BỘ MÔN DUYỆT **Chủ nhiệm Bộ môn**	**ĐỀ CƯƠNG CHI TIẾT BÀI GIẢNG**	**Thay mặt nhóm môn học**

(Dùng cho 60 tiết giảng, 3 tiết /bài)

Học phần: ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH VÀ HÌNH HỌC GIẢI TÍCH

Nhóm môn học: Toán Cao cấp

Bộ môn: Toán

4// Tô Văn Ban — Khoa: Công nghệ thông tin — 4/ Hy Đức Mạnh

Thông tin về giáo viên

TT	Họ tên giáo viên	Học hàm	Học vị	Đơn vị công tác (Bộ môn)
1.	Nguyễn Xuân Viên	PGS	TS	Bộ môn Toán
2.	Hy Đức Mạnh	Giảng viên	TS	Bộ môn Toán
3.	Phạm Tiến Dũng	GV chính	TS	Bộ môn Toán
4.	Đào Trọng Quyết	Giảng viên	TS	Bộ môn Toán
5.	Nguyễn Thị Thanh Hà	GV chính	ThS	Bộ môn Toán

Thời gian, địa điểm làm việc:

Bộ môn toán nhà S4, P1301

Điện thoại 069515330, email: bomontoan_hvktqs@yahoo.com

Bài giảng 1

LOGIC, TẬP HỢP, ÁNH XẠ, CẤU TRÚC ĐẠI SỐ

Chương I, mục: I.1

Tiết thứ: 1- 3 Tuần thứ: 1

Mục đích, yêu cầu:

- Nắm được các kiến thức cơ sở của toán học về logic, tập hợp, ánh xạ và cấu trúc ĐS cơ bản.
- Vận dụng lý thuyết để giải được các bài tập về tập hợp, ánh xạ, cấu trúc đại số, số phức.

Hình thức tổ chức dạy học: Lý thuyết, thảo luận trên giảng đường, tự học, tự nghiên cứu.

Thời gian: Lý thuyết (LT): 3 tiết; Tự học 6 tiết

Địa điểm: Giảng đường do P2 bố trí

Nội dung chính:

I.1. Logic, tập hợp, ánh xạ và cấu trúc đại số (3 tiết)

I.1.1. Mệnh đề và vị từ:

- Định nghĩa mệnh đề, ví dụ.
- Các phép toán trên mệnh đề: $A \vee B$; $A \wedge B$; $A \Rightarrow B$; $A \Leftrightarrow B$; $\overline{A}$.
- Mệnh đề hằng đúng và định lý, 7 định lý quan trọng nhất của logic mệnh đề: tự đọc mục d) Giáo trình 1 (GTr1).
- Mệnh đề lượng tử (vị từ), phủ định của vị từ: tự đọc GTr1, tr.13-14.

Ví dụ:

I.1.2. Tập hợp và ánh xạ:

- Khái niệm tập hợp: tập hợp và phần tử. Cách mô tả tập hợp. Các khai niệm tập con, tập rỗng, tập bằng nhau, ví dụ.
- Các phép toán trên tập hợp

Hợp hai tập hợp: $A \cup B = \{x: x \in A \vee x \in B\}$.

Giao hai tập hợp: $A \cap B = \left\{x : x \in A \ \wedge \ x \in B\right\}$.

Hiệu hai tập hợp: $A \setminus B = \left\{x \in A \wedge x \notin B\right\}$

Hiệu đối xứng của hai tập hợp

Phần bù của A trong U ký hiệu là: $\overline{\mathbf{A}} = U \setminus A$

- Tính chất cơ bản của các phép toán trên tập hợp: tự đọc GTr1, tr.17-18.
- Tích Decartes của các tập hợp

- Quan hệ tương đương và quan hệ thứ tự.

I.1.3. Ánh xạ

- Định nghĩa ánh xạ,
- Đơn ánh, toàn ánh, song ánh.
- Ánh xạ tích, ánh xạ ngược.

Định lý tồn tại ánh xạ ngược: có chứng minh.

