Числ. метод (простейший)

$$u(x) = u(x_0) + \frac{u'}{1!}(x - x_0) \cancel{+ \frac{u''}{2!}(x - x_0)^2}$$

$$\boxed{y_{n+1} = y_n + h f(x, y_n)}$$ – метод Эйлера.

Меньше шаг – больше точность

01.03.24. Лекция 3.

Численные методы.

– унив. методы, кот. позволяют решить больш-во ДУ.

$$\begin{cases} u'(x) = f(x, u) \\ u(x_0) = \eta \\ a \leq x \leq b \end{cases}$$ – задача Коши

Некоторые определения и понятия.

Опр. На отрезке $[a, b]$ вводится сетка, то есть мн-во ω_N точек, кот. имеет вид:

$$\omega_N = \{x_n : a = x_0 < x_1 < x_2 <$$

Точки наз-ся узлами (на оси x) сетки.

Опр. Значение ф-ии в узлах – y_n – наз. сеточной ф-ей.

Опр. Часто исп-ся равномерная сетка – сетка с пост. шагом:

$$\omega_n = \{x_n : x_n = x_0 + nh, \; n = \overline{0, N}, \; h = \frac{b-a}{N}\}$$

- Понятие сходимости прибл. решения к точному: y_n $\quad u_n = u(x_n)$

Фиксируется x_n:

$$x_n = x_0 + nh = x, \quad h \to 0 \quad (n \to \infty)$$

Опр. Разностное решение сходится к точному в точке x_n, если

$$|y_n - u_n| \to 0 \text{ при } h \to 0$$

Опр. Приближенное решение имеет p-ый порядок точности, если

$$|y_n - u_n| = O(h^p) \text{ при } h \to 0.$$

Пример: 1. решение с h
2. решение с $h/2$ – уменьшение шага
3. если эти решения сравн.:

$$\left|\frac{y_n^h - y_n^{h/2}}{y_n^{h/2}}\right| < \varepsilon \sim 10^{-4} \text{ – точность?},$$

то решение сходится ⇒ конец алг.

! Можно построить разностную схему, кот. при $h \to 0$ сходится к реш-ю не ДУ, а другого?..

Переменный шаг позволяет учесть резкие изменения функции; с постоянным – решение будет "раскачиваться"

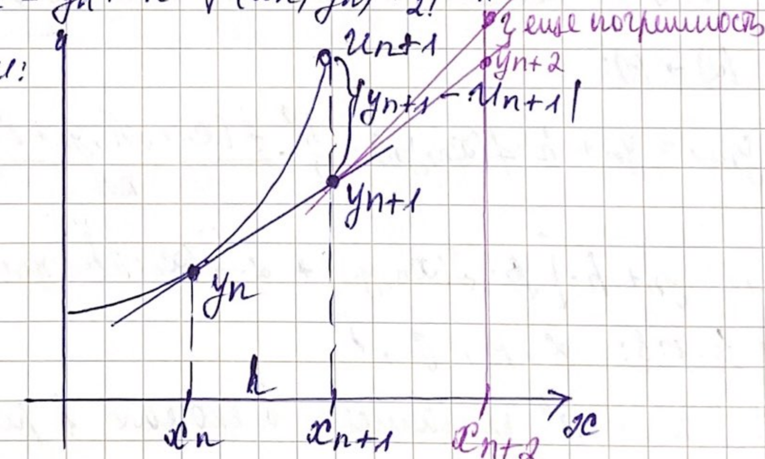
Процедура оценки сходимости делается на каждом шаге. (до тех пор, пока не сойдется)
Затем – для x_{n+1}, x_{n+2}, ...

Опр. Приближенное решение сходится на отрезке, если оно сходится в каждой точке этого отрезка.

Схема Эйлера:

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2!} u_n'' + \dots$$

Графически:



При переходе из узла в узел погрешность накапливается.
- На одном интервале: точность $O(h^2)$
- на всем отрезке: $|y_n - u_n| = O(h)$

В л/р: $z_n = |y_n - u_n|$
$z_n = z_0(\Pi\dots) + \Sigma \dots$ } – в рез-те с погр-тью получ. мажорантная (завыш.) оценка ~~погр-ти~~ решение?? оценка погрешности??

Методы Рунге-Кутта. Метод 2^го порядка точн-ти.

$$u_{n+1} = u_n + h u_n' + \frac{h^2}{2} u_n'' + \frac{h^3}{3!} \cdot u_n''' + \ldots$$

где $u_n' = f(x_n, u_n)$

$$u_n'' = \frac{d}{dx}(u_n') = \frac{d}{dx} f(x_n, u_n) = (f_x' + f_u' \cdot u_x')\big|_n =$$

вторая произв. в т. x_n $u_n'' \equiv u''(x_n)$

$$= (f_x' + f_u' \cdot f)\big|_n$$

"Подключим" слагаемое с u_n'' — метод Рунге-Кутта 2^го порядка точности
(на интервале точность — h^3, на отрезке — h^2).

