29.03.24. **Лекция 6.**

Численные методы

Основной: разностный (проекц.-разн.) метод.

1 Метод стрельбы

- Заключается в том, что краевая задача решается как задача Коши

$$
\begin{cases}
u'(x) = f_1(x, u, v) \\
v'(x) = f_2(x, u, v) \qquad (1) \\
a \le x \le b \\
\varphi(u(a), v(a)) = 0 \qquad (2) \\
\psi(u(b), v(b)) = 0 \qquad (3)
\end{cases}
$$

Например, $\alpha u(a) + \beta v(a) = \gamma$

Произвольно задаем: $u(a) = \eta$

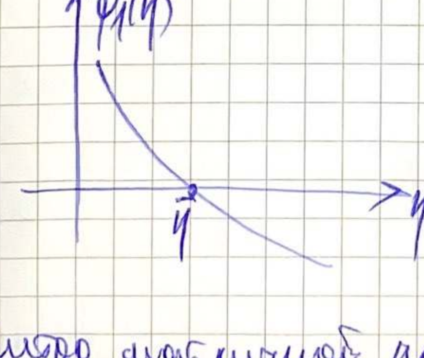
Тогда из (2) найдем $v(a)$:

$$v(a) = \xi(\eta) \quad \left(\text{напр., } v(a) = \frac{\gamma - \alpha\eta}{\beta}\right)$$

Применяя тот или иной алгоритм решения задачи Коши, получаем:

$$u(x, \eta) \quad \text{и} \quad v(x, \eta)$$

$\psi(u(\eta, b), v(\eta, b)) = \psi_1(\eta)$ – явл. ур. решения сист.



Необходимо найти $\bar{\eta}$, чтобы

$$\psi_1(\bar{\eta}) = 0.$$

Начат процесс поиска – – дихотомия

Метод матричной прогонки

см. л/р:

$$\begin{cases} F = -\dfrac{c}{3k} \cdot \dfrac{du}{dr} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}(rF) = ck(u_p - u) \\ r = 0 \quad F = 0 \\ r = R \quad F = 0.393c\dfrac{u}{2} \end{cases}$$

Переменный шаг - грамотно
Накопление ошибки $(u_p - u)$
Расчет на разных сетках

$1/k$
Не от центра, а от края
Как задавать начальное приближение?
+ метод Адамса
Смена метода в завис от интеграла - bad (арр.)

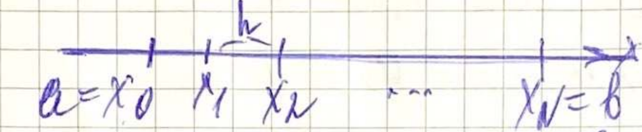
+ метод секущих

2 Разностный метод

Основные понятия

$$\begin{cases} u''(x) - p(x)u(x) = f(x) \\ a \le x \le b \\ u(a) = \alpha \\ u(b) = \beta \end{cases}$$

В области опр-я от а до b вводится сетка



$$\omega_h = \{x_n : x_n = a + nh,\ h = \frac{b-a}{N},\ n = \overline{0, N}\}$$

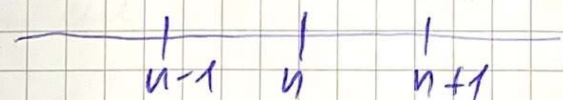
Ф-я на сетке - сеточная ф-я.

Как получить уравнение, кот. будем решать?
~~Построим разностную схему~~.

1) Получение разностной схемы

$$\frac{y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1}}{h^2} - p_n y_n = f_n$$

Здесь $p_n = p(x_n)$, $f_n = f(x_n)$



набор точек - шаблон
(в д. случае - 3 точки)

или $y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1} - h^2 p_n y_n = f_n$

$$(4)\ \begin{cases} y_{n-1} - (2 + h^2 p_n) y_n + y_{n+1} = h^2 f_n, \quad n = \overline{1, N-1} \\ y_0 = \alpha \\ y_N = \beta \end{cases}$$

N-1 уравнение - аналог дифф. ур.
одно - краевые

N+1 ур. - N+1 неизв. $y_0, y_1, \dots, y_N$

2) Существование и единственность решения лин. системы (4).

Пусть $p(x) > 0$ $\Rightarrow$ преобл. диаг. эл-ты

Система с диаг. преобладанием всегда имеет решение и оно ед-но

3) Как найти решения

СЛАУ (4) имеет вид

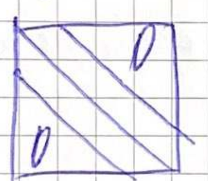
$$y_0 - (2 + p_1 h^2) y_1 + y_2 = h^2 f_1$$

$$0 + y_1 - (2 + p_2 h^2) y_2 + y_3 = h^2 f_2$$

$$\dots$$

$$0 + 0 + 0 + \dots + y_{N-3} - (2 + p_{N-2} h^2) y_{N-2} + y_{N-1} = h^2 f_{N-1}$$

Графически:



$\Rightarrow$ (4) предст. собой СЛАУ с трехдиагональной матрицей

Прогонка:

$$\begin{cases} A_n y_{n-1} - B_n y_n + D y_{n+1} = F_n, \quad n = \overline{1, N-1} \\ K_0 y_0 + M_0 y_1 = P_0 \\ K_N y_{N-1} + M_N y_N = P_N \end{cases}$$

$\leftarrow$ отсюда — нач. к.

