05.04.24. Лекция 7.

Рассмотрим подробно на примере ДУ 2-го порядка применение интегро-интерп. метода для получения разностной схемы.

Рассмотрим ДУ 2-го порядка вида

$$\underbrace{\frac{1}{r^p}\frac{d}{dr}\Big(\overbrace{r^p\cdot\lambda(r)\cdot\frac{du}{dr}}^{F}\Big)}_{\text{div потока, div}F} - p(r)u(r) + f(r) = 0$$

$p=0$ – плоский слой
$p=1$ – цилиндрический слой
$p=2$ – сфера.

$z = \frac{r}{R}$ – вводим.

Тогда ур-е будет иметь вид

$$\frac{1}{R^2 z^p}\cdot\frac{d}{dz}\left(z^p\lambda(z)\frac{du}{dz}\right) - p(z)u(z) + f(z) = 0. \quad (1)$$

[(1) – линейный вид ур-я]
В (1) $\lambda(z), p(z), f(z)$ – известные ф-ии коорд-ты.
⇒ ур-е наз-ся линейным.

1) Запишем (1) в квазилинейном виде (по сути – не явл. линейным).

$$\frac{1}{R^2 z^p}\cdot\frac{d}{dz}\left(z^p\lambda(u)\frac{du}{dz}\right) - p(u)\cdot u + f(u) = 0 \quad (2)$$

Вводим сетку $\omega_h = \{x_n : x_n = a + nh,\ h = \frac{b-a}{N},\ n = \overline{0,N}\}$

Проинтегрируем (2) в пределах $z = z_{n-1/2}$, $z_{n+1/2}$

$$F = -\frac{\lambda(u)}{R} \cdot \frac{du}{dz} \quad (3)$$

$$-\frac{1}{R} \cdot \frac{1}{z^p} \cdot \frac{d}{dz}\left(z^p F\right) - p(u)\,u + f(u) = 0 \quad (4)$$

[если $p = 1, 2, \dots$, то был бы параллелепипед
и т.д.]

$$\int\limits_{z_{n-0.5}}^{z_{n+0.5}} (\cdot)\, z^p\, dz$$

$$-\frac{1}{R} \int\limits_{z_{n-1/2}}^{z_{n+1/2}} \cancel{\frac{1}{z^p}} \cdot \frac{d}{dz}\left(z^p F\right) \cancel{z^p}\, dz - \underbrace{\int\limits_{z_{n-1/2}}^{z_{n+1/2}} \left(p(u) \cdot u\right) z^p\, dz}_{\text{ф-ла средних}} + \int\limits_{z_{n-1/2}}^{z_{n+1/2}} f(u)\, z^p\, dz = 0$$

$$\frac{1}{R}\left(z^p_{n-1/2} F_{n-1/2} - z^p_{n+1/2} F_{n+1/2}\right) - p_n \cdot y_n V_n + f_n V_n = 0, \quad (5)$$

где $V_n = \int\limits_{z_{n-1/2}}^{z_{n+1/2}} z^p\, dz = \dfrac{z^{p+1}_{n+1/2} - z^{p+1}_{n-1/2}}{p+1}$ – эл-т объема

• Из (3):

$$\frac{du}{dz} = -F \cdot \frac{R}{\lambda(u)}$$

проинтегрируем на интервале

$$\int\limits_{z_n}^{z_{n+1}} \frac{du}{dz} = -R \int\limits_{z_n}^{z_{n+1}} \frac{F}{\lambda(u)}\, dz$$

$$y_n - y_{n+1} = R \cdot F_{n+1/2} \int\limits_{z_n}^{z_{n+1}} \frac{dz}{\lambda(u(z))}$$

$$F_{n+1/2} = \varkappa_{n+1/2} \cdot \frac{y_n - y_{n+1}}{R \cdot h} \ (6), \text{ где } \varkappa_{n+1/2} = \frac{h}{\int\limits_{z_n}^{z_{n+1}} \frac{dz}{\lambda(u(z))}}$$

[если $p = 0$ или λ резко меняется на границах, а узлы – в границах, то решение – точное (таблица?) точность опр. на вычислении $\varkappa_{n+1/2}$

