Моделирование Градов Владимир Михайлович 502л

- л/р (можно к другим группам/курсам)
- экзамен

! сдавать л/р, посещать лекции
делать самостоятельно :)

Расписание л/р:

Вт
- ✓ $10^{15}-11^{50}$ ИУ7-41Б } 243л
- ✓ $12^{00}-13^{35}$ ИУ7-44Б } 243л

Четверг
- $13^{50}-15^{25}$ ИУ7-65Б 511л магистр
- ~~$15^{40}-17^{15}$ ИУ7-66Б 511л~~ другой пр-ль (Кривцова)
- ✓ $17^{25}-19^{00}$ ИУ7-64Б 619л

Пятница
- ✓ $15^{40}-17^{15}$ ИУ7-62Б (чис.) 532л
- ✓ $17^{25}-19^{00}$ ИУ7-62Б 533л

Суббота
- $13^{50}-15^{25}$ ИУ7-63Б 532л
- ✓ $15^{40}-17^{15}$ ИУ7-61Б 532л

1мод: 5нед
2мод: 15нед   конец ↓ 17нед.

- можно как на консультацию
- надо предупреждать о том, что придешь сдавать
- билеты
  2 теор
  1 задача (алг.)

вопросы — апрель.

09.02.24. Лекция 1

Моделирование. Ввод. замечания. Осн. понятия

1 Моделирование и модели.

Опр. (общее) **Моделирование** — вид чел. деятельности, при которой изучение объекта заменяется изучением его модели.

Тут: объект = процесс = явление = система = событие

Опр. (общее) **Модель** — ① некоторый образ объекта, ему не посредственный.

② мысленно представляемая или материально реализ. система кот. замещает объект так, что позволяет раскрыть новые св-ва.

! модель ≠ объект

Т.е. ③ представление объекта в виде, отличном от его формы и масштаба его реального сущ-я

Классификация моделей

Модели

- материальные (натурные)
  - физические (воспроизводит объект в огр. виде) Пр: макет
  - геометрические - воспроизводит форму объекта (внешний облик)
  - аналоговые - воспроизводят тепловые штуки? АВМ
- нематериальные (абстрактные, идеальные)
  - по разл. признакам
- модели суждения

Нематериальные модели:

классификация моделей м.б. произведена по различным признакам:

1) по форме выражения — механические, логические, мат.
2) по виду исследования — физиолог., медицинские, технические, физические и т.д.
3) по природе явления — соц., эк., био., псих., молекулярные, квантовые и т.д.
4) по степени точности — приближ., точные, достоверные и т.д.
5) по задачам иссл — прогностические, эвристические
6) по объему — полные, неполные
7) по способу выраж-я — граф., текст, симв.
8) по свойствам отражения — функц., системные, информационные.

Для нашего курса наибольший интерес представляют математические модели.

Опр. Математическая модель – представление объекта в виде мат. объектов (формул, уравнений, лог. соот-й), т.е. с исп. математич. аппарата.

Опр. Мат. моделирование – замена реального объекта его мат. моделью и изучение в дальнейшем постр. модели вместо объекта.

! Результаты расп-ся на изучаемый объект.

] Мат. модели:
- регулярные (функциональные);
- идентификации;
- имитационные;
- феноменологические.

— Рег. мат. модели позволяют описать функционирование объекта.

— Модели идент-ции строятся по принципу "вход-выход" – "черный ящик".
  + можно моделировать без конкр. объекта (сумм. рез-ты моделирования рег. моделями)

— Имитационные модели обычно имитируют процессы очередей, механизмы вз-я частей системы (оцениваются вер-ными законами) или другие процессы (так же имеется случайный характер) – используются для модели-я процессов вероятностного хар-ра.

— Феноменологич. модели позволяют описать внешнюю сторону объекта.

] Что делать с моделями?
Если не получается решить, надо упрощать, пока решение не найдется.
Можно уйти от вопроса неразрешимости моделей.
⇒ Вместо натурных экспериментов можно строить программные комплексы

Порядковый разрез.
Роль хороших модели – огромная

Применение: военные техн., косм. обл., ест. науки

Некоторые применения моделирования, в кот. преимущ-ва модел-я проявл. особенно ярко:

- иссл. длит. эволюц. процессов
  - вопрос долговечности изделия
- иссл. объектов, связ. с их уничтожением
  - снаряды
- иссл. критических и закрит. режимов работы
  - ядерный реактор
- объяснение / восстановление протекания давно прошедших событий

Требования к мат. моделям.

