

BÀI TẬP GIẢI TÍCH I

1. Tìm giới hạn của các dãy số sau:

$$\begin{array}{llll} \text{a) } u_n = \frac{1}{n^k}, k > 0 & \text{b) } u_n = \frac{2+(-1)^n}{\sqrt{n}} & \text{c) } u_n = \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2} & \text{d) } u_n = \frac{2\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n+1}} \\ \text{e) } u_n = \sqrt[3]{n^2-n^3} + n & \text{f) } u_n = \sqrt[n]{2n+1} & \text{g) } u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \\ \text{h) } u_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}+n} & \text{i) } u_n = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt[3]{n}}{\sqrt{2n+1}} & \text{j) } u_n = n(\sqrt[n]{a}-1) \text{ với } a > 0. \end{array}$$

2. Tìm giới hạn của các dãy số (nếu có):

$$\begin{array}{lll} \text{a) } x_n = \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \dots + \frac{2n-1}{2^{2n}} & \text{b) } x_n = \frac{3^n + (-2)^n}{3^{n+1} + (-2)^{n+1}} & \text{c) } x_n = \frac{2^n + (-3)^n}{2^{n+1} + (-3)^{n+1}} \\ \text{d) } x_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \dots \frac{2n-1}{2n} & \text{e) } x_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \end{array}$$

3. Chứng minh rằng các dãy số sau có giới hạn hữu hạn

$$\text{a) } x_n = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{4}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) \quad \text{b) } x_1 = \sqrt{2}, x_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \dots, x_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}$$

4. Chứng minh rằng

$$\begin{array}{ll} \text{a) } x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \text{ hội tụ} & \text{b) } x_n = \frac{1}{\ln 2} + \dots + \frac{1}{\ln n} \text{ phân kỳ} \\ \text{c) } x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \text{ hội tụ} \end{array}$$

5. Xét sự hội tụ và tìm giới hạn (nếu có) của dãy:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } x_{n+1} = \frac{3x_n + 4}{4x_n + 3}, x_0 = 1 & \text{b) } x_{n+1} = 2 + \frac{1}{2x_n}, x_0 = 2 & \text{c) } x_n = \frac{x_{n-1} + 3}{4}, x_0 = 0 \\ \text{d) } x_n = x_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}} & \text{e) } x_n = 1 + \frac{2}{x_{n-1}}, x_0 = 1 & \text{f) } x_n(3 + x_{n-1}) + 1 = 0, x_0 = 1 \\ \text{g) } x_n = \sqrt{x_{n-1} + 1}, x_0 = \sqrt{3} \end{array}$$

6. Tìm giới hạn của hàm số

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^3 - 1)\sqrt{2x-1}}{x^2 - 1} & \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - \sqrt[4]{1-2x}}{x^2 + x} & \text{c) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{1+x^5} - \sqrt[5]{1+x^3}}{\sqrt[3]{x^4 + x}} & \text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} x^{\frac{1}{\ln(e^x - 1)}} \\ \text{e) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)^2}{\tan^3 x - \sin^3 x} & \text{f) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos 2x}}{x^2} & \text{g) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x^2 - 2^x}{3^x - 1} & \text{h) } \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}} \\ \text{i) } \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\arctan \frac{x+1}{x+2} - \frac{\pi}{4} \right) & \text{k) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3} & \text{l) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\sin^2 x} + \frac{1}{\ln \cos x} \right) & \text{m) } \lim_{x \rightarrow 1^-} \cos \frac{\pi x}{2} \ln(1-x) \end{array}$$

7. Xét tính liên tục của hàm số:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } f(x) = \begin{cases} x \cos \frac{1}{x^2} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases} & \text{b) } f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2} & \text{khi } x > 0 \\ x + \frac{1}{2} & \text{khi } x \leq 0 \end{cases} \\ \text{c) } f(x) = \begin{cases} \frac{\int_0^x e^{t^2} dt}{\sin x} & \text{khi } x > 0 \\ 4 & \text{khi } x = 0 \\ \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{1-\cos x} & \text{khi } x < 0 \end{cases} \end{array}$$