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2} \cdot (f_x' + f_u' \cdot f)\big|_n \quad (1)$$

Решение рассм. на инт. кривой ⇒ и зав. от x ⇒ такая производная
Заменим y_n'' разностным аналогом:

$$y_n'' = \frac{f(\bar{x}, \bar{y}) - f(x_n, y_n)}{\Delta x} = \frac{f(x_n + \gamma h, y_n + \delta \cdot h) - f(x_n, y_n)}{\Delta x} \quad (2)$$

δ, γ — подбираем из-го (так, чтобы выходил 2^й пор. точн-ти).

(2) → (1):

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2} \cdot \frac{f(x_n + \gamma h, y_n + \delta h)}{\Delta x} - \frac{h^2}{2} \cdot \frac{f(x_n, y_n)}{\Delta x}$$

~~$\frac{h^2}{\Delta x}$ — пр. точн. h~~ ~~β — неизв.~~

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot [\beta \cdot f(x_n, y_n) + \alpha \cdot f(x_n + \gamma h, y_n + \delta \cdot h)] \quad (3)$$

- Неизв: $\alpha, \beta, \gamma, \delta$

Разложим 2^е слагаемое в скобках в ряд:

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot \{\beta \cdot f(x_n, y_n) + \alpha [f(x_n, y_n) + f_x' \gamma \cdot h + f_u' \cdot \delta h]\}$$

или

$$y_{n+1} = y_n + h\beta f(x_n, y_n) + \alpha \cdot h \cdot f(x_n, y_n) + \alpha \cdot \gamma h^2 f_x' + \alpha \cdot \delta \cdot h^2 \cdot f_u'$$

$$y_{n+1} = y_n + h(\beta + \alpha) \cdot f(x_n, y_n) + \alpha \gamma h^2 f_x' + \alpha \delta h^2 \cdot f_u' \quad (4)$$

Сравним (4) с (2):
получим выр-е, кот. претендует на больший порядок точности
Она получена засчет отбрасывания слаг.

Чтобы (4) перешло в (2), необх., чтобы $\alpha + \beta = 1$, $\alpha \gamma = \frac{1}{2}$, $\alpha \delta = \frac{1}{2} f(x_n, y_n)$

α – задаваемый параметр.

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha \gamma = 1/2 \\ \alpha \delta = \frac{1}{2} \cdot f(x_n, y_n) \end{cases}$$

Тогда

$$\beta = 1 - \alpha$$
$$\gamma = 1/2\alpha$$
$$\delta = \frac{1}{2\alpha} \cdot f(x_n, y_n)$$

Возвращаясь к (3), получим:

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot \left[(1-\alpha) f(x_n, y_n) + \alpha \cdot f\left(x_n + \frac{h}{2\alpha}, y_n + \frac{h}{2\alpha} \cdot f(x_n, y_n)\right) \right]$$

Более компактная запись вып-ся в исп. обозначений:

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$
$$k_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2\alpha}, y_n + \frac{h}{2\alpha} \cdot k_1\right)$$

Тогда:

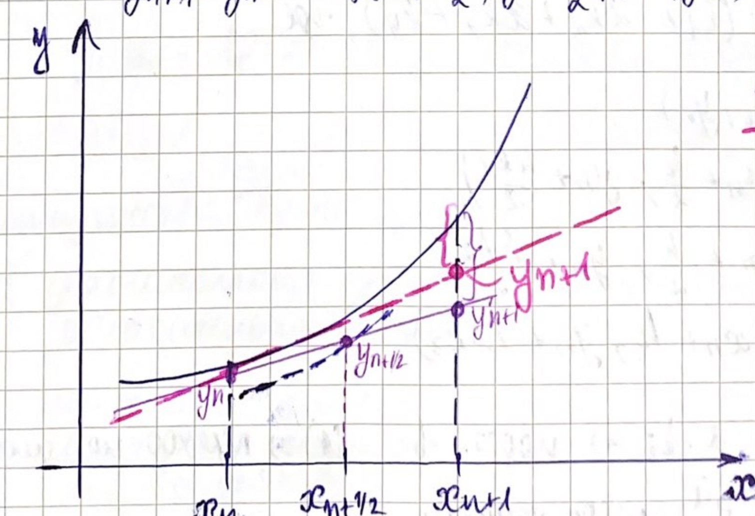
$$y_{n+1} = y_n + h \cdot [(1-\alpha) \cdot k_1 + \underset{\text{параметр}}{\alpha} \cdot k_2] \quad (5)$$

(5) – однопараметрич. семейство формул Рунге-Кутта 2-го порядка

Почему этот метод точнее метода Эйлера?

Геометрическая интерпретация решения.

