Bài giảng: Logic, tập hợp, ánh xạ và cấu trúc đại số

Hy Đức Mạnh

Bộ môn Toán - Khoa CNTT

Hà Nội, 11th September 2014

Mục lục

Logic mệnh đề và vị từ

Định nghĩa

Mệnh đề là các khẳng định mà ta có thể biết nó đúng hoặc sai. Ta thường ký hiệu mệnh đề bởi các chữ cái in hoa A, B, C,...

Ví dụ

– *"Hà nội là thủ đô Việt nam" - mệnh đề đúng.*
– *Trên tập* $\mathbb{R}$ *xét quan hệ "nhỏ hơn", khi đó mệnh đề "1<0" là mệnh đề sai.*

Các phép toán

1. *Phép tuyển* $\vee$ *(hoặc, hoặc là):* Giả sử A, B - 2 mệnh đề. A$\vee$B (đọc là A hoặc B, A tuyển B) cũng là một mệnh đề, nó chỉ nhận giá trị sai khi cả A và B đều sai còn đúng trong các trường hợp còn lại.
2. *Phép hội* $\wedge$ *(và):* Giả sử A, B - 2 mệnh đề. A$\wedge$B (đọc là A và B, A hội B) cũng là một mệnh đề, nó chỉ nhận giá trị đúng khi cả A và B đều đúng còn sai trong các trường hợp còn lại.
3. *Phép kéo theo* $\to$*:* Giả sử A, B - 2 mệnh đề. A$\to$B (đọc là A kéo theo B, A suy ra B) cũng là một mệnh đề, nó chỉ nhận giá trị sai khi A đúng kéo theo B sai. A còn gọi là giả thiết, B gọi là kết luận.

Các phép toán

1. *Phép tương đương* $\Leftrightarrow$*:* Giả sử A, B - 2 mệnh đề. A$\Leftrightarrow$B (đọc là A tương đương B) cũng là một mệnh đề, nó chỉ nhận giá trị đúng khi A và B cùng đúng hoặc cùng sai.
2. *Phép phủ định* $\rceil$*:* Giả sử A là mệnh đề. $\rceil$A (đọc là phủ định A) cũng là một mệnh đề và nó nhận giá trị ngược lại với giá trị A.

Mệnh đề lượng từ

1. Tập hợp, phần tử: Tập hợp là một khái niệm không định nghĩa được mà chỉ có thể mô tả nó.
   - Ký hiệu tập hợp bởi các chữ cái in hoa A, B, C,... các phần tử của tập hợp ký hiệu bởi chữ cái thường a,b, c,... Ta viết $a \in A$ để chỉ a là phần tử của tập hợp A.
2. Hàm mệnh đề: Ta nói $f(x_1, .., x_n)$ là một mệnh đề n-ngôi xác định trên tập A nếu với mọi $(\forall)$ $a_1, ..., a_n \in A$ thì $f(a_1, ..., a_n)$ là một mệnh đề.

Mệnh đề lượng từ

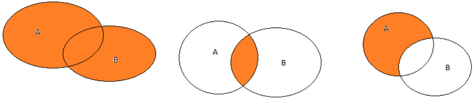
1. Lượng từ tồn tại (riêng): Giả sử $f(x)$ là một hàm mệnh đề xác định trên A, mệnh đề "$\exists x f(x)$" - đọc là "tồn tại x để $f(x)$" - nó nhận giá trị đúng khi có $a \in A$ để $f(a)$ là đúng.
2. Lượng từ phổ biến (chung): Giả sử $f(x)$ là một hàm mệnh đề xác định trên A, mệnh đề "$\forall x f(x)$" - đọc là "với mọi x để $f(x)$" - nó nhận giá trị đúng khi với mỗi $a \in A$ bất kỳ thì $f(a)$ là đúng.

Định lý

Phủ định của mệnh đề có chứa lượng từ là mệnh đề nhận được bằng cách thay các lượng từ chung thành các lượng từ riêng và hàm mệnh đề thay bằng phủ định của nó.

Các phép toán trên tập hợp

1. *Phép hợp:* $A \cup B$ đọc là A *hợp* B là tập các phần tử thuộc ít nhất một trong hai tập hợp đó (Hình 1a))
   $A \cup B = \{x | (x \in A) \vee (x \in B)\}$
2. *Phép giao:* $A \cap B$ đọc là A *giao* B là tập các phần tử thuộc cả A và B(Hình 1b)) $A \cap B = \{x | (x \in A) \wedge (x \in B)\}$
3. Hiệu của hai tập hợp: $A \setminus B$ đọc là A *trừ* B là tập các phần tử thuộc cả A và không thuộc B (Hình 1c))
   $A \setminus B = \{x : (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$



a) b) c)

Các phép toán trên tập hợp

1. Hiệu đối xứng của hai tập hợp: $A \triangle B$ là tập hợp được xác định như sau: $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ (Hình 2a)).
2. *Phần bù:* Giả sử X là một tập hợp và A là tập con của X. Phần bù của A trong X ký hiệu là $\overline{A}$ (hay $C_X A$) và xác định bởi $\overline{A} = X \setminus A$ (Hình 2b)).

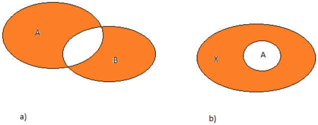


Figure: Hợp, giao và hiệu của hai tập hợp

Quan hệ tương đương và thứ tự bộ phận

1. Giả sử A, B là các tập hợp. Tích Descartes của A và B ký hiệu là $A \times B$ là tập hợp gồm các phần tử có dạng (a, b) ở đó $a \in A$ và $b \in B$.
2. Giả sử X là một tập hợp. Một quan hệ hai ngôi (hay quan hệ) trên X là một tập con $\mathcal{R}$ của X^2. Nếu $(x, y) \in \mathcal{R}$ ta nói x quan hệ $\mathcal{R}$ với y và viết là $x\mathcal{R}y$, vậy $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow (x, y) \in \mathcal{R}$.
3. Một quan hệ $\mathcal{R}$ gọi là *tương đương* nếu quan hệ đó có các tính chất phản xạ, đối xứng và bắc cầu.
4. Quan hệ $\mathcal{R}$ gọi là *thứ tự bộ phận* (hay *từng phần*) nếu có các tính chất phản xạ, phản đối xứng và bắc cầu.

Ánh xạ

1. Ánh xạ f từ X vào Y ký hiệu là $f : X \to Y$ là một quy tắc cho tương ứng mỗi phần tử $x \in X$ với một và chỉ một phần tử $y \in Y$. Khi đó ta nói y là ảnh của x và viết là $y = f(x)$. X - gọi là tập xác định của ánh xạ f hay tập nguồn, Y - gọi là tập đích.
2. tính chất (xem TL)

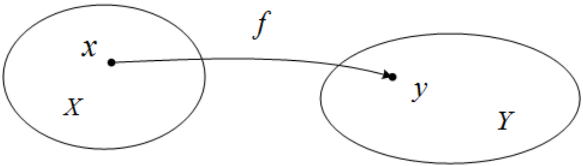


Figure: Ánh xạ

Đơn ánh, toàn ánh, song ánh

1. f - toàn ánh (lên, tràn ánh) nếu $f(X) = Y$, tức là $\forall y \in Y \exists x \in X : y = f(x)$ hay nói cách khác $f^{-1}(y)$ có không ít hơn một phần tử.
2. f - đơn ánh nếu $\forall x, x' \in X$ từ $x \neq x' \rightarrow f(x) \neq f(x')$. Vậy f - đơn ánh khi và chỉ khi với $y \in Y$ tập $f^{-1}(y)$ có không quá một phần tử.
3. f - song ánh nếu nó vừa đơn ánh vừa toàn ánh, tức là $\forall x \in X \exists ! y \in Y : y = f(x)$. Một song ánh $X \rightarrow X$ còn gọi là một phép thế trên X.

Ánh xạ hợp và ngược

1. Cho hai ánh xạ $f : X \to Y$ và $g : Y \to Z$, ánh xạ từ X vào Z xác định bởi $x \mapsto g(f(x))$ gọi là hợp thành (tích) của g và f ký hiệu là $g \circ f$ (hay gf).
2. Ánh xạ $Id_X : X \to X$ sao cho $Id_X(x) = x, \forall x \in X$ gọi là ánh xạ đồng nhất trên X.
3. Giả sử $f : X \to Y$ là một ánh xạ. f gọi là khả ngịch nếu tồn tại ánh xạ $g : Y \to X$ sao cho $g \circ f = Id_X$ và $f \circ g = Id_Y$. Khi đó g gọi là ánh xạ ngược hay nghịch đảo của f và ký hiệu là f^{-1}.

Định lý

(Tồn tại ánh xạ ngược) Ánh xạ $f : X \to Y$ có f^{-1} khi và chỉ khi f là song ánh.

Phép toán hai ngôi

1. Giả sử X tập hợp khác rỗng. Một phép toán hai ngôi trên X là một ánh xạ $\circ : X \times X \to X : (x, y) \mapsto x \circ y$. Phép toán $\circ$ gọi là hợp thành của x và y.
2. Các tính chất thường gặp:
   i) Kết hợp: $\forall x, y, z \in X$ ta có $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$
   ii) Giao hoán: $\forall x, y \in X : x \circ y = y \circ x$
   iii) Phân phối: Giả sử có hai phép toán hai ngôi $*$ và $\circ$ trên X. Phép toán $*$ gọi là có phân phối bên trái với phép toán $\circ$ nếu $\forall x, y, z \in X : x * (y \circ z) = (x * y) \circ (x * z)$. Tương tự ta có tính chất phân phối bên phải. Nếu không nói gì ta hiểu phép toán có tính chất phân phối cả hai phía.

