4) методы Рунге-Кутта позволяют считать с переменным шагом.

плавно ⇒ увелич. шаг
резко ⇒ уменьш. шаг

Как выбрать метод?
Если правая часть считается сложно, то чем меньше обращений к ней – тем лучше.

Если к.-либо производной нет, порядок не обеспечивается.

(1. учитывать сложность правой части

2. если правая ч. не имеет соотв. производных, то заявленные порядки точности не реализуются на практике)

15.03.24. Лекция 4.

Погрешность методов Рунге-Кутта.

- 1-го порядка

$$y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n)$$ – метод Эйлера, исп. внутри других методов

- 2-го порядка

$$y_{n+1} = y_n + h\left[(1-\alpha) f(x_n, y_n) + \alpha f\left(x_n + \frac{h}{2\alpha}, y_n + \frac{h}{2\alpha} f(x_n, y_n)\right)\right]$$

- 4-го порядка

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6}$$

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{hk_1}{2}\right)$$

$$k_3 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{hk_2}{2}\right)$$

$$k_4 = f(x_n + h, y + hk_3)$$

$u(x) = f(x,u)$, $a \le x \le b$

$$y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x)\,dx$$

- 1го порядка (формула левых прямоугольников)

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n)$$

~~$O(h^1)$ – на всем инт.~~

~~$O(h)$ – на одном~~ промежутке

∴ все погрешности суммируются

Погрешность

$[x_n, x_{n+1}]$	$[a, b]$
$O(h^2)$	$R \to O(h)$

- 2го порядка (ф-ла трапеций)

— $\alpha = 1/2$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[f(x_n) + f(x_n + h)\right]$$

$$R = \frac{b-a}{12} \cdot h^2 \max|f''|$$

$$R = \frac{b-a}{12} \cdot h^2 \max|f''|$$

— $\alpha = 1$ (метод средних)

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f\left(x_n + \frac{h}{2}\right)$$

$$R = \frac{b-a}{24} h^2 \max|f''|$$

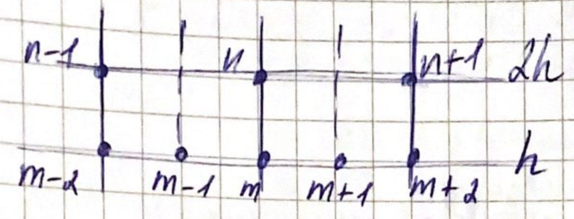
- 4го порядка

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6} \cdot \left[f(x_n) + 2 \cdot f\left(x_n + \frac{h}{2}\right) + 2 \cdot f\left(x_n + \frac{h}{2}\right) + f(x_n + h)\right] =$$

$$= y_n + \frac{h}{6}\left[f(x_n) + 4 \cdot f\left(x_n + \frac{h}{2}\right) + f(x_n + h)\right]$$

$$R = \frac{b-a}{180 \cdot 160} h^4 \max|f''(x)|$$ – мажорантная оценка (сверху)

Оценки позволяют ...



Проводится расчет на двух сетках h и $2h$.

$$\Delta y_m = \frac{y(x_m, h) - y(x_m, 2h)}{r^p - 1}$$, p — порядок точности метода

абсолютная погрешность, $r > 1$;
$r = 2$ — в данном случае

Относительная погрешность:

$$\varepsilon_m = \frac{\Delta y_m}{y_m}$$

С исп. ф-лы Ромберга (?) можно уточнить реш-е:

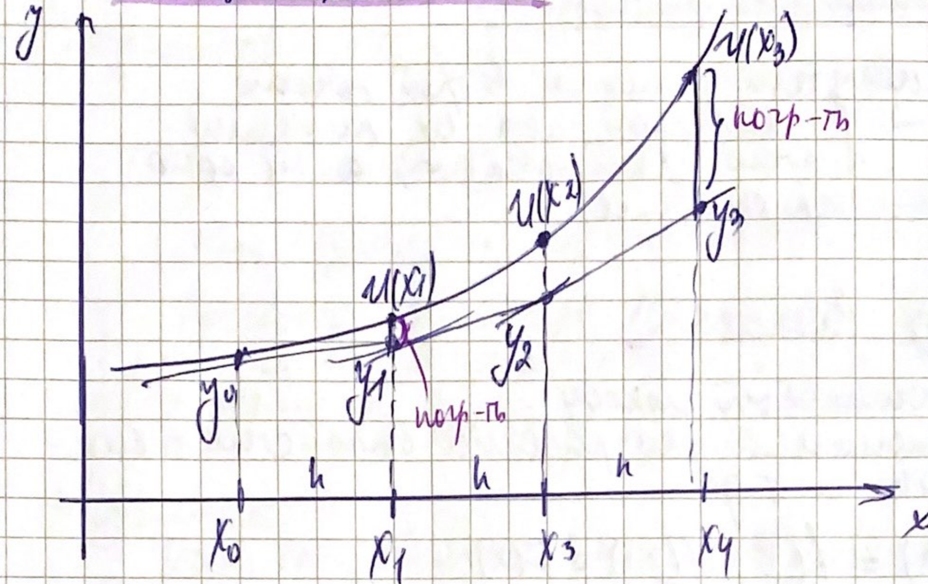
$$y_m = y(x_m, 2h) + \frac{y(x_m, h) - y(x_m, 2h)}{r^p - 1}$$

Если в кач. r выбрать целое число, узлы будут совпадать ...

- Когда ф-я маленькая, а погр-ть задана $\Delta y = 10^{-4}$, получается абсурд.

Применять необходимо относительную погр-ть.
(ты вычислять)

Геометрическая и/пр-ние численного методов решения.



$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$

Происходит накопление погрешностей.

