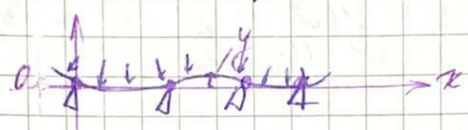
22.03.24. Лекция 5.

~~Модель на основе~~

Модели, основанные на двух краевых условиях.

Пример

Балка на опорах



$EJy^{IV} = q$ - ур-е упругой линии

Введем сист. коорд. ⇒ условие в точках опоры.

Постановка задачи.

$$\begin{cases} F(x, u, u', u'', \dots, u^{(n)}) = 0 \\ \text{Краевые условия:} \\ \varphi_k(\xi_k, u(\xi_k), u'(\xi_k), u''(\xi_k), \dots, u^{(n)}(\xi_k)) = 0, \ k = \overline{1,n} \end{cases}$$

Если обозначить

$$u_1 = u'$$
$$u_1' = u_2$$
$$u_2' = u_3$$
$$\dots$$
$$u_{n-2}' = u_{n-1}$$

Тогда

$$F(x, u, u_1, \dots, u_{n-1}') = 0$$

В общем виде постановка задачи выглядит след. образом

$$\begin{cases} u_k'(x) = f_k(x, u, u_1, u_2, \dots, u_n) \\ \varphi_k(\xi_k, u(\xi_k), u_1(\xi_k), u_2(\xi_k), \dots, u_n(\xi_k)) = 0 \\ k = \overline{1,n} \end{cases}$$

Решая эту систему, найдем константы

Методы решения краевой задачи

- аналитические (решение не предст-ся в квадратурах)
- приближенные аналитические (разл. в ряды Фурье, коллокаций, Галеркина, Ритца, наименьших кв-в) (инт + дискр.)
- численные

Приближенные аналитические методы.

Рассмотрим методы коллокаций, Галеркина и наим. квадратов.
Эти методы прим. к ЛДУ типа:

$$\begin{cases} u''(x) + p(x)\cdot u'(x) + q(x)\,u(x) = f(x) \\ a \le x \le b \\ x=a: \ \alpha_1 u'(a) + \beta_1 u(a) = \gamma_1 \\ x=b: \ \alpha_2 u'(b) + \beta_2 u(b) = \gamma_2 \end{cases}$$

$\Big\}$ краевые условия.

Задача: найти u.

$$\begin{cases} L\,u(x) = f(x) \\ l_a u = \gamma_1 \\ l_b u = \gamma_2 \end{cases}$$

— короткая запись (дифф. операторы)

т.е. $L u = u'' + p(x)u' + q(x)\,u$

$l_x u = \alpha u'(x) + \beta u(x)$

Решение ищется в виде

$$y = u_0(x) + \sum_{k=1}^{n} C_k u_k(x)$$

базисные ф-ии

$u_0(x)$ выбирается так, чтобы удовлетворять неоднородным краевым условиям, т.е.

$$\begin{cases} l_a u_0 = \gamma_1 \\ l_b u_0 = \gamma_2 \end{cases}$$

u_k должны удовлетворять одпор. кр. усл., т. е.

$$\begin{cases} l_a u_k = 0 \\ l_b u_k = 0 \end{cases}$$

y автоматически удовлетворяет краевым условиям.

В зав-ти от метода выбираются разные коэф-ты.

Опр. Невязка

$$R(x, C_1, C_2, \dots, C_n) = Ly - f = Lu_0(x) + \sum_{k=0}^{n} C_k L u_k - f(x)$$

"подст-ем y в исх. ДУ"
"подбираем C так, чтобы удовл. нек. усл."

1. Метод коллокаций.

Выбирается n точек, в которых невязка

$$R(x_i, C_1, \dots, C_n) = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Пример

$$\begin{cases} u'' + (1+x^2)u + 1 = 0 \quad (*) \\ u(-1) = 0 \\ u(1) = 0 \end{cases}$$

Выберем: $u_k = x^{2k-2}(1-x^2)$

$k = 1, \dots, n$

$x_0 = 0$, $x_1 = 0.5$ – точки коллокации

$$y(x) = C_1(1-x^2) + C_2(x^2 - x^4)$$

$$y'(x) = -2xC_1 + 2C_2(x - 2x^3)$$

$$y''(x) = -2C_1 + 2C_2(1 - 6x^2) \to (*)$$

$$R(x, C_1, C_2) = -2C_1 + 2C_2(1-6x^2) + (1+x^2)\cdot(C_1(1-x^2) + C_2(x^2 - x^4)) + 1 =$$

$$= C_1(-2 + 1 - x^4) + C_2(2 - 12x^2 + x^2 - x^6) + 1 =$$

$$= -C_1(1 + x^4) + C_2(2 - 11x^2 - x^6) + 1$$ – невязка

Подставляем точки, приравниваем к 0

- $x_0 = 0$

$-C_1 + 2C_2 + 1 = 0$

- $x_1 = 0.5$

$-\frac{17}{16} C_1 - \frac{49}{64} C_2 + 1 = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0.957 \\ C_2 = -0.022 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underbrace{y(x) \approx 0.957(1-x^2) - 0.022(x^2 - x^4)}_{\text{решение.}}$$

т.е. 1) выражение для y в виде суммы ф-ии и нек. ряда

1.а) u_0 удовл. неодн. кр. усл.
1.б) u_k (с константами) - лин незав, удовл. одн. кр. усл.