I.1.4. Cấu trúc đại số và số phức

- Định nghĩa phép toán hai ngôi trên tập A.
- Tính chất của phép toán: Phép toán $*$ của tập A có tính kết hợp. Phần tử trung hòa e; phần tử nghịch đảo a^{-1}của một phần tử a trong A. Tính duy nhất của e, của a^{-1}.
- Sơ lược về nhóm, vành, trường: Định nghĩa nhóm, vành, trường.

Nhóm G, nhóm cộng $\langle G;+;0\rangle$, nhóm Abel, nhóm nhân $\langle G;.;e\rangle$; nhóm nhân giao hoán $\langle G;.;1\rangle$.

Khái niệm vành $\langle K;+,0;.\rangle$. Các vành số quan trọng: vành số nguyên $\mathbb{Z}$, các vành $\mathbb{R}$ - tất cả các đa thức hệ số thực, $\mathbb{R}$ – vành tất cả các đa thức P(x) hệ số thực có bậc $\le n$.

Khái niệm trường $\langle P;+,0;.,1\rangle$. Các trường số quan trọng: trường số thực $\mathbb{R}$, trường số hữu tỷ $\mathbb{Q}$.

- Trường số phức $\mathbb{C}$: Định nghĩa số phức, các phép toán trên số phức. Mặt phẳng phức, dạng lượng giác của số phức. Công thức Mauvra. Căn bậc *n* của số phức: phát biểu và chứng minh định lý về căn bậc *n* của số phức: *Căn bậc n của số phức* $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ *có đúng n giá trị* w_k, $k = 0,1,2,...,n-1$ *cho bởi công thức*

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)$$

Các ví dụ về căn bậc *n* của số phức.

Ý nghĩa hình học của căn bậc *n* của số phức *z*: là *n* số phức w_k, $k = 0,1,2,...,n-1$ là căn bậc *n* của số phức *z* tạo thành *n* đỉnh của một *n* - giác đều trên đường tròn bán kính $R = |z|$ với một đỉnh ứng với số phức $w_0 = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)$.

Trong HGT & ĐSTT trường $\mathbb{K}$ là một trong hai trường cố định: trường số thực $\mathbb{R}$ hoặc trường số phức $\mathbb{C}$.

- Vành đa thức

- **Yêu cầu SV chuẩn bị:** Xem giáo trình GT:1,2,3; TLTK: 1,2 (TLTK sinh viên có thể tải từ trên Internet).

Bài giảng 2

MA TRẬN, ĐỊNH THỨC

Chương I, mục: I.2, I.3

Tiết thứ: 4- 6 Tuần thứ: 1

Mục đích, yêu cầu:

- Nắm được các kiến thức cơ bản về đại số ma trận, các phép toán trên ma trận và các tính chất tương ứng.
- Nắm được khái niệm định thức cấp n, các tính chất của định thức và các cách tính định thức

Hình thức tổ chức dạy học: Lý thuyết, thảo luận trên giảng đường.

Thời gian: LT: 3tiết; Tự học: 6 t

Địa điểm: Giảng đường do P2 bố trí

Nội dung chính:

I.2. Ma trận (1 tiết)

I.2.1. Ma trận:

- Ma trận cấp (*m,n*) trên trường $\mathbb{K}$

$$A=\left(a_{ij}\right)_{mxn}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix};\ a_{ij}\in K$$

Ma trận vuông cấp *n* trên trường $\mathbb{K}$

$$A=\left(a_{ij}\right)_{n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix};\ a_{ij}\in K$$

Ký hiệu $M_{m,n}(K)$ – tập tất cả các ma trận cấp (*m,n*) trên trường $\mathbb{K}$

$M_n(K)$ – tập tất cả các ma trận vuông cấp *n* trên trường $\mathbb{K}$

- Các ma trận đặc biệt

- Ma trận không: Là ma trận gồm các phần tử bằng 0, tức là $a_{ij}=0\ \forall i,j$

