17.05.24. Лекция 12.

Пример

Пусть 1) $X \sim N(m_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(m_2, \sigma_2^2)$
2) m_1, m_2 – неизв., σ_1^2, σ_2^2 – неизв.
3) X, Y – незав.
4) $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ – неизв., но равны

Рассмотрим задачи проверки:

(а) $H_0 = \{m_1 = m_2\}$ против $H_1 = \{m_1 > m_2\}$
(б) ——— " ——— $H_1 = \{m_1 < m_2\}$
(в) ——— " ——— $H_1 = \{m_1 \neq m_2\}$

Решение:

1) Вспомним критерий проверки гипотезы $H_0 = \{m = m_0\}$:
• в случае изв. дисперсии σ^2 рассматривалась статистика

$$T(\vec{X}) = \frac{\bar{X} - m_0}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,1) \text{ при } H_0$$

• в случае неизв. дисперсии

$$T(\vec{X}) = \frac{\bar{X} - m_0}{S(\vec{X})}\sqrt{n} \sim St(n-1) \text{ при } H_0$$

Попробуем предложить что-то похожее в тек. примере:
Если 1) с. в. $\xi \sim N(0,1)$,
2) $\eta \sim \chi^2(n)$,
3) ξ, η – незав,
то $\zeta = \frac{\xi}{\sqrt{\eta}} \sim St(n-1)$ – определение распред. St

а) рассмотрим статистику

$$T_\eta(\vec{X}_{n_1}, \vec{Y}_{n_2}) = \underbrace{\frac{(n_1-1)S^2(\vec{X}_{n_1})}{\sigma_1^2}}_{\sim \chi^2(n_1-1)} + \underbrace{\frac{(n_2-1)S^2(\vec{Y}_{n_2})}{\sigma_2^2}}_{\sim \chi^2(n_2-1)} \sim \chi^2(n_1+n_2-2)$$

по св-ву распр. χ^2 и т.к. X, Y – незав

б) Рассмотрим статистику

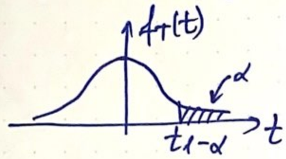
$$T_\xi(\vec{X}_{n_1}, \vec{Y}_{n_2}) = \frac{(\bar{X}_{n_1} - \bar{Y}_{n_2})}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}} \sim N(0,1) \text{ при } H_0$$

в) Можно показать, что с.в. T_ξ и T_η независимы.
Тогда

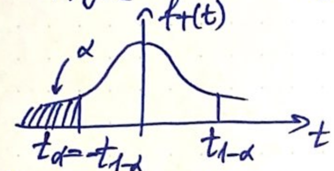
$$T(\vec{X}_{n_1}, \vec{Y}_{n_2}) = \frac{T_\xi}{\sqrt{T_\eta}}\sqrt{n_1+n_2-2} = \frac{\bar{X}_{n_1} - \bar{Y}_{n_2}}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}} \cdot \frac{\sqrt{n_1+n_2-2}}{\sqrt{\frac{(n_1-1)S^2(\vec{X}_{n_1})}{\sigma_1^2} + \frac{(n_2-1)S^2(\vec{Y}_{n_2})}{\sigma_2^2}}} \overset{\text{при } H_0}{\sim} St(n_1+n_2-2)$$

Тогда крит. мн-ва для задач (а) – (в):

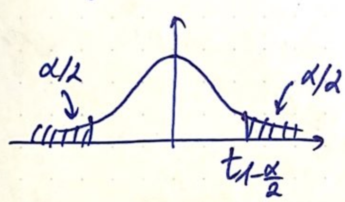
(а) $W = \{(\vec{x}_{n_1}, \vec{y}_{n_2}) : T(\vec{x}_{n_1}, \vec{y}_{n_2}) \geq t_{1-\alpha}\}$



(б) $W = \{(\vec{x}_{n_1}, \vec{y}_{n_2}) : T(\vec{x}_{n_1}, \vec{y}_{n_2}) \leq -t_{1-\alpha}\}$



(в) $W = \{(\vec{x}_{n_1}, \vec{y}_{n_2}) : |T(\vec{x}_{n_1}, \vec{y}_{n_2})| \geq t_{1-\frac{\alpha}{2}}\}$



