16.04.24. **Лекция 9.**

С помощью ДУЧП позволяют опр. поле различной физ. природы (э/м, грав, радиац., световые и др.)

Например, поле температур, поле концентрации частиц, скоростей (скаляр...) сплошной среды, плотность и др.

~~Они содержа~~

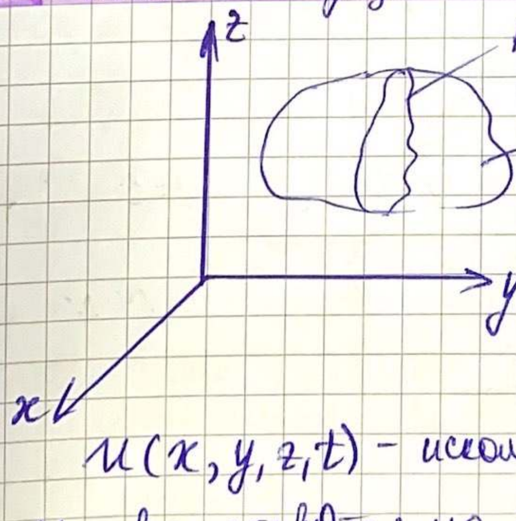
ОДУ содержат одну незав. перем.
ДУЧП содержат по крайней мере две незав. переменные.

$\vec{r}(x, y, z)$
t
v_x, v_y, v_z

Основные понятия
(отн. к ДУЧП)

1 Классификация уравнений – позже. описывается позже

2 Постановка задачи.



$Г(\vec{r}) = Г(x, y, z)$ – пов-ть, ограничивающая объем V.

$V(x, y, z)$ – объем

$u(x, y, z, t)$ – искомая ф-я $(Г)$

Условия ставятся на границе и в нач. момент момент времени $t = t_0$

Опр. Условие на границе наз. краевыми условиями

Опр. Условие при $t = t_0$ – начальными.

• Краевые: $u(x, y, z, t)\big|_{\Gamma} = \mu(x, y, z, t)$

• Нач: $u(x, y, z, t_0) = \mu_1(x, y, z, t)$

① Если заданы и кр. усл., и нач., задача наз-ся смешанно-краевой.

② Если заданы только кр. усл. (времени нет), задача наз. краевой.

③ Если заданы только нач. усл., задача наз. задачей Коши.

Пример

1) $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \\ 0 \le x \le b \\ t_0 \le t \le T \end{cases}$$

• Нач. условие: $t = t_0$, $u(x, t_0) = \mu(x)$

• Краевые:

$$\left.\begin{aligned} x = 0, \quad & u(0, t) = \mu_1(t) \\ x = b, \quad & u(b, t) = \mu_2(t) \end{aligned}\right\} - \text{I}^{\text{го}} \text{ рода}$$

или

• Краевые усл-я III-го рода

$x = a, \quad -\lambda_1 \dfrac{\partial u}{\partial x} = \alpha_1(u(a) - \beta_1)$

если $=0$, то II рода

$x = b, \quad -\lambda_2 \dfrac{\partial u}{\partial x} = \alpha_2(u(b) - \beta_2)$

если $=1$, то I-го рода?

по принципу вместо a

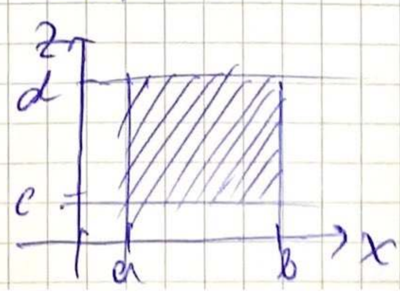
2) $$\frac{\partial u}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + f(x, z, t)$$