Nhóm, vành, trường

1. Giả sử tập hợp $X \neq \varnothing$ với phép toán hai ngôi $\circ$ đã cho. Ký hiệu $(X, \circ)$ gọi là một nhóm nếu phép toán là kết hợp, có phần tử trung hòa e và mọi phần tử đều khả đối xứng (khả nghịch). Ngoài ra nếu $\circ$ có tính chất giao hoán thì nhóm được gọi là nhóm giao hoán (hay Abel).
2. Xét hai phép toán trên tập $X \neq \varnothing$ là $+$ và $\cdot$. Ta nói tập X với hai phép toán trên lập thành một vành $(X, +, \cdot)$ nếu: $(X, +, 0)$ là nhóm Abel và phép nhân $(\cdot)$ có tính chất kết hợp và phân phối với phép cộng $(+)$. Ngoài ra nếu phép nhân có đơn vị 1 thì ta nói *vành có đơn vị*, phép nhân có tính chất giao hoán thì gọi là *vành giao hoán*.
3. Trường là một vành giao hoán có đơn vị $1 \neq 0$ và mọi phần tử khác 0 đều khả nghịch (đối với phép nhân).

Số phức

1. Trường số phức $\mathbb{C} \equiv (\mathbb{R}^2, +, .)$
2. Dạng đại số: phần thực phần ảo, liên hợp. Dạng lượng giác: module và argumen, công thức Moivre dạng mũ của số phức.
3. Căn bậc n của số phức z là tập hợp

$$\mathbb{C}_{\sqrt[n]{z}} = \{\mathrm{w} \in \mathbb{C} : \mathrm{w}^n = z\}$$

4. Vành đa thức (xem TL)

Bài tập

1. Bài tập bắt buộc (trong chương I ĐSTT và HGT của N. X. Viên): 8 a,b; 35; 40; 44; 45; 48; 50;
2. Bài tập làm thêm: 1; 31; 53; 54; 55; 56; 58;

Bài giảng: Ma trận

Hy Đức Mạnh

Bộ môn Toán - Khoa CNTT

Hà Nội, 11th September 2014

Mục lục

Ma trận

1. Giả sử $\mathbb{K}$ là một trường (thực hoặc phức), m, n là các số tự nhiên.

Định nghĩa

Ma trận cấp $m \times n$ trên trường $\mathbb{K}$ là một mảng chữ nhật gồm m hàng, n cột với $m \times n$ phần tử $a_{ij}, i = \overline{1;m}, j = \overline{1;n}$ dạng

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

và viết đơn giản ở dạng $A = (a_{ij})_{m \times n}$.

2. Tập các ma trận cỡ $m \times n$ ký hiệu bởi $M_{m\times n}(\mathbb{K})$. Khi $m = n$ ta nói ma trận vuông cấp n, tập các ma trận vuông cấp n ký hiệu $M_n(\mathbb{K})$.

Các phép toán trên ma trận

1. Các ma trận đặc biệt $O; E$.
2. Phép cộng ma trận và tính chất
3. Phép nhân ma trận và tính chất
4. Phép chuyển vị ma trận và tính chất.
5. Vài loại ma trận thường gặp: Ma trận hình thang, ma trận tam giác, ma trận đường chéo, ma trận đối xứng và phản đối xứng, ma trận trực giao; ma trận khối.
6. Đa thức ma trận.

Bài tập

1. Bài tập bắt buộc (trong chương II ĐSTT và HGT của N. X. Viên): 1; 2; 3; 7; 8; 12; 14; 15; 16; 18; 23
2. Bài tập làm thêm: 17; 21;

Bài giảng: Hạng ma trận, ma trận nghịch đảo

Hy Đức Mạnh

Bộ môn Toán - Khoa CNTT

Hà Nội, 11th September 2014

Mục lục

Hạng ma trận

Giả sử ma trận $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, ở đó $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ hoặc $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Định nghĩa

Nếu tồn tại số r sao cho $0 \leq r \leq min\{m, n\}$ *mà*
i) Tồn tại định thức con cấp r $\neq 0$ *(định thức của ma trận lập từ các phần tử nằm trên giao của r hàng r cột nào đó của A)*
ii) Mọi định thức con cấp $r + 1$ *(nếu có) bằng* 0*, số r (duy nhất!) như thế gọi là hạng của ma trận A và ký hiệu là* $rank(A)$.

Nhận xét

Rõ ràng $r = 0$ *khi và chỉ khi* $a_{ij} = 0$*, và tất nhiên r lớn nhất là bằng* $min\{m, n\}$*. Các phép biến đổi sơ cấp không làm thay đổi hạng của ma trận vì chúng không làm thay đổi tính chất bằng* 0 *hay khác* 0 *của định thức.*

Ma trận hình thang

Định nghĩa

Ma trận $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ gọi là hình thang nếu
i) Các hàng khác 0 (tức là hàng ít nhất một phần tử khác 0) nằm trên các hàng bằng 0
ii) Với hai hàng khác 0 phần tử khác 0 đầu tiên của hàng dưới luôn nằm bên phải cột chứa phần tử khác 0 đầu tiên ở hàng trên.

Ví dụ:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Phép biến đổi sơ cấp ma trận

1. Đổi chỗ hai hàng (cột) $h_i \leftrightarrow h_j (c_i \leftrightarrow c_j)$.
2. Nhân số $\alpha \neq 0$ với hàng (cột)i: $\alpha h_i \to h_i (\alpha c_i \to c_i)$.
3. Nhân số $\alpha \neq 0$ với hàng (cột) i rồi cộng vào hàng (cột) j: $\alpha h_i + h_j \to h_j (\alpha c_i + c_j \to c_j)$.

Thuật toán tìm hạng ma trận: Sử dụng các phép biến đổi sơ cấp đưa ma trận về dạng hình thang rồi kết luận hạng của ma trận. Phương pháp này thường được gọi là phép khử Gauss.

Mệnh đề

i)Giả sử tích AB xác định, khi đó

$$rank(AB) \leq min\{rank(A), rank(B)\}$$

ii) Giả sử B là ma trận vuông và tích AB xác định. Nếu $\det(B) \neq 0$ *thì* $rank(AB) = rank(A)$.

Ma trận khả nghịch

Định nghĩa

Giả sử $A = (a_{ij})_{n\times n} \in M_n(\mathbb{K})$, E là ma trận đơn vị cấp n. Nếu tồn tại ma trận $B \in M_n(\mathbb{K})$ sao cho $AB = BA = E$ thì ma trận A gọi là khả nghịch.

Ký hiệu $GL_n(\mathbb{K})$ là tập các ma trận vuông cấp n khả nghịch, dễ dàng kiểm tra tập này với phép nhân ma trận lập thành một nhóm và gọi là *nhóm tuyến tính tổng quát cấp n*.

Định lý

Giả sử $A \in M_n(\mathbb{K})$. A khả nghịch khi và chỉ khi $\det(A) \neq 0$.

Tìm ma trận nghịch đảo bằng biến đổi sơ cấp

Bản chất của các biến đổi sơ cấp ma trận (xem TL).

Thuật toán tìm ma trận nghịch đảo: Sử dụng biến đổi sơ cấp hàng tìm ma trận nghịch đảo theo sơ đồ (thường được gọi là phép khử Gauss-Jordan)

$$(A|E) \to (E|A^{-1})$$

Tương tự chúng ta có thể sử dụng biến đổi sơ cấp cột tìm ma trận nghịch đảo theo sơ đồ sau

$$\left(\frac{A}{E}\right) \to \left(\frac{E}{A^{-1}}\right)$$

Định lý Hamilton-Caylay

Giả sử $A = (a_{ij})_{n\times n} \in M_n(\mathbb{K})$, ma trận $(A - \lambda E)$ gọi là *ma trận đặc trưng* của A còn $\det(A - \lambda E)$ là một đa thức bậc n của λ trên $\mathbb{K}$ gọi là *đa thức đặc trưng*

$$P_n(\lambda) = (-1)^n\lambda^n + (-1)^{n-1}\alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots - \alpha_1\lambda + \alpha_0.$$

Không khó để thấy $\alpha_0 = \det(A)$ còn $\alpha_{n-1} = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}$ gọi là *vết* của ma trận A ký hiệu là $Trace(A)$.

Định lý

(Định lý Hamilton-Cayley) Mọi ma trận vuông A đều là nghiệm của đa thức đặc trưng của nó, tức là $P_n(A) = O$.

Phân tích LU

Phân tích một ma trận khả nghịch $A \in GL_n(\mathbb{K})$ thành tích của hai ma trận tam giác dưới L và trên U, cả L, U đều khả nghịch được gọi là *phân tích LU* của A.