Здесь t с индексами – квантиль соотв. уровня распределения $St(n_1+n_2-2)$

Проблема заключается в том, что построенным критерием невозможно пользоваться на практике, т.к. значение статистики T зависит от неизв. величин σ_1^2 и σ_2^2. Если $\sigma_1 \neq \sigma_2$, то эти величины "не убираются" из выражения для T. Поэтому используем предположение из п. 4) о том, что $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$. Тогда

$$T(\vec{X}_{n_1}, \vec{Y}_{n_2}) = \frac{\overline{X}_{n_1} - \overline{Y}_{n_2}}{\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \cdot \frac{\sqrt{n_1+n_2-2}}{\sqrt{(n_1-1)S^2(\vec{X}_{n_1}) + (n_2-1)S^2(\vec{Y}_{n_2})}} =$$

$$= \sqrt{\frac{n_1+n_2-2}{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \cdot \frac{\overline{X}_{n_1} - \overline{Y}_{n_2}}{\sqrt{(n_1-1)S^2(\vec{X}_{n_1}) + (n_2-1)S^2(\vec{Y}_{n_2})}} \underset{\text{при } H_0}{\sim} St(n_1+n_2-2).$$

Пример.

Пусть 1) $X \sim N(m, \sigma^2)$, ~~[illegible]~~, σ – неизв. ~~[illegible]~~

Рассмотрим задачи проверки

(а) $H_0 = \{\sigma = \sigma_0\}$ против $H_1 = \{\sigma > \sigma_0\}$
(б) $H_0 = \{\sigma = \sigma_0\}$ против $H_1 = \{\sigma < \sigma_0\}$
(в) $H_0 = \{\sigma = \sigma_0\}$ против $H_1 = \{\sigma \neq \sigma_0\}$

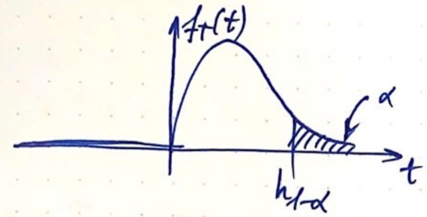
Решение:

1) Рассмотрим статистику

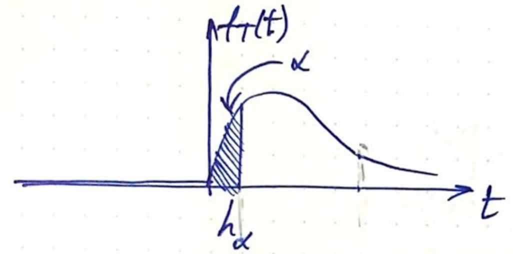
$$T(\vec{X}) = \frac{(n-1)S^2(\vec{X})}{\sigma_0^2} \underset{\text{при } H_0}{\sim} \chi^2(n-1)$$ – было показано выше.

2) Тогда критические множества

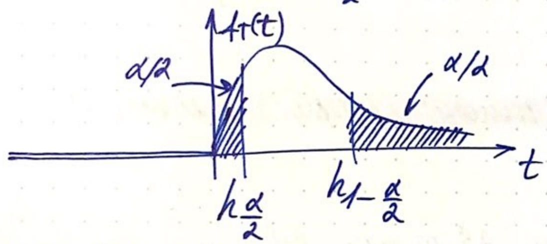
(а) $W=\{\vec{x}: T(\vec{x}) \geq h_{1-\alpha}^{(n-1)}\}$



(б) $W=\{\vec{x}: T(\vec{x}) \leq h_{\alpha}\}$



(в) $W=\{\vec{x}: (T(\vec{x}) \leq h_{\frac{\alpha}{2}}) \vee (T(\vec{x}) \geq h_{1-\alpha/2})\}$



в пользу H_1 свид. как "большие", так и ~~"меньшие"~~ "малые" значения стат. T.

Здесь символом h с индексами обозначены квантили соотв. уровня распр. $\chi^2(n-1)$.

Пример.

Пусть
1) $X \sim N(m_1, \sigma_1^2)$
2) $Y \sim N(m_2, \sigma_2^2)$
3) σ_1, σ_2 – неизв.
4) X, Y – незав.