8. Khảo sát tính liên tục đều của hàm số

a) $f(x) = \frac{1}{x}$ trên $[1;2]$ b) $f(x) = \frac{1}{x}$ trên $(0;1]$ c) $f(x) = \cos x^2$ d) $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ trên $(0;1)$

9. Tính đạo hàm của các hàm số $y = f(x)$ được xác định bởi

a) $y = \arcsin \sqrt{1-x^2}$ b) $y = (1+x^2)^{\sin x}$ c) $\begin{cases} x = te^t \\ y = t^2 \ln t \end{cases}$

10. Tính đạo hàm $y' = \frac{dy}{dx}$ của các hàm số cho dưới dạng phương trình ẩn:

a) $3x^2y^3 + y^2 - 4x = 0$ b) $xe^y + ye^x - e^{xy} = 0$ c) $x^3 + y^3 = a^3$ d) $\sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$

11. Tìm đạo hàm cấp hai của các hàm số $y = f(x)$ cho dưới dạng phương trình ẩn:

a) $y = x + \operatorname{arctg} y$ b) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

12. Khai triển các hàm sau thành chuỗi Maclaurin

a) $f(x) = \tan x$ b) $f(x) = \operatorname{arc} \cot x$ c) $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$ d) $\ln(1+x^4)$
e) $f(x) = 2^{x^2}$ f) $f(x) = \frac{x^2+x-2}{x+2}$ g) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

h) $(xy)^2 + y^3 - 8 = 0$ đến x^2 . Áp dụng tính xấp xỉ $y(0.1)$

13. Cho $f(x)$ là đa thức bậc 4 có $f(2) = -1, f'(2) = 0, f''(2) = 2, f'''(2) = -12, f^{(4)}(2) = 24$.

Tính $f(-1), f'(0), f''(1)$. (Gợi ý: Viết khai triển Taylor của $f(x)$)

14. Tìm cực trị của hàm số

a) $f(x) = x + 2 \sin x$ b) $f(x) = \sin x + \cos x$ c) $f(x) = 2 \sin x - \sqrt{3}x + 1$ d) $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3 + 3$
e) $f(x) = x^2 - x \sin x$ f) $f(x) = \sqrt{3x-x^3}$ g) $f(x) = e^x + e^{-x} + 2 \cos x$

15. Cho hàm $f(x)$ có đạo hàm đến cấp 3 trên $[-1;1]$ và thỏa mãn $f(-1) = 0, f(0) = 0, f(1) = 1, f'(0) = 0$.

Chứng minh tồn tại $x \in (-1;1)$ để $f'''(x) \geq 3$.

16. Tính xấp xỉ (Dùng công thức Taylor)

a) $\ln 1.01$ với sai số không quá 10^{-4} b) $\arctan 0.1$ với sai số không quá 10^{-6}

17. Chứng minh (Dùng khảo sát, các định lý trung bình,...)

a) $e^x > 1+x \quad \forall x > 0$ b) $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \quad \forall x \in \mathbb{R}$ c) $|\operatorname{arc} \sin x - \operatorname{arc} \sin y| \geq |x-y|$
d) $\frac{\tan x - \tan y}{x-y} \geq 1 \quad \forall x, y \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right), x \neq y$ e) $\frac{\arctan x - \arctan y}{x-y} \leq 1 \quad \forall x \neq y$
f) $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \quad \forall x \geq 0$

18. Chứng tỏ rằng hàm số $f(x) = x - x^3$ thỏa mãn điều kiện của định lý Rolle trên các đoạn thẳng $-1 \leq x \leq 0$ và $0 \leq x \leq 1$. Tìm các giá trị ξ tương ứng.