Thuật toán:

1. Biến đổi sơ cấp hàng ma trận A thành ma trận tam giác trên U (không có đổi chỗ các hàng). Như đã biết, bản chất của quá trình này là nhân A với dãy ma trận không suy biến dạng tam giác dưới, giả sử dãy đó là $C = C_k \dots C_2 C_1$, ta có
$$U = C_k \dots C_2 C_1 A = CA$$
2. Do $LU = A$ nên tìm được L bằng công thức
$$L = {C_1}^{-1} \dots {C_{k-1}}^{-1} {C_k}^{-1} = C^{-1}$$

Ứng dụng: Giải hệ phương trình, tính định thức...

Bài tập

1. Bài tập bắt buộc (trong chương II ĐSTT và HGT của N. X. Viên): 19; 20; 54; 55; 57; 59; 60;
2. Bài tập làm thêm: 24; 25; 26; 27; 28; 29; 30; 64.

Bài giảng: Hệ phương trình tuyến tính

Hy Đức Mạnh

Bộ môn Toán - Khoa CNTT

Hà Nội, 11th September 2014

Mục lục

Hệ tổng quát và nghiệm

Định nghĩa

Ta gọi hệ phương trình tuyến tính tổng quát m phương trình, n ẩn trên trường $\mathbb{K}$ $(m, n \in \mathbb{N})$ *là hệ phương trình:*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\quad\quad\quad .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1}$$

trong đó $a_{ij}, b_i(i = \overline{1; m}, j = \overline{1; n})$ *cho trước trên* $\mathbb{K}$, x_j *là các ẩn cần tìm. Khi các số hạng ở vế phải hệ bằng* 0 *ta gọi là hệ phương trình thuần nhất.*

Nghiệm, dạng tổng và dạng ma trận

Định nghĩa

Nghiệm của hệ là bộ $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ *mà khi thay* $x_j = \lambda_j (j = \overline{1; n})$ *ta được các đẳng thức trên* $\mathbb{K}$. *Nếu hệ có nghiệm ta nói hệ tương thích, ngược lại ta nói hệ không tương thích.*

Dạng tổng:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{\text{ij}} x_j = b_i, i = \overline{1; m} \qquad (2)$$

Dạng ma trận:

$$Ax = b \qquad (3)$$

ở đó $A = (a_{ij})_{m\times n}, b = (b_i)_{m\times 1}, x = (x_j)_{n\times 1}$.

Hệ Cramer

Khi $m = n$ (1) được gọi là *hệ Cramer* nếu $\det(A) \neq 0$. Ký hiệu A_{x_j} là ma trận A thay cột thứ j bởi cột hệ số tự do b.

Định lý

(công thức Cramer) Hệ Cramer có nghiệm duy nhất được cho bởi công thức

$$x_j = \frac{\det\left(A_{x_j}\right)}{\det(A)}, j = \overline{1; n}$$

Hệ quả

Hệ n phương trình tuyến tính thuần nhất n ẩn có nghiệm không tầm thường khi và chỉ khi định thức ma trận hệ bằng 0.

Định lý Cronecker-Capelli

Xét hệ (1), ma trận A gắn thêm cột hệ số vào cột thứ $n+1$ gọi là ma trận mở rộng của hệ

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Định lý

(Cronecker-Capelli) i) Hệ (1) có nghiệm khi và chỉ khi $rank(A) = rank(\widetilde{A})$.
ii) Nếu $rank(A) = rank(\widetilde{A}) = r$ *thì hệ (1) tương đương với hệ* r *phương trình nằm trên* r *hàng có định thức con cấp* r *khác* 0.

Phép khử Gauss giải hệ tuyến tính tổng quát

Nếu hệ (1) tương thích thì sẽ có r ẩn giải theo $n-r$ ẩn còn lại, r ẩn đó gọi là các ẩn *phụ thuộc*, $n-r$ ẩn còn lại gọi là *tự do*.

Thuật toán:

1. Viết ma trận mở rộng của hệ $\widetilde{A}=(A|b)$, sử dụng các biến đổi sơ cấp hàng đưa ma trận này về dạng hình thang (chú ý rằng có thể sử dụng đổi vị trí các cột nhưng phải đánh số lại các ẩn).
2. Kiểm tra điều kiện $rank(A)=rank(\widetilde{A})=r$, nếu không thỏa mãn thì kết luận hệ vô nghiệm, bài toán dừng lại. Nếu điều kiện này thỏa mãn hệ có r ẩn phụ thuộc vào $n-r$ ẩn tự do.
3. Kết luận nghiệm (giải r ẩn theo $n-r$ ẩn tự do hoặc vô nghiệm).

Bài tập

1. Bài tập bắt buộc (trong chương II ĐSTT và HGT của N. X. Viên): 67; 68; 69; 70; 74; 76;
2. Bài tập làm thêm: 66; 71; 77;

Bài giảng: Không gian vector

Hy Đức Mạnh

Bộ môn Toán - Khoa CNTT

Hà Nội, 11th September 2014

Mục lục

Hai phép toán: cộng vector và nhân vô hướng

Giả sử $\mathbb{K}$ là một trường, V là tập khác rỗng, các phần tử của V gọi là *vector* và ký hiệu bởi $a, b, ..,$ các phần tử của $\mathbb{K}$ gọi là *vô hướng (scalar)* ký hiệu bởi $\lambda, \theta, \ldots$ Trên V trang bị hai phép toán

- Phép cộng:

$$+ : V \times V \to V$$
$$(a, b) \mapsto a + b$$

- Phép nhân ngoài:

$$\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$$
$$(\lambda, a) \mapsto \lambda a$$

Định nghĩa không gian vector

Ta nói V với hai phép toán trên lập thành một *không gian vector* (hay *không gian tuyến tính*) trên $\mathbb{K}$ (viết tắt là $\mathbb{K}$ - không gian vector) nếu tám tiên đề sau thỏa mãn:

1. Với mọi vector $a, b, c \in V$ ta có $(a + b) + c = a + (b + c)$
2. Tồn tại vector $0 \in V$ sao cho $a + 0 = 0 + a = a, \forall a \in V$
3. Với mọi vector $a \in V$ tồn tại vector $-a$ để $a + (-a) = (-a) + a = 0$
4. Với mọi vector $a, b \in V$ thì $a + b = b + a$
5. Với mọi vô hướng $\lambda, \eta \in \mathbb{K}$, vector $a \in V$ đều có: $(\lambda + \eta)a = \lambda a + \eta a$
6. Với mọi vô hướng $\lambda \in \mathbb{K}$, vector $a, b \in V$ đều có: $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$
7. Với mọi vô hướng $\lambda, \eta \in \mathbb{K}$, vector $a \in V$ thì $(\lambda\eta)a = \lambda(\eta a)$
8. Với mọi vector $a \in V$ thì $1a = a$, ở đó 1 là đơn vị trường $\mathbb{K}$.

Tính chất

Mệnh đề

Trong không gian vector V, *với mọi* $a, b, c \in V$, $\lambda \in \mathbb{K}$ *thì*
1) Vector 0 *và vector đối* $-a$ *là duy nhất*
2) Phương trình ẩn vector $x + a = b$ *có duy nhất nghiệm* $x = b - a$
3) Nếu $a + c = b + c$ *thì có thể giản ước được, tức là khi đó có* $a = b$
4) $0a = 0 = \lambda 0$, *ở đây* 0 *là vô hướng trong phép nhân đầu tiên, là vector trong phép nhân thứ hai.*
5) $\lambda a = 0$ *khi và chỉ khi hoặc* $\lambda = 0$ *hoặc* $a = 0$
6) $-(\lambda a) = (-\lambda)a$

Không gian vector con

Định nghĩa

Giả sử V là $\mathbb{K}$ - không gian vector. Tập hợp $W \subseteq V$ gọi là một không gian vector con của V nếu đối với phép toán cộng vector và nhân vô hướng cảm sinh trên W thì W cũng là không gian vector.

Nói cách khác W đóng với phép cộng vector và nhân vô hướng, hay là

$$a + b \in W, \forall a, b \in W$$

$$\lambda a \in W, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall a \in \mathrm{W}$$

Thực hành kiểm tra không gian con:

$$\lambda a + \eta b \in \mathrm{W}, \forall \lambda, \eta \in \mathbb{K}, \forall a, b \in \mathrm{W}$$

Không gian vector con

Định nghĩa

Giả sử V là $\mathbb{K}$ - không gian vector. Tập hợp $W \subseteq V$ gọi là một không gian vector con của V nếu đối với phép toán cộng vector và nhân vô hướng cảm sinh trên W thì W cũng là không gian vector.

