а) метод простых итераций.

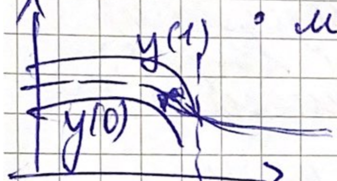
Разн. схема запис. в виде

$$A_n^{(s-1)} y_{n-1}^{(s)} + B_n^{(s-1)} y_n^{(s)} + C_n^{(s-1)} y_{n+1}^{(s)} = F_n^{(s-1)}$$

Условие окончания:

$$\max_{0 \le n \le N} \left| \frac{y_n^{(s)} - y_n^{(s-1)}}{y_n^{(s)}} \right| < \varepsilon$$

• достаточно медленный метод



• метод релаксации
для след. итерации коэф-ты берутся на промежутке м/у $y^{(0)}$ и $y^{(1)}$
иначе "раскачка" – получение хаотических результатов.

б) метод Ньютона

19.04.24. **Лекция 8.**

4) Нелинейный случай
(когда краевые условия – нелинейные)

$$\frac{d}{dx}\left(k(u)\frac{du}{dx}\right) - p(u)u + f(u) = 0$$

$$x = 0, \quad -k(0)\frac{du}{dx} = F_0 - \sigma u(0)^4.$$

$$x = l, \quad k(l) = \frac{du}{dx} = \alpha(u(l) - \beta)$$

Аппроксимация кр. условий

Применим простейшую апрокс. производных разн. аналогами (1й пор-точн.)

$x=0 \quad -k_0 \dfrac{y_1-y_0}{h} = F_0 - \sigma y_0^4 \quad (1)$

$x=l \quad -k_N \dfrac{y_N-y_{N-1}}{h} = \alpha (y_N - \beta) \quad (2)$

$y_n = \xi_{n+1} y_{n+1} + \eta_{n+1}$

$y_0 = \xi_1 y_1 + \eta_1 \quad (3)$

Левая прогонка порождает проблему при нелин. кр. усл.

Наличие нелин. кр. усл. не позволяет опр. начальные прогоночные коэф, сравнивая (1) и (3)

Можно поступить двояко:

1) y_0 брать с пред. итерации

"—": - итерирование системы
- чувствительность нач. приближения

2) изменить напр-е прогонки ("левую прогонку")

- Осн. формула:

$y_n = \xi_{n-1} y_{n-1} + \eta_{n-1} \quad (4)$

- прог. коэф — справа-налево
- y —

Получим прог. коэф-ты.

$y_{n+1} = \xi_n y_n + \eta_n \to$ подст. в ~~~~ сист. (разн. схему)

$$A_n y_{n-1} - B_n y_n + C_n \xi_n y_n + C_n \eta_n = -F_n$$

$$y_n = \frac{A_n}{B_n - C_n \xi_n} y_{n-1} + \frac{C_n \eta_n + F_n}{B_n - C_n \xi_n} \quad (5)$$

Сравним (5) и (4)

$$\xi_{n-1} = \frac{A_n}{B_n - C_n \xi_n},$$

$$\eta_{n-1} = \frac{C_n \eta_n + F_n}{B_n - C_n \xi_n}$$

Из (2) найдем прогоночные коэф.:

$$y_N - y_{N-1} = -\frac{\alpha h}{k_N} y_N + \frac{\alpha h}{k_N} \beta$$

$$y_N = \frac{1}{1 + \frac{\alpha h}{k_N}} y_{N-1} - \frac{\alpha h \beta}{k_N \left(1 + \frac{\alpha h}{k_N}\right)} \quad (6)$$

С другой стороны, из (4):

$$\cancel{y_{N-1} = \xi_N}$$

$$y_N = \xi_{N-1} y_{N-1} + \eta_{N-1} \quad (7)$$

Из (6) и (7):

$$\xi_{N-1} = \frac{1}{1 + \frac{\alpha h}{k_N}},$$

$$\eta_{N-1} = \frac{\alpha h \beta}{k_N + \alpha h}$$

начальные прогоночные коэф.

и т.д. до 0.