- Ma trận đơn vị cấp n: Là ma trận vuông trên $\mathbb{K}$ với các phần tử trên đường chéo chính bằng 1, các phần tử còn lại bằng 0, ký hiệu là: $E_n = \mathrm{diag}(1,1,...,1)$ hoặc đơn giản là E khi biết cấp của nó, dạng

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$$

Khi dùng ký hiệu Kronecker $\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{khi } i \neq j \\ 1 & \text{khi } i = j \end{cases}$ thì $E = (\delta_{ij})_n$

I.2.2. Các phép toán trên ma trận

- Cộng ma trận: Tổng hai ma trận $A = \left(a_{ij}\right)_{mxn}; B = \left(b_{ij}\right)_{mxn}$ là ma trận

$C = A + B = \left(c_{ij}\right)_{mxn}; c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \ \forall i, j$

Nhóm Abel $\left\langle M_{m,n}(K);+;O \right\rangle$

- Nhân ma trận với một số $c \in \mathbb{K}$: Tích ma trận $A = \left(a_{ij}\right)_{mxn}$ với hằng số c

là ma trận $cA = \left(ca_{ij}\right)_{mxn}$

Tính chất.

- Nhân hai ma trận: Tích hai ma trận $A = \left(a_{ij}\right)_{mxp}; B = \left(b_{ij}\right)_{pxn}$ là ma trận

$C = A.B = \left(c_{ij}\right)_{mxn}$, sao cho $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$

Tính kết hợp của phép nhân ma trận, tính phân phối của phép nhân đối với phép cộng ma trận.

- Chuyển vị ma trận, tính chất
- Vành ma trận $\langle M_n(\mathbb{K}); +, O; . \rangle$ là vành có đơn vị *E*.
- Các loại ma trận:

- Ma trận tam giác trên là ma trân vuông mà tất cả các phần tử ở phía dưới đường chéo đều bằng 0:

$$U = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Ma trận tam giác dưới là ma trận vuông mà tất cả các phần tử ở phía trên đường chéo đều bằng 0:

- Ma trận đường chéo $D = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_n \end{pmatrix}$

còn ký hiệu là: $D = \text{diag}(a_1, a_2, ..., a_n)$

- Ma trận đối xứng và phản đối xứng
- Ma trận hình thang

I.3. Định thức (2 tiết)

I.3.1. Định thức và tính chất

- Định thức cấp 1, 2, 3 và định thức cấp n qua định thức cấp n – 1 (công thức khai triển định thức theo hàng 1), phát biểu định lý khai triển định thức theo hàng bất kỳ (không chứng minh) và các hệ quả.
- Các tính chất của định thức: Ba tính chất đặc trưng a), b), c) của định thức và các hệ quả (GTr1,tr53-57).

I.3.2. Các phương pháp tính định thức

- Tính định thức theo định nghĩa và khai triển theo hàng (cột) bất kỳ: Cho ví dụ. Khai triển định thức theo k hàng (k cột): Định lý Laplace (tự đọc chứng minh: GTr1, tr61). Định thức của tích hai ma trận (tự đọc chứng minh: GTr1, tr62). Định thức ma trận block-tam giác
- Tính định thức bằng các phép biến đổi sơ cấp

- **Yêu cầu SV chuẩn bị:** Sinh viên chuẩn bị nghiên cứu trước GT 1

Bài giảng 3
BÀI TẬP

Chương I, mục: I.1, I.2, I.3

Tiết thứ: 7- 9 Tuần thứ: 2

Mục đích, yêu cầu:

- Nắm và giải được các bài tập cơ bản về tập hợp, ánh xạ, số phức
- Giải thành thạo các bài tập về ma trận.
- Giải được các bài tập cơ bản về định thức.

Hình thức tổ chức dạy học: Chữa bài tập, tự nghiên cứu, thảo luận trên giảng đường.

Thời gian: LT: 3tiết; Tự học: 3t

Địa điểm: Giảng đường do P2 bố trí

Nội dung chính:

Bài tập I.1 (1tiết)

Bài tập: Giáo trình2 (GTr2):

Tập hợp: 1.1.18; 1.1.21

Gợi ý: **1.1.18**: dùng đại số tập hợp biến đổi từ vế phức tạp hơn ra vế đơn giản; Ý a) biến đổi vế phải ra vế trái; ý b) biến đổi vế trái ra vế phải.