19. Kiểm tra điều kiện của định lý Lagrange đối với hàm số $f(x) = x - x^2$ trên đoạn $[1;2]$. Tìm giá trị ξ tương ứng.

20. Đối với các hàm số $f(x) = x^2 + 2$ và $g(x) = x^3 - 1$ hãy kiểm tra điều kiện của định lý Cauchy trên đoạn $[1;2]$ và tìm ξ .

21. Cho $f(x)$ là hàm khả vi liên tục trên $[a; b]$. Chứng minh rằng nếu $f(x) = 0$ có n nghiệm trong $(a; b)$ thì phương trình $f'(x) = 0$ có ít nhất $n - 1$ nghiệm thuộc $(a; b)$. (Dùng định lý Rolle)

22. Khảo sát và vẽ đường cong

a) $y = \sqrt{x(x^2 - 1)}$ b) $y = \frac{x}{x^2 - 1}$ c) $r = a(1 + \cos \varphi)$ d) $r = e^\varphi$ e) $\begin{cases} x = te^t \\ y = te^{-t} \end{cases}$

f) $\begin{cases} x = t^3 - 3\pi \\ y = t^3 - 6 \arctan t \end{cases}$ g) $\begin{cases} x = t^2 \\ y = \frac{1}{2}t \end{cases}$ h) $\begin{cases} x = t^2 + 2t \\ y = t^2 - 2t \end{cases}$ i) $r = a\sqrt{\sin 2\varphi}$

j) $x^4 + y^4 = x^2 + y^2$ (Gợi ý: đưa về phương trình trong hệ tọa độ cực) k) $(x^2 + y^2)y = a^2x$ ($a > 0$)

23. Tính các tích phân

a) $\int \frac{x}{2x^2 - 3} dx$ b) $\int \frac{dx}{2x^2 - 5x + 7}$ c) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + x}}$ d) $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}}$ e) $\int x\sqrt{x+2} dx$

f) $\int \frac{\sin^3 x dx}{\sqrt{\cos x}}$ g) $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{e^{\sin x} - 1}}$ h) $\int \sqrt{1 + 6x^2} dx$ i) $\int \arctan x dx$ k) $\int \frac{\sqrt{x+1}}{x} dx$

l) $\int x\sqrt{1-x^2} \arcsin x dx$ m) $\int \cos^2 3x \sin x dx$ n) $\int \frac{dx}{1 + 4 \cos 2x}$ o) $\int \frac{dx}{\cos 5x}$ p) $\int xe^x \sin x dx$

24. Tìm giới hạn sau dựa vào định nghĩa tích phân xác định. $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, với $S_n = \frac{1}{n^2 + 1} + \frac{2}{n^2 + 2^2} + \dots + \frac{n}{n^2 + n^2}$.

25. Chứng minh bất đẳng thức a) $\frac{1}{10\sqrt{2}} < \int_0^1 \frac{x^9 dx}{\sqrt{x+1}} < \frac{1}{10}$ b) $0 < \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sin x}{x} dx < \ln 3$

26. Tính tích phân

a) $\int_0^9 x\sqrt[3]{1-x} dx$ b) $\int_1^3 \arctan \sqrt{x} dx$ c) $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$ d) $\int_0^{\frac{3}{4}} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2 + 1}}$ e) $\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$

27. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi

a) $y = \sin x, y = \cos x, 0 \leq x \leq \pi$ b) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1, y = 2$ lấy phần $y \geq 2$ c) $r = a(1 + \sin \varphi)$
d) $r^2 = 2a^2 \sin 2\varphi, r = 1, r \geq 1$ e) $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2 xy$ (đưa về tọa độ cực)

28. Tính độ dài đường cong a) $y = \sqrt{1-x^2} + \arcsin x, 0 \leq x \leq \frac{9}{16}$ b) $y = \frac{x}{4} \sqrt{2-x^2}, 0 \leq x \leq 1$.

