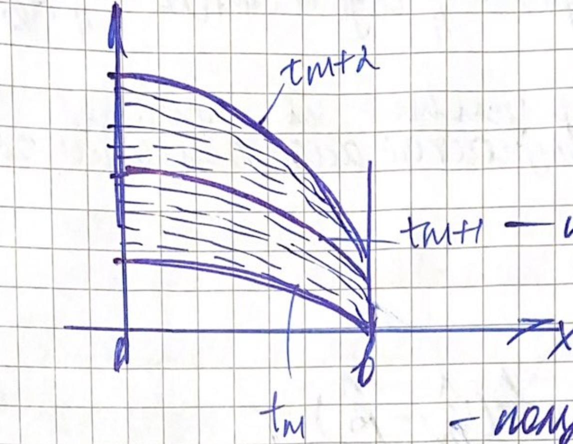
Графически:



распределение совпало с предыдущим с точностью.

t_{m+1} — истинное распределение

t_m — получается сгу

?! как будет меняться темп-ра в зав. от t?

03.05.24. Лекция 11.

Модели на основе многомерных ДУЧП

Ур-е имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + f(x,z,t)$$

Необх. найти! $u \equiv u(x,z,t)$

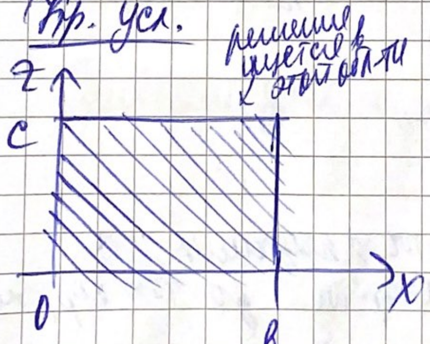
$0 \le t \le T$

- Нач. усл.

изв. ф.

$t=0, \quad u(x,z,0) = \mu(x,z)$

- Гр. усл.



$x=0, \quad u(0,z,t) = \mu_1(z,t)$

$x=b, \quad u(b,z,t) = \mu_2(z,t)$

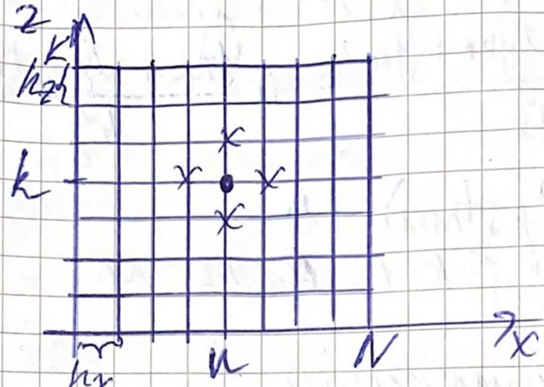
$z=0, \quad u(x,0,t) = \mu_3(x,t)$

$z=c, \quad u(x,c,t) = \mu_4(x,t)$

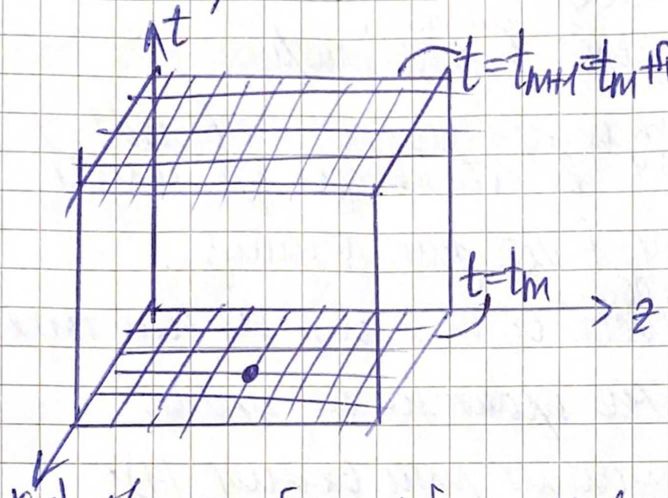
[Общий вид гр. условий

$$-\lambda\frac{\partial u}{\partial x} = \alpha(u-\beta)$$
]