Если применяется метод средних

$$\varkappa_{n+1/2} = \frac{h}{\frac{1}{\lambda_{n+1/2}} \cdot h} = \lambda_{n+1/2} \approx \frac{\lambda_n + \lambda_{n+1}}{2}$$

или метод трапеций

$$\varkappa_{n+1/2} = \frac{h}{\left(\frac{1}{\lambda_{n+1}} + \frac{1}{\lambda_n}\right) \cdot \frac{h}{2}} = \frac{2\lambda_n \lambda_{n+1}}{\lambda_n + \lambda_{n+1}}.$$

- Аналогично, из (3) для $[z_{n-1}, z_n]$:

$$\int_{z_{n-1}}^{z_n} (\cdot)\, dz \to F_{n-1/2} = \varkappa_{n-1/2} \cdot \frac{y_{n-1} - y_n}{Rh} \quad (7)$$

- Подставим (6), (7) в (5):

$$\frac{1}{R}\left(z^p_{n-1/2} \cdot \varkappa_{n-1/2} \frac{y_{n-1} - y_n}{Rh} - z^p_{n+1/2} \varkappa_{n+1/2} \frac{y_n - y_{n+1}}{Rh}\right) - p_n y_n V_n + f_n V_n = 0 \quad (8), \quad n = \overline{1, N-1}$$

~~Также явл. системой с трех~~

(8) имеет вид

$$A_n y_{n-1} + B_n y_n + C_n y_{n+1} = -D_n,$$

где $A_n = \dfrac{z^p_{n-1/2} \cdot \varkappa_{n-1/2}}{R^2 h}$,

$C_n = (z^p_{n+1/2} \cdot \varkappa_{n+1/2}) / R^2 h$,

$B_n = A_n + C_n + p_n V_n$,

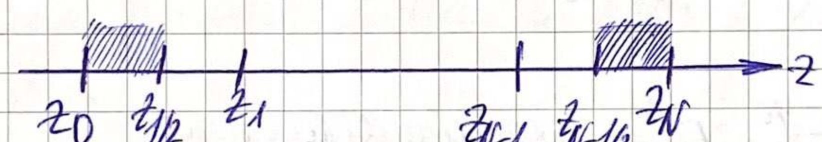
$D_n = f_n V_n$

- $A_n \equiv A_n(y_{n-1}, y_n)$
- $B_n \equiv B_n(y_{n-1}, y_n, y_{n+1})$
- $C_n \equiv C_n(y_n, y_{n+1})$
- $D_n \equiv D_n(y_n)$

[Можно линеаризовать систему, чтобы ее решить]
[(кроме этого необх. знать, от чего зависят коэф-ты)]

Итого: выполнена разностная аппроксимация.

г) Обратимся к краевым условиям.



При $z = z_0$.

$$\int_{z_0}^{z_{1/2}} (\cdot)\, z^p\, dz \,, \qquad z = z_0 ,\ -\lambda(z_0)\frac{du}{R\,dz} = F_0 \quad \text{(II рода)}$$

$$z = 1 ,\ -\lambda(1)\,du/R\,dz = \alpha(u(1) - \beta), \quad \alpha, \beta = \text{const, изв-ны (III рода)}$$

$$-\frac{1}{R}\int_{z_0}^{z_{1/2}} \frac{1}{z^p}\cdot\frac{d}{dz}(z^p F)\, z^p\, dz - \int_{z_0}^{z_{1/2}} p(u)\,u(z)\, z^p\, dz + \int_{z_0}^{z_{1/2}} f(u)\, z^p\, dz = 0$$

$$\frac{1}{R}\left(z_0^p F_0 - z_{1/2}^p F_{1/2}\right) - \frac{h}{4}\left(p_{1/2}\, y_{1/2}\, z_{1/2}^p + p_0\, y_0\, z_0^p\right) + \frac{h}{4}\left(f_{1/2}\, z_{1/2}^p + f_0\, z_0^p\right) = 0 \qquad (9)$$

$$F_{1/2} = \varkappa_{1/2}\,\frac{y_0 - y_1}{Rh},$$

$$y_{1/2} = \frac{y_0 + y_1}{2}$$

$M_0 y_0 + K_0 y_1 = P_0$ (10) — будем приводить (9) к такому виду после подст. выр-й $F_{1/2}$, $y_{1/2}$

где $K_0 = -\dfrac{z_{1/2}^p\,\varkappa_{1/2}}{R^2 h} + \dfrac{p_{1/2}\, z_{1/2}^p\, h}{8}$,

$$M_0 = \frac{z_{1/2}^p\,\varkappa_{1/2}}{R^2 h} + \frac{p_{1/2}\, z_{1/2}^p\, h}{8} + \frac{h}{4}\, p_0\, z_0^p$$

$$P_0 = \frac{z_0^p F_0}{R} + \frac{(f_{1/2} z_{1/2}^p + f_0 z_0^p) h}{4}$$

Получена консервативная система !
(примерно 2-го порядка точности)

Необх. проводить проверки.