16.02.24. Лекция 2.

- адекватность
- точность
- универсальность
- экономичность

а) адекватность
– соответствие модели задачам, которые ставят перед моделью (требованиям к модели)

~~б) точность~~

Структура погрешности моделирования

Погрешность

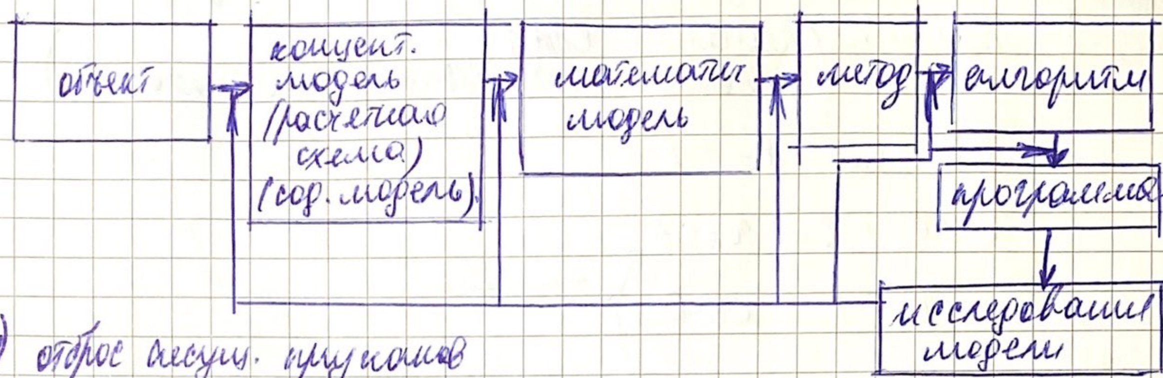
погрешность исх. данных
- неустранимая, принимается как данность

погрешность модели
- зависит от меры учета условий и т.д., выбора модели

погрешность метода реализации модели
- д.б. раз в 5 меньше, чем погр. модели (?)

погрешность округления
- вызвана комп. вычислениями (предст. чисел, операции, округление)

Схема математического моделирования (процесса).



1) отброс несущ. признаков

2) воплощение в мат. соотн., формулы

Ошибка в модели - самое неприятное
программа - экспериментальная установка.

Опр. Процедура проведения числ. расчетов с помощью программы — вычислительный эксперимент.

Не уступает по точности натурному эксперименту.

Корректность постановки задачи.

Опр. Задача считается корректно поставленной, если ее решение
1) существует,
2) единственно,
3) устойчиво ко вх. данным.

- Устойчивость означает, что малые изменения вх. данных должны приводить к малому изм. вых. данных, т.е. должна иметь место непр. зависимость вых. данных от вх. данных.

$y = Ax$

$y + \delta y = A(x + \delta x)$

$\delta x \to 0, \ \delta y \to 0$

Если задача неустойчива, м.б. большие погрешности, кот. будут нарастать $\Rightarrow$ решать ее трудно.
(У них свои методы - регуляризация)

рег: попытка превращения задачи в корректную с помощью параметра

Бывают задачи: $\delta y = C\delta x$, C - большая - слабоустойчивые задачи (плохо обусловленные задачи)

∃ Пример: (решение СЛАУ
условие - малость детерминанта ?)

$$\begin{cases} x_1 + 0.005\,x_2 = 1 \\ 3x_1 + 0.02\,x_2 = 3 \end{cases}$$

$x_1 = 1$, $x_2 = 0$

Изменим на 0.01

$$\begin{cases} x_1 + 0.005\,x_2 = 1 \\ 3x_1 + 0.02\,x_2 = 3.01 \end{cases}$$

$x_1 = 0.99$
$x_2 = 2$ - кардинально отличается

Неустойчивым м.б. алгоритм, выбранный для реш-я.

Помимо неуст. задач ∃ неустойчивые алгоритмы.