Nói cách khác W đóng với phép cộng vector và nhân vô hướng, hay là

$$a + b \in W, \forall a, b \in W$$

$$\lambda a \in W, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall a \in \mathrm{W}$$

Thực hành kiểm tra không gian con:

$$\lambda a + \eta b \in \mathrm{W}, \forall \lambda, \eta \in \mathbb{K}, \forall a, b \in \mathrm{W}$$

Hệ độc lập tuyến tính và phụ thuộc tuyến tính

Định nghĩa

Hệ vector $\{a_1, ..., a_n\}$ *trong* $\mathbb{K}$ *- không gian vector* V *gọi là phụ thuộc tuyến tính nếu tồn tại* $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$ *không đồng thời bằng* 0 *sao cho tổ hợp tuyến tính* $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i = 0$

Mệnh đề

i) Hệ một vector a *là độc lập tuyến tính khi và chỉ khi* $a \neq 0$
ii) Hệ $\{a_1, .., a_n\}$ *độc lập tuyến tính thì* $a_i \neq 0, \forall i = \overline{1; n}$
iii) Hệ n *vector* $\{a_1, .., a_n\}$ *phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi có một vector biểu diễn tuyến tính qua* $n - 1$ *vector còn lại*
iv) Giả sử ta có hệ $\{a_i\}_{i \in I}$*, ở đó* I *là tập chỉ số nào đó và* $J \subset I$*. Nếu hệ* $\{a_j\}_{j \in J}$ *phụ thuộc tuyến tính thì hệ* $\{a_i\}_{i \in I}$ *phụ thuộc tuyến tính và nếu* $\{a_i\}_{i \in I}$ *độc lập tuyến tính thì* $\{a_j\}_{j \in J}$ *đltt.*

Tính chất hệ độc lập tuyến tính và phụ thuộc tuyến tính

Định lý

Giả sử $\{a_1, ..., a_m\}$ và $\{b_1, ..., b_n\}$ là hai hệ vector trong $\mathbb{K}$ - không gian vector V. Nếu hệ $\{a_1, ..., a_m\}$ độc lập tuyến tính và mỗi vector biểu thị tuyến tính qua hệ $\{b_1, ..., b_n\}$ thì $m \leq n$.

Hai hệ vector tùy ý trong $\mathbb{K}$ - không gian vetcor V gọi là *tương đương* nếu chúng có thể biểu thị tuyến tính qua nhau.

Hệ quả

Hai hệ vector $\{a_1, ..., a_m\}$ và $\{b_1, ..., b_n\}$ tương đương nhau và cả hai cùng độc lập tuyến tính thì $m = n$.

Hệ độc lập tuyến tính tối đại

Định nghĩa

Hệ $\{a_i\}_{i\in I}$ trong $\mathbb{K}$ - không gian vetcor V, với I là tập chỉ số nào đó. Hệ $\{a_j\}_{j\in J\subset I}$ gọi là hệ con độc lập tuyến tính tối đại của hệ ban đầu nếu thêm bất kỳ vector $a_i, i \in I\backslash J$ nào thì hệ đều phụ thuộc tuyến tính.

Định lý

Nếu hệ con $\{a_1, ..., a_n\}$ là độc lập tuyến tính tối đại của $\{a_i\}_{i\in I}$ thì mọi vector $a_i, i \in I$ đều biểu thị tuyến tính duy nhất qua $\{a_1, ..., a_n\}$.

Chú ý: i) Một hệ hữu hạn vector luôn có thể xây dựng một hệ con độc lập tuyến tính tối đại.
ii) Hai hệ con độc lập tuyến tính tối đại của một hệ vector thì tương đương nhau.

Hạng hệ hữu hạn vector

Định nghĩa

Xét hệ hữu hạn vector $\{a_i\}_{i\in I}$ (I hữu hạn), mọi hệ con độc lập tuyến tính tối đại của hệ này đều tương đương nhau và có cùng số vector, số đó gọi là hạng của hệ vector, ký hiệu là $rank\{a_i\}_{i\in I}$.

Dễ thấy rằng

1. Nếu $rank\{a_i\}_{i\in I} = r$ thì $0 \le r \le |I|$, hơn thế $r = |I|$ khi và chỉ khi hệ $\{a_i\}_{i\in I}$ độc lập tuyến tính, $r = 0$ khi và chỉ khi $a_i = 0, \forall i$.
2. Hai hệ hữu hạn vector tương đương nhau thì chúng có cùng hạng.
3. Nếu có hệ vector $\{b_j\}_{j\in J}$ biểu thị tuyến tính được qua hệ $\{a_i\}_{i\in I}$ thì $rank\{a_i\}_{i\in I} = rank\left(\{a_i\}_{i\in I} \cup \{b_j\}_{j\in J}\right)$.

Hệ sinh và cơ sở

Định nghĩa

Giả sử V là $\mathbb{K}-$kgvt. Một hệ vector trong V gọi là hệ sinh của V nếu mọi vector của V đều biểu thị tuyến tính qua hệ này.
– Một hệ sinh của V độc lập tuyến tính gọi là một cơ sở của V.
– Số vector cơ sở của $\mathbb{K}$ - không gian vector V được gọi là chiều của của không gian này, ký hiệu là $\dim_{\mathbb{K}} V$, hay đơn giản là $\dim V$ nếu như đã xác định V trên trường $\mathbb{K}$.

Nhận xét: Trong không gian vector V n chiều ta có
i) Mọi hệ có số vector lớn hơn n đều phụ thuộc tuyến tính.
ii) Mọi cơ sở có đúng n vector, mọi hệ đltt gồm n vector đều là cơ sở.
iii) Mọi hệ đltt đều có thể bổ sung để được cơ sở của V.
iv) Mọi vector của V đều biểu thị tuyến tính duy nhất qua cơ sở cố định.

Tọa độ vector trong cơ sở. Đổi tọa độ

Giả sử V là $\mathbb{K}$ - không gian vector n chiều. Trong V cho một cơ sở cố định $\{e_1, ..., e_n\}$ (*ký hiệu hình thức*, $(e) = (e_1, ..., e_n)$ *biểu diễn dưới dạng hàng, mỗi phần tử lại là một vector*). Biểu diễn sau là duy nhất:

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i.$$

Bộ $(x_1, x_2, ..., x_n)$ gọi là *tọa độ* của x trong cơ sở $\{e_1, ..., e_n\}$. *Chú ý tọa độ vector được hiểu là dạng ma trận cột.*
Ma trận chuyển cơ sở $C : (e) \to (e')$ ở đó $C = (c_{ij})_{n\times n} \in M_n(\mathbb{K})$, ta có:
Liên hệ giữa hai cơ sở: $(e') = (e)C$

Liên hệ giữa hai tọa độ cũ và mới: $x_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x'_j$

Định lý về hạng ma trận

Định lý

Hạng của ma trận A bằng hạng của hệ vector hàng (cột) của nó, tức là

$$rank\,(A) = rank\,(r_1, \ldots, r_m) = rank\,(c_1, \ldots, c_n)$$

Bài toán tìm cơ sở, chiều của không gian con sinh bởi một hệ vector $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$

1. Tìm hạng của hệ vector bằng cách viết ma trận tạo thành từ các *hàng*. Dùng biến đổi sơ cấp *hàng* đưa ma trận về dạng hình thang.
2. Số hàng khác 0 trong ma trận hình thang chính là hạng của hệ vector hay chính là chiều của không gian con sinh bởi hệ này còn sở của không gian con sinh bởi hệ chính là các vector hàng khác 0 của ma trận hình thang.

Không gian tổng và giao

Mệnh đề

Giả sử V là $\mathbb{K}$-kgvt, W_1, W_2 là các không gian con của V. Khi đó $W_1 \cap W_2$, $\mathrm{W}_1 + \mathrm{W}_2 = \{x = a_1 + a_2 : a_1 \in \mathrm{W}_1, a_2 \in \mathrm{W}_2\}$ là các không gian con của V.

Định lý

Giả sử V là $\mathbb{K}$ - không gian vector hữu hạn chiều, W_1, W_2 là các không gian con của V, khi đó

$$\dim(\mathrm{W}_1 + \mathrm{W}_2) = \dim(\mathrm{W}_1) + \dim(\mathrm{W}_2) - \dim(\mathrm{W}_1 \cap \mathrm{W}_2)$$

Ba bài toán quan trọng

Bài toán 1: Tìm cơ sở chiều các không gian con W_1 và W_2, giả sử cơ sở của chúng lần lượt là $\{a_1, a_2, ..., a_l\}$ và $\{b_1, b_2, ..., b_m\}$.
Bài toán 2: Để tìm cơ sở chiều của không gian tổng $W_1 + W_2$ ta tìm cơ sở chiều của không gian con sinh bởi hệ vector $\{a_1, a_2, ..., a_l, b_1, b_2, ..., b_m\}$.
Bài toán 3: Để tìm cơ sở chiều của không gian giao $W_1 \cap W_2$ ta tìm cơ sở chiều không gian nghiệm hệ thuần nhất với $l + m$ ẩn là $x_1, ..., x_l, y_1, ..., y_m$ sau

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + ... + x_l a_l = y_1 b_1 + y_2 b_2 + ... + y_m b_m$$

Bài tập

1. Bài tập bắt buộc (trong chương III ĐSTT và HGT của N. X. Viên): 1; 2; 3; 4; 5;6 ;7; 8; 9;10; 11; 12; 13; 14; 15; 16; 21; 22; 23; 26; 28; 30; 32;
2. Bài tập làm thêm: 18; 19; 20;

Bài giảng: Ánh xạ tuyến tính

Hy Đức Mạnh

Bộ môn Toán - Khoa CNTT

Hà Nội, 11th September 2014

Mục lục

Định nghĩa

Định nghĩa

Giả sử V, W là các $\mathbb{K}$ - không giac vector. Ánh xạ f từ V vào W gọi là một ánh xạ tuyến tính (đồng cấu tuyến tính) nếu nó bảo toàn các phép toán trên V, tức là
i) $f(x+y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in V$
ii) $f(\lambda x) = \lambda f(x), \forall \lambda \in \mathbb{K}, x \in V.$

Một ánh xạ tuyến tính từ V vào chính nó được gọi là một *tự đồng cấu tuyến tính* hay *toán tử tuyến tính* trên V.
Có thể viết lại hai điều kiện trong định nghĩa thành một điều kiện là

$$f(\lambda x + \beta y) = \lambda f(x) + \beta f(y), \forall \lambda, \beta \in \mathbb{K}, x, y \in V.$$

Các ví dụ

Giả sử $\mathbb{K}$ là một trường, V, W là các $\mathbb{K}$ - không gian vector.

