

BÀI TẬP ÔN TẬP MÔN GIẢI TÍCH I

(Sinh viên làm và nộp cho giáo viên bản viết tay vào cuối kỳ)

1. Tìm giới hạn

$$\begin{aligned}
 &1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2+1} + \sin x) \arctan x}{x^2+3} \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x^2} - \cos x) \arcsin x}{x(1-\cos x)} \quad 3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \sin x) \arcsin \frac{x}{1+x}}{2-2\cos x - x^2} \\
 &4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{1+x} + \cos 2x) \sin \frac{\pi x}{2x+1}}{\sqrt{2x+3}} \quad 5) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(1-\cos x) \arccos \frac{2x}{\pi}}{1-x} \quad 6) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + \cos x}{\sin 3x + \sqrt{1+x^2}} \\
 &7) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1-\sqrt{x+1}} - \frac{3}{1-\sqrt{x^2+1}} \right) \quad 8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt[3]{1+3x}}{x^2} \quad 9) \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{x}{x+1} \right)^{\frac{1}{x}}
 \end{aligned}$$

2. Xét tính liên tục của hàm số

$$\begin{aligned}
 &1) f(x) = \begin{cases} \sin x \cdot \sin \frac{1}{x^2} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases} \quad 2) f(x) = \begin{cases} \frac{\cos 2x - 1}{x - \pi} & \text{khi } x \neq \pi \\ 4 & \text{khi } x = \pi \end{cases} \quad 3) f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-2x^2} - \sqrt[3]{1+x^2}}{\ln(1+x^2)} & \text{khi } x < 0 \\ 2x+1 & \text{khi } x \geq 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

3. Tìm điều kiện của tham số để hàm số liên tục tại điểm cho trước

$$\begin{aligned}
 &1) f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{26+x^3} - \sqrt{1+8x^2}}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ A & \text{khi } x = 1 \end{cases} \quad \text{tại } x=1 \quad 2) f(x) = \begin{cases} \frac{\cos 2x - \cos 4x}{\sqrt{x^2+1} - 1} & \text{khi } x \geq 0 \\ a & \text{khi } x = 0 \\ \frac{x \ln(1+bx^2)}{x - \sin x} & \text{khi } x < 0 \end{cases} \quad \text{tại } x=0
 \end{aligned}$$

4. Khảo sát và vẽ đường cong

$$\begin{aligned}
 &1) y = \sqrt{x^3 - 3x} \quad 2) r = 1 + \cos 2\varphi \quad 3) r = \arccos \varphi \quad 4) (x^2 + y^2)y = 4x \\
 &5) y = x^2 - \ln x \quad 6) \begin{cases} x = te^t \\ y = t \end{cases} \quad 7) \begin{cases} x = 3t + t^2 \\ y = t^2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

5. Viết khai triển Maclaurin của hàm

$$1) y = e^{x^2+x} \text{ đến } x^3 \quad 2) y = \sqrt{1-x^2} \text{ đến } x^6 \quad 3) \text{Hàm } y = y(x) \text{ xác định bởi } x+3y = xy^3, \text{ khai triển đến } x^2$$

6. Xét sự hội tụ của tích phân suy rộng

$$\begin{aligned}
 &1) \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \sin \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} dx \quad 2) \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+3x^2)}{\sqrt{x^6+2x^5}} dx \quad 3) \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x} \quad 4) \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{1+x^2} \quad 5) \int_1^{+\infty} \frac{1+x^2}{x^3 \sqrt{x^2+x}} dx
 \end{aligned}$$

7. Tính tích phân

$$\begin{aligned}
 &1) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} \quad 2) \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} \quad 3) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} \quad 4) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(4x^2+1)\sqrt{x^2+1}}
 \end{aligned}$$

8. Ứng dụng của tích phân

1) Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi:

$$a) r = 2 + \cos \varphi \quad b) x^4 + y^4 = 8x^2 y \quad c) y = \arccos x, y = 0, x = -1$$

2) Tính độ dài đường cong

$$a) y = \frac{1}{2} x^2, 0 \leq x \leq 2 \quad b) x = t - \sin t, y = 1 - \cos t, 0 \leq t \leq 2\pi$$

9. Khai triển hàm số thành chuỗi Maclaurin

$$\begin{aligned}
 &1) f(x) = \cos \sqrt{x}, \text{ tính } f^{(20)}(0) \quad 2) f(x) = \cos^3 x \quad 3) f(x) = \ln \frac{3-2x}{2+3x}
 \end{aligned}$$

4) $f(x) = \arcsin \frac{2x}{x^2+1}$, tính $f^{(2011)}(0)$ 5) $f(x) = x \sin 2x \cos 3x$, tính $f^{(10)}(0)$

10. Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n + (-1)^n}{3+2n} (x-1)^n$ 2) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{\sqrt{n+1}} \ln \frac{n+1}{n-1}$ 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{2n+1} \right)^{n^2} x^n$ 4) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1) \ln n}$

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n\sqrt{n+1}}$ 6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{\pi x}{n}$ 7) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2} \ln \left(1 + \frac{|x|}{n} \right) \right)^n$ 8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{3n+2}$

11. Tính tổng

1) $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (2n+3)x^n$ 2) $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)x^{2n}}{n!}$ 3) $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln^n x}{n!}$ 4) $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n \cdot n!} x^n$

5) $S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$ 6) $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2^n}$ 7) $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+1)}$

12. Khai triển hàm thành chuỗi Fourier

1) $f(x) = |x|, -\pi \leq x \leq \pi$ 2) $f(x) = x^2, -\pi \leq x \leq \pi$