Ну (4):

$y_1 = \xi_0 y_0 + \eta_0$ (8)

Подставим в (1):

$$-k_0 \frac{\xi_0 y_0 + \eta_0 - y_0}{h} = F_0 - \sigma y_0^4$$

$$-k_0 (\xi_0 - 1) y_0 + \sigma y_0^4 h = F_0 h + k_0 \eta_0 \quad (9)$$

Нелинейное выражение, необх. найти y_0 (для обратного хода)

К этому моменту изв. все коэф.

⇒ решаем дихотомией / методом Ньютона и т.д.

~~Ну (9)~~

В общем виде при наличии нелин-ти вообще: $\varphi(y_0) = 0$.

⇒ найдем y_0; в обратном ходе прогонки найдем все y_n, $n = \overline{1, N}$

в л/р №3

$$\begin{cases} u(z) \\ F(z) \end{cases}$$

Опр-ть поток в н точке

$$F = -\frac{c}{3k} \frac{du}{dr}$$

центр. разност.

$$F_n = -\frac{c}{3k} \cdot \frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2h}$$

$$F_{n+1/2} = -\frac{c}{3k_{n+1/2}} \cdot \frac{u_{n+1} - u_n}{h}$$

в центральную, але одност. ф-лу в

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rF) = ck(U_p - U)$$

$$\int_0^r \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rF)\, r\,dr = C\int_0^r k(U_p - U_r)\,dr =$$

$$= C\cdot\int_0^r k(U_p - U)\, r\,dr$$

$$\Rightarrow \quad F(r) = \frac{C}{r}\int_0^r k(U_p - U)\, r\,dr$$

Краевые задача уст. ⇒ решение будет получено

$(-10^{+6}?)$

Класс ОДУ – ДУ, в кот. одна незав. перемен. (время, коорд. и т.д.)

Производные – полные: $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$

задача Коши (усл. в 1й т.)

краевая задача (в неск. т. ⇒ $2^{го}$ пор. или два $2^{го}$ порядка) как минимум

• можно в середине

1) явные, неявные
2) многошаг., одношаг.

Явные → Эйлера → Рунге-Кутта ($2^{го}$, $4^{го}$) } Одношаг.

Неявные → Эйлера, трапеций → Гира ($2^{го}$, $3^{го}$)

Многошаг.

↓

метод Адамса

+: надо знать знач-е в ф-х.

"−": необх. уменьшить шаг

то что-то не то...!

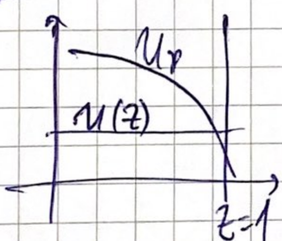
МОДЕЛИ, ПОСТРОЕННЫЕ НА ДУ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ.

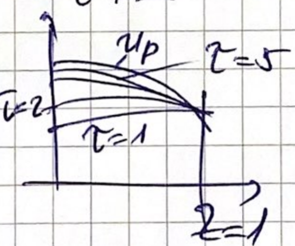
Аббревиатура: ДУЧП

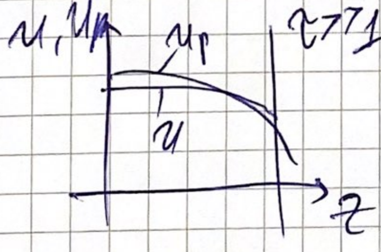
Как тестировать программу (в л/р 2-3?)?

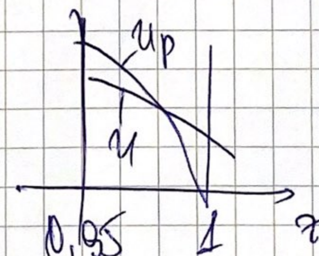
1) ~~Если повер~~ Поведение u определяется $\tau = \int_0^R k\,dr \approx kR$. — качественный анализ

$\tau < 1$ $\tau > 1$









2) Аналитическое решение

$k = const$

$T = const$

Ур-я Бесселя: $I_0(\sqrt{3} kr)$, $I_1(\sqrt{3} kr)$