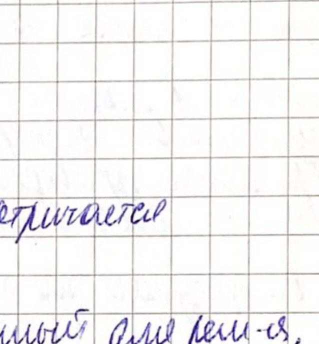
∃ Пример: $u'(x) = -\alpha u(x)$

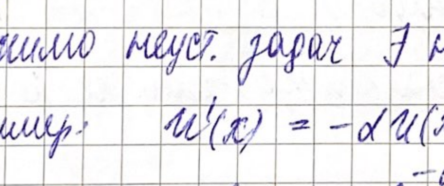
$u(x) = c \cdot e^{-\alpha x}$, $\alpha > 0$

$u(0) = u_0$

$u(x) = u_0 e^{-\alpha x}$

• устойчивая задача





$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = -\alpha y_n$ - разностная схема аппрокс. задачу ?

$y_{n+1} = y_n(1 - \alpha h)$

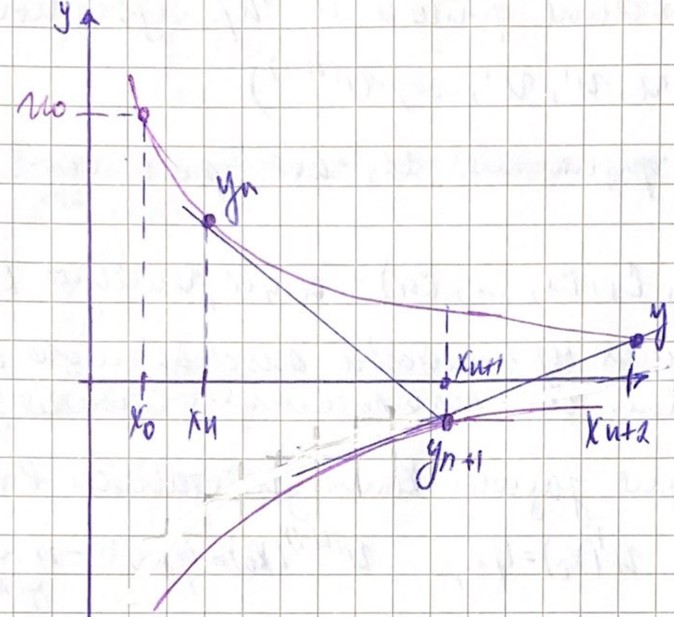
При шаге $\to 0$ $\Rightarrow$ дифер. задача

Переход из n в $n+1$ - движение по касательной.
При $1-\alpha h$ - отриц. очередной $y_{n+1} < 0$, $y_n > 0$ - "пила"

$\Rightarrow 1-h\alpha > 0,$

$h < \frac{1}{2}$ — нельзя считать при произвольном шаге

Этот алгоритм явл. условно устойчивым.



— "пила"

Как превратить в абс. устойчивой?

$$y_{n+1} = y_n - h\alpha y_{n+1}$$

$$y_{n+1} = \frac{y_n}{1+h\alpha}$$

что-то про точное решение

(лекция 2)

Модели на основе ОДУ.

ОДУ - обыкновенное дифф. уравнение.

(1) $F(x, u, u', u'', u''', \ldots, u^{(n)}) = 0$ - ур-е, связ. ~~ф-ю~~ аргумент, значение ф-ю и ее производные.

(2) $u^{(n)}(x) = f(x, u, u', u'', \ldots, u^{(n-1)})$

Решение ОДУ - функция u, кот. зависит?

$$u(x) = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n) \text{ - общее решение ОДУ}$$

Для нахождения из семейства описываемого общим решением, частного решения ставится доп. условие.

Например, для задачи Коши усл. ставятся в од. т.:

$u(x_0) = y_0,\ u'(x_0) = y_1, \ldots, u^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$ - n нач. условий

$\Rightarrow$ находим все константы.

М.б. система уравнений.

$$\begin{cases} u_1'(x) = f_1(x, u_1, u_2, \ldots, u_n) \\ \ldots \\ u_k'(x) = f_k(x, u_1, u_2, \ldots, u_n) \\ \ldots \\ u_n'(x) = f_n(x, u_1, u_2, \ldots, u_n) \end{cases} \quad (3)$$

Нач. условие:

$u_1(x_0) = y_1$

$u_2(x_0) = y_2$

$\ldots$

$u_n(x_0) = y_n$

~~ключевой м~~

Любое ур-е n-го порядка заменой переменных м.б. сведено к системе 1го порядка

$\Rightarrow$ любые рассм. системы приводятся к виду (3)

$u' = f(x, u) \to \bar{u}' = \bar{f}(x, \bar{u})$, где

Алгоритм решения одного ур-я м.б. перенесен без изменений на решение системы.