1. Ánh xạ hằng θ được cho như sau $\theta : V \to W$ sao cho $\theta(x) = 0, \forall x \in V$.
2. Ánh xạ đồng nhất $Id : V \to V$ sao cho $Id(x) = x, \forall x \in V$.
3. Ánh xạ $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ sao cho
$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, \forall x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n, \alpha_i \in \mathbb{K}.$$
4. Giả sử $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, ánh xạ $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ sao cho $f(x) = Ax, \forall x = (x_1, ..., x_n)^T \in \mathbb{K}^n$.
5. Ánh xạ đạo hàm các đa thức $D : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ sao cho $D(p(x)) = p'(x), \forall p(x) \in \mathbb{R}[x]$.

Cách cho một ánh xạ tuyến tính

Ký hiệu $Hom(V, W)$ là tập tất cả ánh xạ tuyến tính từ V vào W, $End(V)$ tập các toán tử tuyến tính. Trên $Hom(V, W)$ ($End(V)$) trang bị phép cộng xác định bởi

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \forall f, g \in Hom(V, W)$$

và phép nhân với phần tử của $\mathbb{K}$ xác định bởi

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x), \forall \lambda \in \mathbb{K}$$

Khi đó $Hom(V, W)$ ($End(V)$) với hai phép toán trên lập thành $\mathbb{K}$ - không gian vector.

Định lý

Giả sử V là $\mathbb{K}$ - không gian vector n chiều với cơ sở $\{e_1, ..., e_n\}$ và một hệ n vector tùy ý cho trước $\{w_1, w_2, ..., w_n\}$ trong $\mathbb{K}$ - không gian vector W. Khi đó tồn tại duy nhất một ánh xạ tuyến tính

Nhân và ảnh

Giả sử V, W là các $\mathbb{K}$ - không gian vector, $f \in Hom(V, W)$.

Định nghĩa

Hạch (hay nhân) của ánh xạ tuyến tính f là tập hợp ký hiệu bởi $Ker(f)$ và xác định bởi

$$Kerf = \{x \in V : f(x) = 0\}$$

Ảnh của ánh xạ tuyến tính f, ký hiệu là Imf, và xác định bởi

$$Imf = \{y \in W : y = f(x), \forall x \in V\}$$

Mệnh đề

$Kerf$ và Imf là các không gian con của V và W tương ứng.

Nhân và ảnh

Định lý

Giả sử Ω, U lần lượt là các không gian vector con của V, W tương ứng. Khi đó
i) $f(\Omega)$ là $\mathbb{K}$ - không gian vector con của W.
ii) $f^{-1}(U)$ là $\mathbb{K}$ - không gian vector con của V.
iii) Ω là không gian vector con hữu hạn chiều của V thì $f(\Omega)$ cũng hữu hạn chiều và $dim f(\Omega) \leq dim\Omega$.

Nhận xét:
i) Nếu $f : V \to W$ và V hữu hạn chiều thì $dim Imf \leq dim V$.
ii) Giả sử $f : V \to W$ là ánh xạ tuyến tính và $\{v_i\}_{i=\overline{1;m}}$ là hệ bất kỳ, khi đó nếu $\{v_i\}_{i=\overline{1;m}}$ phụ thuộc tuyến tính thì $\{f(v_i)\}_{i=\overline{1;m}}$ là phụ thuộc tuyến tính. Ngược lại, nếu $\{f(v_i)\}_{i=\overline{1;m}}$ độc lập tuyến tính thì $\{v_i\}_{i=\overline{1;m}}$ độc lập tuyến tính.

Đơn cấu, toàn cấu, đẳng cấu

Định nghĩa

Giả sử $f : V \to W$ là ánh xạ tuyến tính. Chiều của Imf gọi là hạng của ánh xạ f, ký hiệu $rank(f)$, còn chiều của $Kerf$ gọi là số khuyết của f, ký hiệu là $def(f)$.

Định nghĩa

Giả sử $f : V \to W$ là ánh xạ tuyến tính. Ánh xạ f gọi là đơn cấu (toàn cấu, đẳng cấu) nếu f là đơn ánh (toàn ánh, song ánh).

Định lý

Giả sử $f : V \to W$ là ánh xạ tuyến tính.
i) f đơn cấu khi và chỉ khi $Kerf = \{0\}$
ii) f toàn cấu khi và chỉ khi $Imf = W$

Định lý liên hệ số chiều nhân và ảnh

Định lý

Giả sử $f : V \to W$ là ánh xạ tuyến tính, V, W là các $\mathbb{K}$ - không gian vector hữu hạn chiều
i) f đơn cấu khi và chỉ khi f biến một hệ độc lập tuyến tính bất kỳ thành một hệ độc lập tuyến tính
ii) f toàn ánh khi và chỉ khi f biến một hệ sinh của V thành hệ sinh trong W
iii) f đẳng cấu khi và chỉ khi f biến một cơ sở V thành cơ sở của W.

Định lý

Giả sử $f : V \to W$ là ánh xạ tuyến tính, khi đó

$$\dim \operatorname{Im} f + \dim Kerf = n$$

Ánh xạ tuyến tính ngược

Định lý

Giả sử $f : V \to W$ là đẳng cấu tuyến tính, khi đó ánh xạ ngược của một ánh xạ tuyến tính cũng là ánh xạ tuyến tính.

Hệ quả

Giả sử $f : V \to V$ là toán tử tuyến tính, khi đó các mệnh đề sau tương đương
i) f đẳng cấu
ii) Tồn tại toán tử tuyến tính ngược của f
iii) f đơn cấu
iv) f toàn cấu

Ma trận của ánh xạ tuyến tính

Giả sử $f : V \to W$ là ánh xạ tuyến tính, $dimV = n, dimW = m$, $\{e_1, ..., e_n\}$ và $\{w_1, ..., w_m\}$ lần lượt là cơ sở của V và W.

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{\mathrm{ij}} \mathrm{w}_i$$

Ma trận $A = (a_{ij})_{m \times n}$ được gọi là *ma trận của ánh xạ tuyến tính* f trong cặp cơ sở $((e), (w))$.

$$(f(e)) = (w)A \tag{1}$$

Biểu diễn của ánh xạ tuyến tính

Dạng tọa độ:

$$y_i = \sum_{j=1}^{m} a_{\mathrm{ij}} x_j, \; i = \overline{1; m} \tag{2}$$

hay viết dưới dạng tọa độ cột là

$$[y_i]_{(w)} = A[x_j]_{(e)} \tag{3}$$

Nếu như ta đã ngầm hiểu ánh xạ tuyến tính trong cặp cơ sở cố định nào đó thì ta viết là

$$f(x) = Ax \tag{4}$$

Ma trận ánh xạ hợp. Định lý về hạng ánh xạ tuyến tính

Định lý

Giả sử M là ma trận ánh xạ tuyến tính $f : V \to W$ trong cặp cơ sở $((e),(w))$, N là ma trận ánh xạ tuyến tính $g : W^m \to \Omega^p$ trong cặp cơ sở $((w),(v))$. Khi đó ma trận của ánh xạ $g \circ f$ là NM với cặp cơ sở là $((e),(v))$.

Định lý

Giả sử $f \in Hom(V, W)$ có ma trận trong cặp cơ sở nào đó là A, khi đó $rank(f) = rank(A)$.

Không gian nghiệm hệ phương trình thuần nhất

$$\mathrm{Ax} = 0, A = (a_{\mathrm{ij}})_{m\times n}, x = (x_1, ..., x_n)^T \tag{5}$$

Ký hiệu $\aleph_0$ là tập tất cả các nghiệm của hệ này.

Định lý

Xét hệ phương trình (5)
i) Tập $\aleph_0$ tạo thành một không gian vector con của $\mathbb{K}^n$.
ii) Nếu $rank(A) = r$ thì $dim\aleph_0 = n - r$.

Bài toán tìm nhân và ảnh

Tìm cơ sở, chiều của $Kerf$ và Imf khi biết ma trận của ánh xạ tuyến tính f. Để giải quyết bài toán này ta tiến hành như sau:

1. Sử dụng biến đổi sơ cấp hàng đưa ma trận A về ma trận hình thang A', giả sử $rank(A) = rank(A') = r$, khi đó $dimImf = r$. Để tìm cơ sở của Imf ta chọn r vector cột của ma trận A độc lập tuyến tính.
2. Giải hệ phương trình thuần nhất $A'x = 0$, cơ sở không gian nghiệm $\aleph_0$ hệ này chính là cơ sở của $Kerf$.

