

ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

1. Понятия о моделях, моделировании и предмете курса. Общая классификация моделей.

Моделирование – специфический метод (методология) познания, основанный на замене реального объекта (системы, процесса, ситуации, явления) некоторой моделью и исследовании в дальнейшем созданной модели.

Моделью называется представление системы, объекта, ситуации или процесса в виде, отличном от облика, способа или формы их реального существования (функционирования, протекания).

Классификация моделей может быть выполнена различными способами. Например, согласно различным литературным источникам существуют следующие типы моделей:

1. по форме выражения – механические, логические, математические;
2. по предмету исследования – физические, химические, технические, физиологические, медицинские и т.д.;
3. по виду – материальные, идеальные, предметные;
4. по природе явления – социальные, экономические, биологические, психологические, молекулярные, квантовые;
5. по степени точности – приближенные, точные, достоверные, вероятностные и т.д.;
6. по задачам исследования – эвристические, прогностические;
7. по объему – полные и неполные;
8. по способу выражения – знаковые, вещественные, графические;
9. по свойствам отражения – функциональные, информационные, системные.

Детально классификацию лучше проводить в конкретной предметной области. В качестве примера рассмотрим более подробно, как выглядит классификация моделей по видовому признаку (рис.1).

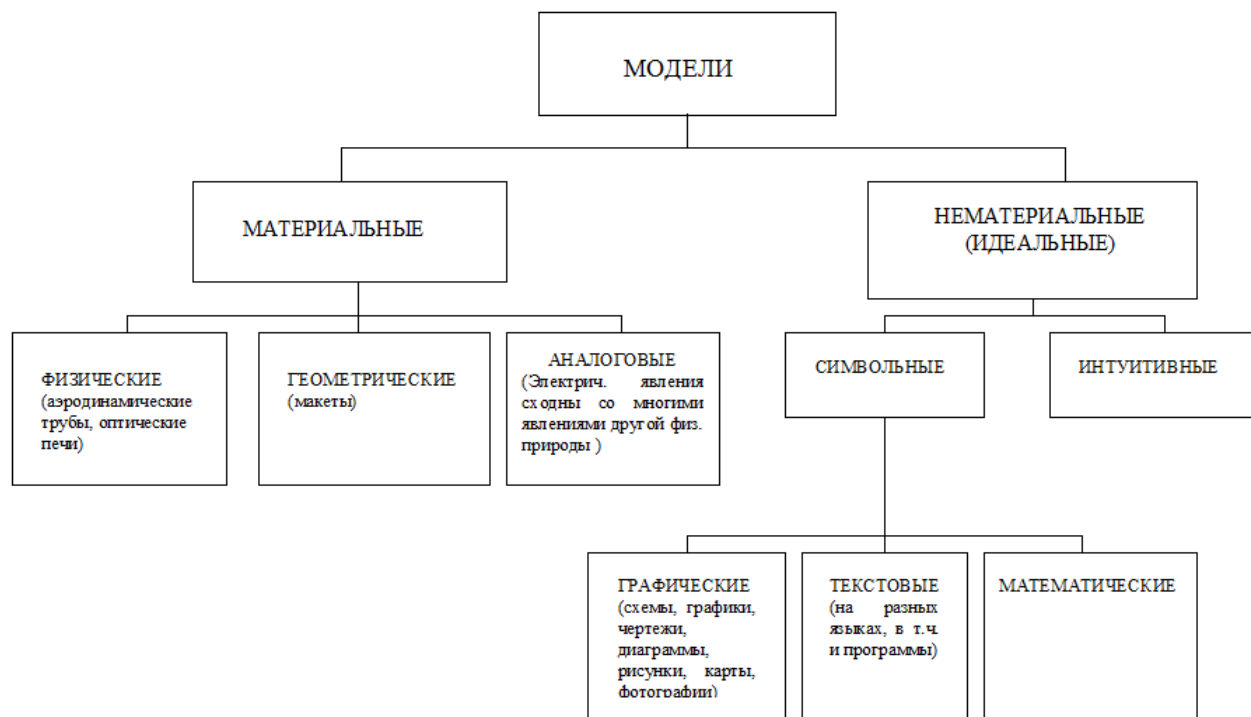


Рис. 1. Классификация моделей

Итак, согласно рис.1. модели можно разделить на **материальные и нематериальные (идеальные).**

Среди материальных – **физические, геометрические, аналоговые**, среди нематериальных – **символьные и интуитивные.**

Геометрические модели отражают конфигурацию элементов систем, их взаимное расположение и внешний вид. Например, макеты архитектурных сооружений, технических устройств, муляжи, манекены т.д.

Физические и математические модели строятся для получения количественных характеристик систем.

Графические модели – машиностроительные чертежи, диаграммы и т.д.

В **физических** моделях обеспечивается сохранение (воспроизводство) основных физических процессов и условий функционирования реального объекта. Например, продувка частей летательных аппаратов в аэродинамических трубах, изучение поражающего действия атомного взрыва за счет радиации в оптических печах и т.д.

Наконец **математической** моделью называется описание процесса или объекта на языке математических понятий: формул, уравнений, логических соотношений. **Математическим моделированием** называется методология исследования, основанная на замене реального объекта или процесса его математической моделью. При математическом моделировании исследование реального процесса или системы заменяется исследованием его математической модели.

Среди математических моделей можно выделить **регулярные** (функциональные) модели, модели **идентификации** и **имитационные** модели.

Регулярные модели опираются на теорию функционирования объектов и описывают реальные процессы в системах. Модели **идентификации** создаются путем изучения реакции объекта на некоторое воздействие. Сама исследуемая система представляет собой «черный ящик». Часто такая модель представляется в виде некоторой интерполяционной зависимости. Модели **идентификации** строятся на основе экспериментов или численных расчетов. **Имитационные** модели применяются при исследовании систем массового обслуживания.

Возможно продолжение классификации математических моделей. В частности, регулярные модели бывают аналитические и численные, статистические и детерминированные, линейные, квадратичные, полиномиальные и т.д.

Вообще методы и алгоритмы моделирования можно условно разбить на два больших класса: детерминированные и статистические (вероятностные). Последние широко применяются в имитационном моделировании. Однако вероятностные методы применяют и для вычисления интегралов, решения уравнений в частных производных, воспроизведения физических процессов (например, перенос излучения).

Области **применения** математического моделирования, в которых преимущество данной методологии проявляется особенно выпукло:

1. Исследование длительной во времени эволюции процесса (например, исследование долговечности объекта)
2. Исследование связано с уничтожением объекта
3. Исследование критических и закритических режимов функционирования объекта.
4. Исследование вреда от экологически опасных процессов (загрязнение океана, атмосферы)
5. Воспроизведение давно прошедших событий (Тунгусский метеорит)
6. Высокая стоимость объекта – оригинала.

7. Отсутствие объекта – оригинала (различные проекты). Предварительная отработка на моделях позволяет повысить качество создаваемых объектов и сократить сроки и стоимость их разработки.

Естественно, что ключевым вопросом при оценке моделей оказывается вопрос **адекватности** используемых моделей, под которой понимается соответствие моделей поставленным при их создании задачам. Наиболее используемым методом оценки моделей является сравнение с данными экспериментов, при этом часто применяется прием **ретроспективного** моделирования, когда моделируются состояния системы, по которым уже имеется достоверная информация. Следует отметить, что хорошее совпадение численных и экспериментальных данных еще не гарантирует точности модели, а лишь свидетельствует о ее пригодности для задач моделирования. Всегда может быть разработана модель, обеспечивающая лучшее согласие с данными эксперимента. Подчеркнем, что имеют право на существование модели никогда не происходивших процессов или событий, например, космические катастрофы, глобальное изменение состояния атмосферы и т.д.

2. Функции математических моделей

Можно выделить следующие важные **функции математических** моделей:

- средство **познания** действительности. Уже на этапе создания модели выясняются нелогичности и пробелы в наших знаниях, формулируются направления необходимых исследований, конкретизируются соответствующие задачи. Вся научная деятельность состоит в построении и исследовании моделей.
- средство накопления и **передачи информации и общения**, благодаря компактности, точности и объективности модели.
- средство обучения и тренажа, способствующее приобретению профессиональных навыков без риска для жизни и здоровья.
- средство **прогнозирования** поведения объекта. Математическое моделирование позволяет еще до возникновения реальной ситуации оценить условия ее возникновения и способы управления развитием событий, выбрать оптимальные параметры и режимы работы системы до ее реального создания. Появляется возможность исследовать последствия катастроф, наступление которых невозможно допустить (взрыв ядерной установки, космические катастрофы, отравление океана, глобальные изменения климата и т.д.).

Помимо адекватности к математическим моделям предъявляются **требования** по

* Точности.

- * Экономичности.
- * Универсальности.

Моделирование как метод познания основывается на принципе материального единства мира, существования общих законов развития природы, на признании всеобщей связи и взаимообусловленности явлений.

Модель представляет некоторое отражение действительного объекта. Физические модели связаны с натурным объектом непосредственно и естественно. В то же время связь абстрактных моделей с моделируемой системой далеко не столь очевидна (например, связь некоторого процесса с описывающей его системой уравнений, а затем и с реализующими эту модель вычислительными средствами).

Представим некоторые достаточно авторитетные высказывания о сущности моделирования.

Г. Клаус определяет моделирование как «отображение фактов, вещей и отношений определенной области знания в виде более простой наглядной материальной структуры этой области или другой области».

В.А. Штоф (Штоф В.А. Моделирование и философия. М., 1966) считает: «Под моделью понимается такая мысленно представляемая или материально реализованная система, которая отображая или воспроизводя объект исследования, способна замещать его так, что ее изучение дает нам новую информацию об этом объекте».

Д. Харафас (Д. Харафас . Системы и моделирование. М., 1967) рассматривает моделирование как динамическую аналогию, что означает **не тождественное** подобие свойств и отношений. Характерной чертой моделей является их тенденциозность, т.е. описание системы, объекта лишь с некоторых сторон, в его некоторых свойствах и признаках.

У.У. Эшби отмечает, что «моделирование – это логика упрощения».

3. Понятие и схема вычислительного эксперимента

Математическое моделирование получило небывалое развитие, начиная со второй половины XX века. К этому времени произошло чрезвычайное усложнение и удорожание технических, социальных, экономических проектов, когда цена ошибки стала слишком высокой. Кроме того, получило мощное развитие направление вычислительной техники и средств вычислений. Ведь модели человечество применяет с незапамятных времен. Довольно давно сформулированы математические описания различных фундаментальных явлений окружающего мира. Вопрос стоял в разрешимости математических моделей. При ограниченных средствах вычислений модели неизбежно должны были упрощаться, и исходили при этом не из иерархии процессов по их важности, а по принципу возможности получения аналитического решения.

В настоящее время не существует областей человеческой деятельности, где бы ни применялось математическое моделирование. Разработаны математические модели самых разных технических устройств, технологических процессов, геологических и геофизических процессов, модели социальных систем, модели биологические, экономики регионов, медицинские.

Существует определенная технология математического моделирования или **вычислительного эксперимента**. Термин вычислительный эксперимент отражает новые реалии нашего мира, когда в дополнение к **натурному** эксперименту появился эксперимент математический (компьютерный, численный), связанный с исследованием математических моделей. Указанная технология может быть представлена следующей укрупненной схемой

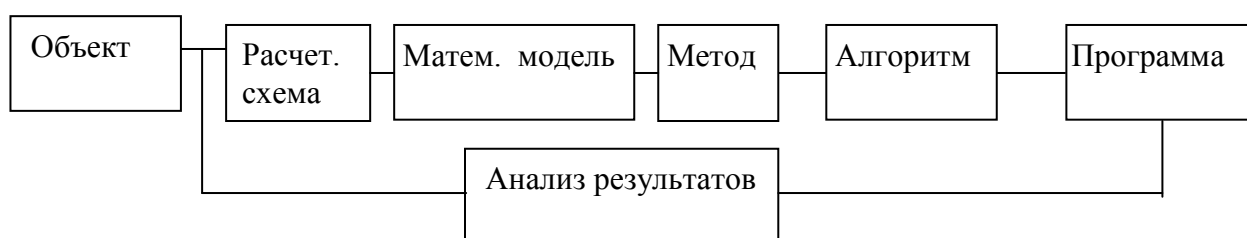


Рис.2. Схема вычислительного эксперимента

Вычислительный эксперимент, обладающий большими возможностями в плане точности описания реальных объектов и систем, ни в коей мере не отменяет натурный эксперимент, как средство получения новых фактов и накопления материала для тестирования.

Предмет настоящего курса – изучение эффективных алгоритмов решения вычислительных задач, возникающих при исследовании математических моделей, и обработке и интерпретации результатов численных и натурных экспериментов.

4. Методы получения математических моделей

1. На основе перво - принципов (фундаментальных законов природы)
2. С помощью вариационных принципов (принцип наименьшего действия, принцип Ферма)
3. На основе аналогий
4. Выстраиванием иерархии моделей (сверху - вниз или снизу- вверх)

5. Структура погрешности результатов вычислений.

Можно выделить четыре вида погрешности результатов расчетов:

а) Погрешность модели. Определяется уровнем существующих знаний, новизной проблемы, обоснованностью физических допущений и т.д. В нашем курсе эти вопросы систематически не рассматриваются.

в) Погрешность исходных данных. Исходные данные неизбежно задаются с некоторой ошибкой. Данное обстоятельство приводит к погрешности решения, которая называется *неустранимой*.

с) Погрешность метода.

Если по известным входным данным x требуется найти некоторую величину y , то символически задачу можно записать в следующем виде $y=Ax$ (здесь x и y могут быть числами, матрицами, функциями). В тех случаях, когда оператор A сложен и не допускает аналитического решения, задачу решают приближенно. Например, при вычислении производной от таблично заданной функции можно построить интерполяционный многочлен, который затем продифференцировать. Можно также записать сеточные аналоги производной различного порядка точности, выбирая соответствующие конфигурации узлов. Погрешность метода целесообразно выбирать так, чтобы она была примерно в 5 раз меньше неустранимой погрешности.

d) Погрешность округления. Появляется из-за того, что все вычисления выполняются с конечным числом значащих цифр. Согласно статистике при совершении N одинаковых операциях среднее значение суммарной ошибки возрастает в \sqrt{N} раз, вследствие взаимной компенсации погрешностей разного знака. Таким образом, если отсутствуют систематические погрешности, то случайные ошибки не слишком сильно накапливаются.

Если алгоритм порождает систематические погрешности, то он должен быть изменен.

6. Понятие о корректности постановки задач, примеры неустойчивых и плохо обусловленных задач. Понятие об устойчивости численных алгоритмов.

Задача $y=Ax$ называется корректно поставленной, если для всех x , принадлежащих некоторому классу, решение y существует, единственно и устойчиво по входным данным.

Существование и единственность решения достаточно очевидные условия. Обратимся к устойчивости. Входные данные имеют некоторую погрешность δx , в итоге получается неустраняемая погрешность $\delta y = A(x + \delta x) - Ax$. Если решение непрерывно зависит от входных данных, т.е. $\delta y \rightarrow 0$ при $\delta x \rightarrow 0$, то задача называется устойчивой по входным данным, иначе задача неустойчива по входным данным. Рассмотрим классический пример - задача Коши для эллиптического уравнения в полуплоскости $y \geq 0$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial y} = \varphi(x).$$

Входными данными является $\varphi(x)$.

Если $\varphi(x) = \overline{\varphi}(x) = 0$, то $u(x, y) = \overline{u}(x, y) = 0$.

Если $\varphi(x) = \varphi_n(x) = \frac{1}{n} \cos nx$, то $u(x, y) = u_n(x, y) = \frac{1}{n^2} \cos nx \cdot \operatorname{sh} ny$.

Видно, что при $n \rightarrow \infty$ $\varphi_n(x) \rightarrow 0 = \overline{\varphi}(x)$, однако при этом $u_n(x, y)$ отнюдь не стремится к $\overline{u}(x, y)$, а возрастает неограниченно. Таким образом малое отклонение $\varphi(x)$ от 0 приводит к катастрофическому нарастанию $u(x, y)$. Разобранная задача имеет физическое содержание - модель описывает поведение тяжелой жидкости, налитой поверх легкой. В данном случае действительно возникает релей-тейлоровская неустойчивость. К задаче с неустойчивостью применять непосредственно численные методы сложно, т. к. погрешности, обязательно появляющиеся в ходе счета, будут сильно нарастать в процессе вычислений. В настоящее время созданы методы решения некорректных задач, при этом решается не исходная некорректная задача, а близкая к ней вспомогательная корректно поставленная задача, содержащая параметр. При варьировании этого параметра решение вспомогательной задачи можно устремить к решению исходной задачи.

Остановимся еще на важном понятии слабой устойчивости (плохой обусловленности).

Пусть $\delta y \leq C \delta x$. Формально задача устойчива, однако при большой константе C малые погрешности исходных данных приведут к большой ошибке результата, т.е. здесь возникают те же проблемы, что и в случае неустойчивых задач. Рассмотрим пример.

$$\begin{aligned} z''(t) &= z(t), \\ z(0) &= a, \quad z'(0) = -a, \\ a &> 0. \end{aligned}$$

Общее решение данного уравнения имеет вид:

$$z(t) = \frac{z(0) + z'(0)}{2} e^t + \frac{z(0) - z'(0)}{2} e^{-t}.$$

При точном значении начальных условий решение представляет

$$z(t) = ae^{-t}.$$

Теперь пусть исходные данные заданы с погрешностью δa , т.е.

$$z(0) = a + \delta a.$$

Тогда решение примет вид

$$z(t) + \delta z = \frac{\delta a}{2} e^t + (a + \frac{\delta a}{2}) e^{-t}.$$

Величина погрешности расчета равна

$$\delta z = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \delta a, \text{ т.е. константа } C = \frac{e^t + e^{-t}}{2}.$$

При $\delta a = 10^{-10}$ и $t=100$ имеем

$$C \approx 10^{43}, \delta z \approx 10^{33}.$$

Понятно, что для устойчивости счета на практике константа C должна быть не слишком велика.

Еще пример плохой обусловленности. Система линейных уравнений

$$x_1 + 0.005x_2 = 1,$$

$$3x_1 + 0.02x_2 = 3.$$

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 0.$$

Изменим свободный член во втором уравнении на треть процента, получим

$$x_1 + 0.005x_2 = 1,$$

$$3x_1 + 0.02x_2 = 3.01.$$

$$x_1 = 0.99, \quad x_2 = 2.$$

Даже при устойчивой задаче численный алгоритм может быть неустойчивым. Например, при вычислении производных с помощью разностей необходимо вычитать близкие числа, что сильно уменьшает точность. По аналогии с данным выше определением можно говорить об устойчивости алгоритма.

Рассмотрим простую задачу

$$z'(x) = -\alpha z(x),$$

$$x = 0, \quad z(0) = z_0.$$

Аналитическое решение задачи находится просто

$$z(x) = z_0 e^{-\alpha x}.$$

Получаем семейство интегральных кривых при различных значениях z_0 .

Будем решать задачу численно. В области решения уравнения построим разностную сетку (множество точек, называемых узлами) с постоянным расстоянием (шагом) между узлами - h . Простейшая явная схема Эйлера (схема ломаных) для двух соседних узлов с номерами n и $n+1$ выглядит так

$$z_{n+1} = z_n - \alpha z_n h$$

или

$$z_{n+1} = z_n (1 - \alpha h).$$

При $(1 - \alpha h) < 0$, $h > \frac{1}{\alpha}$ будем получать знакопеременные решения. Говорят алгоритм не обладает устойчивостью.

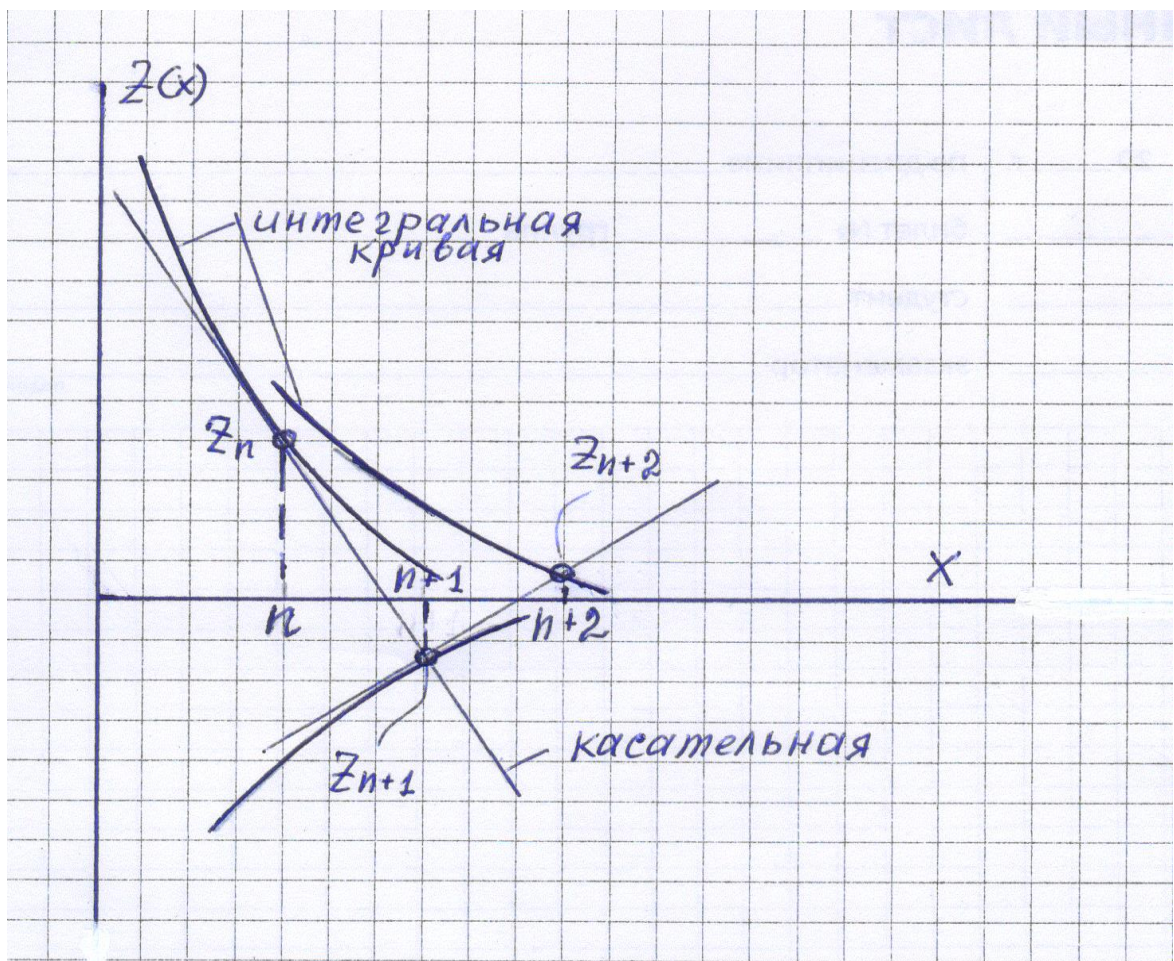


Рис.3. Геометрическая интерпретация явного метода

В схеме Эйлера переход из узла с номером n в узел $n+1$ и из узла $n+1$ в $n+2$ происходит вдоль касательной к интегральной кривой (рис.3). В итоге при достаточно большом шаге получается пилообразное решение, никак не соответствующее истинному решению исходного уравнения.