Ánh xạ: 1.1.24; 1.1.25; 1.1.28 (ý d không bắt buộc (kbb)); Không bắt buộc: 1.1.34; 1.1.30; 1.1.31

Số phức: 1.2.10 (kbb) ; 1.2.14; 1.2.17; 1.2.19; 1.2.21;

Thêm 2 bài về hình học số phức:

1. Tìm miền biểu diễn các số phức sau trên mặt phẳng phức *(VT351)*

a) $|z+1|+|z-1|=3$

b) $|z+2|-|z-2|=3$

c) $|z-2|=2+Rez$

d) $|z+3+4i|\leq 5$

2. Tìm vị trí của các điểm trên mặt phẳng phức ứng với các số phức z_1, z_2, z_3 thỏa mãn

$$\begin{cases} z_1+z_2+z_3=0 \\ |z_1|=|z_2|=|z_3| \end{cases}$$

Đa thức và phân thức: 1.3.3a,b; 1.3.4a; 1.3.5a,c; 1.3.6a,b;

Gợi ý: Sử dụng lược đồ Hoocner GTr1, tr12-13 cho các bài 1.3.3a,b; 1.3.4a

1.3.5 Tìm tất cả các nghiệm phức

1.3.6 Tìm tất cả các nghiệm thực, cặp các nghiệm phức liên hợp

$z = a + ib$ và $\bar{z} = a - ib$ cho ta thừa số $(x - z)(x - \bar{z}) = x^2 - 2ax + a^2 + b^2$

Bài tập I.2. (1tiết)

Ma trận: 2.1.22b,c,d; 2.1.23a,b; 2.1.25; 2.1.26; 2.1.34

Bài tập I.3. (1 tiết)

Định thức:2.2.4; 2.2.6; 2.2.14f,h; 2.2.15a,b,c,d; 2.2.23; 2.2.25a

- **Yêu cầu SV chuẩn bị:** Đọc các GTr. 1, 2 , thời gian tự học 3 tiết.

Bài giảng 4

HẠNG CỦA MA TRẬN, MA TRẬN KHẢ NGHỊCH

Chương I, mục: I.4, bài tập I.3

Tiết thứ: 9-12 Tuần thứ: 2

Mục đích, yêu cầu:

- Nắm được khái niệm hạng của ma trận, hạng của ma trận hình thang. Cách tìm hạng của ma trận.
- Nắm được khái niệm ma trận nghịch đảo, điều kiện tồn tại ma trận nghịch đảo và PP Gauss tìm ma trận nghịch đảo.

Hình thức tổ chức dạy học: Lý thuyết, thảo luận, chữa bài tập trên giảng đường.

Thời gian: LT: 2 tiết; BT: 1 tiết; Tự học: 5t

Địa điểm: P2 bố trí

Nội dung chính:

I.4. Hạng ma trận. Ma trận nghịch đảo (2 tiết)

I.4.1. Hạng ma trận

- Khái niệm hạng của ma trận: $rankA$, tính chất.
- Hạng của ma trận hình thang: Hạng của ma trận hình thang là số hàng khác không của ma trận đó.

I.4.2. Ma trận nghịch đảo

- Định nghĩa ma trận nghịch đảo
- Tính chất
- Điều kiện tồn tại ma trận nghịch đảo: Phát biểu định lý và chứng minh.

I.4.3. Biến đổi sơ cấp ma trận

- Các phép biến đổi sơ cấp ma trận: Đổi chỗ hai hàng (cột) của ma trận, nhân một hàng (cột) của ma trận với một số khác 0, nhân một hàng (cột) của ma trận với 1 số cộng vào hàng (cột) khác.
- Thuật toán tìm ma trận nghịch đảo bằng biến đổi sơ cấp:

- Các ma trận biến đổi sơ cấp $T_{ij}, T_{ij}(\alpha), T_{ii}(\alpha)$. Ý nghĩa của phép nhân ma trận A với các ma trận biến đổi sơ cấp: $T_{ij}A; AT_{ij}; T_{ij}(\alpha)A; AT_{ij}(\alpha)$; $T_{ii}(\alpha)A$; $AT_{ii}(\alpha)$.