$\alpha = 1$: $y_{n+1} = y_n + h f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} f(x_n, y_n)\right)$



— метод Эйлера

– – метод Рунге-Кутта

1) $y_{n+1/2} = y_n + \frac{h}{2} f(x_n, y_n)$

2) $y'_{n+1/2} = f(x_n + \frac{h}{2}, y_{n+1/2})$

3) $y_{n+1} = y_n + h \cdot y_{n+1/2}$

$x_{n+1/2} = x_n + h/2$

~~1) $y_{n+1/2} = y_n + \frac{h}{2} f(x_n, y_n)$ 2)~~

$\alpha = 1/2$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[f(x_n, y_n) + f(x_n + h, y_n + h f(x_n, y_n))\right]$$

Сначала: $h \cdot f(x_n, y_n) + y_n = \overline{y}_{n+1}$ — по Эйлеру (грубо) →

→ производные → затем: среднее значение производной на отрезке

$$y'_{ср} = \frac{y'_n + \overline{y}'_{n+1}}{2}$$ ← от получ. по Эйлеру

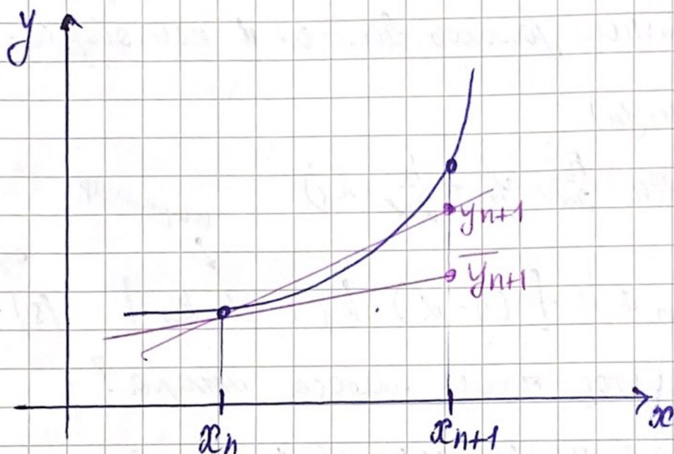
$$\rightarrow \; y_{n+1} = y_n + h \cdot y'_{ср}.$$

~~Среднее от орши~~

Значение функции в середине ≠ среднему значений на концах

Шаг 1 – предиктор

Шаг 2 – корректор. "метод предиктор-корректор"



Метод 4го порядка точности.

(*) $$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \text{ где}$$

- $k_1 = f(x_n, y_n)$
- $k_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h k_1}{2}\right)$
- $k_3 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h k_2}{2}\right)$
- $k_4 = f(x_n + h, y_n + h \cdot k_3)$

Находятся знач-я k_i → подст. в (*) → переход на шаг

! (*) имеет 4^{й} порядок точности. $O(h^4)$

Обобщение (на сист. из $2^х$ ур-й)

$$\begin{cases} u'(x) = f(x, u, v) \\ v'(x) = \varphi(x, u, v) \end{cases}$$

$u(x_0) = \eta_1$

$v(x_0) = \eta_2$

$a \le x \le b$

Соответствие: $u_n \to y_n$, $v_n \to z_n$.

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

$$z_{n+1} = z_n + \frac{h}{6}(q_1 + 2q_2 + 2q_3 + q_4),$$

где
- $k_1 = f(x_n, y_n, z_n)$, $q_1 = \varphi(x_n, y_n, z_n)$
- $k_2 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{hk_1}{2}, z_n + \frac{hq_1}{2})$,

  $q_2 = \varphi(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{hk_1}{2}, z_n + \frac{hq_1}{2})$
- $k_3 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{hk_2}{2}, z_n + \frac{hq_2}{2})$

  $q_3 = \varphi(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{hk_2}{2}, z_n + \frac{hq_2}{2})$
- $k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3, z_n + hq_3)$

  $q_4 = \varphi(x_n + h, y_n + hk_3, z_n + hq_3)$

Замечание по методам Рунге-Кутта.

Преимущества методов Рунге-Кутта:

1) сравнительная простота формул при относительно высокой точности.

2) из-за того, что схемы явные, переход из т. n в т. $n+1$ осуществляется за строго фикс. кол-во действий.

3) значение сеточной ф-ии, начиная с 1-й, вычисляется по одной и той же формуле. (это - отличие от многошаговых методов)

4) методы Рунге-Кутта позволяют считать с переменным шагом.

плавно ⇒ увелич. шаг
резко ⇒ уменьш. шаг

Как выбрать метод?
Если правая часть считается сложно, то чем меньше обращений к ней – тем лучше.

Если к.-либо производных нет, порядок не обеспечивается.

(1. учитывать сложность правой части

2. если правая ч. не имеет соотв. производных, то заявленные порядки точности не реализуются на практике)