Модернизируем алгоритм, применяя неявный метод Эйлера

$$z_{n+1} = z_n - \alpha z_{n+1} h,$$

или

$$z_{n+1} = \frac{z_n}{1 + \alpha h}$$

В этом случае проблема неустойчивости алгоритма и ограничения на шаг снимаются.

В следующих лекциях мы перейдем к рассмотрению конкретных вопросов, связанных с построением и исследованием математических моделей разных типов и алгоритмов их реализации.

ЛЕКЦИИ №3,4. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ.

ЗАДАЧА КОШИ

1. Общие замечания

Обыкновенными дифференциальными уравнениями (ОДУ) называются уравнения с одной независимой переменной. Если независимых переменных больше, чем одна, то уравнение называется дифференциальным уравнением с частными производными.

С помощью обыкновенных дифференциальных уравнений строятся модели движения систем взаимодействующих частиц, электротехнических процессов в электрических цепях, кинетики химических реакций, процессов заселения уровней энергии в высокотемпературных средах и многих других объектов и процессов.

К задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений сводятся некоторые задачи для уравнений в частных производных, когда многомерное уравнение позволяет провести разделение переменных (например, при вычислении энергетического спектра частиц в полях определенной симметрии).

Обыкновенное дифференциальное уравнение любого порядка при помощи замены переменных может быть сведено к системе уравнений первого порядка. Рассмотрим в связи с последним пример.

Дифференциальное уравнение третьего порядка

$$a(x)\frac{d^3v}{dx^3} + b(x)\frac{d^2v}{dx^2} + c(x)\frac{dv}{dx} + d(x)v = f(x)$$

заменой переменных

$$\frac{d^2v}{dx^2} = v_2, \quad \frac{dv}{dx} = v_1,$$

приводится к следующей системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dx} &= v_1, \\ \frac{dv_1}{dx} &= v_2, \\ a(x) \frac{dv_2}{dx} &= -b(x)v_2 - c(x)v_1 - d(x)v + f(x).\end{aligned}$$

В общем виде преобразование выглядит следующим образом. Дифференциальное уравнение n -го порядка, разрешенное относительно старшей производной

$$v^{(n)}(x) = \varphi(x, v, v', v'', \dots, v^{(n-1)}),$$

заменой переменных

$$v^{(k)} \equiv v_k$$

сводятся к системе n уравнений первого порядка

$$\begin{aligned}v'_k &= v_{k+1}, \quad 0 \leq k \leq n-2, \\ v'_{n-1}(x) &= \varphi(x, v_0, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}),\end{aligned}$$

где обозначено $v_0 \equiv v$.

В соответствии с изложенным далее будут рассматриваться системы уравнений первого порядка с произвольной правой частью:

$$v'_k(x) = \varphi_k(x, v_1, v_2, \dots, v_n), \quad 1 \leq k \leq n.$$

Решение системы n -го порядка зависит от n параметров c_1, c_2, \dots, c_n . Для выделения единственного решения необходимо использование дополнительных условий для искомой функции. В зависимости от того, каким образом ставятся данные условия, различают три типа задач для обыкновенных дифференциальных уравнений: задача Коши, краевая задача и задача на собственные значения.

В задаче Коши все дополнительные условия ставятся в одной точке:

$$v_k(x_0) = v_{k,0}, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Решение отыскивается в некотором интервале $x_0 \leq x \leq x_l$.

Если правые части φ_k уравнений непрерывны в некоторой окрестности начальной точки $(x_0, v_{1,0}, v_{2,0}, \dots, v_{n,0})$ и удовлетворяют условию Липшица по переменным \mathbf{v}_k , то решение задачи Коши существует, единственно и непрерывно зависит от координат начальной точки, т.е. задача является корректной. Условие Липшица формулируется следующим образом

$$\begin{aligned} & \left| \varphi_k(x, v_{1,l}, v_{2,l}, \dots, v_{n,l}) - \varphi_k(x, v_{1,m}, v_{2,m}, \dots, v_{n,m}) \right| \leq \\ & \leq L \left\{ |v_{1,l} - v_{1,m}| + |v_{2,l} - v_{2,m}| + \dots + |v_{n,l} - v_{n,m}| \right\} \end{aligned}$$

для любых точек $(x, v_{1,l}, v_{2,l}, \dots, v_{n,l}), (x, v_{1,m}, v_{2,m}, \dots, v_{n,m})$.

2. Методы решения

Можно выделить три метода решения обыкновенных дифференциальных уравнений: точные, аналитические приближенные и численные.

Точные методы предусматривают получение решения в виде комбинации элементарных функций или в виде квадратур от последних. Возможности точных методов ограничены.

Приближенные методы сводятся к построению последовательности функций $w_n(x)$, имеющих пределом искомую функцию $v(x)$. Обрывая эту последовательность на каком-то номере k , получают приближенное решение.

Наиболее универсальными методами решения являются численные. Их основной недостаток - возможность получения только частного решения.

Следует иметь в виду следующее обстоятельство. Успех от применения численного метода сильно зависит от обусловленности задачи, т.е. задача должна быть хорошо обусловлена, а именно, малые изменения начальных условий должны приводить к малому изменению решения. В противном случае (слабой устойчивости) малые погрешности в начальных

данных или погрешности численного метода могут приводить к большим погрешностям в решении.

Далее будут рассматриваться алгоритмы решения задачи Коши на примере одного уравнения первого порядка $v'(x) = \varphi(x, v)$. Обобщение на случай системы n уравнений осуществляется заменой $v(x)$ на $\bar{v}(x)$ и $\varphi(x, v)$ на $\bar{\varphi}(x, \bar{v})$, где

$$\bar{v}(x) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \quad \bar{\varphi}(x, \bar{v}) = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix}.$$

2.1. Метод Пикара

Данный метод является представителем приближенных методов решения рассматриваемого класса задач. Идея метода чрезвычайно проста и сводится к процедуре последовательных приближений для решения интегрального уравнения, к которому приводится исходное дифференциальное уравнение. Пусть поставлена задача Коши

$$v'(x) = \varphi(x, v(x)), \quad (1)$$

$$x_0 \leq x \leq x_1,$$

$$v(x_0) = v_0.$$

Проинтегрируем выписанное уравнение

$$v(x) = v_0 + \int_{x_0}^x \varphi(t, v(t)) dt. \quad (2)$$

Процедура последовательных приближений метода Пикара реализуется согласно следующей схеме

$$y_s(x) = v_0 + \int_{x_0}^x \varphi(t, y_{s-1}(t)) dt, \quad (3)$$

причем $y_0(t) = v_0$, (i – номер итерации).

Пример. Решить методом Пикара уравнение

$$v'(x) = x^3 + v^3,$$

$$v(0) = 0.$$

Решение этого уравнения не выражается через элементарные функции:

$$y_1(x) = 0 + \int_0^x t^3 dt = \frac{x^4}{4},$$

$$y_2(x) = 0 + \int_0^x [t^3 + (\frac{t^4}{4})^3] dt = \frac{x^4}{4} (1 + \frac{1}{4^2 \cdot 13} x^9),$$

$$\begin{aligned} y_3(x) &= 0 + \int_0^x \{ t^3 + [\frac{t^4}{4} (1 + \frac{1}{4^2 \cdot 13} t^9)]^3 \} dt = \\ &= \frac{x^4}{4} + \frac{x^{13}}{4^3 \cdot 13} (1 + \frac{3}{4^2 \cdot 22} x^9 + \frac{3}{4^4 \cdot 13 \cdot 31} x^{18} + \frac{1}{4^6 \cdot 13^2 \cdot 40} x^{27}) \end{aligned}$$

и т.д.

Видно, что при $x \leq 1$ ряд быстро сходится. Метод удобен, если интегралы можно взять аналитически.

Можно доказать, что метода Пикара сходится, если в некоторой ограниченной области $g(x, v)$ правая часть $\varphi(x, v)$ непрерывна и, кроме того, удовлетворяет условию Липшица по переменной v т.е.

$$|\varphi(x, v_1) - \varphi(x, v_2)| \leq L |v_1 - v_2|,$$

где L - некоторая константа.

2.2. Методы Рунге-Кутты

Данные методы являются численными. На практике применяются методы Рунге-Кутты, обеспечивающие построение разностных схем (методов) различного порядка точности. Наиболее употребительны схемы (методы) второго и четвертого порядков. Их мы и рассмотрим ниже.

Предварительно введем некоторые понятия и определения. Сеткой на отрезке $[a, b]$ называется фиксированное множество точек этого отрезка ω_N . Функция, определенная в данных точках, называется сеточной функцией. Координаты точек x_i удовлетворяют условиям

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{N-2} < x_{N-1} < x_N = b .$$

Точки $x_i \in \omega_N$ являются узлами сетки. Равномерной сеткой на $[a, b]$ называется множество точек

$$\omega_h = \{ x_i = a + ih \} , \quad i = 0, 1, 2, \dots, N ,$$

где $h = \frac{b-a}{N}$ - шаг сетки.

При решении дифференциальных уравнений приближенным методом основным является вопрос о сходимости. Применительно к разностным методам традиционно более употребительно понятие сходимости при $h \rightarrow 0$. Обозначим значения сеточной функции y_i , значения точного решения дифференциального уравнения (5.1) в узле i - $v(x_i)$ (y_i являются приближенными значениями $v(x_i)$). Сходимость при $h \rightarrow 0$ означает следующее. Фиксируем точку x и строим совокупность сеток ω_h таким образом, что $h \rightarrow 0$ и $x_i = a + ih = x$ (при этом $i \rightarrow \infty$). Тогда считают, что численный метод сходится в точке x , если $|y_i - v(x_i)| \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$, $x_i = x$. Метод сходится на отрезке $[a, b]$, если он сходится в каждой точке $x \in [a, b]$. Говорят, что метод имеет p -й порядок точности, если можно найти такое число $p > 0$, что $|y_i - v(x_i)| = O(h^p)$ при $h \rightarrow 0$.

Введем далее понятие невязки или погрешности аппроксимации разностного уравнения, заменяющего заданное дифференциальное уравнение, на решении исходного уравнения, т.е. невязка ψ_i представляет собой результат подстановки точного решения уравнения (1) $v(x)$ в разностное уравнение. Например, (1) можно заменить следующим простейшим разностным уравнением

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} - \varphi(x_i, y_i) = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, y_0 = v_0.$$

Тогда невязка определится следующим выражением

$$\psi_i = -\frac{u_{i+1} - u_i}{h} + \varphi(x_i, u_i).$$

Приближенное решение не совпадает вообще говоря с u_i , поэтому невязка ψ_i в i -ой точке не равна нулю. Вводят следующее определение: численный метод аппроксимирует исходное дифференциальное уравнение, если невязка $\psi_i \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$, и имеет p -й порядок аппроксимации, если $\psi_i = O(h^p)$. Доказывается, что порядок точности численного метода решения дифференциального уравнения совпадает с порядком аппроксимации при достаточно общих предположениях.

Теперь перейдем к анализу схем Рунге-Кутты. Сначала обратимся к схемам второго порядка точности. Используя формулу Тейлора, решение дифференциального уравнения (1) можно представить в виде

$$v_{n+1} = v_n + h_n v'_n + \frac{1}{2} h_n^2 v''_n + \dots, \quad (6)$$

где обозначено $v_n = v(x_n)$, $v'_n = v'(x_n)$, $h_n = x_{n+1} - x_n$.

Согласно (1) $v'_n = \varphi(x_n, v_n)$, $v''_n = \varphi'_x(x_n, v_n) + \varphi'_v(x_n, v_n) \varphi(x_n, v_n)$. Далее удерживаем только выписанные члены ряда. Представим вторую производную следующим образом

$$v''_n = (v'_n)' = \frac{\varphi(\tilde{x}, \tilde{v}) - \varphi(x_n, v_n)}{\Delta x},$$

где \tilde{x}, \tilde{v} - пока неизвестные величины. Пусть

$$\tilde{x} = x_n + \gamma h, \quad \tilde{v} = v_n + \delta h.$$

Обозначим приближенное значение решения в узле с номером n через y_n (именно это решение будет получаться после того, как мы ограничим ряд членами с порядком не выше второго).

Имеем

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h_n \varphi(x_n, y_n) + \frac{1}{2} h_n^2 \left[\frac{\varphi(x_n + \gamma h_n, y_n + \delta h_n) - \varphi(x_n, y_n)}{\Delta x} \right] = \\ &= y_n + h_n [\beta \varphi(x_n, y_n) + \alpha \varphi(x_n + \gamma h_n, y_n + \delta h_n)] . \end{aligned}$$

Введенные здесь параметры α, β, γ и δ подлежат определению. Разлагая правую часть в ряд Тейлора до линейных членов и приводя подобные члены, получим последовательно

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h_n \{ \beta \cdot \varphi(x_n, y_n) + \alpha \cdot [\varphi(x_n, y_n) + \\ &\quad + \varphi'_x(x_n, y_n) \gamma h_n + \varphi'_y(x_n, y_n) \delta h_n] \} = \\ &= y_n + (\alpha + \beta) h_n \varphi(x_n, y_n) + \alpha h_n^2 [\gamma \varphi'_x(x_n, y_n) + \delta \varphi'_y(x_n, y_n)] . \end{aligned} \quad (7)$$

Условием выбора параметров α, β, γ и δ поставим близость выражения (7) ряду (6), тогда

$$\alpha + \beta = 1, \quad \alpha \gamma = \frac{1}{2}, \quad \alpha \delta = \frac{1}{2} \varphi'(x_n, y_n) .$$

Один параметр остается свободным. Пусть это будет α , тогда

$$\beta = 1 - \alpha, \quad \gamma = \frac{1}{2\alpha}, \quad \delta = \frac{1}{2\alpha} \varphi'(x_n, y_n)$$

и окончательно из (7) с учетом найденных отношений для β, γ и δ получим

$$y_{n+1} = y_n + h_n \left\{ (1 - \alpha) \varphi(x_n, y_n) + \alpha \varphi\left(x_n + \frac{1}{2\alpha} h_n, y_n + \frac{h_n}{2\alpha} \varphi'(x_n, y_n)\right) \right\} \quad (8)$$

Соотношение (8) описывает однопараметрическое семейство двучленных формул Рунге-Кутты.

В специальной литературе доказывается, что если $\varphi(x, y)$ непрерывна и ограничена вместе со своими вторыми производными, то приближенное решение схемы (8) равномерно сходится к точному решению с погрешностью $O(\max h_n^2)$, т.е. схема (8) обладает вторым порядком точности.

В практике расчетов используют формулы (8) при значениях параметра $\alpha = \frac{1}{2}$, $\alpha = 1$. Рассмотрим эти варианты.

Случай $\alpha = \frac{1}{2}$.

Из (5.8) выводим

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [\varphi(x_n, y_n) + \varphi(x_n + h, y_n + h\varphi(x_n, y_n))], \quad (9)$$

Применение формулы (9) сводится к следующей последовательности шагов:

1. Вычисляется грубо значение функции \bar{y}_{n+1} (по схеме ломаных)

$$\bar{y}_{n+1} = y_n + h_n \varphi(x_n, y_n).$$

2. Определяется наклон интегральной кривой в точке (x_{n+1}, y_{n+1})

$$\bar{y}'_{n+1} = \varphi(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1}).$$

3. Находится среднее значение производной функции на шаге h_n

$$y'_{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} [\varphi(x_n, y_n) + \bar{y}'_{n+1}].$$

4. Рассчитывается, наконец, значение функции в $(n + 1)$ -м узле

$$y_{n+1} = y_n + h y'_{n+\frac{1}{2}}.$$

Данная схема имеет специальное название "предиктор - корректор".

Случай $\alpha = 1$.

Согласно (8) получаем

$$y_{n+1} = y_n + h_n \varphi \left[x_n + \frac{h_n}{2}, y_n + \frac{h_n}{2} \varphi(x_n, y_n) \right].$$

Задача решается посредством следующих шагов:

1. Вычисляется значение функции в половинном узле

$$y_{n+\frac{1}{2}} = y_n + \frac{h_n}{2} \varphi(x_n, y_n).$$

2. Определяется значение производной в узле $n + \frac{1}{2}$

$$y'_{n+\frac{1}{2}} = \varphi \left(x_n + \frac{h_n}{2}, y_{n+\frac{1}{2}} \right).$$

3. Находится значение функции в $(n + 1)$ -м узле

$$y_{n+1} = y_n + h_n y'_{n+\frac{1}{2}}.$$

Помимо рассмотренных выше двучленных схем широкое распространение в практике расчетов имеют схемы Рунге-Кутты четвертого порядка точности. Ниже даются без вывода соответствующие формулы

$$y_{n+1} = y_n + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6,$$

$$k_1 = h_n \varphi(x_n, y_n), \quad k_2 = h_n \varphi(x_n + h_n/2, y_n + k_1/2), \quad (10)$$

$$k_3 = h_n \varphi(x_n + h_n/2, y_n + k_2/2), \quad k_4 = h_n \varphi(x_n + h_n, y_n + k_3).$$

Схемы с большим числом членов практически не применяются. Пятичленные формулы обеспечивают четвертый порядок точности, шестичленные формулы имеют шестой порядок, но их вид весьма сложен.

Погрешности приведенных схем Рунге-Кутты определяются максимальными значениями соответствующих производных. Оценку погрешностей легко получить для частного случая вида правой части дифференциального уравнения

$$\varphi(x, v) \equiv \varphi(x).$$

В этом варианте решение уравнения может быть сведено к квадратуре и все схемы разностного решения переходят в формулы численного интегрирования. Например, схема (9) принимает вид

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h_n}{2} [\varphi(x_n) + \varphi(x_{n+1})],$$

то есть имеет форму метода трапеций, а схема (10) переходит в схему

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h_n}{2} [\varphi(x_n) + 4\varphi(x_n + h_n/2) + \varphi(x_n + h_n)],$$

представляющую собой формулу Симпсона с шагом $\frac{h_n}{2}$.

Оценки погрешности формул трапеций и Симпсона известны. Например, мажорантные оценки погрешности указанных формул даются следующими выражениями

$$R_{\text{ТРАП}} \leq \frac{x_l - x_0}{12} \max(h_n^2) \max(\varphi''),$$

$$R_{\text{СИМП}} \leq \frac{x_l - x_0}{2880} \max(h_n^4) \max(\varphi^{IV})$$

Из приведенных формул видно, что точность схем Рунге-Кутты достаточно высока.

Выбор той или иной из приведенных схем для решения конкретной задачи определяется следующими соображениями. Если функция $\varphi(x, v)$ в правой части уравнения непрерывна и ограничена, а также непрерывны и ограничены ее четвертые производные, то наилучший результат достигается при использовании схемы (10). В том случае, когда функция $\varphi(x, v)$ не имеет названных выше производных, предельный (четвертый) порядок схемы (10) не может быть достигнут, и целесообразным оказывается применение более простых схем.

Помимо схем Рунге-Кутты практический интерес представляют многошаговые методы, которые можно описать следующей системой уравнений

$$\frac{a_0 y_n + a_1 y_{n-1} + \dots + a_m y_{n-m}}{h} = b_0 \varphi_n + b_1 \varphi_{n-1} + \dots + b_m \varphi_{n-m}, \quad (11)$$

где $n = m, m+1, \dots$, а a_k, b_k - числовые коэффициенты, $k = 0, 1, 2, \dots, m$, $a_0 \neq 0$.

Согласно данному уравнению расчет начинается со значения $n = m$. В этом случае получается соотношение вида

$$\frac{a_0 y_m + a_1 y_{m-1} + \dots + a_m y_0}{h} = b_0 \varphi_m + b_1 \varphi_{m-1} + \dots + b_m \varphi_0,$$

т.е. для начала счета надо иметь m начальных значений y_i , $i = 0, 1, 2, \dots, m-1$. Эти значения y_i приходится вычислять каким-либо другим методом, например, методом Рунге-Кутты. В необходимости использовать разные методы счета состоит неудобство многошаговых методов.

Среди многошаговых методов наиболее распространен метод Адамса, схема реализации которого следует из (11) при $a_0 = -a_1 = 1$ и $a_k = 0$ для $k = 2, 3, \dots, m$:

$$\frac{y_n - y_{n-1}}{h} = \sum_{k=0}^m b_k \varphi_{n-k}.$$

При $b_0 = 0$ метод Адамса оказывается явным, а при $b_0 \neq 0$ - неявным.

2.3. Неявные методы

Рассмотрим неявную схему Эйлера для уравнения (1).. Она имеет первый порядок точности

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = \varphi(x_{n+1}, y_{n+1}). \quad (12)$$

Для определения неизвестного значения y_{n+1} придется решать нелинейное уравнение. Необходимость решать уравнение – типичная ситуация для неявных методов. И в этом состоит сложность и трудоемкость их применения, учитывая, что в большинстве случаев уравнения получаются нелинейными, и возникает проблема отыскания корня, который может быть не единственный, а может и вообще не существовать при выбранном шаге. Однако неявные методы обладают свойством устойчивости, и несмотря на все трудности их применяют очень широко, т.к. они позволяют вести расчет с увеличенными шагами по сравнению с явными методами.