1) размерность

(K_0 – такие, чтобы $K_0 y_0$, $M_0 y_1$, P_0 – одной размерности)

2) посмотрим, в какой степени выражение аппроксимирует левое краевое условие, если применить ~~разностную~~ трапеций аппроксимацию.

При $z = z_0$.

$$-\lambda_0 \frac{y_1 - y_0}{Rh} = F_0$$ – простейшая разностная аппроксимация с пом-ью разностной производной

Пренебрегая слагаемыми с h^2 получим

$$M_0 = -\frac{z_{1/2}^p \varkappa_{1/2}}{R^2},$$

$$K_0 = \frac{z_{1/2}^p \varkappa_{1/2}}{R^2},$$

$$P_0 = \frac{z_0^p f_0 h}{R}$$

$$+ \frac{z_{1/2}^p \varkappa_{1/2}}{R^2 h} \cdot (y_0 - y_1) = \frac{z_0^p f_0}{R}$$

$$+ \frac{z_{1/2}^p \varkappa_{1/2}}{z_0^p R} \cdot \frac{y_0 - y_1}{h} = F_0 \quad (11)$$

Для проверки – в т. 1/2

Сравним (11) с

В результате всех преобр-й получим систему

$$\begin{cases} A_n y_{n-1} - B_n y_n + C_n y_{n+1} = -F_n \\ M_0 y_0 + K_0 y_1 = P_0 \\ M_N y_{N-1} + K_N y_N = P_N \end{cases}$$

(разностная схема)

Полученную систему ур-й решают методом прогонки.

Как решать систему, если она - квазилинейна? Откуда брать коэф-ты A_n, B_n, C_n, ..?

] После получения разн. схемы и исследования ее на аппрокс. и уст. возникает вопрос: как построить алгоритм поиска решения?

[1) В лин. случае: когда λ, p, f незав. от u,
лин. схема
~~разн.~~ - метод прогонки

~~2) нелин. случай.~~

(напр. $-\lambda \frac{du}{k\,dz} = F_0 - \alpha u^4$)

2) само ур-е - линейное, а кр. условие - нет.
$\Rightarrow$ проблема с нач. прогоночными условиями

a) изменить направление прогонки

- правая прогонка

$$y_n = \xi_{n+1} y_{n+1} + \eta_{n+1}$$

- левая прогонка

$$y_n = \xi_{n-1} y_{n-1} + \eta_{n-1}$$

- встречная прогонка
(если необх. значение в конкр. т.)

3) нелинейная разн. схема и ур-е.
т. е. $A_n, B_n, C_n, F_n, M_0, K_0, M_N, K_N, P_N, P_0$
являются ф-ями от y_n (сеточной ф-ии)

а) <u>метод простых итераций.</u>

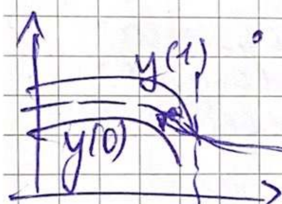
Разн. схема запис. в виде

$$A_n^{(s-1)} y_{n-1}^{(s)} + B_n^{(s-1)} y_n^{(s)} + C_n^{(s-1)} y_{n+1}^{(s)} = F_n^{(s-1)}$$

Условие окончания:

$$\max_{0\le n\le N} \left| \frac{y_n^{(s)} - y_n^{(s-1)}}{y_n^{(s)}} \right| < \varepsilon$$

• достаточно медленный метод



• метод релаксации
для след. итерации коэф-ты берутся на промежутке м/у $y^{(0)}$ и $y^{(1)}$
иначе "разболтка" - получение хаотических результатов.

б) метод Ньютона