где $\bar{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_n \end{pmatrix}$, $\bar{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{pmatrix}$

Покажем, что (2) м.б. сведено к системе дифф. ур-й 1го порядка.

$u^{(k)} = u_k$,

$u' = u_1$

$u'' = u_2$

$u^{(n-1)} = u_{n-1}$

$(u^k)' = u^{(k+1)} = u_{k+1}$

$u_k' = u_{k+1}$

т.е. $\begin{cases} u' = u_1 \\ u_1' = u_2 \\ u_2' = u_3 \\ \dots \\ u_{n-2}' = u_{n-1} \\ u_{n-1}' = f(x, u, u_1, u_2, \dots, u_n) \end{cases}$ (4) отн-но неизв.

Для решения (4): $u'(x) = f(x, u)$

ОДУ - содержит одну независимую переменную.

Пример (не ОДУ): 1) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f(x, y) = 0$

2) $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f(x, y)$

Методы решения дифференциальных уравнений.

1) аналитические
   - уравнение → методы
   - трудность: определение типа ур-я
   - огр. область применимости

2) приближенные аналитические.

3) численные
   - универсальные методы

Пример: $u'(x) = x^2 + u^2$

Задача Коши. Приближенные аналит. методы.

1) Разложение в ряд

ряд сходится, если ...

$$u' = f(x, u)$$

$$u(x_0) = y$$

- $u(x) = u(x_0) + \cancel{\frac{u'(x_0)}{1!}} + \frac{u'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{u''(x_0)}{2!}\cdot(x-x_0)^2 + \frac{u'''(x_0)}{3!}\cdot(x-x_0)^3 + \ldots$

- $u(x) = u(x_0) + f(x, y)(x-x_0) + \frac{f_x' + f_u'\cdot f|_{x_0}}{2!}(x-x_0) + \ldots$

Пример:
$$\begin{cases} u'(x) = u^2 + x^2 \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

$$u(x_0) = u^2 + x^2 \Big|_{x_0} = 0$$

$$u''(x_0) = 2uu_x' + 2x \Big|_{x_0} = 0$$

$$u'''(x_0) = 2(u'^2 + uu_x'') + 2 = 2$$

$$y(x) = 0 + \frac{2}{3!}(x-x_0)^3 = \frac{(x-x_0)^3}{3}$$

② Метод Пикара. ⁉ сходится

$u'(x) = f(x, u)$ — зависит только от x

(Рассм. правую часть на решении этого ур-я)

$$\frac{du}{dx} = f(x, u)$$

$$du = f(x, u)\,dx$$

$$u = u(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(t, u)\,dt$$ — другая форма

$u(x_0) = \eta$

При достаточно широких условиях:

$|x - x_0| \le a$

$|u - \eta| \le b$

условие липшица: $|f(x, u_1) - f(x, u_2)| \le L \cdot |u_1 - u_2|$

подбором.

$$\boxed{y^{(s)}(x) = \eta + \int_{x_0}^{x} f(t, y^{(s-1)}(t))\,dt}$$

$y^{(0)}(x)$ — произв. ф-я ($\pm$ близкая к решению) берется из нач. прибл. или ~~из~~ по (1).

$y^{(0)}(x) = \eta$ или $y^{(0)}(x) =$ по методу (1) (если точно)

Пример.

$u'(x) = u^3 + x^3$

$u(0) = 0$

$y^{(0)} = 0$

$$y^{(1)}(x) = 0 + \int_0^x t^3\,dt = \frac{x^4}{4}$$

$$y^{(2)}(x) = 0 + \int_0^x \left(\frac{t^{12}}{4^3} + t^3\right)dt = \frac{x^{13}}{4^3 \cdot 13} + \frac{x^4}{4}$$

$$y^{(3)}(x) = 0 + \int_0^x \left(\left(\frac{t^{13}}{4^3 \cdot 13} + \frac{t^4}{4}\right)^3 + t^3\right)dt = \ldots$$

⁉ Вопрос работы с большим целым числом в знаменателе.

6 Числ. метод (простейший)

$$u(x) = u(x_0) + \frac{u'}{1!}(x - x_0) + \cancel{\frac{u''}{2!}(x - x_0)^2}$$

$$\boxed{y_{n+1} = y_n + h f(x, y_n)}$$ – метод Эйлера.

Меньше шаг – больше точность