Среди других неявных методов можно назвать метод трапеций. При решении жестких систем дифференциальных уравнений хорошо зарекомендовал себя метод Гира, который относится к чисто неявным многошаговым разностным методам, общая формула которых выглядит следующим образом:

$$\sum_{k=0}^m a_k y_{n-k} = h \varphi(x_n, y_n),$$

При $m=1$ и $a_0 = 1, a_1 = -1$ имеем $y_n - y_{n-1} = h \varphi(x_n, y_n)$, т.е. неявный метод Эйлера. При $m=2$ и $m=3$ методы выглядят следующим образом

$$\frac{3}{2}y_n - 2y_{n-1} + \frac{1}{2}y_{n-2} = h\varphi(x_n, y_n), \quad (13)$$

$$\frac{11}{6}y_n - 3y_{n-1} + \frac{3}{2}y_{n-2} - \frac{1}{3}y_{n-3} = h\varphi(x_n, y_n). \quad (14)$$

Разностное уравнение (13) имеет второй порядок точности, а (14) - третий.

МОДЕЛИ НА ОСНОВЕ ОДУ. КРАЕВАЯ ЗАДАЧА

1. Постановка задачи

Стандартная постановка краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений выглядит следующим образом

$$v'_k(x) = \varphi_k(x, v_1, v_2, \dots, v_n), \quad 1 \leq k \leq n,$$

а дополнительные условия ставятся более, чем в одной точке отрезка интегрирования уравнений. (Понятно, что в этом случае порядок системы не может быть меньше второго):

$$\begin{aligned} \psi_k(v_1(\xi_k), v_2(\xi_k), \dots, v_n(\xi_k)) &= \eta_k, \quad 1 \leq k \leq n, \\ x_0 &\leq \xi_k \leq x_l. \end{aligned}$$

Общая классификация методов решения краевых задач та же, что и в случае задачи Коши: существуют точные, приближенные аналитические и численные методы. О точных методах сказано ранее. Среди приближенных методов можно указать методы Рунге, Галеркина, метод рядов Фурье.

2. Приближенные аналитические методы

Пусть сформулирована краевая задача с граничными условиями достаточно общего вида (III - рода)

$$u''(x) + p(x)u' + g(x)u = f(x),$$

$$\alpha u(a) + \beta u'(a) = A,$$

$$\eta u(b) + \lambda u'(b) = B,$$

$$a \leq x \leq b.$$

(1)

Для удобства изложения введем дифференциальные операторы

$$Lu = u''(x) + p(x)u' + g(x)u,$$

$$l_a = \alpha u(a) + \beta u'(a),$$

$$l_b = \eta u(b) + \lambda u'(b)$$

Тогда исходная система уравнений (1) запишется в виде

$$Lu = f(x),$$

$$l_a = A,$$

(2)

$$l_b = B$$

2.1. Метод коллокаций

Суть метода заключается в следующем. Ищем решение в виде

$$y = u_0(x) + \sum_{i=1}^n C_i u_i(x), \quad (3)$$

причем функцию $u_0(x)$ подбираем исходя из того, чтобы она удовлетворяла поставленным (неоднородным) краевым условиям, а функции $u_i(x)$ выбираем так, чтобы они удо-

влетворяли однородным краевым условиям, т.е. $l_a=0, l_b=0$. Подставляя (3) в (2), получим невязку

$$R(x, C_1, \dots, C_n) = Ly - f(x) \equiv Lu_0 + \sum_{i=1}^n C_i Lu_i - f(x).$$

Далее потребуем, чтобы невязка $R(x, C_1, \dots, C_n)$ обращалась в нуль на системе точек x_1, x_2, \dots, x_n из $[a, b]$ (точки коллокации). Затем из полученной системы уравнений находим постоянные C_1, \dots, C_n .

Пример. Поставлена краевая задача с однородными краевыми условиями. Найти приближенное решение методом коллокаций.

$$u'' + (1 + x^2)u + 1 = 0,$$

$$u(-1) = 0, \quad u(1) = 0,$$

$$-1 \leq x \leq 1$$

Выберем

$$u_i(x) = x^{2i-2} (1 - x^2), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Для данной задачи $u_0(x) = 0$. Ограничимся для простоты значением $n = 2$. Обратим внимание на то, что решение симметрично относительно начала координат. За точки коллокации возьмем $x_1 = 0, x_2 = 0.5$. Искомая функция

$$y(x) = C_1(1 - x^2) + C_2(x^2 - x^4).$$

Подставляя $y(x)$ в исходное дифференциальное уравнение, найдем невязку

$$R(x, C_1, C_2) = 1 - C_1(1 + x^4) + C_2(2 - 11x^2 - x^6).$$

Теперь приравняем невязку нулю в двух указанных выше точках коллокации, получим систему уравнений для определения двух констант

$$\begin{cases} 1.0625 C_1 + 0.765625 C_2 = 1, \\ C_1 - 2 C_2 = 1 \end{cases},$$

из которой следует, что

$$C_1 = 0.9568, C_2 = -0.0216.$$

Окончательно, искомое решение запишется в виде

$$y \approx 0.9568(1 - x^2) - 0.0216(x^2 - x^4).$$

2.2. Метод Галеркина

Постановка задачи идентична (1).

Зададим решение в виде, аналогичном (3)

$$y = u_0(x) + \sum_{k=1}^n C_k u_k(x),$$

где функции $u_0(x)$ и $u_k(x)$ подбираются из тех же соображений, что и в методе коллокаций.

Согласно методу Галеркина константы определяются из системы уравнений

$$\int_a^b R(x, C_1, \dots, C_n) u_m(x) dx = 0, m = 1, \dots, n,$$

где

$$R(x, C_1, \dots, C_n) = L y - f(x) \equiv L u_0 + \sum_{k=1}^n C_k L u_k - f(x),$$

т.е. имеем

$$\int_a^b u_m(x) L u_0 dx + \sum_{k=1}^n C_k \int_a^b u_m(x) L u_k dx - \int_a^b u_m(x) f(x) dx = 0, \quad m=1, \dots, n. \quad (4)$$

Из полученной системы уравнений находим постоянные C_1, \dots, C_n .

Пример. Поставлена краевая задача с однородными краевыми условиями. Найти приближенное решение методом Галеркина

$$u'' + x u' + u = 2x,$$

$$u(0) = 1, \quad u(1) = 0,$$

$$0 \leq x \leq 1$$

Выберем

$$u_0(x) = 1 - x,$$

$$u_k(x) = x^k (1 - x), \quad k = 1, 2, \dots, n$$

Ограничимся для простоты значением $n = 3$. Тогда

$$y(x) = (1 - x) + C_1 x(1 - x) + C_2 x^2(1 - x) + C_3 x^3(1 - x).$$

Подставляя в исходное дифференциальное уравнение, найдем невязку

$$R(x, C_1, C_2, C_3) = 1 - 4x + C_1(-2 + 2x - 3x^2) + C_2(2 - 6x + 3x^2 - 4x^3) +$$

$$+ C_3(6x - 12x^2 + 4x^3 - 5x^4)$$

Записывая интегралы (4), приходим к системе трех уравнений с тремя неизвестными C_1, C_2, C_3

$$\int_0^1 R(x, C_1, C_2, C_3)(x - x^2) dx = 0,$$

$$\int_0^1 R(x, C_1, C_2, C_3)(x^2 - x^3) dx = 0,$$

$$\int_0^1 R(x, C_1, C_2, C_3)(x^3 - x^4) dx = 0.$$

Подставляя выражение для невязки $R(x, C_1, C_2, C_3)$ и вычисляя интегралы, получим окончательно систему уравнений

$$\begin{cases} 133 C_1 + 63 C_2 + 36 C_3 = -70, \\ 140 C_1 + 108 C_2 + 79 C_3 = -98, \\ 264 C_1 + 252 C_2 + 211 C_3 = -210 \end{cases}$$

Из данной системы найдем значения констант

$$C_1 = -0.209, C_2 = -0.789, C_3 = 0.209.$$

Окончательно, искомое решение дифференциального уравнения с заданными краевыми условиями запишется в виде

$$y \approx (1 - x)(1 - 0.209x - 0.789x^2 + 0.209x^3).$$

Численные способы решения краевых задач представлены на практике методами: стрельбы, разностным, проекционно-разностным. Рассмотрим разностный метод решения.

3. Разностный метод

Поставим краевую задачу вначале для линейного дифференциального уравнения второго порядка

$$v''(x) - g(x)v(x) = f(x), \quad (1)$$

$$a \leq x \leq b,$$

$$v(a) = c, \quad v(b) = d.$$

На отрезке $[a, b]$ строим сетку $\{x_i = x_0 + ih\}, i = 0, \dots, N$, где h - шаг сетки. Заменяя вторую производную ее разностным аналогом, получим

$$\frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} - g_i y_i = f_i,$$

где $g_i = g(x_i)$, $f_i = f(x_i)$.

После преобразований приходим к разностному уравнению следующего вида

$$y_{i-1} - (2 + h^2 g_i) y_i + y_{i+1} = h^2 f_i, \quad (2)$$

$$1 \leq i \leq N - 1.$$

Получили систему из $(N - 1)$ -го алгебраического уравнения, в которой неизвестными являются приближенные значения искомой функции в узлах - y_i . Вместе с граничными условиями число уравнений равно числу неизвестных. Решая эту систему уравнений, найдем все y_i .

Рассмотрим вопросы существования и единственности решения и сходимости приближенного разностного решения к точному.

Пусть $g(x) > 0$. Система (2) является системой линейных алгебраических уравнений. Коэффициент $g_N > 0$, поэтому матрица этой системы обладает свойством диагонального преобладания. В этом случае, как известно, решение линейной системы существует и оно единственно.

В качестве способа нахождения решения системы (2) может быть использован вариант метода Гаусса - метод прогонки, учитывая, что в данном случае матрица системы трехдиагональная.

Докажем сходимость. Пусть $g(x)$ и $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируемы. Тогда разностное решение равномерно сходится к точному с погрешностью $O(h^2)$ при $h \rightarrow 0$.

Представим вторую производную от функции $v(x)$ в виде разностного аналога с учетом остаточного члена ряда Тейлора в форме Лагранжа

$$v''(x_i) = \frac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{h^2} - \frac{1}{12}h^2 v^{IV}(\xi_i),$$

где ξ_i удовлетворяет условию $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_{i+1}$.

Точное решение (6.12) будет удовлетворять следующему разностному уравнению

$$v_{i-1} - (2 + h^2 g_i) v_i + v_{i+1} = h^2 f_i + \frac{h^4}{12} v^{IV}(\xi_i). \quad (3)$$

Вычтем последнее уравнение из (2), получим

$$z_{i-1} - (2 + h^2 g_i) z_i + z_{i+1} = -\frac{h^4}{12} v^{IV}(\xi_i), \quad (4)$$

где $z_i = y_i - v_i$ - погрешность приближенного решения.

Перепишем (4) вместе с граничными условиями для погрешности в виде

$$(2 + h^2 g_i) z_i = z_{i-1} + z_{i+1} + \frac{h^4}{12} v^{IV}(\xi_i), \quad (5)$$

$$z_0 = 0, z_N = 0.$$

Возьмем точку x_m такую, в которой $|z_i|$ достигает максимума (граничная точка не может быть точкой x_m). Принимая во внимание сформулированное выше условие $g_i > 0$, можем в точке x_m записать неравенство, следующее из (5)

$$(2 + h^2 g_m) |z_m| \leq |z_{m-1}| + |z_{m+1}| + \frac{h^4}{12} |v^{IV}(\xi_m)|$$

Заменяя $|z_{m\pm 1}|$ на $|z_m|$, можно только усилить неравенство, в итоге получается оценка

$$|z_m| \leq \frac{h^2}{12} \left| \frac{v^{IV}(\xi_m)}{g_m} \right| \leq \frac{h^2}{12} \max \left| \frac{v^{IV}(x)}{g(x)} \right|.$$

Отсюда вытекает утверждение, которое следовало доказать.

По поводу устойчивости задачи следует заметить следующее. При $g(x) > 0$ задача Коши плохо обусловлена, а разностная схема (2) нечувствительна к этой неустойчивости. В случае, когда $g(x) < 0$, не выполняется достаточное условие прогонки, однако в практических вычислениях данное обстоятельство, как правило, оказывается несущественным и не вызывает сложностей в получении решения.

Приведенная выше разностная схема (2) в случае нелинейной задачи усложняется. Если имеется нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\begin{aligned} v''(x) &= f(x, v(x)), \\ v(a) &= c, \quad v(b) = d, \end{aligned} \tag{6}$$

то разностная схема в результате тех же действий, что и при построении схемы (2), примет вид

$$\begin{aligned} y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} &= h^2 f(x_i, y_i), \quad 1 \leq i \leq N-1, \\ y_0 &= c, \quad y_N = d. \end{aligned} \tag{7}$$

Решение (7) можно найти разными способами, например, проводя линеаризацию системы по Ньютону либо организуя простые итерации. При выполнении процедуры линеаризации надо учитывать, что в каждом уравнении (7) содержится три неизвестных y_{i-1}, y_i, y_{i+1} . В результате получается система уравнений относительно приращений

$$\begin{aligned} & (y_{i-1}^{(s-1)} + \Delta_{i-1}^{(s)}) - 2(y_i^{(s-1)} + \Delta_i^{(s)}) + (y_{i+1}^{(s-1)} + \Delta_{i+1}^{(s)}) = \\ & = h^2 f(x_i, y_i^{(s-1)}) + h^2 f'_v(x_i, y_i^{(s-1)}) \Delta_i^{(s)} \end{aligned}$$

Здесь s - номер итерации.

Окончательно уравнение для дальнейшей алгоритмизации записывается в виде

$$\begin{aligned} & \Delta_{i-1}^{(s)} - [2 + h^2 f'_v(x_i, y_i^{(s-1)})] \Delta_i^{(s)} + \Delta_{i+1}^{(s)} = \\ & = h^2 f(x_i, y_i^{(s-1)}) - y_{i-1}^{(s-1)} + 2y_i^{(s-1)} - y_{i+1}^{(s-1)}, \quad 1 \leq i \leq N-1, \quad (8) \\ & \Delta_0^{(s)} = 0, \Delta_N^{(s)} = 0. \end{aligned}$$

Полученная система решается прогонкой с применением итерационного процесса. На очередной итерации новые значения сеточной функции находятся согласно формуле

$$y_i^{(s)} = y_i^{(s-1)} + \Delta_i^{(s)}.$$

Итерации сходятся квадратично.

Если линеаризацию не использовать, то можно ограничиться простыми итерациями, тогда итерационная процедура организуется согласно схеме

$$\begin{aligned} & y_{i-1}^{(s)} - 2y_i^{(s)} + y_{i+1}^{(s)} = h^2 f(x_i, y_i^{(s-1)}), \quad 1 \leq i \leq N-1, \quad (9) \\ & y_0^{(s)} = c, y_N^{(s)} = d. \end{aligned}$$

Здесь итерации сходятся, если $\frac{1}{8}(b-a)^2 M_1 < 1$, где $M_1 = \max |f'_v|$.

Метод линеаризации выглядит несколько более громоздким, особенно при сложной правой части уравнения, но он быстрее приводит к результату, чем метод простых итераций (9).

Выше рассматривалось уравнение 2-го порядка (1) с краевыми условиями первого рода

$$v(a) = c, \quad v(b) = d,$$

где c и d - заданные числа.

Существуют другие более сложные краевые условия, например, краевые условия III рода

$$\lambda v'(a) + \alpha v(a) = \beta, \text{ где } \lambda, \alpha, \beta - \text{известные числа.} \quad (10)$$

При разностной аппроксимации данных краевых условий необходимо заменить производную ее разностным аналогом. Самое простое решение - это применить одностороннюю разностную формулу. Однако она имеет только первый порядок точности, что огрубляет всю разностную схему задачи до такого же порядка точности. Можно применить следующий прием повышения порядка разностной аппроксимации краевого условия.

В узле x_0 выполняем разложение функции v в ряд Тейлора

$$v_1 = v_0 + h v'(a) + \frac{h^2}{2} v''(a) + \dots \quad (11)$$

Выражая в (11) первую производную $v'(a)$ из (10), а вторую производную из (1), получим, заменив как обычно переменную v на y

$$y_1 = y_0 + h \frac{\beta - \alpha y_0}{\lambda} + \frac{h^2}{2} (f(a) - g(a) y_0).$$

Или

$$\lambda \frac{y_1 - y_0}{h} + \alpha y_0 = \beta + \frac{h}{2} \lambda (f(a) - g(a) y_0)$$

Полученное выражение очевидно отличается от варианта аппроксимации производной в (10) односторонней правой производной на величину второго слагаемого справа.

МОДЕЛИ НА ОСНОВЕ ОДУ. КРАЕВАЯ ЗАДАЧА

1. Получение разностной схемы для линейного уравнения 2-го порядка с краевыми условиями 3-го рода интегро - интерполяционным методом

Выше при построении разностной схемы нами применялся простой метод **разностной аппроксимации**, когда производные в уравнении и краевых условиях напрямую заменялись их разностными аналогами. В случае квазилинейных уравнений или в задачах с разрывными коэффициентами данный метод приводит к нарушению законов сохранения на сетке и появлению фиктивных источниковых слагаемых в разностном уравнении. Чтобы избежать появления указанных эффектов, применяют так называемый интегро - интерполяционный метод получения разностной схемы.

Суть метода рассмотрим на примере решения уравнения

$$\frac{d}{dx} \left(k(x) \frac{du}{dx} \right) - p(x)u + f(x) = 0 \quad (1)$$

с краевыми условиями достаточно общего вида : слева - II рода, справа - III рода

$$\begin{aligned} x=0, \quad -k(0) \frac{du}{dx} &= F_0, \\ x=l, \quad -k(l) \frac{du}{dx} &= \alpha(u(l) - \beta) \end{aligned}$$

где α, β - известные числа.

Введем сетку в области интегрирования уравнения $[0, l]$:

$$\omega_h = \{x_n : x_n = nh, n = 0, 1, \dots, N, h = l / N\}.$$

Для построения разностной схемы выберем на сетке шаблон $\{x_{n-1}, x_n, x_{n+1}\}$ и ячейку $\{x_{n-1/2}, x_{n+1/2}\}$ (рис.1).

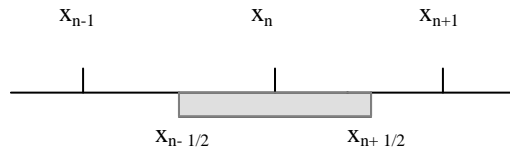


Рис. 1. Шаблон и ячейка (затенена) на сетке

Обозначим

$$F = -k(x) \frac{du}{dx} \quad (2)$$

По смыслу (2) - это поток.

Интегрируем уравнение (1) с учетом (2) на ячейке

$$-\int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+1/2}} \frac{dF}{dx} dx - \int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+1/2}} p(x)u dx + \int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+1/2}} f(x) dx = 0.$$

Выполняя точное интегрирование в первом слагаемом и применяя метод средних для приближенного численного вычисления остальных интегралов, получим

$$-(F_{n+1/2} - F_{n-1/2}) - p_n y_n h + f_n h = 0, \quad (3)$$

где $p_n = p(x_n)$, $f_n = f(x_n)$

Проинтегрируем (2) на интервале $[x_n, x_{n+1}]$

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{du}{dx} dx = - \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{F}{k(x)} dx.$$

Применяя метод средних справа, найдем

$$y_{n+1} - y_n = -F_{n+1/2} \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{dx}{k(x)},$$

или

$$F_{n+1/2} = \chi_{n+1/2} \frac{y_n - y_{n+1}}{h}, \quad \text{где} \quad \chi_{n+1/2} = \frac{h}{\int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{dx}{k(x)}}. \quad (4)$$

Аналогично

$$F_{n-1/2} = \chi_{n-1/2} \frac{y_{n-1} - y_n}{h}, \quad \chi_{n-1/2} = \frac{h}{\int_{x_{n-1}}^{x_n} \frac{dx}{k(x)}} \quad (5)$$

Для величин $\chi_{n \pm 1/2}$ можно получить различные приближенные выражения, численно вычисляя интеграл методом трапеций или методом средних. Имеем, соответственно, две формулы, дающие близкие результаты

$$\chi_{n+1/2} = \frac{2k_n k_{n+1}}{k_n + k_{n+1}}, \quad \chi_{n+1/2} = k_{n+1/2} = \frac{k_n + k_{n+1}}{2}. \quad (6)$$

Аналогично

$$\chi_{n-1/2} = \frac{2k_n k_{n-1}}{k_n + k_{n-1}}, \quad \chi_{n-1/2} = k_{n-1/2} = \frac{k_n + k_{n-1}}{2}.$$

Теперь, подставляя в (3) выражения для потоков (4), (5) и приводя подобные члены, получим окончательно систему линейных уравнений с трехдиагональной матрицей

$$A_n y_{n-1} - B_n y_n + C_n y_{n+1} = -D_n, \quad 1 \leq n \leq N-1, \quad (7)$$

где

$$A_n = \frac{\chi_{n-1/2}}{h},$$

$$C_n = \frac{\chi_{n+1/2}}{h},$$

$$B_n = A_n + C_n + p_n h,$$

$$D_n = f_n h.$$

Система (7) совместно с краевыми условиями решается методом прогонки.

Покажем далее, как тем же методом получают **разностные аналоги краевых условий** на примере краевого условия при $x=0$.

Проинтегрируем уравнение (1) с учетом (2) на отрезке $[0, x_{1/2}]$

$$-\int_0^{x_{1/2}} \frac{dF}{dx} dx - \int_0^{x_{1/2}} p(x) u dx + \int_0^{x_{1/2}} f(x) dx = 0.$$

Второй и третий интегралы вычислим методом трапеций

$$-(F_{1/2} - F_0) - \frac{h}{4}(p_{1/2} y_{1/2} + p_0 y_0) + \frac{h}{4}(f_{1/2} + f_0) = 0.$$

Далее, полагая $y_{1/2} = \frac{y_0 + y_1}{2}$ и подставляя выражение для $F_{1/2}$ согласно (4) при

$$n=0 \quad F_{1/2} = \chi_{1/2} \frac{y_0 - y_1}{h}, \quad \text{где} \quad \chi_{1/2} = \frac{h}{\int_0^{x_{1/2}} \frac{dx}{k(x)}}, \quad \text{придем к формуле}$$

$$M_0 y_0 + K_0 y_1 = P_0, \tag{8}$$

где

$$M_0 = \chi_{1/2} + \frac{h^2}{8} p_{1/2} + \frac{h^2}{4} p_0,$$

$$K_0 = \frac{h^2}{8} p_{1/2} - \chi_{1/2}, \quad P_0 = h F_0 + \frac{h^2}{4} (f_{1/2} + f_0).$$

Для расчета величин в половинном узле можно принять простую аппроксимацию

$$p_{1/2} = \frac{p_0 + p_1}{2}, \quad f_{1/2} = \frac{f_0 + f_1}{2}.$$

Разностный аналог краевого условия при $x = l$ получается аналогичным образом, если проинтегрировать уравнение (1) с учетом (2) на отрезке $[x_{N-1/2}, x_N]$ и учесть, что поток

$$F_N = \alpha(y_N - \beta), \quad \text{а} \quad F_{N-1/2} = \chi_{N-1/2} \frac{y_{N-1} - y_N}{h}.$$

В результате разностное краевое условие при $x = l$ приводится к стандартному виду

$$K_N y_{N-1} + M_N y_N = P_N. \quad (9)$$

Сведем воедино полученные выше уравнения (7)-(9), составляющие **разностную схему**, аппроксимирующую исходную дифференциальную задачу (1)

$$A_n y_{n-1} - B_n y_n + C_n y_{n+1} = -D_n, \quad 1 \leq n \leq N-1$$

$$M_0 y_0 + K_0 y_1 = P_0,$$

$$K_N y_{N-1} + M_N y_N = P_N.$$

Отметим, что при уменьшении шага (в пределе при $h \rightarrow 0$), в (8) членами, содержащими h^2 , можно пренебречь и тогда (8) преобразуется к виду

$$y_0 = y_1 + \frac{hF_0}{\chi_{1/2}},$$

т.е. $-\chi_{1/2} \frac{y_1 - y_0}{h} = F_0$, что совпадает с выражением, которое можно получить, выполняя простейшую аппроксимацию производной односторонней разностью, если брать χ в точке $x_{1/2}$.

