ф-ла, а записано θ, т.е. предметная переменная, т.е. терм. Более корректная зап. запись:

$$M(a) = P\{\vec{X} \in W \mid \theta = a\}.$$

2) С использованием ф-и мощности выражение для вероятностей ошибок 1-го и 2-го рода можно записать в виде:

$$\alpha(\theta) = M(\theta), \text{ если } \theta \in \Theta_0$$

$$\beta(\theta) = 1 - M(\theta), \text{ если } \theta \in \Theta_1$$

3) Формально равенство (4) можно рассматривать и при $\theta \notin \Theta_0 \cup \Theta_1$, однако при этом ф-я мощности теряет свой смысл как вер-ть совершения ошибки 1-го или 2-го рода.

Опр. Критерий, который при заданном размере α максимизирует ф-ю мощности одновременно по всем возм. критериям при всех $\theta \in \Theta_1$, наз. <u>равномерно наиболее сильным</u>.

Замечание 1) Т.о. равномерно наиболее сильный критерий, если он $\exists$, минимизирует вер-ть совершения ошибки 2-го рода по всем кр. при всех $\theta \in \Theta_1$

2) Равномерно наиболее мощный критерий существует в нек. частных случаях при проверке гипотез о значениях одномерных пар-ров.

Пример

Пусть $X \sim N(m, \sigma^2)$, где σ^2 – изв., m – неизв.

Рассм. задачу проверки

$H_0 = \{m = m_0\}$ против $H_1 = \{m > m_0\}$

1) Ранее рассматривалась задача проверки $H_0 = \{m = m_0\}$ против $H_1 = \{m = m_1\}$, в ходе решения которой получено крит. мн-во

$$W = \{\vec{x} \in X_n : \sum_{i=1}^{n} x_i \geq n m_0 + \sigma u_{1-\alpha}\sqrt{n}\} \quad (5)$$

2) Т.к. ~~построенный критерий~~ построенное в пред. задаче мн-во не зависит от m_1, то критерий из пред. задачи пригоден для проверки гипотез H_0 против $H_1 = \{m = m_1\}$ для произв. $m_1 > m_0$.

По этой причине построенный выше критерий явл. равномерно наиболее мощным и при проверке $H_0 = \{m = m_0\}$ против $H_1 = \{m > m_0\}$.

В тек. задаче крит. мн-во также задается соотн. (5)