$$\frac{y_n^{m+1}-y_n^m}{\tau}=\sigma\left[a\left(\frac{y_{n-1}^{m+1}-2y_n^{m+1}+y_{n+1}^{m+1}}{h^2}\right)+(1-\sigma)a\left(\frac{y_{n-1}^{m}-2y_n^{m}+y_{n+1}^{m}}{h^2}\right)+f(x_n,\bar t)\right]$$

$$\bar t=t_m+\frac{\tau}{2}$$

03.05.24. Лекция 10.

Л/р 4-5 — до 18 недели

Экзамены:

ИУ7-64Б	18.06.24	14^{00}
ИУ7-61Б	20.06.24	14^{00}
ИУ7-66Б	22.06.24	9^{00}
ИУ7-63Б	24.06.24	14^{00}
ИУ7-62Б	27.06.24	9^{00}
ИУ7-65Б	28.06.24	9^{00}

Методы получения разностных схем (ДУЧП)

1 Метод разностной аппроксимации (см. лекцию 9)

- годится для лин. уравнений с гладкими коэффициентами (вместе со своими производными)
- м.б. применен для повышения порядка аппроксимации краевых условий (задача д.б. линейной)

2 Метод неопр. коэффициентов.

1) выбираем шаблон ($3^х$-, $4^х$-, 6-точ.)
2) ~~сост. лин. комб. значений сеточной ф-ции~~

На шаблоне строится разн. схема в виде лин. комбинации значений сет. ф-ции в выбр. узлах:

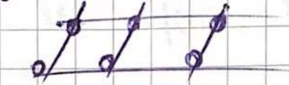
$$\alpha\hat y_{n-1}+\beta\hat y_n+\gamma\hat y_{n+1}+\delta y_n=0$$

3) вычисляется ~~невя~~ невязка для заданного ур-я.

(неопр.) коэф-ты $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ выбираются исходя из того, чтобы невязка имела максимальный порядок малости.

(Запускаем коэф-ты пред h, h^2 и т.д.)

! В данном методе можно строить косоугольные сетки:



§ Интегроинтерполяционный метод.

Рассмотрим

$$C(u)\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(T)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - p(u)u + f(x,u) \quad (1)$$

$$0 \le x \le b$$
$$0 \le t \le V$$

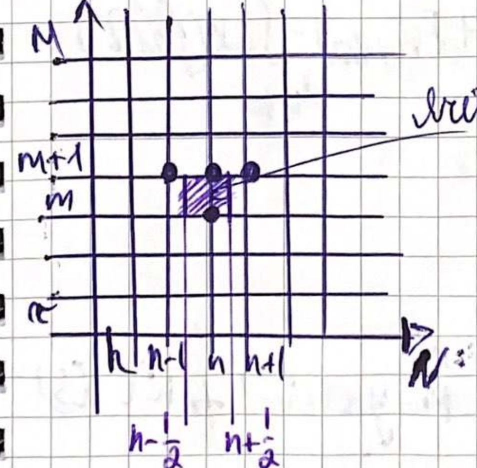
Необх. найти $u(x,t)$.

- Нач. условие: $t=0,\ u(x,0) = \mu(x)$
- Краевые усл-я: $x=0,\ -k(0)\frac{\partial u}{\partial x} = F(t)$

$x=b,\ -k(b)\frac{\partial u}{\partial x} = \alpha(u(b)-\beta)$

Решение:

Выбираем сетку (строим). Выбираем ячейку по кот. необходимо интегрировать. (в прошлом случае ячейка была отрезком)



Интегрируем исх. ур-е по ячейке

$$\int_{t_m}^{t_{m+1}} \int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+\frac{1}{2}}} (\cdot)\, dt\, dx$$

"+": • можно производить сквозные вычисления (не выделяя зоны контакта разных ~~пределов~~ материалов)
• законы сохр. не нарушаются.

Введем поток:

$$F = -k \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2)$$

После этого (1) запишется в виде

$$c(u) \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial F}{\partial x} - p(u)u + f(x,u)$$

Интегрируем его.

$$\int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+1/2}} dx \int_{t_m}^{t_{m+1}} c(u) \frac{\partial u}{\partial t} dt = -\int_{t_m}^{t_{m+1}} dt \int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+1/2}} \frac{\partial F}{\partial x} dx - \int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+1/2}} dx \int_{t_m}^{t_{m+1}} p(u)u\, dt +$$

$$+ \int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+1/2}} dx \int_{t_m}^{t_{m+1}} f(x,u)\, dt .$$

Возьмем u на верхней границе (как в ~~методе~~ треугольниках)
$\Rightarrow$ 1-й порядок точности по t.