В этом случае аппроксимация дает точность порядка $O(h)$, тогда как (8) обеспечивает точность $O(h^2)$, совпадающую с порядком точности системы (7).

Порядок точности, совпадающий с порядком аппроксимации, вообще говоря, надо проверять отдельно, оценивая невязку для разностного аналога краевого условия путем раз-

ложения в ряды Тейлора. Процедура такого оценивания будет приведена позже при изучении уравнений в частных производных.

В заключение данного раздела очертим алгоритм решения выписанной выше разностной схемы. Будем использовать для иллюстрации общих подходов простейшую аппроксимацию первых производных в краевых условиях односторонними разностями с порядком точности $O(h)$. (В реальном моделировании строить разностные аналоги краевых условий надо так, как это сделано выше). В итоге, на левом краю при $x=0$ получим

$$-k_0 \frac{y_1 - y_0}{h} = F_0 . \quad (10)$$

На правом краю при $x=l$ запишем

$$-k_N \frac{y_N - y_{N-1}}{h} = \alpha(y_N - \beta) . \quad (11)$$

Из (10)

$$y_0 = y_1 + \frac{hF_0}{k_0} ,$$

и, вспоминая основную прогоночную формулу $y_n = \xi_{n+1} y_{n+1} + \eta_{n+1}$, записанную при $n=0$, т.е.

$y_0 = \xi_1 y_1 + \eta_1$, найдем начальные значения прогоночных коэффициентов

$$\xi_1 = 1, \quad \eta_1 = \frac{hF_0}{k_0} .$$

Далее по известным рекуррентным формулам определим все прогоночные коэффициенты до последнего узла $n=N$. Наконец, подставляя в уравнение (11) выражение $y_{N-1} = \xi_N y_N + \eta_N$, получим

$$y_N = \frac{\eta_N k_N + h\alpha\beta}{k_N (1 - \xi_N) + h\alpha} . \quad (12)$$

Теперь в обратном ходе окончательно находим по основной прогоночной формуле искомые значения сеточной функции y_n

В начале лекции при формулировке краевой задачи на границе $x = l$ было поставлено краевое условие III рода. Это условие имеет достаточно общий характер, в частности, при $k_N = 0, \alpha = 1$ оно переходит в краевое условие I рода - $u = \beta$. Видно, что при $k_N = 0, \alpha = 1$ формула (12) также переходит в выражение $y_N = \beta$, как и должно быть в соответствующей разностной схеме.

МОДЕЛИ НА ОСНОВЕ ОДУ. КРАЕВАЯ ЗАДАЧА

2. Квазилинейные уравнения. Методы решения квазилинейных разностных схем для уравнений 2-го порядка.

Квазилинейные разностные схемы появляются при разностной аппроксимации квазилинейных уравнений. Квазилинейный вариант уравнения (1) из лекции №7 выглядит следующим образом

$$\frac{d}{dx} \left(k(x, u) \frac{du}{dx} \right) - p(x, u) u + f(x, u) = 0, \quad (1)$$

с краевыми условиями достаточно общего вида, пусть по-прежнему слева - II рода, справа - III рода

$$\begin{aligned} x=0, \quad -k(0, u(0)) \frac{du}{dx} &= F_0, \\ x=l, \quad -k(l, u(l)) \frac{du}{dx} &= \alpha(u(l) - \beta) \end{aligned}$$

где α, β - известные числа.

Краевые условия имеют тоже квазилинейный вид.

Видим, что появляется зависимость коэффициентов уравнения, т.е. функций $k(x, u)$, $p(x, u)$, $f(x, u)$ от искомой функции $u(x)$. Эта зависимость в таких уравнениях часто бывает только от $u(x)$, т.е. $k = k(u)$, причем от $u(x)$ могут зависеть все функции или только отдельные из них.

Разностный аналог уравнения (1) и краевых условий строится интегро-интерполяционным методом, в полном соответствии с процедурой, описанной в лекции №7 для линейного уравнения. В результате получается система уравнений, аналогичная (7) из лекции №7.

$$A_n y_{n+1} - B_n y_n + C_n y_{n-1} = -D_n, \quad 1 \leq n \leq N-1, \quad (2)$$

где

$$A_n = \frac{\chi_{n+1/2}}{h},$$

$$C_n = \frac{\chi_{n-1/2}}{h},$$

$$B_n = A_n + C_n + p_n h,$$

$$D_n = f_n h.$$

С разностными краевыми условиями

$$M_0 y_0 + K_0 y_1 = P_0,$$

$$K_N y_{N-1} + M_N y_N = P_N. \quad (3)$$

Однако теперь коэффициенты уравнений зависят от неизвестной сеточной функции y_n в узлах, и (2), (3) является системой уже нелинейных уравнений.

Для ее решения можно предложить два метода.

1. Метод простых итераций (последовательных приближений)

Обозначим текущую итерацию s , а предыдущую $(s-1)$, тогда итерационный процесс организуется по схеме

$$A_n^{s-1} y_{n+1}^s - B_n^{s-1} y_n^s + C_n^{s-1} y_{n-1}^s = -D_n^{s-1},$$

$$M_0^{s-1} y_0 + K_0^{s-1} y_1 = P_0^{s-1}, \quad (4)$$

$$K_N^{s-1} y_{N-1} + M_N^{s-1} y_N = P_N^{s-1}.$$

Все коэффициенты берутся на $(s-1)$ -ой итерации, т.е. они известны. Получили обычную линейную схему, решение которой осуществляется методом прогонки. Начальное распределение y_n^0 задается произвольно. Разумеется, лучше это делать, соотносясь с характером ожидаемого решения. Здесь краевые условия естественным образом включены в общую итерационную процедуру. Итерации прекращаются при условии

$$\max \left| \frac{y_n^s - y_n^{s-1}}{y_n^s} \right| \leq \varepsilon_1, \text{ для всех } n = 0, 1, \dots, N.$$

Это условие означает, что те значения сеточной функции, которые использовались при расчете коэффициентов уравнения на предпоследней итерации, с определенной точностью совпали с найденной функцией на последней итерации.

Есть другой критерий окончания итераций. Назовем его выходом по балансу членов уравнения. Если проинтегрировать исходное уравнение (1) $\int_0^l (\cdot) dx$, то получим

$$-(F(l) - F_0) - \int_0^l [p(x, u)u - f(x, u)] dx = 0,$$

т.е.

$$F_0 - F(l) = \int_0^l [p(x, u)u - f(x, u)] dx,$$

или, используя граничное условие справа

$$F_0 - [\alpha(u(l) - \beta)] = \int_0^l [p(x, u)u - f(x, u)] dx.$$

Обозначая

$$f_1 = F_0 - [\alpha(u(l) - \beta)], \quad f_2 = \int_0^l [p(x, u)u - f(x, u)] dx,$$

получим условие окончания итераций

$$\left| \frac{f_1^s - f_2^s}{f_1^s} \right| \leq \varepsilon_2, \tag{5}$$

Точность расчета ε_1 не совпадает с ε_2 . Выход по балансу точнее отражает факт сходимости решения в процессе итераций.

Отметим одну тонкость, которую надо знать при использовании метода простых итераций.

При резкой зависимости коэффициентов уравнения от искомой функции прямое применение метода простой итерации, как это описано выше, может породить «разболтку»

решения, т.е. итерации не сойдутся ни к какому решению. Итерационный процесс надо будет остановить принудительно или произойдет аварийный останов.

В данной ситуации итерационную процедуру следует несколько модернизировать. Расчет коэффициентов системы уравнений $A_n, B_n, C_n, D_n, M_0, K_0, \dots$ и т.д. на очередной итерации надо производить не по сеточной функции y_n^{s-1} с предыдущей итерации, т.е. не строго при найденной функции на $(s-1)$ -ой итерации, а при несколько скорректированных значениях, при значениях $y_{\xi n}^s$, определяемых по формуле

$$y_{\xi n}^s = y_{\xi n}^{s-1} + \xi (y_n^{s-1} - y_{\xi n}^{s-1}). \quad (6)$$

Здесь ξ - так называемый, коэффициент релаксации. Его приходится подбирать в пределах от очень маленьких величин (порядка 0.05) до 1. При $\xi=1$ имеем те самые обычные простые итерации, о которых говорилось в самом начале.

Чтобы начать процесс, т.е. сделать первую итерацию ($s=1$), надо задать $y_{\xi n}^0 = y_n^0 = Y_n, n=0,1,\dots,N$, где Y_n - начальное распределение искомой функции, которое принимается, вообще говоря, произвольным (в разумных пределах). При этом $y_{\xi n}^1 = y_{\xi n}^0 = Y_n, n=0,1,\dots,N$. Вычислив коэффициенты уравнений по $y_{\xi n}^1$ и выполнив прогонку, получим y_n^1 . На второй итерации согласно (6) имеем

$$y_{\xi n}^2 = y_{\xi n}^1 + \xi (y_n^1 - y_{\xi n}^1).$$

Теперь коэффициенты разностных уравнений пересчитываются по $y_{\xi n}^2$. Выполняя прогонку, найдем y_n^2 , и т.д.

Условие окончания итераций записывается так

$$\max \left| \frac{y_n^s - y_{\xi n}^s}{y_n^s} \right| \leq \varepsilon_1, \text{ для всех } n=0,1,\dots,N,$$

или используется условие (5).

2. Линеаризация по Ньютону

Выполняется обычным образом в соответствии с методом Ньютона. При этом надо знать, от каких значений искомой сеточной функции (в каких узлах) зависят коэффициенты разностной схемы. Применительно к разностному аналогу уравнения в нашем случае имеем

$$A_n = A_n(y_n, y_{n+1}), B_n = B_n(y_{n-1}, y_n, y_{n+1}), C_n = C_n(y_{n-1}, y_n), D_n = D_n(y_n).$$

Выполняя линеаризацию по Ньютону последовательно по неизвестным y_{n-1}, y_n, y_{n+1} , получим

$$\begin{aligned} & (A_n y_{n+1} - B_n y_n + C_n y_{n-1} + D_n) \Big|_{s-1} + \left(\frac{\partial B_n}{\partial y_{n-1}} y_n + \frac{\partial C_n}{\partial y_{n-1}} y_{n-1} + C_n \right) \Big|_{s-1} \Delta y_{n-1}^s + \\ & \left(\frac{\partial A_n}{\partial y_n} y_{n+1} - \frac{\partial B_n}{\partial y_n} y_n - B_n + \frac{\partial C_n}{\partial y_n} y_{n-1} + \frac{\partial D_n}{\partial y_n} \right) \Big|_{s-1} \Delta y_n^s + \\ & \left(\frac{\partial A_n}{\partial y_{n+1}} y_{n+1} + A_n - \frac{\partial B_n}{\partial y_{n+1}} y_n \right) \Big|_{s-1} \Delta y_{n+1}^s = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Уравнение (7) решается методом прогонки, в результате находятся все Δy_n^s , после чего определяются значения искомой функции в узлах на s -итерации $y_n^s = y_n^{s-1} + \Delta y_n^s$. Итерационный процесс заканчивается при выполнении условия

$$\max \left| \frac{\Delta y_n^s}{y_n^s} \right| \leq \varepsilon, \text{ для всех } n = 0, 1, \dots, N$$

3. Краевая задача с нелинейными граничными условиями

Во многих случаях даже при линейном дифференциальном уравнении одно или оба краевых условий в задаче (1) могут быть сформулированы как нелинейные. Например, пусть слева при $x = 0$ краевое условие ставится как нелинейное, а справа при $x = l$ сохраняется прежним, т.е. линейным

$$x = 0, \quad -k(0) \frac{du}{dx} = F_0 - \sigma u^4(0)$$

$$x = l, \quad -k(l) \frac{du}{dx} = \alpha(u(l) - \beta)$$

где σ - известное число.

Здесь по сравнению с (1) из лекции №7 в правой части условия при $x = 0$ появилось слагаемое $\sigma u^4(0)$.

Теперь в разностном аналоге левого краевого условия появится σy_0^4 , и определить начальные значения прогоночных коэффициентов невозможно, т.к. для их нахождения используется линейная формула $y_9 = \xi_0 y_1 + \eta_1$. В этой ситуации можно применить два разных подхода.

Первый способ - организовать итерационный процесс решения разностных уравнений, беря нелинейный член с предыдущей итерации, т.е. $\sigma y_0^4|_{s-1}$.

Второй способ - изменить направление прогонки, т.е. прогоночные коэффициенты определять справа налево, а функцию - слева направо. Такая прогонка называется *левой*. В этом случае основная прогоночная формула записывается в виде

$$y_n = \xi_{n-1} y_{n-1} + \eta_{n-1},$$

а рекуррентные соотношения для определения прогоночных коэффициентов *левой* прогонки

$$\xi_{n-1} = \frac{C_n}{B_n - A_n \xi_n}, \quad \eta_{n-1} = \frac{A_n \eta_n + D_n}{B_n - A_n \xi_n}. \quad (8)$$

Принимая простейшую (первого порядка точности) аппроксимацию краевого условия при $x = l$, получим его разностный аналог

$$-k_N \frac{y_N - y_{N-1}}{h} = \alpha(y_N - \beta).$$

Откуда, учитывая, что $y_N = \xi_{N-1} y_{N-1} + \eta_{N-1}$, найдем начальные значения прогоночных коэффициентов

$$\xi_{N-1} = \frac{k_N}{k_N + h\alpha}, \quad \eta_{N-1} = \frac{h\alpha\beta}{k_N + h\alpha},$$

а по (8) все остальные прогоночные коэффициенты вплоть до ξ_0, η_0

Аналогичная разностная аппроксимация левого краевого условия дает

$$-k_0 \frac{y_1 - y_0}{h} = F_0 - \sigma y_0^4.$$

Откуда получаем уравнение для определения y_0

$$\frac{h\sigma}{k_0} y_0^4 + (1 - \xi_0) y_0 - \left(\frac{hF_0}{k_0} + \eta_0 \right) = 0.$$

Решение данного уравнения удобно искать, например, методом половинного деления. К этому моменту прогоночные коэффициенты ξ_0, η_0 уже определены

ЛЕКЦИЯ №9. МОДЕЛИ НА ОСНОВЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ (ДУЧП).

КЛАССИФИКАЦИЯ УРАВНЕНИЙ И ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧ

В лекциях 9-12 обсуждаются постановки задач при создании математических моделей на основе дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП), вопросы перехода к их дискретной формулировке и способы решения получающихся разностных аналогов. Главное внимание сосредоточено на методе конечных разностей, и, соответственно, рассматриваются хорошо зарекомендовавшие себя подходы к получению разностных схем, основанные на непосредственной конечно-разностной аппроксимации дифференциальных уравнений, методе неопределенных коэффициентов и интегро-интерполяционном методе. Сделаны необходимые замечания по особенностям использования методов, областям их наиболее эффективного применения и ограничениям при выборе. В материал лекций включены представляющие интерес для практики вопросы оценивания аппроксимации, устойчивости и сходимости разностных схем. Важное место при описании методов отведено различным аспектам компьютерной реализации разностной задачи, что имеет непосредственный выход в практику разработки соответствующих алгоритмов и программного кода с использованием языков высокого уровня. Детали алгоритмов рассматриваются на типовых задачах, возникающих в практике математического моделирования.

Математические модели, построенные на основе уравнений в частных производных, позволяют описывать поля разнообразной физической природы. Это могут быть поля температур, плотностей, скоростей и концентраций частиц, гравитационные, электромагнитные, радиационные поля и др. С уравнениями в частных производных приходится иметь дело в различных областях науки и техники при формировании моделей гидро- и газодинамики, переноса излучения, квантовой механики, теплопередачи, физики плазмы и т. д. В указанных уравнениях в качестве независимых переменных обычно выступают время и пространственные координаты, но могут использоваться и такие переменные, как проекции скоростей частиц на координатные оси, что может увеличить размерность уравнений до семи. Решение отыскивается в некоторой области $G(t, x, y, z)$, а на границе области ставятся дополнительные условия, причем условия, поставленные в начальный момент времени, называются *начальными*, а условия на границе пространственной области – *граничными*, или *краевыми*. Для уравнений в частных производных можно поставить задачу Коши, когда формулируются только

начальные условия (например, при рассмотрении распространения тепла в неограниченном пространстве).

9.1. Классификация уравнений в частных производных

В лекции рассматриваются методы решения уравнений второго порядка, линейных относительно старших производных. Общий вид таких уравнений в случае двух переменных может быть представлен следующим образом

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0,$$

где коэффициенты a_{11}, a_{12}, a_{22} в общем случае являются функциями x, y, u, u_x, u_y . В этом случае уравнение называется *квазилинейным*. Если данные коэффициенты зависят только от x, y , то уравнение рассматривается как *линейное относительно старших производных*. Наконец, уравнение называется *линейным*, если оно линейно как относительно старших производных, так и относительно функции и ее первых производных, т. е. уравнение может быть записано в виде

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu + f(x, y) = 0,$$

где все коэффициенты являются функциями только x, y . Если все коэффициенты не зависят от x, y , то уравнение будет *линейным с постоянными коэффициентами*.

В случае, если коэффициенты a_{11}, a_{12}, a_{22} равны нулю, а $b_1 \neq 0, b_2 \neq 0$, то уравнение имеет первый порядок и называется *уравнением переноса*.

В зависимости от знака дискриминанта $d = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$ уравнения делятся на *гиперболические* ($d > 0$), *параболические* ($d = 0$) и *эллиптические* ($d < 0$).

Общая классификация методов решения уравнений всех типов аналогична рассмотренной ранее для обыкновенных дифференциальных уравнений, а именно: существуют *точные, аналитические приближенные и численные* методы. Точные решения уравнений в частных производных удастся получить лишь в ограниченном ряде случаев, поэтому при реализации вычислительных моделей, построенных на таких уравнениях, особенно велика роль численных методов.

К точным методам решения относятся метод разделения переменных, метод функций источника, метод распространяющихся волн и др. Среди аналитических

приближенных методов можно отметить метод малого параметра и метод Бубнова-Галеркина. К численным методам относятся метод конечных разностей (сеточный) и метод конечных элементов (проекционно-сеточный). В настоящем пособии внимание сосредоточено на методе конечных разностей.

9.2. Постановки задач для уравнений в частных производных

Рассмотрим уравнения математической физики, в которых независимыми переменными являются время t и пространственные координаты $\vec{r}(x, y, z)$.

Для выделения единственного решения уравнения должны быть сформулированы дополнительные условия, которые записываются на границе области изменения независимых переменных $\Omega(\vec{r}, t)$. При этом различают задачу Коши (заданы только начальные условия, т.е. условия при $t = t_0$, например, задача для бесконечного пространства), краевые задачи (заданы условия на границе пространственной области) и смешанные краевые, или нестационарные краевые, задачи (заданы и начальные, и краевые условия).

В качестве примера обсудим постановку задачи для уравнения параболического типа в одномерной по пространству и двумерной постановках. В одномерном варианте имеем

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + f(x, t), \quad (1)$$

$$0 < x < l, \quad 0 < t < T_0.$$

Начальное условие формулируется в виде

$$u(x, 0) = \mu(x). \quad (2)$$

Граничные условия могут быть нескольких типов в зависимости от того задаются ли на границах функция, или ее производная, или соотношение между функцией и ее производной. Могут быть также заданы соотношения на контактной границе и, кроме того, поставлены нелинейные граничные условия.

Простейшие граничные условия первого рода формируются путем задания функции

$$\begin{aligned} u(0,t) &= \mu_1(t), \\ u(l,t) &= \mu_2(t) \end{aligned} \quad (3)$$

Граничные условия второго рода содержат производную от искомой функции. Например, при $x = 0$ можно написать соотношение

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = \varphi(t).$$

Граничные условия третьего рода

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \beta u = \phi(t) \quad .$$

В двумерной постановке задача формулируется следующим образом

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + f(x, z, t), \quad (4)$$

$$(x, z) \in \Omega, \quad 0 < t < T_0$$

Начальное условие:

$$u(x, z, 0) = \mu(x, z) \quad (5)$$

Краевые условия первого рода на границе Γ :

$$u|_{\Gamma} = \mu_1(x, z, t)$$

или более подробно для прямоугольной пространственной области $0 < x < l, 0 < z < s$

$$\begin{aligned} u(0, z, t) &= \mu_1(z, t), \quad u(l, z, t) = \mu_2(z, t), \\ u(x, 0, t) &= \mu_3(x, t), \quad u(x, s, t) = \mu_4(x, t) \end{aligned} \quad (6)$$

Краевые условия второго рода ставятся следующим образом

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\Gamma} = \varphi(x, y, t),$$

где n - внешняя нормаль к границе области.

ЛЕКЦИЯ №10. МОДЕЛИ НА ОСНОВЕ ДУЧП.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

Применение разностного метода начинают с построения в области изменения аргументов $\Omega(\bar{r}, t)$ разностной сетки, представляющей собой множество точек (узлов), образованных пересечением систем линий. На этой сетке производные, входящие в уравнение, аппроксимируют разностными аналогами, в которые входят значения функции в узлах сетки. Начальные и граничные условия также заменяют разностными соотношениями. Построенная таким образом система алгебраических уравнений называется *разностной схемой*, решение которой дает приближенные значения искомой функции в узлах. Получающаяся функция дискретного аргумента, определенная в узлах сетки, называется *сеточной функцией*.