Ma trận ánh xạ tuyến tính khi đổi cơ sở

Giả sử $f \in Hom(V, W)$, $\dim V = n, \dim W = m$. Trong cặp cơ sở $((e), (w))$, ánh xạ tuyến tính f có ma trận A. Giả sử B là ma trận chuyển cơ sở (e) sang (e'), C là ma trận chuyển cơ sở (w) sang (w'). Nếu gọi $\widetilde{A}$ là ma trận của ánh xạ tuyến tính f trong cặp cơ sở mới $((e'), (w'))$, thì

$$\widetilde{A} = C^{-1}AB \tag{6}$$

Đặc biệt, giả sử f là toán tử tuyến tính và A là ma trận của f trong cơ sở $\{e_1, ..., e_n\}$, còn $\widetilde{A}$ là ma trận của f trongcơ sở $\{e'_1, ..., e'_n\}$ thì

$$\widetilde{A} = C^{-1}AC \tag{7}$$

trong đó C là ma trận chuyển cơ sở $\{e_1, ..., e_n\}$ sang $\{e'_1, ..., e'_n\}$.

Bài tập

1. Bài tập bắt buộc (trong chương III ĐSTT và HGT của N. X. Viên): 33; 34a,b,c,d; 35; 36; 38; 40; 41; 42; 43; 44; 47; 48; 49;
2. Bài tập làm thêm: 46; 52;

Bài giảng: Trị riêng và vector riêng của toán tử tuyến tính

Hy Đức Mạnh

Bộ môn Toán - Khoa CNTT

Hà Nội, 11th September 2014

Mục lục

Không gian con bất biến, trị riêng và vector riêng

Định nghĩa

Giả sử V là $\mathbb{K}$ - không gian vector, $f \in End(V)$ là toán tử tuyến tính, W là một không gian vector con của V. W được gọi là bất biến đối với f hay là f - bất biến nếu như $f(W) \subset W$, tức là $f(w) \in W, \forall w \in W$.

Định nghĩa

Vector $v \in V,\ v \neq 0$ được gọi là vector riêng của toán tử tuyến tính f nếu tồn tại $\lambda \in \mathbb{K}$ sao cho $f(v) = \lambda v$. Phần tử λ gọi là trị riêng của toán tử tuyến tính f, khi đó ta nói v là vector riêng ứng với trị riêng λ.

Không gian con riêng, phương trình đặc trưng

Mệnh đề

Không gian vector sinh bởi $v \neq 0$ là f - bất biến khi và chỉ khi v là vector riêng của f.

Đặt $V(\lambda) = \{x \in V : f(x) = \lambda x\}$. Dễ thấy $V(\lambda)$ là không gian con bất biến của f, hơn thế $V(\lambda) \neq \{0\}$ khi và chỉ khi λ là trị riêng của f. Khi $\lambda \in \mathbb{K}$ là một trị riêng của toán tử tuyến tính f thì $V(\lambda)$ gọi là *không gian con riêng* ứng với trị riêng λ.

Hệ phương trình xác định vector riêng:

$$(A - \lambda E)\, x = 0 \qquad (1)$$

Phương trình đặc trưng:

$$\det (A - \lambda E) = 0 \qquad (2)$$

Vấn đề chéo hóa

Định lý

Toán tử tuyến tính $f \in End(V)$ có ma trận chéo khi và chỉ khi tồn tại một cơ sở V gồm toàn vector riêng.

Mệnh đề

Các vector riêng ứng với trị riêng khác nhau của toán tử tuyến tính f là độc lập tuyến tính.

Hệ quả

Nếu toán tử tuyến tính f có n trị riêng phân biệt $\lambda_1, ..., \lambda_n$ thì f chéo hóa được và ma trận của f trong cơ sở gồm toàn vector riêng tương ứng với các trị riêng này là $A = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$.

Thuật toán chéo hóa

Mệnh đề

Nếu λ_0 là nghiệm bội k của phương trình đặc trưng 2 thì ứng với nó có không quá k vector riêng độc lập tuyến tính.

Thuật toán chéo hóa:

Bước 1: Giải phương trình đặc trưng tìm tất cả các trị riêng. Giả sử giải được các trị riêng $\lambda_1, ..., \lambda_k$ với bội tương ứng $n_1, ..., n_k$.

Bước 2: Kiểm tra điều kiện cần:

- Nếu $k = n$ toán tử f chéo hóa được.
- Nếu $n_1 + n_2 + ... + n_k < n$ toán tử f không chéo hóa được.
- Nếu $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$ tìm các vector riêng độc lập tuyến tính ứng với mỗi trị riêng. Nếu tồn tại λ_i mà số vector riêng ứng với nó nhỏ hơn n_i thì f không chéo hóa được.

Thuật toán chéo hóa (tiếp)

Bước 3: Nếu f chéo hóa được và $\{v_{11}, \dots, v_{1n_1}, \dots, v_{k1}, \dots, v_{kn_k}\}$ là cơ sở gồm toàn vector riêng, đặt ma trận P bằng các cột tọa độ của những vector riêng theo thứ tự này

$$P = (v_{11}, \dots, v_{1n_1}, \dots, v_{k1}, \dots, v_{kn_k})$$

Khi đó ma trận của toán tử f trong cơ sở này là

$$\overline{A} = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \lambda_1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \lambda_k & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \lambda_k \end{pmatrix}$$

Bài tập

1. Bài tập bắt buộc (trong chương III ĐSTT và HGT của N. X. Viên): 53; 54; 55; 57; 58; 63; 65; 70; 71;
2. Bài tập làm thêm: 59; 60; 61; 66; 67; 73;

Bài giảng: Dạng song tuyến tính và dạng toàn phương

Hy Đức Mạnh

Bộ môn Toán - Khoa CNTT

Hà Nội, 11th September 2014

Mục lục

Dạng song tuyến tính đối xứng

Định nghĩa

Một ánh xạ $\psi : V \times V \to \mathbb{R}$ *gọi là dạng song tuyến trên* V *nếu* ψ *là hàm tuyến tính với từng biến khi biến kia cố định, tức là*

$$\psi(\lambda x + \beta x', y) = \lambda\psi(x, y) + \beta\psi(x', y)$$
$$\psi(x, \lambda y + \beta y') = \lambda\psi(x, y) + \beta\psi(x, y')$$

với mọi $x, x', y, y' \in V; \lambda, \beta \in \mathbb{R}$. *Ngoài ra,* ψ *sẽ gọi là dạng song tuyến tính đối xứng nếu thoả mãn thêm điều kiện*

$$\psi(x, y) = \psi(y, x)$$

với mọi $x, y \in V$.

Dạng toàn phương

Định nghĩa

Ánh xạ $q : V \to \mathbb{R}$ *gọi là một dạng toàn phương trên* V *nếu có một dạng song tuyến tính* ψ *trên* V *sao cho*

$$q(x) = \psi(x, x), \forall x \in V$$

Nếu ψ là một dạng song tuyến tính đối xứng thì nó được gọi là *dạng cực* của dạng toàn phương q.

Từ định nghĩa dạng toàn phương ta thấy rằng

$$q(\lambda x) = \lambda^2 q(x), \forall x \in V, \lambda \in \mathbb{R}$$

Vấn đề chéo hóa

Giả sử ψ là một dạng song tuyến tính đối xứng trên V, q là dạng toàn phương xác định bởi ψ trên V, $\{e_1, ..., e_n\}$ là một cơ sở của V. Với mọi $x, y \in V$ thì

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \ \ y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j$$

Ta có

$$\psi(x, y) = \psi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j \psi(e_i, e_j) \qquad (1)$$

$$q(x) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j \psi(e_i, e_j) \qquad (2)$$

Đặt $\psi(e_i, e_j) = a_{\text{ij}}, i, j = \overline{1; n}$, ma trận $A = (a_{ij})_{n \times n} \in M_n(\mathbb{R})$ gọi là ma trận của ψ (hay q) trong cơ sở đã cho.

Liên hệ giữa một dạng toàn phương và dạng cực của nó

$$\psi(x, y) = x^T A y \tag{3}$$

$$q(x) = x^T A x \tag{4}$$

Định lý

Với mỗi dạng toàn phương $q(x)$ trong V, tồn tại duy nhất dạng song tuyến tính đối xứng $\psi(x, y)$ là dạng cực của $q(x)$.

Ma trận dạng toàn phương khi đổi cơ sở

Gọi C là ma trận chuyển cơ sở từ (e) sang (e'), tức là $(e') = (e)C$, như đã biết

$$x_{(e)} = Cx_{(e')};\ y_{(e)} = Cy_{(e')}$$

do đó trong cơ sở mới ta có

$$\psi(x, y) = x_{(e)}^T A y_{(e)} = x_{(e')}^T C^T A C y_{(e')}$$
$$q(x) = x_{(e)}^T A x_{(e)} = x_{(e')}^T C^T A C x_{(e')}$$

tức là $\overline{A} = C^T A C$.
Vì $\det(C) \neq 0$ nên $rank(A) = rank(\overline{A})$.