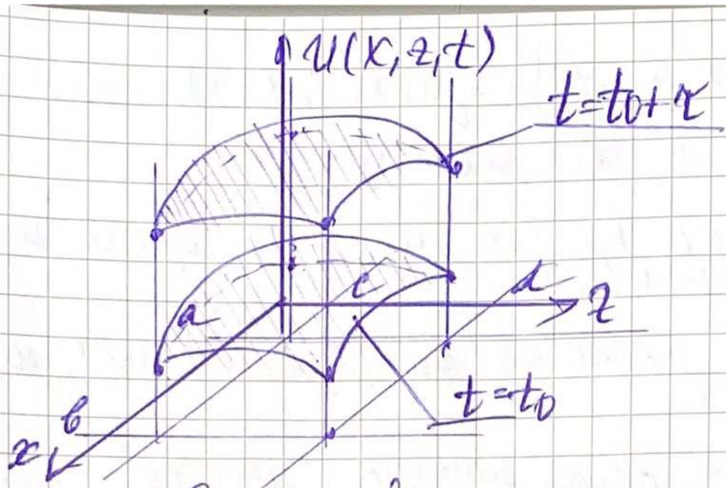
многомерная пространственная задача (ур-е параболического типа)

$a \le x \le b$

$c \le y \le d$

$t_0 \le t \le T$





Решением будет пов-ть, которая меняется во времени.

Удобно представлять не 1^xмерными графиками, а срезами (одномерными)
?

- Начальные условие

$t=t_0$, $u(x, z, t_0)=\mu(x, z)$

- Краевые условие

$x=a$, $u(a, z, t)=\mu_1(z, t)$

$x=b$, $u(b, z, t)=\mu_2(z, t)$

$z=c$, $u(x, c, t)=\mu_3(x, t)$

$z=d$, $u(x, d, t)=\mu_4(x, t)$

[л/р №5 - пример 2.
л/р №4 - пример 1.]

! Необх. задать все доп. условие
(1 произв. ⇒ одна конст.
2я произв. ⇒ две конст. (усл.?) ...)

3 Методы решения ДУЧП

1) аналитические
(пример 1 – $a = const$, или? ф-ию можно разложить в ряд Фурье)

- разделение переменных

! Ограниченная обл. перем.

- распространяющихся волн
(гипербол. ур-е – const, линейное)

- метод Дюамеля ?

" – " : результат представляется в виде рядов Фурье, они часто плохо сходятся

2) приближенные аналитические методы

- метод Ритца
- метод малого параметра

3) численные методы
+ линейные, нелин., квазилин. – к любому типу ур-й

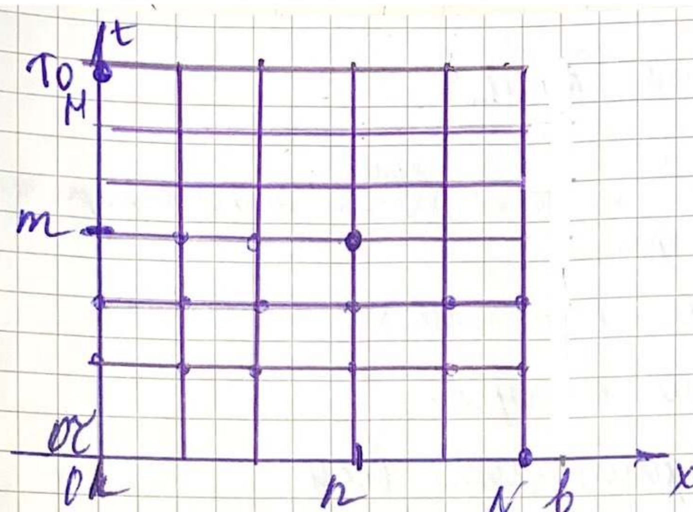
- метод конечных разностей
- метод конечных элементов – проекц.-сеточный (требует построения функционала)

Основные понятия метода конечных разностей

В методе конечных разностей ищется сеточная ф-я, кот. представляет собой ф-ю, заданную на мн-ве точек – узлов.
(систем. линейных, взаимно ⊥-ных прямых) точки пересечения

Рассмотрим построение сетки на примере:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \\ 0 \le x \le b \\ u(0) = \alpha \\ u(b) = \beta, \quad \alpha \text{ и } \beta - const \end{cases}$$



— сетка

$$\omega_{h\tau} = \{(x_n, t_m): x_n = nh,\ n=\overline{0,N},\ t_m = m\tau,\ m=\overline{0,M},\ h=\frac{b}{N},\ \tau=\frac{T_0}{M}\}$$

$u(x_n,t_m)$ y_n^m — обозн. (время — верхний индекс, простр-ное — внизу)

Вводится разностная сетка; решение, получ. в рез. числ. метода, наз. сеточной функцией.
Она существ. во всех т. пр-ва.