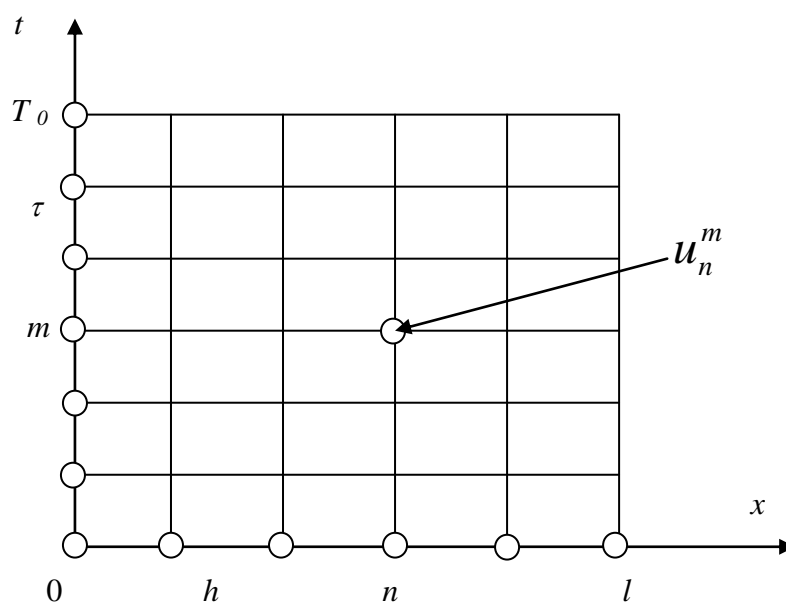


Рис. 1.1. Разностная сетка для уравнения (1.1)

Понятно, что должны быть выдвинуты требования существования и единственности решения разностной схемы, и это решение должно сходиться к решению исходной дифференциальной задачи.

Рассмотрим построение сетки на примере разностной аппроксимации уравнения (1) с дополнительными условиями (2), (3). Построим в области интегрирования уравнения прямоугольную сетку. Последняя образуется пересечением линий $\{x_n = nh, 0 \leq n \leq N, t_m = m\tau, 0 \leq m \leq M\}$, где h и τ - шаги сетки по переменным x и t . Значения функции в узлах

сетки обозначают как $u_n^m = u(x_n, t_m)$ - (рис.1.1), и, соответственно, $u_n^{m+1} = u(x_n, t_{m+1})$. Значения сеточной функции в узлах, являющейся результатом решения разностных уравнений, обозначим y_n^m и y_n^{m+1} , причем для удобства записи формул освободим верхний индекс, приняв $y_n = y_n^m$ и $\hat{y}_n = y_n^{m+1}$. Для уравнения (1.1) совокупность узлов, лежащих на линии $t=t_m$ (или на плоскости, если решается двумерная по пространству задача, или же на гиперплоскости в случае многомерной постановки), называется *слоем*. Линии на слое, вдоль которых меняется только одна пространственная переменная, называются *направлением*. Выберем конфигурацию узлов, на которой будем проводить аппроксимацию дифференциального уравнения. Эта конфигурация узлов называется *шаблоном*. Для одной и той же задачи можно выбрать много разных шаблонов. На рис.1.2 показаны три шаблона.

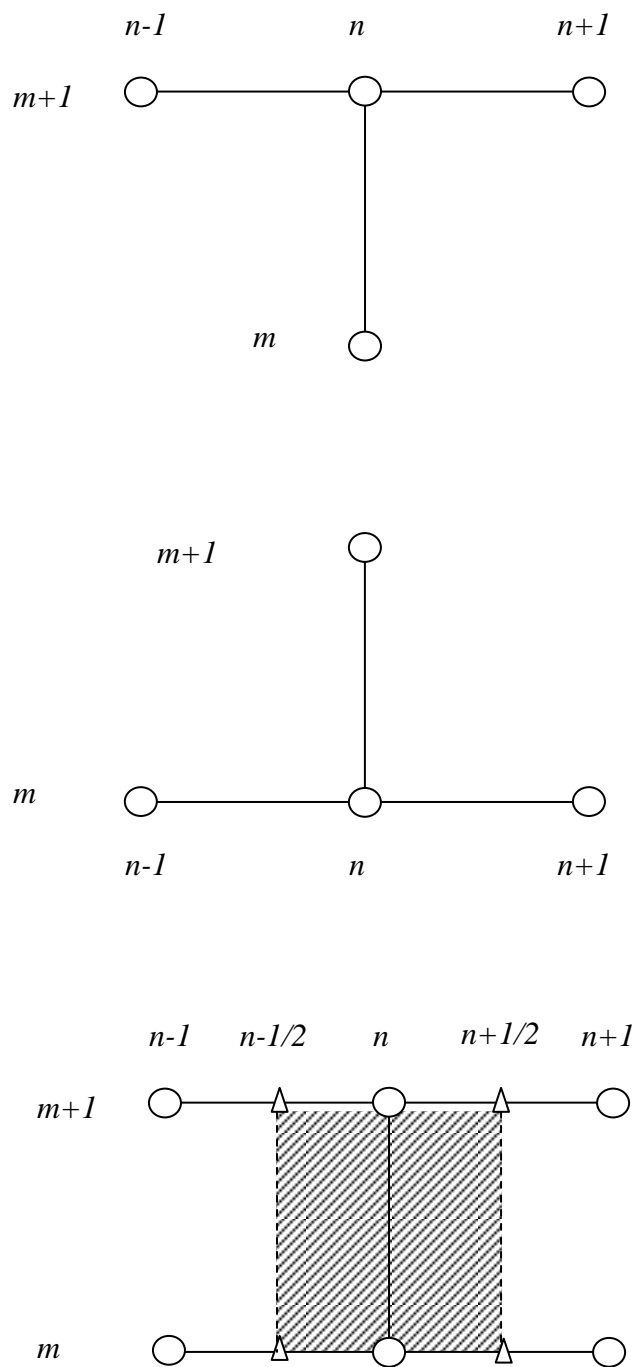


Рис. 1.2. Шаблоны (I - III) разностных схем (на схеме III заштрихована ячейка)

Заменяя в уравнении (1) производные разностными аналогами, получаем на выбранных шаблонах соответствующие разностные схемы:

на шаблоне I

$$\frac{\hat{y}_n - y_n}{\tau} = a \frac{\hat{y}_{n-1} - 2\hat{y}_n + \hat{y}_{n+1}}{h^2} + \varphi_n, \quad (7)$$

на шаблоне II

$$\frac{\hat{y}_n - y_n}{\tau} = a \frac{y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1}}{h^2} + \varphi_n, \quad (8)$$

на шаблоне III

$$\frac{\hat{y}_n - y_n}{\tau} = a\sigma \frac{\hat{y}_{n-1} - 2\hat{y}_n + \hat{y}_{n+1}}{h^2} + a(1-\sigma) \frac{y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1}}{h^2} + \varphi_n. \quad (9)$$

В формулах (7)-(9) $1 \leq n \leq N-1$, σ - параметр со значениями в пределах $0 \dots 1$, a - коэффициент уравнения. Схемы дополняются уравнениями, аппроксимирующими граничные условия:

для шаблонов I и III

$$\hat{y}_0 = \mu_1(t_{m+1}), \hat{y}_N = \mu_2(t_{m+1}); \quad (10)$$

для шаблона II

$$y_0 = \mu_1(t_m), y_N = \mu_2(t_m). \quad (11)$$

Начальное условие имеет вид

$$y_n^0 = \mu(x_n). \quad (12)$$

Остановимся на вопросе существования решения.

Схема (8) представляет собой формулу для вычисления единственного неизвестного \hat{y}_n , которое легко выразить через значения сеточной функции на предыдущем слое

$$\hat{y}_n = y_n + \frac{\tau a}{h^2} (y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1}) + \tau \varphi_n, \quad (13)$$

где $\varphi_n = f(x_n, t_m)$, $1 < n < N-1$.

При этом значения y_0 и y_N находят из краевых условий (11), а при расчете \hat{y}_n^1 используют начальное условие (12). Схемы типа (8) называются *явными*.

Схемы (7) и (9) относятся к типу *неявных*. Для получения решения на данном слое здесь приходится решать систему уравнений, в которой каждое уравнение, кроме первого и последнего, содержит три неизвестных: $\hat{y}_{n-1}, \hat{y}_n, \hat{y}_{n+1}$. Системы (7), (9) могут быть приведены к виду

$$A_n \hat{y}_{n-1} - B_n \hat{y}_n + C_n \hat{y}_{n+1} = -F_n, \quad 1 < n < N-1, \quad (14)$$

$$\hat{y}_0 = \mu_1(t_{m+1}), \quad \hat{y}_N = \mu_2(t_{m+1}), \quad n=0 \text{ и } n=N.$$

Коэффициенты разностной схемы (1.7) :

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{\tau a}{h^2}, \\ C_n &= A_n, \\ B_n &= A_n + C_n + 1, \\ F_n &= \tau \varphi_n + y_n \end{aligned} \quad (15)$$

Для схемы (9) коэффициенты следующие

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{\tau a \sigma}{h^2}, \\ C_n &= A_n, \\ B_n &= A_n + C_n + 1, \\ F_n &= \left(1 - \frac{2\tau a(1-\sigma)}{h^2}\right) y_n + \frac{\tau a(1-\sigma)}{h^2} (y_{n-1} + y_{n+1}) + \tau \varphi_n. \end{aligned} \quad (16).$$

Матрица линейной системы (14) с коэффициентами (15), (16) - трехдиагональная, решение системы может быть найдено методом прогонки. При $\sigma > 0$ решение существует, единственно, и прогонка устойчива в силу преобладания диагонального элемента матрицы системы: из (15), (16) ясно, что модуль этого элемента больше суммы модулей недиагональных членов.

Видно, что при $\sigma=0$ схема (9) переходит в явную схему (8), а при $\sigma=1$ - в чисто неявную (7). При $\sigma = \frac{1}{2}$ схема (9) называется *симметричной (по времени)*.

ЛЕКЦИЯ №11. МОДЕЛИ НА ОСНОВЕ ДУЧП. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ОБ АППРОКСИМАЦИИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ

Качество построенной разностной схемы оценивается такими свойствами как *аппроксимация, устойчивость, сходимость*. Ниже будет показано, что из аппроксимации и устойчивости разностной схемы следует сходимость приближенного решения к точному. Рассмотрим последовательно указанные свойства схем.

Введем понятие невязки разностной схемы, построенной для дифференциального уравнения, записанного в общем операторном виде

$$Au(x) = f, \quad (17)$$

с дополнительными условиями

$$Bu(x) = \mu(x), \quad (18)$$

где, например, для уравнения (1) оператор A имеет вид

$$A = \left(\frac{\partial}{\partial t} - a \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right).$$

Разностная схема для задачи (17), (18):

$$A_h y = \varphi_h, \quad (19)$$

$$B_h y = \beta_h \quad (20)$$

Если подставить в соотношения (19) точное решение, то данное равенство будет нарушено, так как приближенное решение y не совпадает с точным решением u .

Невязкой называется величина

$$\psi = \varphi_h - A_h u = (Au - f) - (A_h u - \varphi_h). \quad (21)$$

Для граничных условий получаем невязку в виде

$$\rho = \beta_h - B_h u = (Bu - \mu) - (B_h u - \beta_h). \quad (22)$$

Дадим **определение аппроксимации**.

Разностная схема (19), (20) аппроксимирует задачу (17), (18), если в некоторой норме $\|\psi\| \rightarrow 0$, $\|\rho\| \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$, и аппроксимация имеет p -ый порядок, если $\|\psi\| = O(h^p)$, $\|\rho\| = O(h^p)$ при $h \rightarrow 0$.

Фигурирующие в приведенных соотношениях нормы могут быть определены как сеточные аналоги различных норм: чебышевской $\|u(x)\|_C$, гильбертовой $\|u(x)\|_{L_2}$, энергетической $\|u(x)\|_E$:

$$\|u(x)\|_C = \max_{a \leq x \leq b} |u(x)|,$$

$$\|u(x)\|_{L_2} = \sqrt{\int_a^b \rho(x) u^2(x) dx}, \quad \rho(x) > 0,$$

$$\|u(x)\|_E = \sqrt{\int_a^b [\rho_1(x) u_x^2(x) + \rho_0(x) u^2(x)] dx}, \quad \rho_1(x) > 0, \rho_0(x) > 0.$$

Указанные сеточные аналоги выписанных норм представляют в таком виде, чтобы при $h \rightarrow 0$ они переходили в эти нормы:

$$\|y\|_C = \max_{0 \leq n \leq N} |y_n|,$$

$$\|y\|_{L_2} = \sqrt{\sum_{n=1}^N \rho_n y_n^2 h_n}.$$

Невязку оценивают, проводя разложение точного решения в ряд Тейлора. Найдем невязку разностной схемы (9) для уравнения (1).

Выполним разложение решения на сетке, принимая за центр разложения точку $(x_n, t_m + \frac{\tau}{2})$. Получим

$$\begin{aligned} \bar{u}_{n\pm 1} = \bar{u} + \frac{\tau}{2} u_t + \frac{1}{2} \left(\frac{\tau}{2} \right)^2 u_{tt} + \frac{1}{6} \left(\frac{\tau}{2} \right)^3 u_{ttt} + \frac{1}{24} \left(\frac{\tau}{2} \right)^4 u_{tttt} \pm h u_x + \frac{h^2}{2} u_{xx} \pm \frac{h^3}{6} u_{xxx} + \frac{h^4}{24} u_{xxxx} \pm \\ \pm \frac{\tau h}{2} u_{tx} \pm \frac{1}{2} \left(\frac{\tau}{2} \right)^2 h u_{txx} + \frac{1}{2} \left(\frac{\tau}{2} \right)^2 h^2 u_{txx} \pm \frac{1}{6} \left(\frac{\tau}{2} \right)^3 h u_{txx} + \frac{1}{4} \left(\frac{\tau}{2} \right)^2 h^2 u_{txx} \pm \frac{1}{6} \left(\frac{\tau}{2} \right)^3 h^3 u_{txx} + \dots \end{aligned},$$

$$\bar{u}_n = \bar{u} + \frac{\tau}{2} u_t + \frac{1}{2!} \left(\frac{\tau}{2} \right)^2 u_{tt} + \frac{1}{3!} \left(\frac{\tau}{2} \right)^3 u_{ttt} + \frac{1}{4!} \left(\frac{\tau}{2} \right)^4 u_{tttt} + \dots,$$

$$\begin{aligned} u_{n+1} = \bar{u} - \frac{\tau}{2} u_t + \frac{1}{2} \left(\frac{\tau}{2} \right)^2 u_{tt} - \frac{1}{6} \left(\frac{\tau}{2} \right)^3 u_{ttt} + \frac{1}{24} \left(\frac{\tau}{2} \right)^4 u_{tttt} + h u_x + \frac{h^2}{2} u_{xx} + \frac{h^3}{6} u_{xxx} + \frac{h^4}{24} u_{xxxx} - \\ - \frac{\tau h}{2} u_{tx} + \frac{1}{2} \left(\frac{\tau}{2} \right)^2 h u_{txx} - \frac{1}{2} \left(\frac{\tau}{2} \right)^2 h^2 u_{txx} - \frac{1}{6} \left(\frac{\tau}{2} \right)^3 h u_{txx} + \frac{1}{4} \left(\frac{\tau}{2} \right)^2 h^2 u_{txx} - \frac{1}{6} \left(\frac{\tau}{2} \right)^3 h^3 u_{txx} + \dots \end{aligned},$$

$$\begin{aligned} u_{n-1} = \bar{u} - \frac{\tau}{2} u_t + \frac{1}{2} \left(\frac{\tau}{2} \right)^2 u_{tt} - \frac{1}{6} \left(\frac{\tau}{2} \right)^3 u_{ttt} + \frac{1}{24} \left(\frac{\tau}{2} \right)^4 u_{tttt} - h u_x + \frac{h^2}{2} u_{xx} - \frac{h^3}{6} u_{xxx} + \frac{h^4}{24} u_{xxxx} + \\ + \frac{\tau h}{2} u_{tx} - \frac{1}{2} \left(\frac{\tau}{2} \right)^2 h u_{txx} - \frac{1}{2} \left(\frac{\tau}{2} \right)^2 h^2 u_{txx} + \frac{1}{6} \left(\frac{\tau}{2} \right)^3 h u_{txx} + \frac{1}{4} \left(\frac{\tau}{2} \right)^2 h^2 u_{txx} + \frac{1}{6} \left(\frac{\tau}{2} \right)^3 h^3 u_{txx} + \dots \end{aligned},$$

$$u_n = \bar{u} - \frac{\tau}{2} u_t + \frac{1}{2!} \left(\frac{\tau}{2} \right)^2 u_{tt} - \frac{1}{3!} \left(\frac{\tau}{2} \right)^3 u_{ttt} + \frac{1}{4!} \left(\frac{\tau}{2} \right)^4 u_{tttt} + \dots$$

В этих формулах введены обозначения:

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial t}, u_{tt} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, u_x = \frac{\partial u}{\partial x} \text{ и т.д.}$$

Подставив эти разложения в формулу для невязки, придем к соотношению

$$\begin{aligned}\psi &= \left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - a \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - f(x, t) \right)_{x=x_n}^{t=t_m + \frac{\tau}{2}} - \frac{\hat{u}_n - u_n}{\tau} + a\sigma \frac{\hat{u}_{n-1} - 2\hat{u}_n + \hat{u}_{n+1}}{h^2} + \\ &+ a(1-\sigma) \frac{u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1}}{h^2} + \varphi_n = \\ &= a\tau(\sigma - \frac{1}{2})u_{txx} + \frac{\tau^2}{8}(au_{txx} - \frac{1}{3}u_{ttt}) + \frac{ah^2}{12}u_{xxxx} + \varphi_n - f(x_n, t_m + \frac{\tau}{2}) + O(\tau^2 + h^2).\end{aligned}$$

Можно заметить, что если взять $\varphi_n = f(x_n, t_m + \frac{\tau}{2})$, то при $\sigma = \frac{1}{2}$ рассматриваемая разностная схема имеет аппроксимацию $O(\tau^2 + h^2)$, а при $\sigma \neq \frac{1}{2}$ - $O(\tau + h^2)$.

Аналогично проверяется аппроксимация начальных и граничных условий, если они содержат производные от функции, например, граничных условий второго или третьего рода.

ЛЕКЦИЯ №12. МОДЕЛИ НА ОСНОВЕ ДУЧП.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ И СХОДИМОСТИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ

12.1. Устойчивость

Под устойчивостью задачи понимают непрерывную зависимость решения от входных данных, т. е. малые отклонения во входных данных должны приводить к малому изменению решения. Неустойчивость проявляется в том, что малые ошибки, допущенные на любом расчетном шаге, приводят к быстрому их нарастанию в ходе дальнейших вычислений, что, естественно, обесценивает получаемые результаты.

Дадим определение устойчивости.

Разностная схема $A_h u = \varphi_h$, $B_h u = \beta_h$ устойчива, если ее решение непрерывно зависит от входных данных φ_h и β_h , и эта зависимость равномерна относительно шага сетки, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon)$, не зависящее от шага h (по крайней мере, для достаточно малых h), что $\|y^{(1)} - y^{(2)}\| \leq \varepsilon$, если $\|\varphi_h^{(1)} - \varphi_h^{(2)}\| \leq \delta$, $\|\beta_h^{(1)} - \beta_h^{(2)}\| \leq \delta$.

В случае нескольких независимых переменных рассматривают условную и безусловную устойчивость. Если сформулированные выше условия выполняются при определенном соотношении шагов по различным переменным, то устойчивость называется *условной*, в противном случае, когда соотношение между шагами может быть произвольным, устойчивость называется *безусловной*. При этом непрерывную зависимость решения от φ_h называют *устойчивостью по правой части*, а непрерывную зависимость от β_h - *устойчивостью по дополнительным условиям* (начальным и граничным).

Устойчивость разностных схем может быть исследована несколькими методами: разделения переменных, энергетических неравенств, операторных неравенств, на основе принципа максимума и др.

Рассмотрим вначале **принцип максимума**.

Перепишем разностные схемы (14) в виде

$$\sum_k a_k \hat{y}_{n+k} = \sum_p b_p y_{n+p} + \varphi_n, \quad (23)$$

где суммирование выполняется по узлам шаблона около n -го узла. Пронумеруем узлы так, чтобы $|a_0| = \max_k |a_k|$.

Принцип максимума, дающий достаточное условие устойчивости явных и неявных двухслойных разностных схем, формулируется следующим образом:

1) схема равномерно устойчива по начальным данным, если

$$(1 + C\tau)|a_0| \geq \sum_{k \neq 0} |a_k| + \sum_p |b_p|, \quad C = \text{const} \geq 0. \quad (24)$$

2) схема устойчива по правой части, если справедливо соотношение (24) и имеет место неравенство

$$|a_0| - \sum_{k \neq 0} |a_k| \geq \frac{D}{\tau}, \quad D = \text{const} > 0 \quad (25)$$

Сформулированные условия не являются необходимыми для устойчивости схем, т.е. несоблюдение (24), (25) не обязательно ведет к их неустойчивости. Данным методом можно доказать устойчивость схем точности $O(\tau)$, в других случаях используют иные методы.

В качестве примера рассмотрим неявную схему (7). Представив ее в виде (23), получим выражения для коэффициентов

$$a_0 = \frac{2a}{h^2} + \frac{1}{\tau}, \quad a_{-1} = a_1 = \frac{a}{h^2}, \quad b_0 = \frac{1}{\tau} \quad \text{для } 1 \leq n \leq N-1.$$

В случае граничных условий первого рода (10) $a_0 = 1$, $\beta_0 = 0$ для $n=0$ и $n=N$. Все остальные коэффициенты равны нулю.

Видно, что условие (25) выполнено во внутренних узлах при произвольных соотношениях шагов по переменным x и t , а условие (24) справедливо во всех узлах сетки. Таким образом, рассматриваемая неявная разностная схема безусловно устойчива по начальным данным, правой части и краевым условиям. Принцип максимума позволяет доказывать устойчивость в чебышевской (локальной) норме.