$$\int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+1/2}} dx \cdot \hat{c} (\hat{u} - u) = + \int_{t_m}^{t_{m+1}} dt (F_{n-1/2} - F_{n+1/2}) - \int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+1/2}} dx (\hat{p}\hat{u}\tau) +$$

на неяв. схеме   по-хорошему $\hat{y}$

$$+ \int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+1/2}} dx\, \hat{f}(x,u)\tau \quad (2')$$

метод средних (2-й пор. точности)

$$\hat{c}_n (\hat{y}_n - y_n) h = (\hat{F}_{n-1/2} - F_{n+1/2})\tau - \hat{p}_n y_n h\tau + \hat{f}_n h\tau \quad (3)$$

Выполнив аналогичные действия для кр. задач ОДУ, получаем:

$$\left.\begin{aligned} \hat{F}_{n-1/2} &= \hat{æ}_{n-1/2} \cdot \frac{\hat{y}_{n-1} - \hat{y}_n}{h}, \\ \hat{F}_{n+1/2} &= \hat{æ}_{n+1/2} \cdot \frac{\hat{y}_n - \hat{y}_{n+1}}{h}, \end{aligned}\right\} (4)$$

$$\hat{æ}_{n-1/2} = \frac{h}{\int\limits_{x_{n-1}}^{x_n} \frac{dx}{k(u(x))}} \approx k_{n-1/2} \quad \text{(метод средних)}$$

Подставим выр-я для потоков (4) в (3):

$$\hat{C}_n(\hat{y}_n - y_n)h = \left(\hat{æ}_{n-1/2}\frac{\hat{y}_{n-1} - \hat{y}_n}{h} - \hat{æ}_{n+1/2}\frac{\hat{y}_n - \hat{y}_{n+1}}{h}\right)\tau - \hat{p}_n \hat{y}_n h\tau + \hat{f}_n h\tau$$

теплоемкость

Разностная схема, кот. содержит по 3 неизв. в каждом уравнении.
(квазилинейные алг. уравнения)

Матрица имеет вид:

$$\hat{A}_n \hat{y}_{n-1} - \hat{B}_n \hat{y}_n + \hat{D}_n \hat{y}_{n+1} = -\hat{F}_n, \quad (5)$$ (переносим влево)

где
$$\hat{A}_n = \frac{\hat{æ}_{n-1/2}\tau}{h},$$
$$\hat{D}_n = \frac{\hat{æ}_{n+1/2}\tau}{h},$$
$$\hat{B}_n = \hat{A}_n + \hat{D}_n + \hat{C}_n h + \hat{p}_n h\tau,$$
$$\hat{F}_n = \hat{C}_n y_n h + \hat{f}_n h\tau.$$

[Нелинейность, т. к. $A_n \cdot y_n$
⇒ решение итерационно

y_n не меняется, т.к. пред. слой.

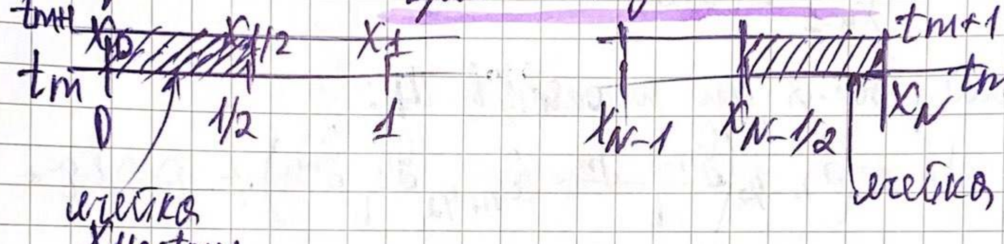
Но к. слое итерации $\hat{y}$ $\hat{C}_n$ меняется, а y_n-теплоемкость ⇒ меняем и на $n+1$, итер $n+2$

Метод простой итерации прост, но у него м.б. плохая сходимость

⇒ часто применяется метод Ньютона: линеаризация коэф-тов (необх. знать, от чего они зависят)

нач. условие – "хорошие" ⇒ есть хорошее приближение (выражения – громоздкие...)

Обратимся к краевым условиям.



$$\int_0^{x_{1/2}} \int_{t_m}^{t_{m+1}} (\cdot)\, dx\, dt$$ (от каждого слагаемого ур-я (1))

Расставив интегралы аналогично тем, кот. привели к (2'), получим:

$$\int_0^{x_{1/2}} dx\, \hat{c}(\hat{u}-u) = -\int_{t_m}^{t_{m+1}} dt\, (F_{1/2}-F_0) - \int_0^{x_{1/2}} dx\, \hat{p}\hat{u}\tau + \int_0^{x_{1/2}} dx\, f(x,\hat{u})\tau \qquad (6)$$