2) y подст. в дифф. ур-е (исх.) $\Rightarrow$ получили невязку

3) после подстановки ищем константы (коллокации $\Rightarrow$ с помощью усл-я $R=0$) т.е. совпадение в точках прибл. решения с точным

$\Rightarrow$ находим константы, подст. в y - прибл. решение ДУ.

2. Метод Галеркина

$$y(x) = u_0(x) + \sum_{k=1}^{n} C_k u_k(x)$$

u_0, u_k – так же удовл. усл-ям у метода коллокаций

$$R(x, C_1, C_2, \dots, C_n) = Ly - f(x)$$

(*) $$\int_a^b R(x, C_1, C_2, \dots, C_n) u_m(x)\,dx = 0, \quad m = \overline{1,n}$$

Если есть сист. полн. ф-ций u_m и эта система ортогональна другой ф-ции, то и сама ф. равна 0.

Если нек. ф-я такова, что интегралы (*) на нек. базисе равны 0, то сама ф-я равна 0.

Пример

$$\begin{cases} u'' + xu' + u = 2x \\ u(0) = 1 \\ u(1) = 0 \end{cases}$$

$u_0(x) = 1 - x$

$u_k(x) = x^k(1-x)$

$$y(x) = (1-x) + C_1 x(1-x) + C_2 x^2(1-x) + C_3 x^3(1-x)$$

$y'(x) = \dots$

$y''(x) = \dots$

Вычислив y', y'' и подставив в исх. ур-е, получим

$$R(x, C_1, C_2, C_3) = (1-4x) + C_1(-2 + 2 - 3x^2) + C_2(2 - 6x + 3x^2 - 4x^3) + C_3(6x - 12x^2 + 4x^3 - 5x^4)$$

$$\begin{cases} \int_0^1 R(x, C_1, C_2, C_3)\cdot(x-x^2)\,dx = 0 \\ \int_0^1 R(x, C_1, C_2, C_3)\,(x^2-x^3)\,dx = 0 \\ \int_0^1 R(x, C_1, C_2, C_3)\,(x^3-x^4)\,dx = 0 \end{cases}$$

Вычислив указ. интегралы, получим

$$\begin{cases} 133C_1 + 63C_2 + 36C_3 = -70 \\ 140C_1 + 108C_2 + 79C_3 = -98 \\ 264C_1 + 252C_2 + 211C_3 = -210 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad C_1 = -0.209$$
$$C_2 = -0.7894$$
$$C_3 = 0.209$$

$$\underline{y(x) \approx (1-x)(1-0.209x - 0.7894x^2 + 0.209x^3)}$$

решение (приближ.) –

3. Метод наименьших квадратов (дискретный)

$$y(x) = U_0(x) + \sum_{k=1}^{n} C_k U_k(x)$$

$$R(x, C_1, C_2, \dots, C_n) = Ly - f(x) = LU_0(x) + \sum_{k=1}^{n} C_k L U_k(x) - f(x)$$

Идея:

$(N \gg n)$ $$I = \sum_{i=1}^{N} R^2(x_i, C_1, C_2, \dots, C_n) \to \min$$

$$\frac{\partial I}{\partial C_k} = 0, \quad k = \overline{1,n}$$ (усл. экстремума ф-ии)

Т.е. $C_1, \dots, C_n$ – такие, чтобы удовл. этому

Пример (см. метод коллокаций)

$$\begin{cases} u'' + (1+x^2)u + 1 = 0 \\ u(-1) = 0 \\ u(1) = 0 \end{cases}$$

$u_0(x) = 0$

$u_k(x) = x^{2k}(1-x^2)$, $k = \overline{1,n}$

$y(x) = C_1(1-x^2) + C_2(x^2 - x^4)$

или 4?

$R(x_i, C_1, C_2) = 1 - (1+x_i^4)C_1 + (2 - 11x_i^2 - x_i^6)C_2$

$$I = \sum_{i=1}^{N} [1 - (1+x_i^4)C_1 + (2-11x_i^2 - x_i^6)C_2]^2$$

$$\frac{\partial I}{\partial C_1} = 2\sum_{i=1}^{N}[1-(1+x_i^4)C_1 + (2-11x_i^2 - x_i^6)C_2]\cdot(-(1+x_i^4)) = 0$$

$$\frac{\partial I}{\partial C_2} = 2\sum_{i=1}^{N}[1-(1+x_i^4)C_1 + (2-11x_i^2 - x_i^6)C_2)\cdot(2-11x_i^2 - x_i^6)] = 0$$

$\alpha_i = -(1+x_i^4)$

$\beta_i = (2 - 11x_i^2 - x_i^6)$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{N}\alpha_i + C_1\sum_{i=1}^{N}\alpha_i^2 + C_2\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\beta_i = 0 \\ \sum_{i=1}^{N}\beta_i + C_1\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\beta_i + C_2\sum_{i=1}^{N}\beta_i^2 = 0 \end{cases}$$

Решая систему, получим:

$x_i = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$

$$\begin{cases} 4.870\, C_1 + 3.273\, C_2 = 4.383 \\ 3.273\, C_1 + 25.366\, C_2 = 1.819 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $C_1 = 0.932$

$C_2 = -0.0474$

приближ. решение.

$\boxed{y(x) \approx 0.932(1-x^2) - 0.0474(x^2 - x^4)}$