Метод разделения переменных применяют для исследования устойчивости схем в гильбертовой (среднеквадратичной) норме. Запишем разностную схему в канонической форме

$$B \frac{\hat{y} - y}{\tau} + Ay = \varphi, \quad (26)$$

где A и B - разностные операторы, действующие на функцию по пространственным переменным. Например, для явной схемы (8) очевидно, что

$$B = E, Ay = -a \frac{y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1}}{h^2}. \quad (27)$$

При точной правой части погрешность решения удовлетворяет уравнению

$$B\bar{z} + (A\tau - B)z = 0. \quad (28)$$

Частное решение (28) будем искать методом разделения переменных:

$$z(x_n, t_m) = \rho_q^m e^{i\pi q x_n / l}, q=0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (29)$$

Здесь ρ_q - множитель роста q -ой гармоники при переходе с одного слоя на следующий слой, так что $\bar{z} = \rho_q z$. Подставляя (29) в (28), придем к уравнению

$$\rho_q B e^{i\pi q x / l} + (A\tau - B) e^{i\pi q x / l} = 0. \quad (30)$$

Если в схеме (26) коэффициенты постоянны, а сетка равномерна, то уравнение (30) после сокращения множителя $e^{i\pi q x / l}$ не будет зависеть от индекса n , т.е. от координаты x , соответственно ρ_q не будет зависеть от x .

Признак устойчивости формулируется следующим образом.

Схема (26) с постоянными коэффициентами устойчива **по начальным данным**, если для всех гармоник с индексом q выполняется неравенство

$$|\rho_q| \leq 1 + C\tau, C = const \quad (31)$$

Константа C не должна быть большой, поэтому обычно принимают $C=0$.

Признак неустойчивости заключается в следующем: если хотя бы для одной гармоники q величину $|\rho_q|$ нельзя мажорировать величиной $1 + C\tau$, то схема (26) неустойчива.

В качестве примера проверим устойчивость явной схемы (8). Зафиксируем правую часть в разностной схеме (26), представим погрешность решения в виде (29) с учетом того, что $\tilde{z} = \rho_q z$, и, подставив ее в (8), получим

$$\rho_q^m \left(\frac{(\rho_q - 1)e^{i\pi q x_n / l}}{\tau} \right) - a \rho_q^m \left(\frac{e^{i\pi q (x_n - h) / l} - 2e^{i\pi q x_n / l} + e^{i\pi q (x_n + h) / l}}{h^2} \right) = 0,$$

или

$$(\rho_q - 1) - \frac{a\tau}{h^2} (e^{-i\pi q h / l} - 2 + e^{i\pi q h / l}) = 0.$$

Заменяя по формуле Эйлера

$$e^{-i\pi q h / l} + e^{i\pi q h / l} = 2 \cos \pi q h / l,$$

получаем окончательно

$$(\rho_q - 1) + \frac{4a\tau}{h^2} \sin^2 \frac{\pi q h}{2l} = 0.$$

Отсюда

$$\rho_q = 1 - \frac{4a\tau}{h^2} \sin^2 \frac{\pi q h}{2l} \tag{32}$$

Теперь согласно условию (31) ($|\rho_q| \leq 1$) получим из (32) критерий устойчивости

рассматриваемой разностной схемы, учитывая, что $\sin^2 \frac{\pi q h}{2l} \geq 0$

$$\frac{4a\tau}{h^2} \leq 2.$$

Таким образом, явная схема устойчива при определенном соотношении между шагами по координатам x и t :

$$\tau \leq \frac{h^2}{2a}, \quad (33)$$

т.е. явная схема условно устойчива.

Отметим, что из признака (31) и дополнительного условия (25) следует устойчивость разностной схемы по правой части в гильбертовой норме.

Если дифференциальное уравнение имеет переменные коэффициенты или используется неравномерная сетка, то применяют прием «замораживания коэффициентов». В этом случае коэффициенты считают постоянными и равными их значениям в некотором фиксированном узле n . Схема считается устойчивой, если при любых n и q оказывается справедливым неравенство (31).

Применим метод разделения переменных для исследования устойчивости разностной схемы (9). Вначале проверим устойчивость по начальным данным. Положим $\varphi_n = 0$ и представим погрешность решения в виде (29), при этом $\bar{z} = \rho_q z$. Сделав данную подстановку в (9), получим

$$\left(\frac{(\rho_q - 1)e^{i\pi q x_n / l}}{\tau} \right) - a\sigma\rho_q \left(\frac{e^{i\pi q(x_n - h)/l} - 2e^{i\pi q x_n / l} + e^{i\pi q(x_n + h)/l}}{h^2} \right) -$$

$$- a(1 - \sigma) \left(\frac{e^{i\pi q(x_n - h)/l} - 2e^{i\pi q x_n / l} + e^{i\pi q(x_n + h)/l}}{h^2} \right) = 0$$

или, проведя сокращение на $e^{i\pi q x_n / l}$, перейдем к уравнению

$$\frac{(\rho_q - 1)}{\tau} - a\sigma\rho_q \left(\frac{e^{-i\pi q h / l} - 2 + e^{i\pi q h / l}}{h^2} \right) -$$

$$- a(1 - \sigma) \left(\frac{e^{-i\pi q h / l} - 2 + e^{i\pi q h / l}}{h^2} \right) = 0$$

Используя формулу Эйлера, получаем окончательно

$$\rho_q - 1 + \frac{4a\sigma\tau}{h^2} \rho_q \sin^2 \frac{\pi qh}{2l} + \frac{4a\tau(1-\sigma)}{h^2} \sin^2 \frac{\pi qh}{2l} = 0.$$

Отсюда

$$\rho_q = \frac{1 - \frac{4a\tau(1-\sigma)}{h^2} \sin^2 \frac{\pi qh}{2l}}{1 + \frac{4a\sigma\tau}{h^2} \sin^2 \frac{\pi qh}{2l}}. \quad (34)$$

Из этого выражения следует, что при любом $\sigma \geq 0$ множитель роста гармоник $\rho_q \leq 1$. Осталось выяснить условие выполнения соотношения $\rho_q \geq -1$. Элементарными преобразованиями легко показать, что данное обстоятельство реализуется в случае, если

$$\frac{4a\tau}{h^2}(1-2\sigma) \leq 2$$

или

$$\sigma \geq \frac{1}{2} - \frac{h^2}{4a\tau} \quad (35)$$

Дополнительное условие устойчивости по правой части (25), как это следует из (16), выполняется для всех τ и h . Таким образом, разностная схема (9) устойчива по правой части, если выполнено условие (35) устойчивости по начальным данным.

Для чисто неявной разностной схемы $\sigma = 1$ и из (35) следует, что данные схемы устойчивы при любом соотношении шагов по независимым переменным, т. е. они безусловно устойчивы. Этот результат был получен выше на основе принципа максимума.

Для явной разностной схемы $\sigma = 0$, и устойчивость согласно (35) обеспечивается при условии $\tau \leq \frac{h^2}{2a}$, о чем было сказано ранее.

12.2. Сходимость

Дадим определение сходимости.

Разностное решение $y(x)$ сходится к решению задачи (17), (18), если

$$\|y(x) - u(x)\| \rightarrow 0 \text{ при } h \rightarrow 0;$$

разностное решение имеет порядок точности p , если

$$\|y(x) - u(x)\| = O(h^p) \text{ при } h \rightarrow 0.$$

В теории разностных схем большое значение имеет теорема, которую часто в кратком виде формулируют следующим образом: «Из аппроксимации и устойчивости следует сходимость». Сформулируем и докажем данную теорему.

Теорема. Если решение задачи (17), (18) существует, разностная схема (19), (20) корректна (т. е. ее решение существует, единственно и схема устойчива) и аппроксимирует задачу на данном решении, то разностное решение сходится к точному.

Действительно, из определения невязки (21), (22) следует

$$A_h u = \varphi_h - \psi, \tag{36}$$

$$B_h u = \beta_h - \rho. \tag{37}$$

Перепишем разностную схему (19), (20)

$$A_h y = \varphi_h,$$

$$B_h y = \beta_h.$$

Сравнивая (36), (37) с выписанной разностной схемой, видим, что система (36), (37) представляет собой не что иное, как разностную схему, правые части которой изменены на величину невязки.

Из устойчивости разностной схемы следует, что $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon)$, такое, что $\|y - u\| \leq \varepsilon$, если $\|\psi\| < \delta(\varepsilon)$, $\|\rho\| < \delta(\varepsilon)$.

Но разностная схема аппроксимирует задачу, значит $\forall \delta > 0 \exists h_0(\delta)$, такой, что невязки $\|\psi\| \leq \delta, \|\rho\| \leq \delta$ при $h \leq h_0(\delta)$.

Таким образом, $\forall \varepsilon > 0 \exists h_0(\delta(\varepsilon))$, такой что $\|y - u\| \leq \varepsilon$ при $h \leq h_0(\delta)$, что и доказывает сходимость.

Сделаем замечание относительно точности разностного решения. Краткая формулировка соответствующей теоремы имеет следующий вид: «Для линейных разностных схем порядок точности не ниже порядка аппроксимации». В развернутом варианте теорема формулируется так:

Если условия вышеприведенной теоремы о сходимости выполнены, операторы A_h, B_h линейные, а порядок аппроксимации равен p , то сходимость имеет порядок не ниже p .

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Какие дифференциальные уравнения называются уравнениями в частных производных?
2. Приведите классификацию уравнений второго порядка, линейных относительно старших производных.
3. Какие существуют постановки задач для уравнений указанного типа?
4. Какие типы граничных условий можно сформулировать?
5. Дайте определения многомерной разностной сетки, узлов, слоев, направлений, шаблона, разностной схемы.
6. Постройте явную и неявную разностную схему одномерного уравнения параболического типа на трехточечном и шеститочечном шаблонах.
7. Дайте определение аппроксимации, устойчивости и сходимости разностных схем.
8. Оцените порядок аппроксимации разностной схемы, получив выражение для невязки в случае шеститочечной разностной схемы для уравнения параболического типа.
9. Проверьте аппроксимацию граничных условий третьего рода в простейшем варианте построения разностного аналога производной на основе односторонней разности.
10. Оцените устойчивость явных и неявных разностных схем для параболического уравнения, используя принцип максимума и метод разделения переменных.
11. Докажите теорему о сходимости приближенного разностного решения к точному решению исходной дифференциальной задачи.
12. Как соотносятся порядок аппроксимации и порядок точности разностных схем.

ЛЕКЦИИ №12-13. МОДЕЛИ НА ОСНОВЕ ДУЧП. МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ

При выбранном шаблоне разностные схемы могут быть составлены несколькими методами: непосредственной разностной аппроксимации, неопределенных коэффициентов, интегро- интерполяционным. У этих методов есть свои особенности и области применения.

1. Метод разностной аппроксимации

Данный метод применяют для уравнений с гладкими коэффициентами в регулярных областях на прямоугольных сетках. При использовании этого метода дифференциальные операторы непосредственно заменяют разностными аналогами, как это было сделано выше при получении схем в предыдущих лекциях. Метод сложно использовать для уравнений с разрывными коэффициентами, на косоугольных сетках и т.д.

Этим методом можно получить схемы повышенной точности в крайних узлах при постановке граничных условий, содержащих производные решения.

Пусть для уравнения

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + f(x, t)$$

при $x = 0$ поставлено краевое условие

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{0,t} = \alpha u(0, t). \quad (1)$$

Если аппроксимировать производную односторонней разностью $\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{\hat{u}_1 - \hat{u}_0}{h}$, то граничное условие примет вид

$$\frac{\hat{y}_1 - \hat{y}_0}{h} = \alpha \hat{y}_0.$$

В соответствии с формулой Тейлора

$$\bar{u}_1 = \bar{u}_0 + h \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{0,t+\tau} + \frac{h^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{0,t+\tau} + O(h^3) \quad (2)$$

Тогда невязка в начальном узле x_0 будет следующей

$$\begin{aligned} \psi_0 = & \left(\left. \frac{\partial u}{\partial x} - \alpha u \right|_{0,t+\tau} - \left(\frac{\bar{u}_1 - \bar{u}_0}{h} - \alpha \bar{y}_0 \right) \right) = \left(\left. \frac{\partial u}{\partial x} - \alpha u \right|_{0,t+\tau} - \right. \\ & \left. - \left(\frac{\bar{u}_0 + h \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(h^3) - \bar{u}_0}{h} - \alpha \bar{u}_0 \right) \right) = -\frac{h}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(h^2) = O(h) \end{aligned} \quad (3)$$

т. е. невязка имеет первый порядок малости, который оказался более низким, чем порядок аппроксимации разностной схемы для рассматриваемого дифференциального уравнения.

Получим разностное краевое условие с порядком аппроксимации $O(h^2)$. Выразим в разложении (2) производную $\frac{\partial u}{\partial x}$ из (1), а производную $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ из дифференциального уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \alpha \bar{u}_0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{f(x,t)}{a}.$$

Тогда из (2) имеем

$$\begin{aligned} \bar{u}_1 = & \bar{u}_0 + h \alpha \bar{u}_0 + \frac{h^2}{2!} \left(\frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{f_0}{a} \right) + O(h^3) = \bar{u}_0 + h \alpha \bar{u}_0 + \frac{h^2}{2!} \left(\frac{1}{a} \frac{\bar{u}_0 - u_0}{\tau} + O(\tau) - \frac{f_0}{a} \right) + \\ & + O(h^3) \end{aligned}$$

Таким образом, получаем краевое условие вида

$$\frac{\bar{u}_1 - \bar{u}_0}{h} = \alpha \bar{u}_0 + \frac{h}{2} \left(\frac{\bar{u}_0 - u_0}{a \tau} - \frac{f_0}{a} \right) + O(\tau + h^2),$$

и разностный аналог записывается следующим образом:

$$\frac{\bar{y}_1 - y_0}{h} = \alpha \bar{y}_0 + \frac{h}{2} \left(\frac{\bar{y}_0 - y_0}{a\tau} - \frac{f_0}{a} \right) \quad (4).$$

Разностное уравнение (4) имеет второй порядок аппроксимации относительно шага h .

Приведем разностное уравнение (4) к виду, удобному для реализации метода прогонки.

$$\alpha_0 \bar{y}_0 + \alpha_1 \bar{y}_1 = \beta_0,$$

где

$$\alpha_0 = 1 + h\alpha + \frac{h^2}{2a\tau}, \alpha_1 = -1, \beta_0 = \frac{h^2}{2a\tau}(y_0 + f_0 \tau).$$

Записывая формулу прогонки в виде

$$\bar{y}_0 = \xi_1 \bar{y}_1 + \eta_1,$$

получим выражения для начальных прогоночных коэффициентов при вычислении массивов прогоночных коэффициентов по рекуррентным формулам

$$\xi_1 = -\frac{\alpha_1}{\alpha_0}, \quad \eta_1 = \frac{\beta_0}{\alpha_0}.$$

2. Метод неопределенных коэффициентов

Суть метода состоит в том, что на выбранном шаблоне сетки составляют линейную комбинацию значений сеточной функции в узлах и получают выражение для соответствующей невязки, причем коэффициенты сформированной линейной комбинации находят из условия, чтобы невязка имела наиболее высокий порядок малости относительно шагов по координатам. В качестве примера получим методом неопределенных коэффициентов разностную схему для уравнения

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + f(x, t)$$

на неявном шаблоне I, положив для простоты $f(x, t) = 0$.

Составим линейную комбинацию значений разностного решения в узлах шаблона:

$$a_1 \bar{y}_{n-1} + a_2 \bar{y}_n + a_3 \bar{y}_{n+1} + a_4 y_n - \varphi_n = 0.$$

Выполняя разложение решения в ряд Тейлора около узла (x_n, t_{m+1}) , получаем

$$\bar{u}_{n\pm 1} = \bar{u}_n \pm h u_x(x_n, t_{m+1}) + \frac{1}{2} h^2 u_{xx}(x_n, t_{m+1}) + \dots$$

$$u_n = \bar{u}_n - \tau u_t(x_n, t_{m+1}) + \dots$$

Невязку разностной схемы определяем следующим образом

$$\begin{aligned} \psi &= (Au - f) - (A_h u - \varphi_h) = (u_t - a u_{xx})|_{x_n, t_{m+1}} - f(x_n, t_{m+1}) - \\ &- (a_1 \bar{u}_{n-1} + a_2 \bar{u}_n + a_3 \bar{u}_{n+1} + a_4 u_n - \varphi_n) = (u_t - a u_{xx})|_{x_n, t_{m+1}} - f(x_n, t_{m+1}) - \\ &- (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) \bar{u}_n + (a_1 - a_3) h u_x - \frac{1}{2} (a_1 + a_3) h^2 u_{xx} + a_4 \tau u_t + O(\tau^2 + h^3) - \\ &- f(x_n, t_{m+1}) + \varphi_n \end{aligned}$$

Чтобы минимизировать невязку, следует положить

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0, \quad a_1 - a_3 = 0, \quad \frac{1}{2} (a_1 + a_3) h^2 = -a,$$

$$a_4 \tau = -1, \quad \varphi_n = f(x_n, t_{m+1}).$$

Выписанные соотношения приводят к следующим формулам для неизвестных коэффициентов схемы:

$$a_1 = a_3 = -\frac{a}{h^2}, \quad a_2 = \frac{2a}{h^2} + \frac{1}{\tau}, \quad a_4 = -\frac{1}{\tau}.$$

Разностная схема выглядит следующим образом:

$$A_n \bar{y}_{n-1} - B_n \bar{y}_n + C_n \bar{y}_{n+1} = -F_n,$$

где

$$A_n = C_n = -a_1 = \frac{a}{h^2}, \quad B_n = a_2 = \frac{2a}{h^2} + \frac{1}{\tau}, \quad F_n = -(a_4 y_n - \varphi_n) = \frac{1}{\tau} y_n + \varphi_n.$$

Полученная разностная схема совпадает со схемой из предыдущих лекций, составленной методом разностной аппроксимации.

Метод неопределенных коэффициентов достаточно универсален и весьма удобен при формировании разностных схем на косоугольных сетках.

3. Интегро- интерполяционный метод

Этот метод наиболее надежен и применим во всех случаях, даже для уравнений с разрывными коэффициентами.

Обсудим получение данным методом разностной схемы для квазилинейного уравнения параболического типа

$$c(u) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - p(x)u + f(u). \quad (5)$$

Коэффициенты $k(u), c(u)$ и функция $f(u)$ уравнения могут быть кусочно-непрерывными функциями.

Поставим дополнительные условия.

Начальное условие

$$t = 0, \quad u(x, 0) = \mu(x).$$

Краевые условия достаточно общего вида : слева - II рода, справа - III рода

$$x=0, \quad -k(u(0)) \frac{\partial u}{\partial x} = F(t),$$

$$x=l, \quad -k(u(l)) \frac{\partial u}{\partial x} = \alpha(u(l) - \beta)$$

где α, β - известные числа.

Для уравнения (5) непрерывными величинами являются функция $u(x, t)$ и поток

$$F = -k(u) \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (6)$$

Тогда уравнение (5) можно переписать в виде

$$c(u) \frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{\partial F}{\partial x} - p(x)u + f(u). \quad (7)$$

Для составления разностной схемы выбираем шаблон и связанную с шаблоном ячейку (см. предыдущие лекции). Проводим интегрирование уравнения (7) по ячейке:

$$\int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+1/2}} dx \int_{t_m}^{t_{m+1}} c(u) \frac{\partial u}{\partial t} dt = - \int_{t_m}^{t_{m+1}} dt \int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+1/2}} \frac{\partial F}{\partial x} dx - \int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+1/2}} dx \int_{t_m}^{t_{m+1}} p(x)u dt + \int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+1/2}} dx \int_{t_m}^{t_{m+1}} f(u) dt, \quad (8)$$

или

$$\int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+1/2}} \bar{c}(\bar{u} - u) dx = \int_{t_m}^{t_{m+1}} (F_{n-1/2} - F_{n+1/2}) dt - \int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+1/2}} p \bar{u} \tau dx + \int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+1/2}} \bar{f} \tau dx.$$

Здесь при вычислении внутренних интегралов по t справа в уравнении (8) применен метод правых прямоугольников, тем самым следует ожидать порядок точности $O(\tau)$ по переменной t .

Интегралы по x вычислим методом средних, а первый интеграл в правой части (по времени) - по-прежнему, методом правых прямоугольников, получим

$$\bar{c}_n(\bar{y}_n - y_n)h = \tau(\bar{F}_{n-1/2} - \bar{F}_{n+1/2}) - p_n \bar{y}_n \tau h + \bar{f}_n \tau h, \quad (9)$$

Далее учтем, что согласно ранее полученным формулам

$$\bar{F}_{n+1/2} = \bar{\chi}_{n+1/2} \frac{\bar{y}_n - \bar{y}_{n+1}}{h}, \quad \bar{\chi}_{n+1/2} = \frac{h}{\int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{dx}{k(x)}}$$

$$\bar{F}_{n-1/2} = \bar{\chi}_{n-1/2} \frac{\bar{y}_{n-1} - \bar{y}_n}{h}, \quad \bar{\chi}_{n-1/2} = \frac{h}{\int_{x_{n-1}}^{x_n} \frac{dx}{k(x)}}.$$

Подставляя данные выражения для потоков в (9) приведем уравнение к каноническому виду систем с трехдиагональной матрицей

$$\bar{A}_n \bar{y}_{n-1} - \bar{B}_n \bar{y}_n + \bar{D}_n \bar{y}_{n+1} = -\bar{G}_n, \quad (10)$$

где

$$\bar{A}_n = \bar{\chi}_{n-1/2} \frac{\tau}{h},$$

$$\bar{D}_n = \bar{\chi}_{n+1/2} \frac{\tau}{h},$$

$$\bar{B}_n = \bar{A}_n + \bar{D}_n + \bar{c}_n h + p_n h \tau,$$

$$\bar{F}_n = f_n h \tau + \bar{c}_n y_n h.$$

Понятно, что при $c(u)=0$ уравнение (5) переходит в ОДУ, а разностное уравнение (10) при $\bar{c}_n=0$ со всеми своими коэффициентами - в соответствующее разностное уравнение (шаг τ сократится).

Обратим также внимание на то, что в выражение для \bar{G}_n входит y_n с **предыдущего** шага по времени, т.е. без крышки.

Точность полученной разностной схемы $O(\tau + h^2)$.

