31.05.24. **Лекция 13.**
(продолжение темы устойчивости)

Посмотрим, как выглядит применение метода разд. переменных к неявной схеме:

$$\frac{\hat{z}_n - z_n}{\tau} = \frac{a}{h^2}\left(\hat{z}_{n-1} - 2\hat{z}_n + \hat{z}_{n+1}\right)$$

$$\rho_q^m(\rho_q - 1) = -\rho_q^{m+1}\frac{\tau a}{h^2}\cdot 4\sin^2\frac{\pi q h}{2l}$$

$$\rho_q\left(1 + \frac{4\tau a}{h^2}\sin^2\frac{\pi q h}{2l}\right) = 1$$

$$\rho_q = \frac{1}{1 + \frac{4\tau a}{h^2}\sin^2\frac{\pi q h}{2l}}\ ; \quad |\rho_q| \le 1\ ; \quad |\rho_q| \le 1 + c\tau$$

Видно, что независимость ... τ и h

$\Rightarrow$ неявная схема безусловно уст.

- Устойчивость по правой части: принцип максимума

$$\sum a_{n+k}\hat{y}_k = \sum b_p y_{n+p} + \varphi_n$$

$$|a_0| - \sum_{k\ne 0} a_k \ge D/\tau \quad (*)$$

Около узла n соб. все слаг. $\hat{y}_k$ и y_k

Схема уст-ва по правой части, если она уст. по нач. усл. и вып. усл-е $(*)$.

3. Сходимость.

Опр. Разн. решение сходится к точному, если в нек. норме невязка стр. к 0 при шаге стр. к 0.

$$\|u - y\| \to 0,\ h \to 0.$$

Опр. Разн. решение имеет p-й порядок точности, если вып-ся:

$$\|u - y\| = O(h^p) \quad \text{при} \quad h \to 0.$$

(Сходимость с p-м порядком = погр. имеет p-й пор.)

При иссл. сходимости важную роль теорема:

Th (о сходимости)

Из аппроксимации и устойчивости следует сходимость.

Развернуто:

Если решение исх. дифф. задачи существует и единственно

если разн. схема корректна (решение ∃ет, един-но, устойчиво по вх. данным) и аппроксимирует исх. дифф. задачу

Тогда разностное решение сходится к точному.

Замечание: (о пор. точности)

Если условие зап-с. выше теоремы соблюдены и оператор (разностный) линеен, то порядок точности не меньше порядка аппроксимации.

Док-во:

$$\begin{cases} \psi = \varphi_h - A_h u \\ \rho = \beta_h - B_h u \end{cases}$$

т.е. $\begin{cases} A_h u = \varphi_h - \psi \\ B_h u = \beta_h - \rho \end{cases}$ (1)

Разностная схема:

$$\begin{cases} A_h y = \varphi_h \\ B_h y = \beta_h \end{cases} \quad (2)$$

~~Эти два ур-я (1) и (2)~~

Разн. схема (1) отл. от (2) тем, что в правой части нах. невязка.

Схема устойчива:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon)$ $\|u - y\| \le \varepsilon$, при усл. уст-ти $\|\psi\| \le \delta(\varepsilon), \|\rho\| \le \delta(\varepsilon)$

Разностная схема аппроксимирует исх. задачу:

$\forall \delta(\varepsilon) > 0, \exists h_0 \; \|\psi\| \le \delta(\varepsilon), \|\rho\| \le \delta(\varepsilon), \; h \le h_0$ –

– ну условие аппрокс.

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists h_0, \; h \le h_0 \; \|u - y\| \le \varepsilon$ – сходимость.

чем от. от стр?
тут – равномерная сходимость по шагу

<u>Замечание:</u> метод разд. переменных был рассмотрен, когда коэф-ты ДУ не зависят от коорд. и вр.

В случае, когда такая зав-ть есть, применяют прием "замороженных" коэф-тов:
такое иссл. проводят в точке, полагая, что во всех ост. коэф-ты постоянны.
(и такие же, как в рассм. точке)

Классификация ДУЧП

Будем рассматривать ДУ $2^{го}$ порядка, линейное отн. старших производных

$$u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u_{yy} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_y = \frac{\partial u}{\partial y}, \dots$$

Общий вид

$$a_{11} u_{xx} + 2a_{12} u_{xy} + a_{22} u_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0$$

1) Если a_{11}, a_{12}, a_{22} зависят от (x, y, u, u_x, u_y), то ур-е наз. <u>квазилинейным отн. старших производных.</u>

2) Если a_{11}, a_{12}, a_{22} зависят только от (x, y), то ур-е наз. <u>линейным отн. старших произв.</u>

3) При линейности отн. (x, y, u) ф-ии $F(x, y, u, u_x, u_y)$:

$$a_{11} u_{xx} + 2a_{12} u_{xy} + a_{22} u_{yy} + b_1 u + b_2 u_x + b_3 u_y + f(x,y) = 0 \quad (4)$$

3.1) Если все коэф. зависят только от (x, y), то ур-е (4) наз. линейным

3.2) Если все коэф. - постоянные, то ур-е (4) наз линейным с пост. коэф.

3.3) Если $a_{11} = 0$, $a_{12} = 0$, $a_{22} = 0$, $b_1 \neq 0$, $b_2 \neq 0$, $b_3 \neq 0$, то ур-е (4) наз. ур-ем переноса

4) Дискриминант:

$$d = a_{12}^2 - a_{11} \cdot a_{22}$$

4.1) $d > 0$ - гиперболическое

4.2) $d = 0$ - параболическое

4.3) $d < 0$ - эллиптическое

Пример

- $\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$ параболич. (перенос тепла, дифф)
- $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$ - гиперболич. (колебание)
- $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - f(x,y) = 0$

фикт. время $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - f(x,y)$ - л/р №5

$\Rightarrow$ решение нестац. задачи

до тех пор, пока $\frac{\partial u}{\partial t}$ не станет ≈ 0 с зад. точн.

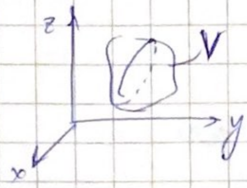
(в уст. сост.)

Методы получения мат. моделей (в ест. науках):

1. из фундаментальных законов

– Ур-е непрерывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{v} = 0$$



выд. объем, смотрим, сколько утекает, что меняется
⇒ для газов, ид. жидкость

– Ур-е энергии
– сохр. масс, импульса, момента импульса

! Продуктивный подход

2. из вариационных принципов.

– з-ны "экономии"
– принцип Ферма (свет)

– суть: система будет вести себя так (двигаться по такой траектории), чтобы величина, связ. с системой, достигала экстремума:

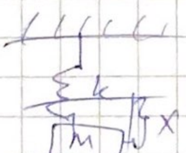
$$\int_a^b Q(q, \dot{q}, t)\, dt \to min/max$$

– принцип Гамильтона:

$$\int_a^b L(q, \dot{q}, t)\, dt \to min$$ интеграл действия (действие)

$L = T - U$ – ф. Лагранжа

ур-я Эйлера



$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2} \quad x$$

3. Метод иерархии ↓ хорошее описание ~~конкр~~ сит.

↑ больш. сист. → быстр. модели от простого к сложному (или наоборот)
(самое общее → конкр. ситуация, всклад. слагаемые)

4. Метод аналогий

— электро-мех. аналогия

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial n}{\partial x} = -\mu n$$

коэф. смертности

n — кол-во людей

аналогична — перенос энергии
демогр