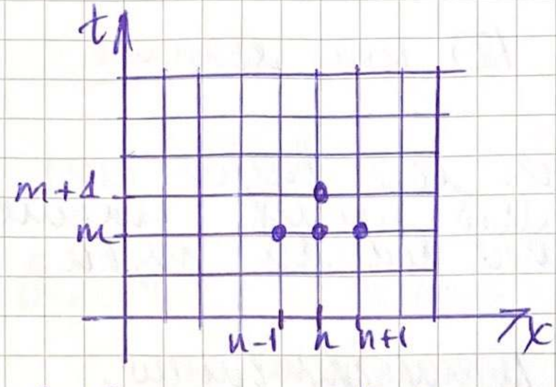
Задача: сближение: $\max\limits_{\forall n,m} |u(x_n,t_m) - y_n^m| \to 0$ при $\tau \to 0,\ h \to 0$

(сходимость при шагах $\to 0$)
— сходимость равномерной нормы, более строгая (м.б. несходящееся решение)
Можно рассм. другие нормы, при кот. более слабое решение.

$\boxed{1}$ Приведем примеры постр. разн. схем методом простой разностной аппроксимации.

Т.е. в ур-ях частные производные заменим их разностными аналогами.

Схема I (разностная) — явные



Выбираем шаблон.

Опр. Шаблон — набор точек, на которых строится разностная схема.

[Почему 3 узла? потому что 2я производная в ур-ии]

$$\frac{y_n^{m+1}-y_n^m}{\tau} = a\left(\frac{y_{n-1}^m - 2y_n^m + y_{n+1}^m}{h^2}\right) + f(x_n, t_m)$$

Обозначим: $y_n^m \equiv y_n$, $y_n^{m+1} \equiv \hat{y}_n$

$$\Rightarrow \frac{\hat{y}_n - y_n}{\tau} = \frac{a}{h^2}(y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1}) + f(x_n, t_m) \quad (1)$$

При $t=0$ ф-я изв. ⇒ перейдем с $t=0$ слоя в каждой точке на $t=1$ слой с пом. выпис. ур-я

Опр. Слой — линия, ‖-ная оси x, на которой зафикс. время (временной слой)

Имея разностное ур-е между слоями,

Алгоритм состоит в многокр. применении разн. схемы для перехода между временными слоями.

[Все, что без крышки — известно]

Видно, что разностная схема (1) представляет у себя формулу, необх. для определения $\hat{y}_n$:

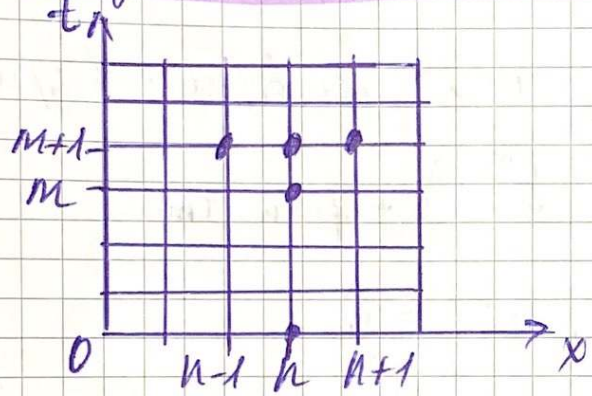
$$\hat{y}_n = y_n + \frac{\tau a}{h^2}(y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1}) + \tau f(x_n, t_m) \quad (2)$$

Опр. - Схемы такого типа (I) наз. <u>явными схемами</u>.

! Они явл. условно-уст.: если выбран шаг h, то τ - не м.б. произв., больше опр. предела, иначе решение развалится.

Но! Они <u>хороши</u> для распараллеливания.

Разностная схема II - неявная.



$$\frac{y_n^{m+1}-y_n^{m}}{\tau} = a\left(\frac{y_{n-1}^{m+1}-2y_n^{m+1}+y_{n+1}^{m+1}}{h^2}\right)+f(x_n,t_{m+1})$$

$\hat{y}_n$

⇒ сист. обозн.:

$$\frac{\hat{y}_n - y_n}{\tau} = \frac{a}{h^2}\left(\hat{y}_{n-1} - 2\hat{y}_n + \hat{y}_{n+1}\right) + f(x_n, t_{m+1}) \quad (3).$$

$1 \le n \le N-1$

Все y оказались на слое, где они неизв.