$\uparrow$ более общий случай, писать реш-е для него

$$y_n = \xi_{n+1} y_{n+1} + \eta_{n+1}$$

Решение (4) обеспеч. решением с пом. метода прогонки.

- необх. убедиться, что при $h \to 0$ ~~[illegible]~~ разн. уравнение перейдет в дифф.-ур-е.

Как? Рядом Тейлора, ~~[illegible]~~ поиск невязки

- Проверка устойчивости разн. схемы

Все ок $\Rightarrow$ решение сходится к точному

4) Покажем (на примере), что решение, полученное из (4) сходится к точному реш-ю.

$$y_n \to u(x_n) \text{ при } h \to 0$$

т.е. $|y_n - \underbrace{u(x_n)}_{u_n}| \to 0$ при $h \to 0$

$$z_n = y_n - u_n$$

~~Погрешность формулу~~

При аппроксимации ~~числ. решения~~ учтем погрешность формулы численного дифф-я.

$$\frac{u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1}}{h^2} \underbrace{- \frac{h^2}{12} u^{IV}(\xi_i)}_{\text{ост. член в форме Лагранжа}} + p_n u_n = f_n,$$

$x_{n-1} \le \xi_i \le x_{n+1}$

$$u_{n-1} - (2 + h^2 p_n) u_n + u_{n+1} = h^2 f_n + \frac{h^4}{12} u^{IV}(\xi_i) \quad (5)$$

Вычтем (5) из ур.(4)

$$z_{n-1} - (2 + h^2 p_n) z_n + z_{n+1} = -\frac{h^4}{12} u^{IV}(\xi_i)$$

или $(2 + h^2 p_n) z_n = z_{n-1} + z_{n+1} + \frac{h^4}{12} u^{IV}(\xi_i)$

Пусть точка внутри инт-ла, в кот. погр. max, имеет номер m

(x_m — точка, в кот. $z_m = \max$)

$$(2+h^2 p_m) z_m = z_{m-1} + z_{m+1} + \frac{h^4}{12} u^{IV}(\xi_i)$$

(т.к. ранее требовали $p(x) > 0$)

$$(2+h^2 p_m)|z_m| \le |z_{m-1}| + |z_{m+1}| + \frac{h^4}{12}|u^{IV}(\xi_i)|$$

заменяя $\uparrow z_m$ $\qquad \uparrow z_m$

$$(2+h^2 p_m)|z_m| \le 2|z_m| + \frac{h^4}{12}|u^{IV}(\xi_i)|$$

$$|z_m| \le \frac{h^2}{12 p_m}|u^{IV}(\xi_i)| \le \frac{h^2}{12}\max\left|\frac{u^{IV}(x)}{p(x)}\right| = O(h^2)$$

при $h \to 0$

Т.о. при $h \to 0$ $z_m \to 0$ с той же скоростью, с кот. стремится $h^2 \to 0$

Т.е. $|y_m - u_m| \to 0$ при $h \to 0$

$|y_m - u_m| = O(h^2)$ при $h \to 0$

Полученный выше способ получения разностной схемы наз. методом прямой разностной аппроксимации.

! Ограничение — гладкость коэфф. $\Rightarrow$ применяется редко.

~~Универсальным методом~~

$\exists$ Другие методы.

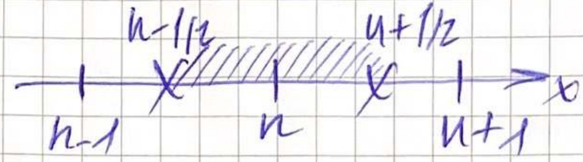
Универсальный метод — интегро-дифф. метод получения разностной схемы.

! Интегро-интерполяц. метод — только часть этого метода.

3 Интегро-дифференциальный метод

$u''(x) = f(x, u)$

$a \le x \le b$



Шаблон - половинные узлы

$$F = \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d^2}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dx}\right) = \frac{dF}{dx}$$

$$\frac{dF}{dx} = f(x, u)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{dF}{dx} = f(x, u) \\ \frac{du}{dx} = F \end{cases}$$

Интегрируем 1е ур-е на шаблоне

$$\int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+0.5}} \frac{dF}{dx}\, dx = \int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+1/2}} f(x, u)\, dx$$

$$F_{n+1/2} - F_{n-1/2} = f(x_n, u_n) \cdot h \quad (6)$$

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} du = \int_{x_n}^{x_{n+1}} F\, dx$$

$$y_{n+1} - y_n = F_{n+1/2} \cdot h$$

т.е. $F_{n+1/2} = \frac{y_{n+1} - y_n}{h}$ (7) подст. (7) в (6)

Аналогично $F_{n-1/2} = \frac{y_{n-1} - y_n}{h}$