Проверка гипотез

19.04.24. Лекция 9.

Проверка параметрич. гипотез

① Основные понятия.

Пусть X – с. в., закон распределения которой неизвестен.

Опр. Статистической гипотезой наз. любое утв-е отн. закона распределения с. в. X.

Опр. Стат. гипотеза наз. простой, если она полностью опр-ет закон случ. вел. X (т. е. она однозначно задает ф-ю распр. с. в. X как ф-ю своего аргумента).

В противном случае стат. гипотеза наз. сложной.

Опр. Стат. гипотеза наз. параметрической, если она является утв-ем отн. значения в-ра $\vec{\theta}$ неизв. пар-ров ф-на распр., общий вид которого известен.

В прот. случае гипотеза наз. непараметрич.

Пример

1) $H_1 = \{X$ явл. норм. с. в.$\}$ непарам., сложная

$H_2 = \{X$ явл. норм. с. в. с $MX=0$ и $DX=3\}$ непарам. простая

$H_3 = \{$ —— " —— с $MX=0\}$ непарам. сложная

2) Известно, что $X \sim N(m, \sigma^2)$

$H_4 = \{m=0, \sigma^2=1\}$ парам., простая

$H_5 = \{m>5\}$ парам., сложная

Задачу проверки стат. гипотез (любых) обычно решают след. образом:

- формулируют осн. гипотезу H_0;
- формулируют гипотезу H_1, кот. наз. альтернативной (конкурирующей). При этом $H_0 H_1 = \emptyset$, но, возможно, H_0+H_1 не исчерпывают все возм. случаи;
- на основании выборки $\vec{x} \in X_n$ (– выборочное пр-во) принимают решение об истинности либо H_0, либо H_1.

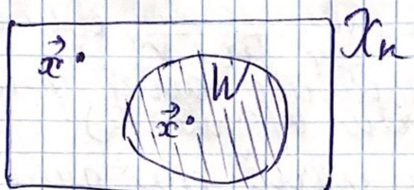
Опр. Правило, посредством которого принимается решение в пользу H_0 или H_1, наз. критерием проверки стат. гипотез.

Как правило, стат. критерий задается с использованием так называемого критического мн-ва $W \subset X_n$.

При этом решающее правило выглядит след. образом:

$\vec{x} \in W \Rightarrow \begin{cases} \text{отвергнуть } H_0, \\ \text{принять } H_1 \end{cases}$

$\vec{x} \in X_n \setminus W \Rightarrow \begin{cases} \text{принять } H_0 \\ \text{отвергнуть } H_1 \end{cases}$



Замечание: Стат. критерий однозначно опр-ся крит. мн-вом W.

При использовании любого стат. критерия возможны ошибки двух типов:

1) ошибка первого рода:
 - принять конкурирующую гипотезу, когда истинна основная.
 Вероятность совершения такой ошибки

$$\alpha = P\{\vec{X} \in W \mid H_0\}$$

2) ошибка второго рода:
 - принять осн. гипотезу, когда истинна конкурирующая гипотеза.
 Вероятность совершения такой ошибки

$$\beta = P\{\vec{X} \in X_n \setminus W \mid H_1\}$$

Замечание: Конечно, при построении критерия хотелось бы обеспечить

$$\begin{cases} \alpha \to \min \\ \beta \to \min, \end{cases}$$

однако это невозможно. По этой причине построение критерия проводят с исп-ем условий:

$$\begin{cases} \beta \to \min \\ \alpha \to \text{const} \end{cases}$$

Опр Вероятность α совершения ошибки 1-го рода наз. уровнем значимости критерия.

Опр Вероятность $1-\beta$ несовершения ошибки 2-го рода наз. мощностью критерия.

② Критерий Неймана-Пирсона проверки двух простых гипотез.

Пусть 1) X – с. в.
2) $F(x, \theta)$ – ф-я расп. с. в. X
3) F как ф-я от x и θ известна, но неизвестно значение парам θ.

Рассмотрим задачу проверки двух простых гипотез:

$H_0 = \{\theta = \theta_0\}$

против $H_1 = \{\theta = \theta_1\}$, где $\theta_0 \neq \theta_1$.

Рассмотрим статистику

$$\varphi(\vec{X}) = \frac{L(\vec{X}, \theta_1)}{L(\vec{X}, \theta_0)},$$

где $L(\vec{X}, \theta)$ – функция правдоподобия.

Опр φ наз. отношением правдоподобия.

В пользу конкурирующей гипотезы H_1 говорят "большие" значения статистики φ.

Поэтому крит. мн-во будет иметь вид:

$$W = \{\vec{x} \in X_n : \varphi(\vec{x}) \geq c_\varphi\},$$

где c_φ – некоторое пороговое значение.

