Если осущ. на сетке "подогнали частицу", можно решить ДУ ЧП?
Можно назначить ~~[illegible]~~ вес ...

0 – 0.25 ←
0.25 – 0.5 →
0.5 – 0.75 ↑
0.75 – 1 ↓

Новое распр. частиц – новое значение ф-ии.

[Точка куда-то приходит, стат.:
фикс. значение на границе
$$u_{nk} = \frac{\sum_i u_{\text{гр}\,i}}{N}$$

24.05.24. Лекция 12

8 июня л/р все выдано.

Вопросы аппроксимации, сходимости и устойчивости ~~[illegible]~~ разностных схем.

1. Аппроксимация.

(аппроксимация – приближение)
– решение вопроса о том, аппроксимирует ли получ. разн. схема исх. ДУ;
– обладает ли св-вом аппрокс.-ии.
– ...

Рассмотрим уравнение
$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \quad (**)$$
$$Au = \left(\frac{\partial}{\partial t} - a\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u \quad \text{– дифор. оператор}$$

$$\begin{cases} \text{Ур-е: } \overset{\text{т.е.}}{A}u = f(x,t) \\ \text{Доп. условие: } Bu = \mu(x,t) \end{cases} \quad (1)$$

Далее строим разн. схему

$$\frac{\hat{y}_n - y_n}{\tau} = \frac{a}{h^2}(\hat{y}_{n-1} - 2\hat{y}_n + \hat{y}_{n+1}) + \hat{\varphi}_n \quad (2)$$

"A аш"

$$\begin{cases} A_h y = \varphi_h \\ B_h y = \beta_h \end{cases} \quad (3)$$

где $A_h y = \frac{\hat{y}_n - y_n}{\tau} - \frac{a}{h^2}(\hat{y}_{n-1} - 2\hat{y}_n + \hat{y}_{n+1}) \quad (4)$

Невязка $\psi = \varphi_h - A_h u = (Au - f) - (A_h u - \varphi_h)$

$\rho = \beta_h - B_h u = (Bu - \mu) - (B_h u - \beta_h)$

Опр Сходимость – близость разн. решения y к точному.

[Невязка – определяет близость Д.У. и разн. ур-я]

~~Невязка~~

Опр Разностная схема (3) аппрокс. исх. Д. задачу (1), если в нек. норме невязка стремится к 0 при $h \to 0$:

$$\|\psi\| \to 0 \text{ и } \|\rho\| \to 0 \text{ при } h \to 0.$$

Аппроксимация имеет p-й порядок, если

$$\|\psi\| = O(h^p), \; \|\rho\| = O(h^2) \text{ при } h \to 0$$

(невязка есть ~~малая~~ малая величина порядка p отн. шага h)

• Какая м.б. норма?

1) Чебышевская:

$$\|v\|_C = \max_{a \le x \le b} |v|$$

2) Гильбертова:

$$\|v\|_{L_2} = \int_a^b \rho(x) v^2(x) dx$$

Сеточные аналоги:

$$\|y\|_C = \max_{0\le n\le N} |y_n| \text{ — на сетке}$$

$$\|y\|_{L_2} = \sum_{n=0}^{N} \rho_n y_n^2 h_n$$

Пример.

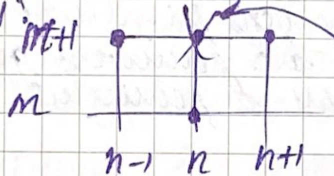
Найдем невязку для (1) и разн. схемы (2).

$$\psi_n = \left(\frac{\partial u}{\partial t} - a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - f(x, t_{m+1})\right)\Big|_n - \frac{\hat u_n - u_n}{\tau} + \frac{a}{h^2}(\hat u_{n-1} - 2\hat u_n + \hat u_{n+1}) + \hat\varphi_n$$

кси эн

Далее применяется разложение в ряды Тейлора.

Шаблон:



За центр разложения удобно взять эту точку. Иначе придется делать перекрестные производные.