Получим **разностный аналог краевого условия** при $x=0$ аналогично тому, как это было сделано в предыдущей лекции. Проинтегрируем уравнение (7) на отрезке $[0, x_{1|2}]$ и на временном интервале $[t_m, t_{m+1}]$

$$\int_0^{x_{1/2}} dx \int_{t_m}^{t_{m+1}} c(u) \frac{\partial u}{\partial t} dt = - \int_{t_m}^{t_{m+1}} dt \int_0^{x_{1/2}} \frac{\partial F}{\partial x} dx - \int_0^{x_{1/2}} dx \int_{t_m}^{t_{m+1}} p(x) u dt + \int_0^{x_{1/2}} dx \int_{t_m}^{t_{m+1}} f(u) dt.$$

Приближенно вычисляя интегралы по времени, как и выше, получим

$$\int_0^{x_{1/2}} \bar{c} (\bar{u} - u) dx = - \int_{t_m}^{t_{m+1}} (F_{1/2} - F_0) dt - \int_0^{x_{1/2}} p \bar{u} \tau dx + \int_0^{x_{1/2}} \bar{f} \tau dx.$$

Вычисляем интегралы. Первый интеграл справа, как и ранее, находим методом правых прямоугольников, а остальные - методом трапеций

$$\frac{h}{4} [\bar{c}_{1/2} (\bar{y}_{1/2} - y_{1/2}) + \bar{c}_0 (\bar{y}_0 - y_0)] = - (\bar{F}_{1/2} - \bar{F}_0) \tau - (p_{1/2} \bar{y}_{1/2} + p_0 \bar{y}_0) \tau \frac{h}{4} + (\bar{f}_{1/2} + \bar{f}_0) \tau \frac{h}{4}.$$

Подставляя в данное уравнения выражение для потока $\bar{F}_{1/2}$, учитывая, что $\bar{F}_0 = F(t_{m+1}) = \bar{F}$, и заменяя $\bar{y}_{1/2} = \frac{\bar{y}_0 + \bar{y}_1}{2}$, $y_{1/2} = \frac{y_0 + y_1}{2}$, найдем разностный аналог краевого условия

$$\begin{aligned} & \left(\frac{h}{8} \bar{c}_{1/2} + \frac{h}{4} \bar{c}_0 + \bar{\chi}_{1/2} \frac{\tau}{h} + \frac{\tau h}{8} p_{1/2} + \frac{\tau h}{4} p_0 \right) \bar{y}_0 + \left(\frac{h}{8} \bar{c}_{1/2} - \bar{\chi}_{1/2} \frac{\tau}{h} + \frac{\tau h}{8} p_{1/2} \right) \bar{y}_1 = \\ & = \frac{h}{8} \bar{c}_{1/2} (y_0 + y_1) + \frac{h}{4} \bar{c}_0 y_0 + \bar{F} \tau + \frac{\tau h}{4} (\bar{f}_{1/2} + \bar{f}_0) \end{aligned} \quad (11)$$

Отсюда ищутся начальные значения прогоночных коэффициентов.

Легко видеть, что при $c(u)=0$ формула (11) переходит в ранее полученную формулу при рассмотрении ОДУ.

Разностный аналог краевого условия при $x = l$ получается аналогичным образом, если проинтегрировать уравнение (7) на отрезке $[x_{N-1/2}, x_N]$ и учесть, что поток

$$\bar{F}_N = \alpha (\bar{y}_N - \beta), \text{ а } \bar{F}_{N-1/2} = \bar{\chi}_{N-1/2} \frac{\bar{y}_{N-1} - \bar{y}_N}{h}.$$

В итоге система квазилинейных разностных уравнений примет канонический вид

$$\begin{cases} \bar{K}_0 \bar{y}_0 + \bar{M}_0 \bar{y}_1 = \bar{P}_0, \\ \bar{A}_n \bar{y}_{n-1} - \bar{B}_n \bar{y}_n + \bar{D}_n \bar{y}_{n+1} = -\bar{F}_n, & 1 \leq n \leq N-1, \\ \bar{K}_N \bar{y}_N + \bar{M}_{N-1} \bar{y}_{N-1} = \bar{P}_N \end{cases} \quad (12)$$

Самый простой способ решения таких систем - это брать коэффициенты уравнений с предыдущего временного слоя (убираются крышки над коэффициентами). Система уравнений становится линейной и легко решается методом прогонки. Однако более выгоден нелинейный вариант разностной схемы, т.к. при использовании нелинейного варианта все вычисления можно проводить с большим шагом по времени, чем в линейном случае. Поэтому нелинейная схема оказывается предпочтительнее, несмотря на ее большую громоздкость и сложность.

Алгоритмы решения систем типа (12) в нелинейном случае описаны ранее. Все, что там сказано, применимо и здесь. Так, можно использовать расчет с использованием релаксации в ходе итерационной процедуры. Отметим основные особенности алгоритма применительно к рассматриваемым уравнениям в частных производных.

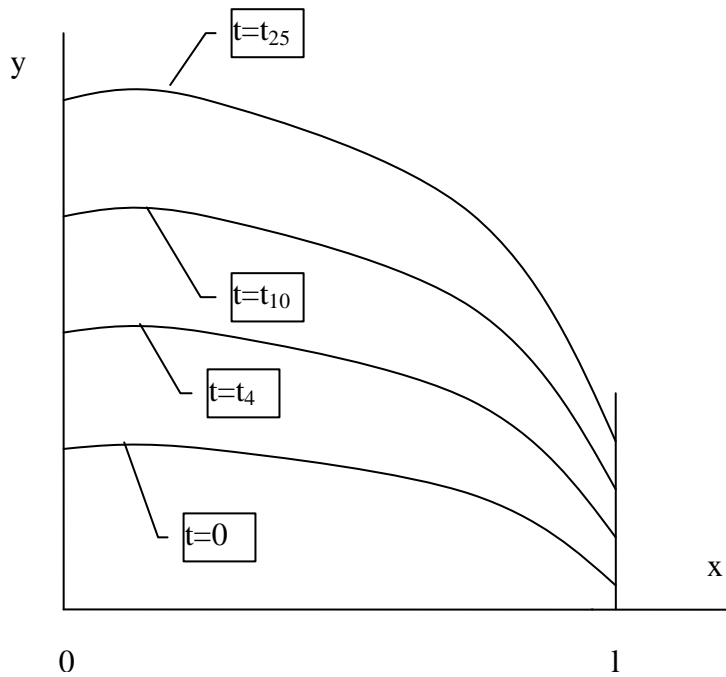
В методе простых итераций система (12) решается многократно на **каждом шаге** по времени, т.е. для получения решения \bar{y}_n , $n=0...N$ в момент времени $t = t_{m+1}$ итерационная процедура организуется по схеме

$$\bar{A}_n^{s-1} \bar{y}_{n+1}^s - \bar{B}_n^{s-1} \bar{y}_n^s + \bar{D}_n^{s-1} \bar{y}_{n-1}^s = -\bar{F}_n^{s-1},$$

здесь s - номер итерации.

В качестве начального приближения \bar{y}_n^0 задается сошедшееся решение \bar{y}_n с предыдущего шага $t = t_m$, т.е. $\bar{y}_n^0 = \bar{y}_n$.

В итоге для каждого момента времени $t = t_m, m=1,2,...M$ получаем разностное решение \bar{y}_n . Набор таких решений для всех $t_m, m=1,2,...M$ соответствует функции двух переменных $u(x_n, t_m)$, являющейся решением исходного дифференциального уравнения (5).



Отметим также, что нелинейная система (12) может быть решена путем применения линеаризации методом Ньютона (лекция №8) .

На вышеприведенном рисунке схематично иллюстрируется одна из возможных форм визуализации результатов расчетов. Приведены разностные решения \bar{y}_n системы (12) в разные моменты времени. Момент $t=0$ соответствует начальному условию, т.е. $y_n = \mu(x_n)$. Далее приведены решения для $t=t_4=4\tau$, $t=t_{10}=10\tau$, $t=t_{25}=25\tau$ и т.д. до момента времени окончания счета. Здесь шаг по времени τ считается постоянным, т.е. $\tau = \text{const}$. Постоянство шага не является обязательным, и в зависимости от скорости изменения функции во времени шаг может, как уменьшаться, так и увеличиваться.

Результат расчета может быть представлен также в виде кривых зависимости решения уравнений от времени t для фиксированных значениях переменной x .

В заключение лекции рассмотрим вариант записи уравнений в **криволинейных** координатах: цилиндрических или сферических. В простом случае линейного уравнения имеем

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{r^p} \frac{\partial}{\partial r}(r^p F) + f(r, t),$$

$$F = -k(r, t) \frac{\partial u}{\partial r}.$$

Здесь $p=0, 1, 2$ для плоской, цилиндрической и сферической геометрии, соответственно.

Применим интегро - интерполяционный метод. Для этого проинтегрируем заданное уравнение по ячейке, аналогично тому, как это было сделано ранее

$$\int_{r_{n-1/2}}^{r_{n+1/2}} r^p dr \int_{t_m}^{t_{m+1}} \frac{\partial u}{\partial t} dt = - \int_{t_m}^{t_{m+1}} dt \int_{r_{n-1/2}}^{r_{n+1/2}} \frac{1}{r^p} \frac{\partial}{\partial r} (r^p F) r^p dr + \int_{t_m}^{t_{m+1}} dt \int_{r_{n-1/2}}^{r_{n+1/2}} f(r, t) r^p dr ,$$

или

$$\int_{r_{n-1/2}}^{r_{n+1/2}} (\bar{u} - u) r^p dr = \int_{t_m}^{t_{m+1}} (r_{n-1/2}^p F_{n-1/2} - r_{n+1/2}^p F_{n+1/2}) dt + \int_{t_m}^{t_{m+1}} dt \int_{r_{n-1/2}}^{r_{n+1/2}} f(r, t) r^p dr .$$

Выполняя те же вычисления, которые мы проводили выше и вводя параметр σ на шеститочечном шаблоне получим

$$(\bar{y}_n - y_n) V_n = \tau \left[\sigma (r_{n-1/2}^p \hat{F}_{n-1/2} - r_{n+1/2}^p \hat{F}_{n+1/2}) + (1 - \sigma) (r_{n-1/2}^p F_{n-1/2} - r_{n+1/2}^p F_{n+1/2}) \right] + \varphi_n , \quad (13)$$

где

$$V_n = \frac{1}{p+1} (r_{n+1/2}^{p+1} - r_{n-1/2}^{p+1}) .$$

Потоки $\hat{F}_{n-1/2}, \hat{F}_{n+1/2}, F_{n-1/2}, F_{n+1/2}$ выписаны выше.

Подставляя в (13) выражения для потоков, получаем разностную схему

$$\begin{aligned} (\bar{y}_n - y_n) V_n = & \\ = \tau \left[\sigma (r_{n-1/2}^p \chi_{n-1/2} \frac{\bar{y}_{n-1} - \bar{y}_n}{h} - r_{n+1/2}^p \chi_{n+1/2} \frac{\bar{y}_n - \bar{y}_{n+1}}{h}) + \right. & \\ \left. + (1 - \sigma) (r_{n-1/2}^p \chi_{n-1/2} \frac{y_{n-1} - y_n}{h} - r_{n+1/2}^p \chi_{n+1/2} \frac{y_n - y_{n+1}}{h}) \right] + \varphi_n & \end{aligned}$$

Приведем результаты по сходимости разностного решения к точному.

Будем считать, что функции $k(r, t)$ и $f(r, t)$, а также их первые и вторые производные кусочно-непрерывны, причем точки разрыва неподвижны. Выберем неравномерную сетку, такую, чтобы узлы попадали на точки разрыва. Тогда выписанная схема при выполнении условия устойчивости $\sigma \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{4\tau} \min \frac{h^2}{k}$ равномерно сходится на указанной сетке с точностью $O(\tau^p + h^2)$, причем $p=2$ при весе $\sigma = \frac{1}{2}$ и $p=1$ при $\sigma \neq \frac{1}{2}$.

ЛЕКЦИЯ №13. ОСНОВЫ МЕТОДОВ ПОСТРОЕНИЯ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ

При выбранном шаблоне разностные схемы могут быть составлены несколькими методами: непосредственной аппроксимации, неопределенных коэффициентов, интегро-интерполяционным. У этих методов есть свои особенности и области применения.

1. Метод разностной аппроксимации

Данный метод применяют для уравнений с гладкими коэффициентами в регулярных областях на прямоугольных сетках. При использовании этого метода дифференциальные операторы непосредственно заменяют разностными аналогами, как это было сделано выше при получении схем в лекции №9. Метод сложно использовать для уравнений с разрывными коэффициентами, на косоугольных сетках и т. д.

Этим методом можно получить схемы повышенной точности в крайних узлах при постановке граничных условий, содержащих производные решения.

Пусть для уравнения (1) в частных производных из лекции №9 при $x = 0$ поставлено краевое условие

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{0,t} = \alpha u(0,t). \quad (1)$$

Если аппроксимировать производную односторонней разностью $\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{\bar{u}_1 - \bar{u}_0}{h}$, то граничное условие примет вид

$$\frac{\bar{y}_1 - \bar{y}_0}{h} = \alpha \bar{y}_0.$$

В соответствии с формулой Тейлора

$$\bar{u}_1 = \bar{u}_0 + h \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{0,t+\tau} + \frac{h^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{0,t+\tau} + O(h^3) \quad (2)$$

Тогда невязка в начальном узле x_0 будет следующей

$$\psi_0 = \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \alpha u \right) \Big|_{0,t+\tau} - \left(\frac{\bar{u}_1 - \bar{u}_0}{h} - \alpha \bar{y}_0 \right) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \alpha u \right) \Big|_{0,t+\tau} - \left(\frac{\bar{u}_0 + h \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(h^3) - \bar{u}_0}{h} - \alpha \bar{u}_0 \right) = -\frac{h}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(h^2) = O(h), \quad (3)$$

т. е. невязка имеет первый порядок малости, который оказался более низким, чем порядок аппроксимации разностной схемы для рассматриваемого дифференциального уравнения.

Получим разностное краевое условие с порядком аппроксимации $O(h^2)$. Выразим в разложении (2) производную $\frac{\partial u}{\partial x}$ из (1), а производную $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ из дифференциального уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \alpha \bar{u}_0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{f(x,t)}{a}.$$

Тогда из (2) имеем

$$\bar{u}_1 = \bar{u}_0 + h \alpha \bar{u}_0 + \frac{h^2}{2!} \left(\frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{f_0}{a} \right) + O(h^3) = \bar{u}_0 + h \alpha \bar{u}_0 + \frac{h^2}{2!} \left(\frac{1}{a} \frac{\bar{u}_0 - u_0}{\tau} + O(\tau) - \frac{f_0}{a} \right) + O(h^3)$$

Таким образом, получаем краевое условие вида

$$\frac{\bar{u}_1 - \bar{u}_0}{h} = \alpha \bar{u}_0 + \frac{h}{2} \left(\frac{\bar{u}_0 - u_0}{a \tau} - \frac{f_0}{a} \right) + O(\tau + h^2),$$

и разностный аналог записывается следующим образом:

$$\frac{\bar{y}_1 - y_0}{h} = \alpha \bar{y}_0 + \frac{h}{2} \left(\frac{\bar{y}_0 - y_0}{a \tau} - \frac{f_0}{a} \right) \quad (4).$$

Разностное уравнение (4) имеет второй порядок аппроксимации относительно шага h .

Приведем разностное уравнение (4) к виду, удобному для реализации метода прогонки.

$$\alpha_0 \bar{y}_0 + \alpha_1 \bar{y}_1 = \beta_0,$$

где

$$\alpha_0 = 1 + h\alpha + \frac{h^2}{2a\tau}, \alpha_1 = -1, \beta_0 = \frac{h^2}{2a\tau}(y_0 + f_0 \tau).$$

Записывая формулу прогонки в виде

$$\bar{y}_0 = \xi_1 \bar{y}_1 + \eta_1,$$

получим выражения для начальных прогоночных коэффициентов при вычислении массивов прогоночных коэффициентов по рекуррентным формулам

$$\xi_1 = -\frac{\alpha_1}{\alpha_0}, \quad \eta_1 = \frac{\beta_0}{\alpha_0}.$$

2. Метод неопределенных коэффициентов

Суть метода состоит в том, что на выбранном шаблоне сетки составляют линейную комбинацию значений сеточной функции в узлах и получают выражение для соответствующей невязки, причем коэффициенты сформированной линейной комбинации находят из условия, чтобы невязка имела наиболее высокий порядок малости относительно шагов по координатам. В качестве примера получим методом неопределенных коэффициентов разностную схему для уравнения (1) из лекции №9 на шаблоне I (см. рис. 1.2), положив для простоты $f(x, t) = 0$.

Составим линейную комбинацию значений разностного решения в узлах шаблона:

$$a_1 \bar{y}_{n-1} + a_2 \bar{y}_n + a_3 \bar{y}_{n+1} + a_4 y_n - \varphi_n = 0.$$

Выполняя разложение решения в ряд Тейлора около узла (x_n, t_{m+1}) , получаем

$$\bar{u}_{n\pm 1} = \bar{u}_n \pm h u_x(x_n, t_{m+1}) + \frac{1}{2} h^2 u_{xx}(x_n, t_{m+1}) + \dots$$

$$u_n = \bar{u}_n - \tau u_t(x_n, t_{m+1}) + \dots$$

Невязку разностной схемы определяем следующим образом

$$\begin{aligned} \psi &= (Au - f) - (A_h u - \varphi_h) = (u_t - au_{xx})|_{x_n, t_{m+1}} - f(x_n, t_{m+1}) - \\ &- (a_1 \bar{u}_{n-1} + a_2 \bar{u}_n + a_3 \bar{u}_{n+1} + a_4 u_n - \varphi_n) = (u_t - au_{xx})|_{x_n, t_{m+1}} - f(x_n, t_{m+1}) - \\ &- (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) \bar{u}_n + (a_1 - a_3) h u_x - \frac{1}{2} (a_1 + a_3) h^2 u_{xx} + a_4 \tau u_t + O(\tau^2 + h^3) - \\ &- f(x_n, t_{m+1}) + \varphi_n \end{aligned}$$

Чтобы минимизировать невязку, следует положить

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0, \quad a_1 - a_3 = 0, \quad \frac{1}{2} (a_1 + a_3) h^2 = -a,$$

$$a_4 \tau = -1, \quad \varphi_n = f(x_n, t_{m+1}).$$

Выписанные соотношения приводят к следующим формулам для неизвестных коэффициентов схемы:

$$a_1 = a_3 = -\frac{a}{h^2}, \quad a_2 = \frac{2a}{h^2} + \frac{1}{\tau}, \quad a_4 = -\frac{1}{\tau}.$$

Разностная схема выглядит следующим образом:

$$A_n \bar{y}_{n-1} - B_n \bar{y}_n + C_n \bar{y}_{n+1} = -F_n,$$

где

$$A_n = C_n = -a_1 = \frac{a}{h^2}, B_n = a_2 = \frac{2a}{h^2} + \frac{1}{\tau}, F_n = -(a_4 y_n - \varphi_n) = \frac{1}{\tau} y_n + \varphi_n.$$

Полученная разностная схема совпадает со схемой (15) из лекции №10, составленной выше методом разностной аппроксимации.

Метод неопределенных коэффициентов достаточно универсален и весьма удобен при формировании разностных схем на косоугольных сетках.

ЛЕКЦИЯ №14. ОСНОВЫ МЕТОДОВ ПОСТРОЕНИЯ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ИНТЕГРО - ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЙ МЕТОД

Этот метод наиболее надежен и применим во всех случаях, даже для уравнений с разрывными коэффициентами.

Обсудим получение данным методом разностной схемы для квазилинейного уравнения параболического типа

$$c(u) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - p(x)u + f(u). \quad (14.1)$$

Коэффициенты $k(u), c(u)$ и функция $f(u)$ уравнения могут быть кусочно-непрерывными функциями. Данное уравнение совпадает с уравнением (8.1) из лекции №8, если положить коэффициент $c(u) = 0$ и убрать зависимость k, f от u .

Поставим дополнительные условия.

Начальное условие

$$t = 0, u(x, 0) = \mu(x).$$

Краевые условия достаточно общего вида : слева - II рода, справа - III рода

$$x = 0, -k(u(0)) \frac{\partial u}{\partial x} = F(t),$$

,

$$x = l, -k(u(l)) \frac{\partial u}{\partial x} = \alpha(u(l) - \beta)$$

где α, β - известные числа.

Для уравнения (14.1) непрерывными величинами являются функция $u(x, t)$ и поток

$$F = -k(u) \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (14.2)$$

Тогда уравнение (14.1) можно переписать в виде

$$c(u) \frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{\partial F}{\partial x} - p(x)u + f(u). \quad (14.3)$$

Для составления разностной схемы выбираем шаблон и связанную с шаблоном ячейку (см. рис. 1.2 из лекции №10, шаблон III - ячейка заштрихована). Проводим интегрирование уравнения (14.3) по ячейке:

$$\int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+1/2}} dx \int_{t_m}^{t_{m+1}} c(u) \frac{\partial u}{\partial t} dt = - \int_{t_m}^{t_{m+1}} dt \int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+1/2}} \frac{\partial F}{\partial x} dx - \int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+1/2}} dx \int_{t_m}^{t_{m+1}} p(x)u dt + \int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+1/2}} dx \int_{t_m}^{t_{m+1}} f(u) dt, \quad (14.4)$$

или

$$\int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+1/2}} \bar{c}(\bar{u} - u) dx = \int_{t_m}^{t_{m+1}} (F_{n-1/2} - F_{n+1/2}) dt - \int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+1/2}} p \bar{u} \tau dx + \int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+1/2}} \bar{f} \tau dx.$$

Здесь при вычислении внутренних интегралов по t справа в уравнении (14.4) применен метод правых прямоугольников, тем самым следует ожидать порядок точности $O(\tau)$ по переменной t .