29. Khảo sát sự hội tụ của tích phân suy rộng

a) $\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$ b) $\int_0^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x}}$ c) $\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}}$ d) $\int_0^1 \frac{\arcsin x}{x\sqrt{1-x^2}} dx$
e) $\int_1^\infty \frac{dx}{(4x^2-1)\sqrt{x^2-1}}$ f) $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x\sqrt{x^2-1}} dx$ g) $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^4 - x^2 + 1} dx$ h) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3 \sqrt{x^2+1}}$
i) $\int_1^{+\infty} \left(1 - \cos \frac{2}{x}\right) dx$ j) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} \left(e^{\frac{1}{x}} - \cos \frac{1}{x}\right) dx$ k) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{e^{\sin x} - 1} dx$ l) $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt[3]{1-x^2}} dx$
m) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^p x \cdot \cos^q x}$ n) $\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^4}} dx \quad n \in \mathbb{N}$ o) $\int_0^{+\infty} \frac{\arctg ax}{x^n} dx \quad a \neq 0$

30. Tính các tích phân suy rộng sau:

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3} & \text{b)} \int_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx & \text{c)} \int_0^{+\infty} \frac{\arctg x}{1+x^{\frac{3}{2}}} & \text{d)} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^5+x^{10}}} \\ \text{e)} \int_0^1 \frac{dx}{2-x\sqrt{1-x}} & \text{f)} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x} \sqrt{1-x}} \end{array}$$

31. Cho $f(x), g(x)$ và $f(x).g(x)$ là các hàm bình phương khả tích trên $[a, b]$. Chứng minh rằng:

$$\left(\int_a^b f(x).g(x) dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \cdot \int_a^b g^2(x) dx$$

32. Chứng minh rằng $\forall x > 0$ ta có: $e^x - 1 < \int_0^x (e^{2t} + e^t) dt < \sqrt{(e^x - 1) \left(e^x - \frac{1}{2} \right)}$

33. Tính tổng

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1} & \text{b)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} & \text{c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n.3^{n-1}} & \text{d)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}+3^{n-1}}{5^n} \end{array}$$

34. Xét sự hội tụ và hội tụ tuyệt đối của chuỗi số

$$\begin{array}{lllll} \text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^3+1}{n^2(n+1)^2} & \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^n & \text{c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2+2}} & \text{d)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n\sqrt{n}} & \text{e)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arcsin \frac{1}{n}}{\sqrt[5]{n+1}} \\ \text{f)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+2}} & \text{g)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+1}{n^2+2} \right)^{n^3} & \text{h)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln^2 n}{n\sqrt{n+1}} & \text{i)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln(n+1)} \end{array}$$

35. Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm

$$\begin{array}{lllll} \text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x-1}{n^x} & \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^3+1}{n^2} \left(\frac{x-2}{x+1} \right)^n & \text{c)} \sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{x}{x^2+n} & \text{d)} \sum_{n=1}^{\infty} \tan \frac{x}{x^2+n^2} & \text{e)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^3x^2} \\ \text{f)} \sum_{n=1}^{\infty} nx(1-x)^n & \text{g)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x-1)^n} \tan \frac{\pi}{2^n} & \text{h)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^{n^2}}{\sqrt[3]{n}} & \text{i)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx+1}{1+n^3x^2} \end{array}$$

36. Tìm bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} (4^n+3^n) \left(\frac{x}{7} \right)^n & \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{n^2} x^n & \text{c)} \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n^2} x^n & \text{d)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{\sqrt[3]{n}} \end{array}$$

37. Tính tổng của chuỗi hàm

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n+1} & \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} n(n+2)x^n & \text{c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{n+1} & \text{d)} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}. \end{array}$$

38. Khai triển hàm $f(x)$ tuần hoàn với chu kỳ 2π thành chuỗi hàm. Biết rằng:

$$\text{a)} f(x) = x^2 \text{ với } -\pi \leq x \leq \pi \quad \text{b)} } f(x) = \operatorname{sgn} x \text{ với } -\pi < x < \pi$$

Áp dụng các khai triển để tính tổng $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ và $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$