Hạng của dạng toàn phương

$$\mathrm{Ker}\psi \equiv \mathrm{Ker}q = \{x \in V : \psi(x,y) = 0, \forall y \in V\}$$

Hạng của dạng song tuyến tính đối xứng ψ (hoặc dạng toàn phương q) ký hiệu là $rank(\psi)$ (hoặc $rank(q)$) xác định bởi

$$rank(\psi) \equiv rank(q) = n - dimKer\psi = n - dimKerq$$

Nếu $rank(\psi) = rank(q) = n$ ta nói ψ và q là *không suy biến*, ngược lại ta nói chúng *suy biến*.
Hệ phương trình thuần nhất xác định $Ker\psi = Kerq$:

$$\psi(x, e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_j \psi(e_j, e_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{\mathrm{ij}} x_j = 0, \forall i = \overline{1; n}$$

Hiển nhiên là $dimKer\psi = n - rank(A)$ bởi vì $Ker\psi$ là không gian nghiệm hệ thuần nhất này. Và

$$rank(\psi) = rank(q) = rank(A) \tag{5}$$

Dạng chính tắc

Giả sử V là $\mathbb{R}$ - không gian vector n chiều, $\{e_1, ..., e_n\}$ là một cơ sở của V.

Định nghĩa

Dạng toàn phương $q(x)$ trong cơ sở đã cho gọi là dạng chính tắc nếu như trong cơ sở này mà trận của $q(x)$ có dạng đường chéo, tức là

$$q(x) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i x_i^2 \tag{6}$$

ở đó $r = rank(q)$. Khi đó cơ sở được gọi là cơ sở chính tắc của dạng toàn phương $q(x)$.

Định lý

Mọi dạng toàn phương $q(x)$ trong V đều tồn tại cơ sở chính tắc để $q(x)$ có dạng chính tắc.

Chỉ số quán tính

Dạng chuẩn tắc:

$$q(x) = \sum_{i=1}^{p} x_i'^2 - \sum_{j=p+1}^{r} x_j'^2$$

Số p gọi là *chỉ số quán tính dương* còn $t = r - p$ gọi là *chỉ số quán tính âm*, chỉ số dương và âm gọi chung là *chỉ số quán tính*. Hiệu số $\sigma = p - t$ gọi là *ký số* dạng toàn phương.

Định lý

(Luật quán tính của Sylvester) Chỉ số quán tính không phụ thuộc cơ sở của V mà trong đó $q(x)$ có dạng chuẩn tắc.

Dạng toàn phương xác định dấu

Giả sử $q(x)$ là dạng toàn phương trên V và $\psi(x, y)$ là dạng cực của nó.

Định nghĩa

Dạng toàn phương $q(x)$ gọi là không âm (không dương) nếu $q(x) = \psi(x, x) \geq 0$ $(\leq 0), \forall x \in V$. Ngược lại nếu tồn tại $x, y \in V$ để

$$q(x) = \psi(x, x) > 0 > q(y) = \psi(y, y)$$

thì dạng toàn phương gọi là không xác định dấu.
Dạng toàn phương là xác định dương (âm) nếu nó là không âm (không dương) và dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$.
Dạng song tuyến tính đối xứng gọi là xác định dương nếu nó cho một dạng toàn phương xác định dương.

Dạng toàn phương xác định dấu

Định lý

Dạng toàn phương $q(x)$ xác định dương khi và chỉ khi

$$\begin{cases} rank(q) = \dim V \\ \sigma = p - t = n \end{cases}$$

Định lý

(Sylvester) Giả sử $q(x)$ là dạng toàn phương với ma trận biểu diễn $A = (a_{ij})_{n\times n}$. Điều kiện cần và đủ để $q(x)$ xác định dương là các định thức con chính của ma trận A đều dương, tức là

$$\Delta_1 = a_{11} > 0, \Delta_2 = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} > 0, \ldots, \Delta_n = \det(A) > 0$$

Bài tập

1. Bài tập bắt buộc (trong chương IV ĐSTT và HGT của N. X. Viên): 1; 2; 3; 4;
2. Bài tập làm thêm: 5;

Bài giảng: Không gian Euclide

Hy Đức Mạnh

Hà Nội - 2014

Mục lục

Tích vô hướng

Định nghĩa

Giả sử V là $\mathbb{R}$ - không gian vector. Một dạng song tuyến tính đối xứng, xác định dương $\psi(x, y)$ trên V được gọi là một tích vô hướng, ký hiệu là $\langle x, y \rangle$.

Như vậy, tích vô hướng là ánh xạ $< .,. >: V \times V \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$E_1)$ $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle, \forall x, y \in V$

$E_2)$ $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle, \forall x, y, z \in V$

$E_3)$ $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle, \forall x \in V, \lambda \in \mathbb{R}$

$E_4)$ $\langle x, x \rangle \geq 0, \forall x \in V, \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Các bất đẳng thức tích vô hướng

Định lý

(Bất đẳng thức Cauchy - Bunhia - Schwartz)

$$\langle x, y \rangle^2 \leqslant \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle \tag{1}$$

Với mọi $x \in V$ thì $\langle x, y \rangle \geq 0$, ta xác định số $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ và gọi là *chuẩn* của vector x (đôi khi còn gọi là *modul* hay *độ dài* của x).
Không khó để thấy $\|x\|$ có các tính chất sau:
i) $\|x\| \geq 0, \forall x \in V$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$.
ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \forall x \in V, \lambda \in \mathbb{R}$.
iii) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi x, y phụ thuộc tuyến tính.
Tính chất cuối cùng chính là *bất đẳng thức Minkowski.*

Độ dài, bất đẳng thức tam giác

Không gian V được gọi là *định chuẩn* nếu với mọi $x \in V$ xác định một chuẩn thỏa mãn các điều kiện i)-iii) ở trên.
Chuẩn $\|x - y\|$ được gọi là *khoảng cách* giữa x và y, ký hiệu $d(x, y)$. Khoảng cách này có tính chất

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

và gọi là *bất đẳng thức tam giác.*

Hệ vector trực giao

1. Giả sử trên V trang bị một tích vô hướng. Hai vector được gọi là *trực giao*, ký hiệu $x \perp y$ nếu $\langle x, y \rangle = 0$.

Mệnh đề

Giả sử $v_1, .., v_m \in V$ là các vector đôi một trực giao, khi đó

$$\left\| \sum_{i=1}^{m} v_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{m} \|v_i\|^2$$

Khi $m = 2$ ta có *công thức Pythagore*.

Cơ sở trực chuẩn

1. Hệ vector $\{e_1, ..., e_m\}$ trong V gọi là *hệ trực giao* nếu $e_i \neq 0$ và $e_i \perp e_j$ với mọi $i \neq j$, ở đó $i, j = \overline{1; m}$, tức là

$$\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 0, i \neq j \\ \|e_i\|^2, i = j \end{cases}$$

2. Hệ trực giao mà $\|e_i\| = 1$ gọi là *hệ trực chuẩn*.

Mệnh đề

Hệ trực giao là độc lập tuyến tính.

3. Cơ sở $(e) = (e_1, ..., e_n)$ gọi là một *cơ sở trực giao (trực chuẩn)* nếu nó là một hệ trực giao (trực chuẩn).

Quá trình trực giao hóa Gram-Schmidt

Định lý

(Gram-Schmidt) Nếu hệ các vector $\{v_1, ..., v_m\}$ là độc lập tuyến tính bất kỳ trong V thì tồn tại hệ trực giao $\{u_1, ..., u_m\}$ sao cho $u_i \in Span\{v_1, ..., v_i\}$, $\forall i = \overline{1; m}$.

1. Lược đồ

$$u_1 = v_1$$

$$u_2 = v_2 - \frac{\langle v_1, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1$$

$$....$$

$$u_k = v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle v_k, u_i \rangle}{\|u_i\|^2} u_i$$

Ma trận chuyển cơ sở trực giao

Định lý

Nếu $\{e_1, \ldots, e_n\}$ là một cơ sở trực chuẩn của V thì với mọi $x \in V$ ta có $x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$.

Nhận xét qua trọng: $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \quad \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$

Mệnh đề

Giả sử có hai cơ sở trực chuẩn $\{e_1, \ldots, e_n\}$ và $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$ trong không gian Euclide V. Khi đó ma trận chuyển cơ sở $C : (e) \to (e')$ là ma trận trực giao.

Ví dụ minh họa

1. Trực chuẩn hóa Gram-schmidt hệ vector

$$v_1 = (1,1,1)\,, v_2 = (0,1,1)\,, v_3 = (0,0,1)$$

2. Áp dụng quá trình trực giao, chuẩn hóa ta tìm được

$$e_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right); e_2 = \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right);$$
$$e_3 = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Hình ảnh quá trình trực giao Gram-schmidt trong $\mathbb{R}^3$

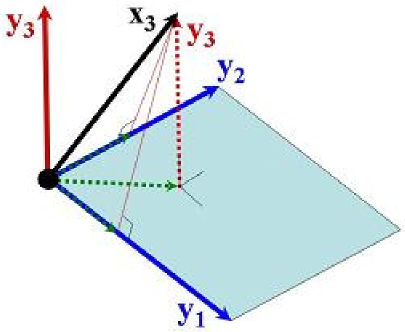


Figure: Trực giao Gram-schmidt trong $\mathbb{R}^3$

QR - Phân tích

1. Giả sử rằng $A \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ là ma trận m cột độc lập tuyến tính, A viết dưới dạng các vector cột là $A = (v_1, v_2, ..., v_m)$. Từ quá trình Gram-Schmidt ta có

$$v_k = \sum_{i=1}^{k} \langle v_k, e_i \rangle e_i$$

ở đó $e_i = \frac{u_i}{\|u_i\|}$.