В области xOz построим сетку



Если нарисовать область полностью:

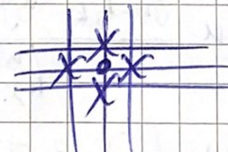


Расстояние м/у слоями — шаг по времени τ

1) Простейший способ — метод разн. аппроксимации

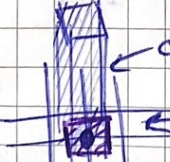
$$\left[\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \frac{\partial u}{\partial z}\right) + f(x, z, u, t)\right]$$ — чего там

— каждое ур-е будет сод 5 неизв. (необх. 5 узлов)



2) Интегро-...

— ячейка



интеграл по ней + по времени от 0 до τ (т.?)

(чисто неявная схема)

Применим метод прямой разн. аппроксимации:

$$\frac{\hat{y}_{nk} - y_{nk}}{\tau} = a\,\frac{\hat{y}_{n-1,k} - 2\hat{y}_{nk} + \hat{y}_{n+1,k}}{h_x^2} + a\,\frac{\hat{y}_{n,k-1} - 2\hat{y}_{n,k} + \hat{y}_{n,k+1}}{h_z^2} +$$

$$+ f(x_n, z_k, t_{m+1}) \quad (1)$$

$1 \le n \le N-1,\ 1 \le k \le K-1,\ 0 \le m \le M$

(схема типа "крест")

Каждая линия — направление.
Вся плоскость — слой

[Получается сильноразреж. 5-диаг. матрица]

Полученная разн. схема м.б. решена "в лоб",
т.е. решается СЛАУ, в кот. каждое ур. имеет 5 неизв.
СЛАУ имеет матрицу, в кот. ден. 5 диаг.:
3 диагонали рядом
2 другие — на расст. от них, опр. кол-вом точек.

Это неэкономично. На практике не прим.

Применяют реализации разн. схемы (1):

1. Продольно-поперечная схема.

1) Вводится пром. слой $\bar{t} = t_m + \tau/2$, на кот. ищется решение вначале

$$\frac{\bar{y}_{nk} - y_{nk}}{0.5\tau} = a\,\frac{\bar{y}_{n-1,k} - 2\bar{y}_{nk} + \bar{y}_{n+1,k}}{h_x^2} + a\,\frac{y_{n,k-1} - 2y_{nk} + y_{n,k+1}}{h_z^2} +$$

$$+ \underbrace{f(x_n, z_k, t_{m+1/2})}_{\bar{f}_{n,k}}$$

2) $$\frac{\hat{y}_{nk} - \bar{y}_{nk}}{0.5\tau} = a\,\frac{\bar{y}_{n-1,k} - 2\bar{y}_{nk} + \bar{y}_{n+1,k}}{h_x^2} + a\,\frac{\hat{y}_{n,k-1} - 2\hat{y}_{nk} + \hat{y}_{n,k+1}}{h_z^2} + \underbrace{f(x_n, z_k, t_{m+1/2})}_{\bar{f}_{n,k}}$$

только что найд. в 1-ом шаге

Теперь прогонка выполняется по напр. z до $K-1$
$\Rightarrow$ нашли y в к. точке.

Сводим по сути к одном.

Мн-во прогонок по одному напр., затем - по другому.