- $u_n = \hat u_n(x_n, t_{m+1}) - \tau u'_t(x_n, t_{m+1}) + \frac{\tau^2}{2!} u''_{tt}(x_n, \theta_m)$,

  где $t_m \le \theta_m \le t_{m+1}$.

- $\hat u_{n\pm1} = \hat u_n(x_n, t_{m+1}) \pm h u'_x(x_n, t_{m+1}) + \frac{h^2}{2!} u''_{xx}(x_n, t_{m+1}) -$

  $- \frac{h^3}{3!} u'''_{xxx}(x_n, t_{m+1}) + \frac{h^4}{4!} u^{IV}_{xxxx}(\gamma_{n\pm1}, t_{m+1})$,

  где $x_n \le \gamma_{n+1} \le x_{n+1}$; $x_{n-1} \le \gamma_{n-1} \le x_n$.

⇒ подставляем выражения в невязку (чтобы были только слаг. сод. h; иначе — не аппрокс.)

$$\psi_n = u'_t|_n - a u''_{xx}|_n - f(x_n, t_{m+1}) - \frac{1}{\tau}\left[\tau u'_t(x_n, t_{m+1}) - \frac{\tau^2}{2!} u''_{tt}(x_n, \theta_m)\right] +$$

$$+ \frac{2a}{h^2} \cdot \left[\frac{h^2}{2!} u''_{xx}(x_n, t_{m+1}) + \frac{h^4}{4!} u^{IV}_{xxxx}(\gamma_{n\pm1}, t_{m+1})\right] + \hat\varphi_n = -f(x_n, t_{m+1}) + \frac{\tau}{2} u''_{tt} +$$

$$+ \frac{a h^2}{12} u^{IV}_{xxxx} + \hat\varphi_n.$$

Если $\hat\varphi_n = f(x_n, t_{m+1})$, то $\psi_n = \frac{\tau}{2} u''_{tt} + \frac{a h^2}{12} u^{IV}_{xxxx} = O(\tau + h^2)$ при $\tau \to 0, h \to 0$

(дифф. задачу)
⇒ Разностная схема аппрокс-ет исх. систему с 1-м порядком точности по времени и 2-м порядком точности по времени.

Аналогично расписываются невязка кр. условия.

- Как проверяется аппроксимация?

[Строится невязка и иссл-ся ее поведение при $h \to 0$. путем разложения в ряды Тейлора.]

вывод, так стоит отвечать на экзамене.

2. Устойчивость.

Опр. <u>Устойчивость</u> - непр. зависимость решения от вх. данных: малое изм. вх. данных должны приводить к малому изм-ю решения.

<u>Вх. данные</u> – φ_h, β_h.

Пусть $\varphi_h^{(1)}$ и $\beta_h^{(1)} \to y^{(1)}$

$\varphi_h^{(2)}$ и $\beta_h^{(2)} \to y^{(2)}$

~~Опр. Разностная схема (3) сходится к исх. Д. (1), если~~

~~Разностная схема (3) сходится~~

Опр. Разностная схема (3) <u>устойчива</u>, если ~~она~~ ее решение непр. зависит от вх. данных и эта зависимость равномерна отн. шага:
(устойчивость)

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) \ \|y^{(1)} - y^{(2)}\| \le \varepsilon, \text{ если}$$
$$\|\varphi_h^{(1)} - \varphi_h^{(2)}\| \le \delta,$$
$$\|\beta_h^{(1)} - \beta_h^{(2)}\| \le \delta.$$

<u>Устойчивость</u>

<u>условная</u>	<u>безусловная</u>
• условие и/у опр-я собл-ся только при опр. соотн-ии м/у шагами	• — " — при любом соотн. шагов по незав. коорд.

Опр. Непр. зависимость от φ_n нау. устойч-ю по правой части.

Опр. Непр. зависимость от β_n нау. устойч-ю по начальным условиям (вкл. граница по времени).

Выделим

[Задачи, сод. время - эволюционные; если времени нет - его вводят]

Опр. Устойчивость по нач. данным - уст-ть при переходе с одного временного слоя на другой

Методы исследования устойчивости.