Применяя метод трапеций, будем иметь:

$$\left(\hat{c}_{1/2}(\hat{y}_{1/2}-y_{1/2}) + \hat{c}_0(\hat{y}_0-y_0)\right)\frac{h}{4} = \left(F(t_{m+1}) - \hat{\varkappa}_{1/2}\frac{\hat{y}_0-\hat{y}_1}{h}\right)\tau - \frac{h\tau}{4}\left(\hat{p}_0\hat{y}_0 + \hat{p}_{1/2}\hat{y}_{1/2}\right) + \frac{h}{4}\left(\hat{f}_0+\hat{f}_{1/2}\right)\tau$$

Приведём ур-е к виду, заменив

$$\hat{y}_{1/2} = \frac{\hat{y}_0+\hat{y}_1}{2}, \quad y_{1/2} = \frac{y_0+y_1}{2},$$ к виду

$$\hat{K}_0\hat{y}_0 + \hat{M}_0\hat{y}_1 = \hat{P}_0, \qquad (7)$$

где $$\hat{K}_0 = \frac{h}{8}\hat{c}_{1/2} + \frac{h}{4}\hat{c}_0 + \hat{\varkappa}_{1/2}\frac{\tau}{h} + \frac{\tau h}{8}\hat{p}_{1/2} + \frac{\tau h}{4}\hat{p}_0$$

$$\hat{M}_0 = \frac{h}{8}\hat{c}_{1/2} - \hat{\varkappa}_{1/2}\frac{\tau}{h} + \frac{\tau h}{8}\hat{p}_{1/2}$$

$$\hat P_0 = \frac{h}{8}\hat c_{1/2}(y_0+y_1) + \frac{h}{4}\hat c_0 y_0 + F(t_{m+1})\tau + \frac{\tau h}{4}(\hat f_{1/2}+\hat f_0)$$

полусуммы

Разностный аналог кр. условие на правом конце при $x = b$ получается аналогичным образом:

$$\int_{t_m}^{t_{m+1}}\int_{x_{N-1/2}}^{x_N} (\cdot)\,dx\,dt$$

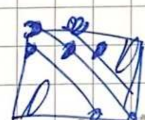
Полагаем, что $\hat F_N = \hat\alpha(\hat y_N - \hat\beta)$

$$\hat F_{N-1/2} = \hat\varkappa_{N-1/2}\frac{(\hat y_{N-1}-\hat y_N)}{h}.$$

Т.о. будем иметь справа:

$$\hat K_N \hat y_{N-1} + \hat M_N \hat y_N = \hat P_N \quad (8)$$

Система алг. ур-й (5),(7),(8) замкнута и позволяет решать ур-е на каждом временном шаге.

Матрица имеет вид 

?! Что такое порядок точности? Ответ убил...

Как решать систему (5), (7), (8)?

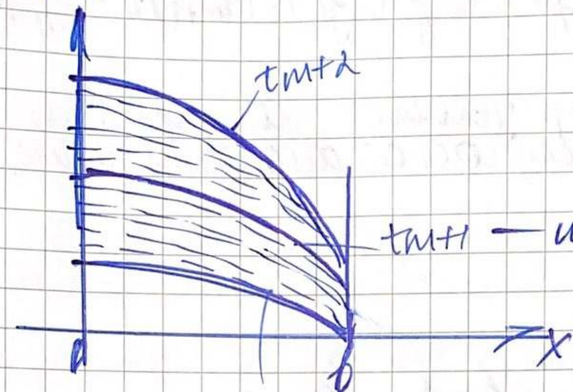
Применим метод простой итерации.

$$\begin{cases} \hat A_n^{(s-1)}\hat y_{n-1}^{(s)} - \hat B_n^{(s-1)}\hat y_n^{(s)} + \hat D_n^{(s-1)}\hat y_{n+1}^{(s)} = -\hat F_n^{(s-1)} \\ \hat K_0^{(s-1)}\hat y_0^{(s)} + \hat M_0^{(s-1)}\hat y_1^{(s)} = \hat P_0^{(s-1)} \\ \hat K_N^{(s-1)}\hat y_{N-1}^{(s)} + \hat M_N^{(s-1)}\hat y_{N-1}^{(s)} = \hat P_N^{(s-1)} \end{cases}$$

По нач. прибл. нах. нач. коэф-ты ⇒ получаем y ⇒
⇒ По полученному y находим коэф-ты до тех пор, пока

$$\max_{0\le n\le N}\left|\frac{\hat y_n^{(s-1)}-\hat y_n^{(s)}}{\hat y_n^{(s)}}\right| \le \varepsilon \approx 10^{-4}$$

Графически:



распределение совпало с предыдущим с точностью.

t_{m+1} — истинное распределение

t_m — получается сразу

?! как будет меняться темп-ра в зав. от t?