$\rightarrow O(\tau^2 + h_x^2 + h_z^2)$

Наличие пром. слоя наводит на мысли...
"—": • не обобщается на кол-во незав. перем >2
$\Rightarrow \exists$ более общий прием

2. Локально-одномерный метод (-ая схема)

Будем считать, что

$$A_1\bar{y} = a\frac{\bar{y}_{n-1,k} - 2\bar{y}_{n,k} + \bar{y}_{n+1,k}}{h_x^2},$$

$$A_2 y = a\frac{y_{n,k-1} - 2y_{n,k} + y_{n,k+1}}{h_z^2}$$ - операторы

A_3 - аналогично по l

$$\frac{\hat{y}_{nkl} - y_{nkl}}{\tau} = A_1\hat{y}_{nkl} + A_2\hat{y}_{nkl} + A_3\hat{y}_{nkl} + f(x_n, z_k, \vartheta_l, t_{m+1})$$ - исх. разн. схема

$$\frac{\hat{y}^{(k)} - y^{(k)}}{\tau} = A_k\hat{y}^{(k)} + \frac{\hat{f}_{nkl}}{3}, \quad k = 1,2,3$$

$y^{(1)} = y$ - с предыдущего слоя, $t = t_m$

$y^{(2)} = \hat{y}^{(1)}$

$y^{(3)} = \hat{y}^{(2)}$

$\hat{y}^{(3)}$ - решение задачи. - $\hat{y}_{nkl}$ - после этого $t_{m+1} = t_m + \tau$

Ищем одномерные решения.
Похоже на пред. схему, но
совершаем одномерные прогонки
На 1м этапе перебираем n k l делаем прогонку по x
(сист-ы). В рез. прогонки - находим решение $y^{(1)}$

Точность: $O(\tau + h_x^2 + h_z^2 + h_v^2)$

"+": универсальный, любое кол-во решений

[в л/р 5 — оба метода можно]

$$\int\limits_{t}^{t_{m+1}} dt \int\limits_{x_{n-1/2}}^{x_{n+1/2}} dx \int\limits_{z_{l-1/2}}^{z_{l+1/2}} (\cdot)\, dz$$ — че это

! <u>Замечание</u>

В случае нелин. задачи

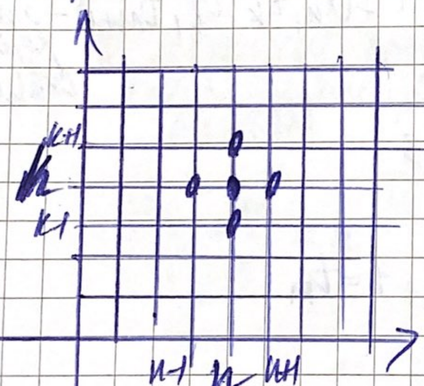
$$c(u)\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\varkappa(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\varkappa(u)\frac{\partial u}{\partial z}\right) + f(u)$$

→ необх. линеаризовать или применить метод простой итер.

Тогда, если прим. ↑, то итерац. процедуру необх. применять на к. этапе.

Так же в лок.-одном. методе. (и 1 и 2 в пр-пол схеме)

Вероятностный метод решения ДУЧП



Пусть в т. k, n max y_{nk} частиц (напр., 100)

За время τ все эти частицы уходят в соседние узлы. Одновр. приходят из сос. узлов другие частицы.

$$\hat{y}_{nk} = \frac{1}{4}(y_{n-1,k} + y_{n+1,k} + y_{n,k-1} + y_{n,k+1})$$

$$\hat{y}_{nk} - y_{nk} = \frac{1}{4}(y_{n-1,k} - 2y_{n,k} + y_{n+1,k}) + \frac{1}{4}(y_{n,k-1} - 2y_{n,k} + y_{n,k+1})$$

В данном случае $\tau/4h^2 = 1$

Если осущ. на сетке "подкручим частицу", можно решить ДУ ЧП?

Можно назначить ~~[illegible]~~ вес ...

0 – 0.25 ←
0.25 – 0.5 →
0.5 – 0.75 ↑
0.75 – 1 ↓

Новое распр. частиц – новое значение ф-ии.

[Точка стац. куда-то приходит,
фикс. значение на границе

$$u_{nk} = \frac{\sum u_{грi}}{N}$$