⇒ получена <u>неявная схема</u>, она требует решения системы.

т.е. система уравнений из $N+1$ уравнений

Видим, что в каждое ур-е входят три неизв.:

$\hat{y}_{n-1}, \hat{y}_n, \hat{y}_{n+1}$ ⇒ получим систему с 3х диаг. матрицей

⇒ решение методом прогонки.

$$\begin{cases} A_n \hat{y}_{n-1} - B_n \hat{y}_n + C_n \hat{y}_{n+1} = -F_n, \\ \text{где} \quad A_n = \dfrac{\tau a}{h^2}, \quad B_n = \dfrac{2\tau a}{h^2} + 1, \quad \hat{y}_0 = \alpha \\ C_n = \dfrac{\tau a}{h^2}, \quad F_n = y_n + f \cdot \tau, \quad \hat{y}_N = \beta \end{cases}$$

1^e ур-е исп. для перехода на след. слой.

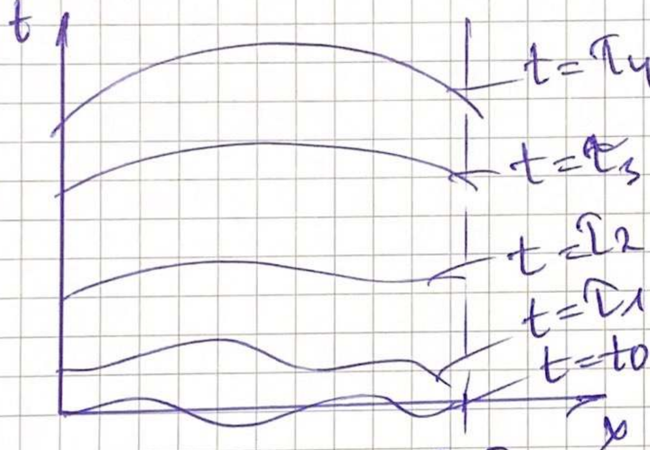
$|B_n| > |A_n| + |C_n| \Rightarrow$ прогонка устойчива.
(нигде не будет деления на нуль)

Определяем начальные прогоночные коэф-ты:

$$\hat{y}_0 = \xi_1 \hat{y}_1 + \eta_1$$

$\xi_1 = 0, \ \eta_1 = \alpha$ — из кр. условий.

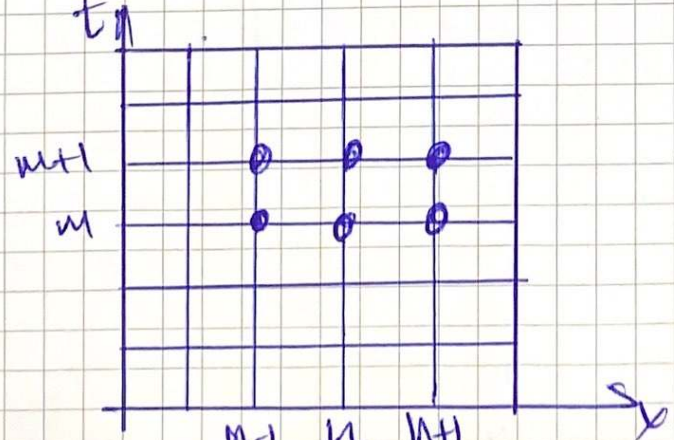
$\Rightarrow$ Решение находится на слое $t = \tau$



Выписанные схемы I и II имеют точность порядка

$O(\tau + h^2)$ при $\tau \to 0, h \to 0$.

Разностная схема III — симметричная



$O(\tau^2 + h^2)$

$$\frac{y_n^{m+1}-y_n^m}{\tau}=\sigma\left[a\left(\frac{y_{n-1}^{m+1}-2y_n^{m+1}+y_{n+1}^{m+1}}{h^2}\right)+(1-\sigma)a\left(\frac{y_{n-1}^{m}-2y_n^{m}+y_{n+1}^{m}}{h^2}\right)\right.$$

$$\left.f(x_n,\bar{t})\right]$$

$$\bar{t}=t_m+\frac{\tau}{2}$$