- Значение c_φ опр-ся условиями:

(1) $P\{\underbrace{\varphi(\vec{X}) \geq c_\varphi}_{\text{принимаем } H_1} \mid \underbrace{\theta = \theta_0}_{\text{ист. } H_0}\} = \alpha$

(2) вероятность β совершения ошибки 2-го рода не м.б. уменьшена при заданном α.

Замечание 1) Условие (1) обеспечивает заданную величину α уровня значимости критерия.

2) Построенный критерий наз. ~~условием~~ критерием Неймана-Пирсона.

3) Если X – абс. непр. с.в., а $f(x, \theta)$ – ее ф. пл-ти, то для пл-ти сл. вект. $\vec{X}$ имеем вид

$$f_{\vec{X}}(x_1, \ldots, x_n, \theta) = \left\{ \begin{matrix} \text{все } X_i,\ i=\overline{1,n} \\ \text{независ. в совок.} \end{matrix} \right\} =$$

$$= f_{X_1}(x_1, \theta) \cdot \ldots \cdot f_{X_n}(x_n, \theta) = \left\{ \begin{matrix} X_i \sim X, \\ i=\overline{1,n} \end{matrix} \right\} =$$

$$= f(x_1, \theta) \cdot \ldots \cdot f(x_n, \theta) = L(\vec{x}, \theta).$$

Т.о.

$$L(\vec{X}, \theta) = f_{\vec{X}}(\vec{X}, \theta).$$

По этой причине, левая часть усл-я (1) м.б. записана в виде:

$$P\{\varphi(\vec{X}) \geq c_\varphi \mid H_0\} = \int\limits_{\{(t_1, \ldots, t_n):\ \varphi(t_1, \ldots, t_n) \geq c_\varphi\}} \ldots \int f_{\vec{X}}(t_1, \ldots, t_n)\, dt_1 \ldots dt_n =$$

$$= \int\limits_{\{(t_1, \ldots, t_n):\ \varphi(t_1, \ldots, t_n) \geq c_\varphi\}} \ldots \int L(t_1, \ldots, t_n, \underbrace{\theta_0}_{\theta = \theta_0})\, dt_1 \ldots dt_n.$$

Т.о. в случае непр. с.в. X усл. (1) можно записать в виде

$$\int\limits_{\{(t_1, \ldots, t_n):\ \varphi(t_1, \ldots, t_n) \geq c_\varphi\}} \ldots \int L(t_1, \ldots, t_n, \theta)\, dt_1 \ldots dt_n = \alpha.$$

Пример.

Пусть $X \sim N(m, \sigma^2)$,

где m – неизв.
σ – изв.

Построим критерий проверки 2х простых гипотез

$H_0 = \{m = m_0\}$ против $H_1 = \{m = m_1\}$, где $m_0 < m_1$.

1) Используем критерий Неймана-Пирсона.

$$\varphi(\vec{X}) = \frac{L(\vec{X}, m_1)}{L(\vec{X}, m_0)}$$

$$L(\vec{X}, m) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^n} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)^2}$$

Если $m = m_0$:

$$L(\vec{X}, m_0) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - m_0)^2}$$

Если $m = m_1$: $L(\vec{X}, m_1) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - m_1)^2}$

Тогда $\varphi(\vec{X}) = e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}[(X_i-m_1)^2-(X_i-m_0)^2]}$

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n}[(X_i-m_1)^2-(X_i-m_0)^2] = \sum_{i=1}^{n}[X_i^2-2m_1X_i+m_1^2-X_i^2+2m_0X_i-m_0^2] = \right.$$

$$\left. = \sum_{i=1}^{n}[-2(m_1-m_0)X_i+m_1^2-m_0^2] = -2(m_1-m_0)\sum_{i=1}^{n}X_i + n(m_1^2-m_0^2) \right.$$

$$\Rightarrow \varphi(\vec{X}) = e^{\frac{m_1-m_0}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{n}{2\sigma^2}(m_1^2-m_0^2)}.$$

2) Подберем константу C_φ из усл. (1)

$$\left\{ P\{\varphi(\vec{X}) \geq C_\varphi | H_0\} = \alpha \quad (1) \right.$$

$$\varphi(\vec{X}) \geq C_\varphi \Leftrightarrow \ln\varphi(\vec{X}) \geq \ln C_\varphi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \ln\varphi(\vec{X}) = \frac{m_1-m_0}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}X_i - \frac{n}{2\sigma^2}(m_1^2-m_0^2) \right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{m_1-m_0}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}X_i - \frac{n}{2\sigma^2}(m_1^2-m_0^2) \geq \ln C_\varphi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{m_1-m_0}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}X_i \geq \frac{n}{2\sigma^2}(m_1^2-m_0^2) + \ln C_\varphi \Leftrightarrow \left\{ : \frac{m_1-m_0}{2\sigma^2} > 0 \right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}X_i \geq \underbrace{n(m_1+m_0) + \ln C_\varphi \cdot \frac{2\sigma^2}{m_1-m_0}}_{C=const - сбуд.}.$$