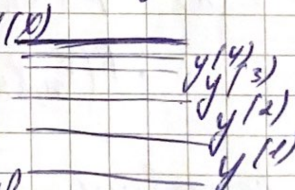
Сходимость закл. в том, что

x: $y^{(h_1)}, y^{(h_2)}, y^{(h_3)}, \ldots$

$h \to 0$

? Если приближенное решение сходится, но ~~оно~~ сх. к некоторому пределу?

посл-ть $y^{(h_1)}, \ldots$



Чтобы д-ть сходимость, необх. проверить, насколько решение аппрокс. реальное решение, доказать устойчивость.

x: $\left|\dfrac{y^{(l+1)} - y^{(l)}}{y^{(l+1)}}\right| < \varepsilon$ — проверка сходимости

задается

Были рассмотрены явные одношаговые методы.

Многошаговые методы:

получено решение в трех точках
→ в четвертой исп-ся решение в этих трех точках, а не одно предыдущее.

Метод Адамса

- многошаговый метод.
- применяется для рассчета баллистики снарядов и т.д.

$$u'(x) = f(x, u(x)) \equiv F(x)$$

находим, подставляем и получаем

$$x_{n-3} \qquad x_{n-2} \qquad x_{n-1} \qquad x_n \qquad x_{n+1}$$

$$y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} F(x)\,dx \qquad (1)$$

Полином Ньютона:

$$F(x) = F(x_n) + (x - x_n)\cdot F(x_n, x_{n-1}) + (x - x_n)(x - x_{n-1})\cdot F(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}) + (x - x_n)(x - x_{n-1})(x - x_{n-2}) F(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, x_{n-3}) \qquad (2)$$

Подставим (2) в (1):

$$y_{n+1} = y_n + h\cdot F(x_n) + \frac{1}{2} h^2 F(x_n, x_{n-1}) + \frac{5}{6} h^3 F(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}) + \frac{9}{4} h^4 F(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, x_{n-3})$$

$$F(x_n) = f(x_n, y_n)$$

$$F(x_n, x_{n-1}) = \frac{f(x_n, y_n) - f(x_{n-1}, y_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

...

Чем хорош метод?

- Для перехода ч/з 4 точки – 1 шаг.
- Погрешность: $r_n = \frac{251}{720} \cdot h^5 \cdot F^{IV}(\xi)$, $x_n \le \xi \le x_{n+1}$

(на 1м шаге $R_n \to O(h^4)$)

Как Рунге, но переход всего за 1 шаг. (меньше выч-ть)

Точность в методе Рунге-Кутта выше, (т.к. число в знаменателе выше), поэтому в Рунге-Кутта можно исп-ть шаг ~ в 6 раз больше.

Минусы:

- для выч. (начала) необх. 4 значения (4 узла)
- точность меньше, чем в Рунге-Кутта.

нач. точки можно получить методом Рунге-Кутта

Задача Коши – не условие

методы интегрирования ОДУ

Явные схемы — неявные

одношаговые — многошаговые

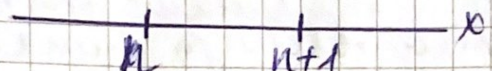
- Рунге-Кутта
  - 2го порядка; $\alpha = 1/2$, $\alpha = 1$
  - 4го порядка
- метод Адамса

Явные – т.е. переход на след. узел осуществляется за конечное кол-во действий.

Неявные методы интегр. ОДУ.

Рассмотрим на примере неявного метода Эйлера.

$$u'(x) = f(x, u)$$
$$u(x_0) = u$$



- $y_{n+1} = y_n + hf(x, y_n)$ – явный
- $y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_{n+1}, y_{n+1})$ – неявный
  - более устойчивый
  - "плата" – решение ур-я $f(x_{n+1}, y_{n+1})$

Пример.

$$u' = x^2 + u^2$$

$$y_{n+1} = y_n + h(x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2)$$ – кв. ур-е

! может не иметь решений.
⇒ ограничения на выбор шага, но м. не быть решения не только и-за шага

– Порядок точности неявного метода Эйлера: $O(h)$.

~~В системе уравнений – просто дихотомию или метод~~

- Если не сходится, применяем дихотомию
- В системе ур-й – метод простых итераций.

$$y_{n+1}^{(s)} = y_n + h f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(s-1)})$$

$$x = \psi(x)$$

$$|\psi'| < 1$$

$$|h f'_u| < 1$$ – сходится только при таких условиях

Неявный метод трапеций

$$y_{n+1} = y_n + \int\limits_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y)\,dx = y_n + \frac{h}{2}\cdot\left(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})\right)$$

- Порядок точности: $O(h^2)$

Методы Гира

– для жестких систем ДУ – систем ур-ий которые другие разностные схемы не решают (кинетика и т.д.)

- $\frac{3}{2} y_{n+1} - 2y_n + \frac{1}{2} y_{n-1} = h\cdot f(x_{n+1}, y_{n+1})$ – $O(h^2)$
- $\frac{11}{6} y_{n+1} - 3y_n + \frac{3}{2} y_{n-1} - \frac{1}{3} y_{n-2} = h\cdot f(x_{n+1}, y_{n+1})$ – $O(h^3)$

Пример:

$$\begin{cases} u'(x) = f(x, u, v) \\ v'(x) = \varphi(x, u, v) \\ u(x_0) = \eta_1 \\ v(x_0) = \eta_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[f(x_n, y_n, z_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1})\right] \\ z_{n+1} = z_n + \frac{h}{2}\left[\varphi(x_n, y_n, z_n) + \varphi(x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1})\right] \end{cases}$$

Система уравнений в неявном виде

нелинейная система уравнений

Решение – методом Ньютона:

линеаризация $\to$ итерационный проц.

2 л/р: методы Рунге-Кутта

3 л/р: краевые задачи

Краевая задача – условие в разных точках