2. Viết lại

$$A = (e_1, e_2, ..., e_m) \begin{pmatrix} \langle v_1, e_1 \rangle & \langle v_2, e_1 \rangle & \cdots & \langle v_m, e_1 \rangle \\ 0 & \langle v_2, e_2 \rangle & \cdots & \langle v_m, e_2 \rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \langle v_m, e_m \rangle \end{pmatrix} = QR$$

QR - Phân tích

1. Tìm một phân tích QR của

$$A = (v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Trực chuẩn hóa Gram-Schmidt các vector v_1, v_2, v_3, ta tìm được

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}; R = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Không gian con trực giao

Định nghĩa

Giả sử V là không gian Euclide thực, W, Z là hai không gian con của V. W và Z gọi là trực giao nhau, viết là $W \perp Z$, nếu $w \perp z, \forall w \in W, z \in Z$. Nếu $V = W \oplus Z$ và $W \perp Z$ thì W, Z là các không gian con bù trực giao nhau.

Mệnh đề

Giả sử W, Z là các không gian con của không gian Eulcid V.
a) $\{0\} \perp W$ với mọi W - không gian con của V.
b) Nếu $W \perp Z$ thì $W \cap Z = \{0\}$.
c) $W^{\perp} = \{v \in V : v \perp w, \forall w \in W\}$ là phần bù trực giao của W.

Không gian con trực giao

Định lý

Giả sử V là không gian Euclide n chiều, $\{v_1, \ldots, v_m\}$ là hệ trực chuẩn các vector trong V, $W = span\{v_1, \ldots, v_m\}$, với mọi $x \in V$, đặt

$$w_1 = \sum_{i=1}^{m} \langle x, v_i \rangle \, v_i$$

$$w_2 = x - w_1$$

Khi đó
a) $w_1 \in W$
b) $w_2 \perp W$.

Vector w_1 gọi là *hình chiếu* của x lên W, ký hiệu $w_1 = ch_W x$, còn w_2 gọi là *thành phần của x trực giao với W*.

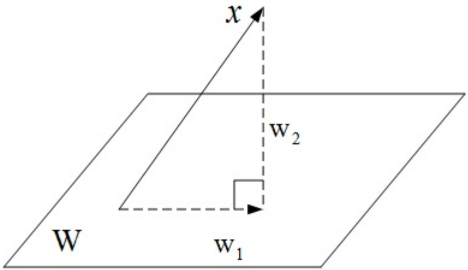


Figure: Hình chiếu trực giao

Mệnh đề

Giả sử vector $v \in V$ và W là không gian con của V, khi đó

$$\min_{w \in W} \|v - w\| = \|v - ch_W v\|$$

Toán tử tự liên hợp

Định nghĩa

Giả sử V là không gian Euclide thực, một toán tử tuyến tính $f : V \to V$ gọi là tự liên hợp (hay đối xứng) nếu với mọi $x, y \in V$ ta có $\langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle$.

Định lý

Giả sử V là không gian Euclide thực, điều kiện cần và đủ để toán tử tuyến tính $f : V \to V$ tự liên hợp trên V là trong một cơ sở trực chuẩn nào đó ma trận của f có dạng đối xứng.

Định lý

Trị riêng của toán tử tự liên hợp là số thực.

Thuật toán chéo hóa

Định lý

Luôn tồn tại cơ sở trực chuẩn nào đó để toán tử tự liên hợp có dạng đường chéo.

Hệ quả

Mọi ma trận đối xứng thực đều tồn tại ma trận trực giao C sao cho $C^T AC$ có dạng chéo.

Thuật toán chéo hóa:
Bước 1: Giải phương trình đặc trưng $\det(A - \lambda E) = 0$.
Bước 2: Gọi $\lambda_1, ..., \lambda_k$ là các trị riêng với bội $n_1, ..., n_k$ tương ứng. Hiển nhiên $n_1 + ... + n_k = n$. Với mỗi λ_i tìm được n_i vector riêng độc lập tuyến tính, trực chuẩn hóa Gram-Schmidt hệ này ta được n_i vector trực chuẩn là $e_{i1}, ..., e_{in_i}$.

Thuật toán (tiếp)

Bước 3: Cơ sở mới thu được là $(e) = (e_{11}, ..., e_{1n_1}, ..., e_{k1}, ..., e_{kn_k})$. Gọi ma trận C là ma trận tạo thành từ các cột vector cơ sở này thì

$$\overline{A} = C^T AC = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \lambda_1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \lambda_k & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \lambda_k \end{pmatrix}$$

Tính xác định dấu của toán tử tự liên hợp và dạng toàn phương

Mệnh đề

Toán tử tự liên hợp f xác định không âm khi và chỉ khi tất cả các trị riêng của nó đều không âm.

Định lý

Dạng toàn phương $q(x)$ trên không gian Euclide với ma trận biểu diễn A là:
i) Xác định âm khi và chỉ khi tất cả các trị riêng của A đều âm
ii) Xác định dương khi và chỉ khi tất cả các trị riêng của A đều dương
iii) Không xác định dấu nếu tồn tại các trị riêng của A trái dấu nhau.

Ma trận toán tử chiếu trực giao

Xét tổng trực tiếp $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_k$.
Ánh xạ $P_i : V \to V$ là phép chiếu V lên V_i xây dựng như sau

$$P_i(x) = v_i$$

Biểu diễn phổ của toán tử tự liên hợp f: $f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i$.
Nếu gọi A là ma trận của toán tử tự liên hợp f trong cơ sở trực chuẩn gồm toàn vector riêng $\{e_1, \ldots, e_n\}$ và $\mathbb{P}_i$ là ma trận của toán tử chiếu trực giao P_i thì ta có biểu diễn

$$A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbb{P}_i$$

Dễ thấy

$$P_i x = x_i e_i = \langle x, e_i \rangle e_i = e_i {e_i}^T x; \quad \mathbb{P}_i = e_i {e_i}^T.$$

Bài tập

Làm bài tập chương 4, sách ĐSTT và HGT của Nguyễn Xuân Viên:

1. Bài tập bắt buộc: 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15; 16; 17; 21; 22; 23; 24;
2. Bài tập làm thêm: 18; 19; 20;

Bài giảng: Phân loại đường cong và mặt cong

Hy Đức Mạnh

Hà Nội - 2014

Mục lục

Đường bậc hai trong mặt phẳng

Đường bậc hai tổng quát trên mặt phẳng với hệ tọa độ trực chuẩn Descartes Oxy có dạng

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_1x + a_2y + c = 0 \tag{1}$$

ở đó các hệ số a_{11}, a_{12}, a_{22} không đồng thời bằng 0. Phép biến đổi trực giao

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

đưa đường bậc hai về dạng

$$\lambda_1 x'^2 + 2\lambda_2 y'^2 + a_1' x' + a_2' y' + c = 0. \tag{2}$$

Các loại đường bậc hai (9 loại)

1) Ellipse (hoặc đường tròn)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

2) Hyperbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

3) Ellipse ảo

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$$

4) Cặp đường thẳng ảo cắt nhau (tại một điểm thực)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$$

5) Cặp đường thẳng cắt nhau

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

6) Parabola

$$x^2 = 2py$$

7) Cặp đường thẳng song song

$$\frac{x^2}{a^2} = 1$$

8) Cặp đường thẳng ảo song song

$$\frac{x^2}{a^2} = -1$$

9) Cặp đường thẳng trùng nhau

$$\frac{x^2}{a^2} = 0$$

Mặt bậc hai trong không gian

Trong không gian hệ tọa độ trực chuẩn Decartes $Oxyz$ mặt bậc hai tổng quát là tập các điểm thỏa mãn phương trình đại số

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+a_{22}y^2+2a_{23}yz+a_{33}z^2+2a_1x+2a_2y+2a_3z+c=0. \quad (3)$$

Xét dạng toàn phương với ma trận là $A=(a_{ij})_{3\times 3}$, ở đó $A=A^T$. Phép đổi biến

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

đưa mặt cong về dạng

$$\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2+\lambda_3 z'^2+2a'_1x'+2a'_2y'+2a'_3z'+c=0. \quad (4)$$

Các loại mặt bậc hai (17 loại)

1) Ellipsoid (cầu)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

2) Ellipsoid ảo

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$$

3) Nón ảo

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$$

4) Hyperboloid 1 tầng

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

5) Hyperboloid 2 tầng

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

6) Nón Elliptic

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

7) Paraboloid Elliptic

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$$

8) Paraboloid Hyperbolic (yên ngựa)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$$

9) Trụ Elliptic

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

10) Trụ Elliptic ảo

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$$

11)Trụ Parabolic

$$y^2 = 2px$$

12) Trụ Hyperbolic

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

13) Cặp mặt phẳng ảo liên hợp

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$$

14) Cặp mặt phẳng cắt nhau

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

15) Cặp mặt phẳng thực song song

$$\frac{x^2}{a^2} = 1$$

16) Cặp mặt phẳng ảo song song

$$\frac{x^2}{a^2} = -1$$

17) Cặp mặt phẳng trùng nhau $\frac{x^2}{a^2} = 0$

Bài tập

Làm bài tập chương 4, sách ĐSTT và HGT của Nguyễn Xuân Viên:

1. Bài tập bắt buộc: 26; 27; 28; 29; 30; 31;
2. Bài tập làm thêm: 32;