1) операторных нер-в,
2) энергетических нер-в,
3) принцип максимума,
4) метод разделения переменных и др.

Рассмотрим 4): метод разделения переменных.

Рассмотрим на примере ур-я (**).
Метод разделения переменных позволяет проверить уст-ть по нач. данным. (т.е. φ_n - пост.)

$$\frac{\hat{u}_n - u_n}{\tau} = \frac{a}{h^2}(\hat{u}_{n-1} - 2\hat{u}_n + \hat{u}_{n+1}) + \hat{\varphi}_n$$

$$z = y_n - u_n$$

$$\frac{\hat{z}_n - z_n}{\tau} = \frac{a}{h^2}(\hat{z}_{n-1} - 2\hat{z}_n + \hat{z}_{n+1})$$

Будем считать: • $z_n = \rho_q^m \cdot e^{i\pi q \frac{x_n}{l}}$ ← чтобы безразм. $(0 \le x \le l)$

$z_n(x_n, t_m)$

q - номер гармоники, $q = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

ρ_q^m ~~коэф.~~ множитель роста, зав. только от времени, $\sqrt{i} = -1$

• $\hat{z}_n(x_n, t_{m+1}) = \rho_q^{m+1} e^{i\pi q\, x_n/l} = z_n \cdot \rho$

Будем, что все константы в (**) - постоянные.

Опр. Разн. схема (3) устойчива, если для всех q: $|\rho_q| \le 1 + C\tau$, где $C = const$; обычно $C = 0 \Rightarrow |\rho_q| \le 1 \ \forall q$

Условие неустойчивости $\exists q: |\rho_q| > 1$.

$$\frac{\rho_q^m(\rho_q - 1)e^{i\pi q x_n/l}}{\tau} = \frac{a}{h^2}\rho_q^m \ldots$$ — безусл. устойч.

Проведем выкладки для явной схемы:

$$\frac{\hat{u}_n - u_n}{\tau} = \frac{a}{h^2}(u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1}) + \varphi_n.$$

Тогда

$$\frac{\rho_q^m(\rho_q - 1)e^{i\pi q x_n/l}}{\tau} = \frac{a}{h^2}\rho_q^m(e^{i\pi q x_{n-1}/l} - 2e^{i\pi q x_n/l} + e^{i\pi q x_{n+1}/l})$$

$$(\rho_q - 1)e^{i\pi q x_n/l} = \frac{a\tau}{h^2}(e^{i\pi q(x_n - h)/l} - 2e^{i\pi q x_n/l} + e^{i\pi q(x_n + h)/l})$$

$$\rho_q - 1 = \frac{a\tau}{h^2}(e^{-i\pi q h/l} - 2 + e^{i\pi q h/l})$$

По формуле Эйлера $e^{i\pi q h/l} = \cos\left(\frac{\pi q h}{l}\right) + i\sin\left(\frac{\pi q h}{l}\right)$

$\Rightarrow$

$$\rho_q - 1 = \frac{2\tau a}{h^2}\left(\cos\frac{\pi q h}{l} - 1\right)$$

$$\rho_q - 1 = -\frac{4\tau a}{h^2}\sin^2\frac{\pi q h}{l}$$

$$\rho_q = 1 - \frac{4\tau a}{h^2}\sin^2\frac{\pi q h}{2l}$$

$$|\rho_q| \le 1 \Rightarrow -1 \le \rho_q \le 1$$

$$\begin{cases} 1 - \frac{4\tau a}{h^2}\sin^2\frac{\pi q h}{2l} \le 1 \\ 1 - \frac{4\tau a}{h^2}\sin^2\frac{\pi q h}{2l} \ge -1 \to 2 \ge \frac{4\tau a}{h^2}\sin^2\frac{q\pi h}{2l} \end{cases}$$

$$\frac{4\tau a}{h^2} \le 2$$

$$\to \boxed{\tau \le \frac{h^2}{2a}}$$ — условно устойчивая схема