Рассмотрим задачи проверки

(а) $H_0 = \{\sigma_1 = \sigma_2\}$ против $H_1 = \{\sigma_1 > \sigma_2\}$

(б)' ———— " ———— $H_1 = \{\sigma_1 < \sigma_2\}$ – аналогично (а), если переобозн. $X \to Y$, $Y \to X$

(б) ———— " ———— $H_1 = \{\sigma_1 \neq \sigma_2\}$

Решение:

1) Рассмотрим статистику

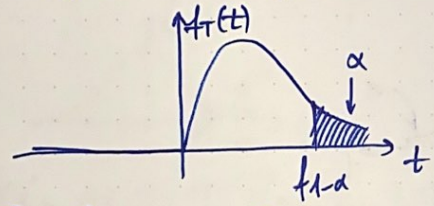
$$T(\vec{X}_{n_1}, \vec{Y}_{n_2}) = \frac{S^2(\vec{X}_{n_1})}{S^2(\vec{Y}_{n_2})}$$

$$T = \frac{\frac{1}{n_1-1}\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\bar{X})^2}{\frac{1}{n_2-1}\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\bar{Y})^2} = \left\{\cdot (n_1-1)/(n_2-1)\right\} = \frac{(n_2-1)\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\bar{X})^2}{(n_1-1)\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\bar{Y})^2} = \left\{\begin{matrix} H_0=\{\sigma_1=\sigma_2\} \\ \Rightarrow \text{разделим} \\ \text{числ. и зн. на } \sigma^2 \end{matrix}\right\} =$$

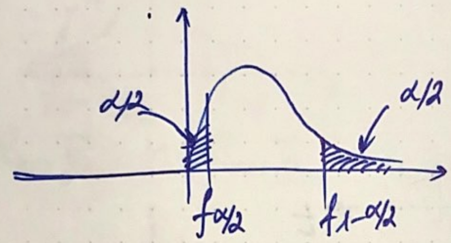
$$= \frac{(n_2-1)\overbrace{\left(\sum_{i=1}^{n_1}\frac{(X_i-\bar{X})^2}{\sigma_1^2}\right)}^{\sim \chi^2(n_1-1)}}{(n_1-1)\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n_2}\frac{(Y_i-\bar{Y})^2}{\sigma_2^2}\right)}_{\sim \chi^2(n_2-1)}} \sim \left\{\begin{matrix} X, Y\text{ – незав.} \\ \Rightarrow \text{числ. и зн-ль} \\ \text{независимы} \end{matrix}\right\} \sim F(n_1-1, n_2-1).$$

Т.О. критические мн-ва:

(а) $W = \{(\vec{x}_{n_1}, \vec{y}_{n_2}) : T(\vec{x}_{n_1}, \vec{y}_{n_2}) \geq f_{1-\alpha}\}$



(б) $W = \{(\vec{x}_{n_1}, \vec{y}_{n_2}) : (T(\vec{x}_{n_1}, \vec{y}_{n_2}) \leq f_{\alpha/2}) \vee (T(\vec{x}_{n_1}, \vec{y}_{n_2}) \geq f_{1-\alpha/2})\}$



Здесь символом f с индексами обозначены квантили соотв. уровня расп. Фишера $F(n_1-1, n_2-1)$.

~~Пример~~

Проверка непараметрических гипотез: критерии согласия.

① Основные понятия

До сих пор рассматривалась 2я задача МС:

- Дано: $F(t, \vec{\theta})$ – изв. ф-я (ф-я расп.), которая зависит от $\vec{\theta} = (\theta_1, .., \theta_r)$ вектора неизв. пар.в.
- Требуется: оценить значение в-ра $\vec{\theta}$.

Теперь рассмотрим 1ю задачу МС:

- Дано: X – с.в., закон расп-я которой неизв.
- Требуется по имеющейся выборке определить закон расп. с.в. X.

На практике решение этой задачи сводится к проверке осн. гипотезы H_0

$$H_0 = \{F(t) \equiv F_0(t)\} \left[\text{то же, что и } \{(\forall t \in R)(F(t) = F_0(t))\}\right]$$

против конкурирующей гипотезы

$$H_1 = \neg H_0 = \{(\exists t \in R)(F(t) \neq F_0(t))\},$$

где F_0 – предполагаемая ф. расп. с.в. X;
F – теор. (истинная) — " — (неизвестно)

Пример.

1) $H_0 = \{X$ имеет з-н расп-я $N(1,2)\} = \{f_X(t) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}} e^{-\frac{(t-1)^2}{4}}\}$ – простая гипотеза

2) $H_0 = \{X$ имеет норм. з-н расп.$\} = \{$сложная гипотеза$\} = \{(\exists m \in R)(\exists \sigma \in R^+)(f_X(t) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}})\}$

$H_1 = \neg H_0 = \{(\forall m \in R)(\forall \sigma \in R^+)(\exists t \in R)(f_X(t) \neq \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}})\}$