Интегралы по x в вычислим методом средних, а первый интеграл в правой части (по времени) - по-прежнему, методом правых прямоугольников, получим

$$\bar{c}_n(\bar{y}_n - y_n)h = \tau(\bar{F}_{n-1/2} - \bar{F}_{n+1/2}) - p_n \bar{y}_n \tau h + \bar{f}_n \tau h, \quad (14.5)$$

Далее учтем, что согласно (7.11), (7.12) лекции №7

$$\bar{F}_{n+1/2} = \bar{\chi}_{n+1/2} \frac{\bar{y}_n - \bar{y}_{n+1}}{h}, \quad \bar{\chi}_{n+1/2} = \frac{h}{\int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{dx}{k(x)}}$$

$$\bar{F}_{n-1/2} = \bar{\chi}_{n-1/2} \frac{\bar{y}_{n-1} - \bar{y}_n}{h}, \quad \bar{\chi}_{n-1/2} = \frac{h}{\int_{x_{n-1}}^{x_n} \frac{dx}{k(x)}}.$$

Подставляя данные выражения для потоков в (14.5) приведем уравнение к каноническому виду систем с трехдиагональной матрицей

$$\hat{A}_n \bar{y}_{n-1} - \hat{B}_n \bar{y}_n + \hat{D}_n \bar{y}_{n+1} = -\hat{F}_n, \quad (14.6)$$

где

$$\hat{A}_n = \bar{\chi}_{n-1/2} \frac{\tau}{h},$$

$$\hat{D}_n = \bar{\chi}_{n+1/2} \frac{\tau}{h},$$

$$\hat{B}_n = \hat{A}_n + \hat{D}_n + \bar{c}_n h + p_n h \tau,$$

$$\hat{F}_n = f_n h \tau + \bar{c}_n y_n h.$$

Заметим, что при $c(u)=0$ уравнение (14.1) переходит в уравнение (8.1) из лекции №8, а разностное уравнение (14.6) при $\bar{c}_n=0$ со всеми своими коэффициентами - в разностное уравнение (8.2) (шаг τ сократится).

Обратим также внимание на то, что в выражение для \hat{F}_n входит y_n с **предыдущего** шага по времени, т.е. без крышки.

Точность полученной разностной схемы $O(\tau + h^2)$.

Получим **разностный аналог краевого условия** при $x=0$ аналогично тому, как это было сделано в лекции №7. Проинтегрируем уравнение (14.3) на отрезке $[0, x_{1/2}]$ и на временном интервале $[t_m, t_{m+1}]$

$$\int_0^{x_{1/2}} dx \int_{t_m}^{t_{m+1}} c(u) \frac{\partial u}{\partial t} dt = - \int_{t_m}^{t_{m+1}} dt \int_0^{x_{1/2}} \frac{\partial F}{\partial x} dx - \int_0^{x_{1/2}} dx \int_{t_m}^{t_{m+1}} p(x) u dt + \int_0^{x_{1/2}} dx \int_{t_m}^{t_{m+1}} f(u) dt.$$

Приближенно вычисляя интегралы по времени, как и выше, получим

$$\int_0^{x_{1/2}} \bar{c} (\bar{u} - u) dx = - \int_{t_m}^{t_{m+1}} (F_{1/2} - F_0) dt - \int_0^{x_{1/2}} p \bar{u} \tau dx + \int_0^{x_{1/2}} \bar{f} \tau dx.$$

Вычисляем интегралы. Первый интеграл справа, как и ранее, находим методом правых прямоугольников, а остальные - методом трапеций

$$\frac{h}{4}[\bar{c}_{1/2}(\bar{y}_{1/2} - y_{1/2}) + \bar{c}_0(\bar{y}_0 - y_0)] = -(\bar{F}_{1/2} - \bar{F}_0)\tau - (p_{1/2} \bar{y}_{1/2} + p_0 \bar{y}_0)\tau \frac{h}{4} + (\bar{f}_{1/2} + \bar{f}_0)\tau \frac{h}{4}.$$

Подставляя в данное уравнения выражение для потока $\bar{F}_{1/2}$, учитывая, что $\bar{F}_0 = F(t_{m+1}) = \bar{F}$, и заменяя $\bar{y}_{1/2} = \frac{\bar{y}_0 + \bar{y}_1}{2}$, $y_{1/2} = \frac{y_0 + y_1}{2}$, найдем разностный аналог краевого условия

$$\begin{aligned} & \left(\frac{h}{8} \bar{c}_{1/2} + \frac{h}{4} \bar{c}_0 + \bar{\chi}_{1/2} \frac{\tau}{h} + \frac{\tau h}{8} p_{1/2} + \frac{\tau h}{4} p_0 \right) \bar{y}_0 + \left(\frac{h}{8} \bar{c}_{1/2} - \bar{\chi}_{1/2} \frac{\tau}{h} + \frac{\tau h}{8} p_{1/2} \right) \bar{y}_1 = \\ & = \frac{h}{8} \bar{c}_{1/2} (y_0 + y_1) + \frac{h}{4} \bar{c}_0 y_0 + \bar{F} \tau + \frac{\tau h}{4} (\bar{f}_{1/2} + \bar{f}_0) \end{aligned} \quad (14.7)$$

Отсюда ищутся начальные значения прогоночных коэффициентов.

Легко видеть, что при $c(u)=0$ формула (14.7) переходит в (7.15) из лекции №7.

Разностный аналог краевого условия при $x=l$ получается аналогичным образом, если проинтегрировать уравнение (14.3) на отрезке $[x_{N-1/2}, x_N]$ и учесть, что поток

$$\bar{F}_N = \alpha(\bar{y}_N - \beta), \text{ а } \bar{F}_{N-1/2} = \bar{\chi}_{N-1/2} \frac{\bar{y}_{N-1} - \bar{y}_N}{h}.$$

В итоге система квазилинейных разностных уравнений примет канонический вид

$$\begin{cases} \bar{K}_0 \bar{y}_0 + \bar{M}_0 \bar{y}_1 = \bar{P}_0, \\ \bar{A}_n \bar{y}_{n-1} - \bar{B}_n \bar{y}_n + \bar{D}_n \bar{y}_{n+1} = -\bar{F}_n, \quad 1 \leq n \leq N-1, \\ \bar{K}_N \bar{y}_N + \bar{M}_{N-1} \bar{y}_{N-1} = \bar{P}_N \end{cases} \quad (14.8)$$

Самый простой способ решения таких систем - это брать коэффициенты уравнений с предыдущего временного слоя (убираются крышки над коэффициентами). Система уравнений становится линейной и легко решается методом прогонки. Однако более выгоден нелинейный вариант разностной схемы, т.к. при использовании нелинейного варианта все вычисления можно проводить с большим шагом по времени, чем в линейном случае. Поэтому нелинейная схема оказывается предпочтительнее, несмотря на ее большую громоздкость и сложность.

Алгоритмы решения систем типа (14.8) в нелинейном случае описаны в лекции №8. Отметим основные особенности алгоритма применительно к рассматриваемым уравнениям в частных производных.

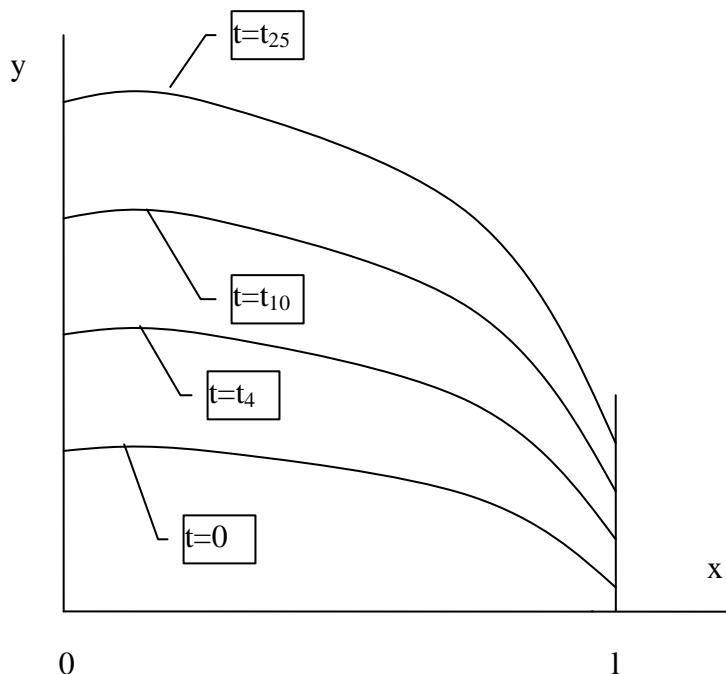
В методе простых итераций система (14.8) решается многократно на **каждом шаге** по времени, т.е. для получения решения \hat{y}_n , $n=0...N$ в момент времени $t=t_{m+1}$ итерационная процедура организуется по схеме (8.3) из лекции №8

$$\hat{A}_n^{s-1} \hat{y}_{n+1}^s - \hat{B}_n^{s-1} \hat{y}_n^s + \hat{D}_n^{s-1} \hat{y}_{n-1}^s = -\hat{F}_n^{s-1},$$

здесь s - номер итерации.

В качестве начального приближения \hat{y}_n^0 задается сошедшееся решение \hat{y}_n с предыдущего шага $t=t_m$, т.е. $\hat{y}_n^0 = \hat{y}_n$.

В итоге для каждого момента времени $t=t_m, m=1,2,...M$ получаем разностное решение \hat{y}_n . Набор таких решений для всех $t_m, m=1,2,...M$ соответствует функции двух переменных $u(x_n, t_m)$, являющейся решением исходного дифференциального уравнения (14.1).



Нелинейная система (14.8) может быть решена также методом Ньютона (лекция №8).

На рисунке схематично иллюстрируется одна из возможных форм визуализации результатов расчетов. Приведены разностные решения \bar{y}_n системы (14.8) в разные моменты времени. Момент $t=0$ соответствует начальному условию, т.е. $y_n = \mu(x_n)$. Далее приведены решения для $t=t_4=4\tau$, $t=t_{10}=10\tau$, $t=t_{25}=25\tau$ и т.д. до момента времени окончания счета. Здесь шаг по времени τ считается постоянным, т.е. $\tau = \text{const}$. Постоянство шага не является обязательным, и в зависимости от скорости изменения функции во времени шаг может как уменьшаться, так и увеличиваться.

Результат расчета может быть представлен также в виде кривых зависимости решения уравнений от времени t для фиксированных значениях переменной x .

В заключение лекции рассмотрим вариант записи уравнений в **криволинейных** координатах: цилиндрических или сферических. В простом случае линейного уравнения имеем

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{r^p} \frac{\partial}{\partial r}(r^p F) + f(r, t),$$

$$F = -k(r, t) \frac{\partial u}{\partial r}.$$

Здесь $p=0, 1, 2$ для плоской, цилиндрической и сферической геометрии, соответственно.

Применим интегро - интерполяционный метод. Для этого проинтегрируем заданное уравнение по ячейке, аналогично тому, как это было сделано ранее

$$\int_{r_{n-1/2}}^{r_{n+1/2}} r^p dr \int_{t_m}^{t_{m+1}} \frac{\partial u}{\partial t} dt = - \int_{t_m}^{t_{m+1}} dt \int_{r_{n-1/2}}^{r_{n+1/2}} \frac{1}{r^p} \frac{\partial}{\partial r}(r^p F) r^p dr + \int_{t_m}^{t_{m+1}} dt \int_{r_{n-1/2}}^{r_{n+1/2}} f(r, t) r^p dr,$$

или

$$\int_{r_{n-1/2}}^{r_{n+1/2}} (\bar{u} - u) r^p dr = \int_{t_m}^{t_{m+1}} (r_{n-1/2}^p F_{n-1/2} - r_{n+1/2}^p F_{n+1/2}) dt + \int_{t_m}^{t_{m+1}} dt \int_{r_{n-1/2}}^{r_{n+1/2}} f(r, t) r^p dr.$$

Выполняя те же вычисления, которые мы проводили выше и вводя параметр σ на шеститочечном шаблоне получим

$$(\bar{y}_n - y_n)V_n = \tau \left[\sigma(r_{n-1/2}^p \bar{F}_{n-1/2} - r_{n+1/2}^p \bar{F}_{n+1/2}) + (1 - \sigma)(r_{n-1/2}^p F_{n-1/2} - r_{n+1/2}^p F_{n+1/2}) \right] + \varphi_n, \quad (14.9)$$

где

$$V_n = \frac{1}{p+1} (r_{n+1/2}^{p+1} - r_{n-1/2}^{p+1}).$$

Потоки $\bar{F}_{n-1/2}, \bar{F}_{n+1/2}, F_{n-1/2}, F_{n+1/2}$ выписаны выше.

Подставляя в (14.9) выражения для потоков, получаем разностную схему

$$\begin{aligned} (\bar{y}_n - y_n)V_n = & \\ = \tau \left[\sigma(r_{n-1/2}^p \chi_{n-1/2} \frac{\bar{y}_{n-1} - \bar{y}_n}{h} - r_{n+1/2}^p \chi_{n+1/2} \frac{\bar{y}_n - \bar{y}_{n+1}}{h}) + \right. & \\ \left. + (1 - \sigma)(r_{n-1/2}^p \chi_{n-1/2} \frac{y_{n-1} - y_n}{h} - r_{n+1/2}^p \chi_{n+1/2} \frac{y_n - y_{n+1}}{h}) \right] + \varphi_n & \end{aligned}$$

Приведем результаты по сходимости разностного решения к точному.

Будем считать, что функции $k(x, t)$ и $f(x, t)$, а также их первые и вторые производные кусочно-непрерывны, причем точки разрыва неподвижны. Выберем неравномерную сетку, такую, чтобы узлы попадали на точки разрыва. Тогда выписанная схема при

выполнении условия устойчивости $\sigma \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{4\tau} \min \frac{h^2}{k}$ равномерно сходится на указанной

сетке с точностью $O(\tau^p + h^2)$, причем $p=2$ при весе $\sigma = \frac{1}{2}$ и $p=1$ при $\sigma \neq \frac{1}{2}$.

ЛЕКЦИЯ №15. МОДЕЛИ НА ОСНОВЕ МНОГОМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим уравнение параболического типа с двумя пространственными переменными

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + f(x, z, t), \quad (1)$$

$$0 < t < T_0.$$

Начальное условие:

$$u(x, z, 0) = \mu(x, z) \quad (2)$$

Краевые условия для прямоугольной пространственной области $0 < x < l, 0 < z < s$

$$\begin{aligned} u(0, z, t) &= \mu_1(z, t), \quad u(l, z, t) = \mu_2(z, t), \\ u(x, 0, t) &= \mu_3(x, t), \quad u(x, s, t) = \mu_4(x, t) \end{aligned} \quad (3)$$

Остановимся на построении и решении разностных схем для сформулированной задачи.

1. Продольно - поперечная схема

Для составления схемы, которая носит название продольно- поперечной, вводят полуцелый слой $\bar{t} = t_m + \frac{\tau}{2}$. Схема имеет вид

$$\frac{\bar{y}_{nk} - y_{nk}}{0.5\tau} = A_1 \bar{y}_{nk} + A_2 y_{nk} + \bar{f}_{nk}, \quad (3)$$

$$\frac{\bar{y}_{nk} - \bar{y}_{nk}}{0.5\tau} = A_1 \bar{y}_{nk} + A_2 \bar{y}_{nk} + \bar{f}_{nk}, \quad (4)$$

причем разностные операторы A_1, A_2 действуют каждый по своему направлению (по своей координате) и определяются выражениями

$$A_1 y_{nk} = \frac{a}{h_1^2} (y_{n-1,k} - 2y_{nk} + y_{n+1,k}),$$

$$A_2 y_{nk} = \frac{a}{h_2^2} (y_{n,k-1} - 2y_{nk} + y_{n,k+1}).$$

Здесь $1 \leq n \leq N-1$, $1 \leq m \leq M-1$.

Схема (3), (4) реализуется следующим образом. Вначале вычисляют решение на полуцелом слое согласно (3). В системе линейных уравнений (3) с трехдиагональной матрицей неизвестными являются величины y_{nk} , которые находят прогонкой по индексу n (по координате x) для каждого фиксированного значения индекса k . При найденном решении y_{nk} система (4) также является линейной системой уравнений с трехдиагональной матрицей, в которой неизвестными выступают y_{nk} . Решение y_{nk} находят прогонкой по индексу k (по координате z) для каждого индекса n .

Относительно аппроксимации и устойчивости продольно-поперечной схемы следует отметить, что схема (3), (4) равномерно и безусловно устойчива по начальным данным и по правой части и аппроксимирует задачу на равномерных сетках с погрешностью $O(\tau^2 + h_1^2 + h_2^2)$.

2. Локально-одномерный метод

Продольно-поперечная схема не обобщается на случай числа измерений в уравнении больше двух.

Более общим вариантом построения и решения разностной схемы является локально-одномерный метод. В данном методе решается серия одномерных задач по каждому направлению. Применительно к уравнению (1) в чисто неявном варианте схема выглядит следующим образом.

$$\frac{y_{nk} - y_{nk}}{\tau} = A_1 y_{nk} + \frac{\hat{f}_{nk}}{p}, \quad (5)$$

$$\frac{\bar{y}_{nk} - y_{nk}}{\tau} = A_2 \bar{y}_{nk} + \frac{\hat{f}_{nk}}{p}. \quad (6)$$

Здесь p - количество измерений в уравнении. Для (1) величина $p=2$. Схема естественным образом обобщается на произвольное количество измерений.

Системы разностных уравнений (5) и (6) решаются последовательно. В целом схема безусловно устойчива и имеет точность $O(\tau + h_1^2 + h_2^2)$.

В случае квазилинейного уравнения приходится организовывать итерационную процедуру, которую следует выполнять на каждом промежуточном слое.

Далее вернемся к теме **"КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДУ"**. Рассмотрим два **приближенных аналитических метода** решения задачи.

Пусть сформулирована краевая задача с граничными условиями достаточно общего вида (III - рода)

$$u''(x) + p(x)u' + g(x) = f(x),$$

$$\alpha u(a) + \beta u'(a) = A,$$

$$\eta u(b) + \lambda u'(b) = B,$$

$$a \leq x \leq b.$$

(a)

Для удобства изложения введем дифференциальные операторы

$$Lu = u''(x) + p(x)u' + g(x),$$

$$l_a = \alpha u(a) + \beta u'(a),$$

$$l_b = \eta u(b) + \lambda u'(b)$$

Тогда исходная система уравнений (a) запишется в виде

$$Lu = f(x),$$

$$l_a = A, \tag{b}$$

$$l_b = B$$

Метод коллокаций

Суть метода заключается в следующем. Ищем решение в виде

$$y = u_0(x) + \sum_{i=1}^n C_i u_i(x), \tag{c}$$

причем функцию $u_0(x)$ подбираем исходя из того, чтобы она удовлетворяла поставленным (неоднородным) краевым условиям, а функции $u_i(x)$ выбираем так, чтобы они удовлетворяли однородным краевым условиям, т.е. $l_a = 0, l_b = 0$. Подставляя (c) в (b), получим невязку

$$R(x, C_1, \dots, C_n) = Ly - f(x) \equiv Lu_0 + \sum_{i=1}^n C_i Lu_i - f(x).$$

Далее потребуем, чтобы невязка $R(x, C_1, \dots, C_n)$ обращалась в нуль на системе точек x_1, x_2, \dots, x_n из $[a, b]$ (точки коллокации). Затем из полученной системы уравнений находим постоянные C_1, \dots, C_n .

Пример. Поставлена краевая задача с однородными краевыми условиями. Найти приближенное решение методом коллокаций.

$$u'' + (1 + x^2)u + 1 = 0,$$

$$u(-1) = 0, \quad u(1) = 0,$$

$$-1 \leq x \leq 1$$

Выберем

$$u_i(x) = x^{2i-2} (1 - x^2), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Для данной задачи $u_0(x) = 0$. Ограничимся для простоты значением $n = 2$. Обратим внимание на то, что решение симметрично относительно начала координат. За точки коллокации возьмем $x_0 = 0, x_1 = 0.5$. Искомая функция

$$y(x) = C_1(1 - x^2) + C_2(x^2 - x^4).$$

Подставляя $y(x)$ в исходное дифференциальное уравнение, найдем невязку

$$R(x, C_1, \dots, C_n) = 1 - C_1(1 + x^2) + C_2(2 - 11x^2 - x^6).$$

Теперь приравняем невязку нулю в двух указанных выше точках коллокации, получим систему уравнений для определения двух констант, из которой следует, что

$$C_1 = 0.957, C_2 = -0.022.$$

Окончательно, искомое решение запишется в виде

$$y \approx 0.957(1 - x^2) - 0.022(x^2 - x^4).$$

Метод Галеркина

Постановка задачи идентична (а).

Зададим решение в виде, аналогичном (с)

$$y = u_0(x) + \sum_{k=1}^n C_k u_k(x),$$

где функции $u_0(x)$ и $u_k(x)$ подбираются из тех же соображений, что и в методе коллокаций.

Согласно методу Галеркина константы определяются из системы уравнений

$$\int_a^b R(x, C_1, \dots, C_n) u_m(x) dx = 0, \quad m = 1, \dots, n,$$

где

$$R(x, C_1, \dots, C_n) = Ly - f(x) \equiv Lu_0 + \sum_{k=1}^n C_k Lu_k - f(x),$$

т.е. имеем

$$\int_a^b u_m(x) Lu_0 dx + \sum_{k=1}^n C_k \int_a^b u_m(x) Lu_k dx - \int_a^b u_m(x) f(x) dx = 0, \quad m = 1, \dots, n. \quad (d)$$

Из полученной системы уравнений находим постоянные C_1, \dots, C_n .

Пример. Поставлена краевая задача с однородными краевыми условиями. Найти приближенное решение методом Галеркина

$$u'' + xu' + u = 2x,$$

$$u(0) = 1, \quad u(1) = 0,$$

$$0 \leq x \leq 1$$

Выберем

$$u_0(x) = 1 - x,$$

.

$$u_k(x) = x^k (1 - x), \quad k = 1, 2, \dots, n$$

Ограничимся для простоты значением $n = 3$. Тогда

$$y(x) = (1 - x) + C_1 x(1 - x) + C_2 x^2 (1 - x) + C_3 x^3 (1 - x).$$

Подставляя в исходное дифференциальное уравнение, найдем невязку

$$R(x, C_1, C_2, C_3) = 1 - 4x + C_1(-2 + 2x - 3x^2) + C_2(2 - 6x + 3x^2 - 4x^3) + \\ + C_3(6x - 12x^2 + 4x^3 - 5x^4)$$

Вычисляя интегралы (d), приходим к системе трех уравнений с тремя неизвестными C_1, C_2, C_3

$$\int_0^1 R(x, C_1, C_2, C_3)(x - x^2) dx = 0,$$

$$\int_0^1 R(x, C_1, C_2, C_3)(x^2 - x^3) dx = 0,$$

$$\int_0^1 R(x, C_1, C_2, C_3)(x^3 - x^4) dx = 0.$$

Откуда значения констант

$$C_1 = -0.209, C_2 = -0.789, C_3 = 0.209.$$

Окончательно, искомое решение запишется в виде

$$y \approx (1 - x)(1 - 0.209x - 0.789x^2 + 0.209x^3).$$