- Phân tích ma trận vuông $A = BDC$; trong đó D là ma trận đường chéo; B, C là các ma trận khả nghịch và là tích các ma trận biến đổi sơ cấp (tự đọc, GTr1, tr.74-76).

Đưa ma trận khả nghịch A về ma trận đơn vị E chỉ bằng các biến đổi sơ cấp hàng: $TA = E$; trong đó T là tích các ma trận biến đổi sơ cấp.

- Cơ sở toán học của thuật toán tìm ma trận nghịch đảo bằng PP Gauss:

$TA = E \Leftrightarrow A^{-1} = TE$.

Ma trận sơ cấp $T \in M_n(\mathbb{K})$ là ma trận nhận được từ ma trận đơn vị $E \in M_n(\mathbb{K})$ bằng một biến đổi sơ cấp hàng (hoặc cột). Mỗi biến đổi sơ cấp hàng của ma trận A tương đương với nhân về phía bên trái A với một trong ba loại ma trận sơ cấp thích hợp tương ứng với các biến đổi sơ cấp của ma trận : đổi chỗ hai hàng, lấy một hàng nhân với một số rồi cộng vào hàng khác, nhân một hàng với một số khác 0. Thuật toán tìm A^{-1} bằng biến đổi sơ cấp hàng của ma trận A được mô tả như sau:

$(A|E) \to (E|A^{-1})$.

Diễn đạt bằng lời có nghĩa là bằng biến đổi sơ cấp hàng của ma trận block $(A|E)$ (ma trận có n hàng, $2n$ cột) nếu mà bên trái nhận được ma trận đơn vị E thì bên phải từ E sẽ nhận được A^{-1}.

Ví dụ1: Với $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ quá trình tìm A^{-1} được viết như sau:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & -1 \end{array}\right) \text{ vậy là } A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- *Phân tích LU và LUP**.

Ma trận càng đơn giản thì làm việc với nó càng dễ dàng. Ma trận tam giác dưới và trên là những ma trận đơn giản như vậy. Tiếp theo đây ta phân tích một ma trận khả nghịch $A \in GL_n(\mathbb{K}$ thành tích của hai ma trận tam giác dưới L và trên U, cả L, U đều khả nghịch. Người ta gọi phân tích đó là *phân tích* LU của A. Phân tích về các ma trận tam giác kiểu như vậy có ứng dụng lớn trong giải quyết các bài toán giải hệ phương trình cũng như tính định thức. Để tìm phân tích này ta làm như sau:

Bước 1: Biến đổi sơ cấp hàng ma trận A thành ma trận tam giác trên U. Như đã biết, bản chất của quá trình này là nhân A với dãy ma trận không suy biến dạng tam giác dưới, giả sử dãy đó là $\mathrm{C} = \mathrm{C}_1\mathrm{C}_2...\mathrm{C}_k$, ta có

$$\mathrm{U} = \mathrm{C}_1\mathrm{C}_2...\mathrm{C}_k A = \mathrm{CA}$$

Bước 2: Do $\mathrm{LU} = \mathrm{A}$ nên tìm được L bằng công thức

$$L = C_k^{-1}C_{k-1}^{-1}...C_1^{-1} = C^{-1}$$

Ví dụ 2: Phân tích LU ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 18 & 3 \\ 2 & 12 & 1 \\ 4 & 15 & 3 \end{bmatrix}$$

Ta biến đổi sơ cấp A về U như sau

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 18 & 3 \\ 2 & 12 & 1 \\ 4 & 15 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{h_1}{3}+h_2 \to h_2} \begin{bmatrix} 6 & 18 & 3 \\ 0 & 6 & 0 \\ 4 & 15 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{2h_1}{3}+h_3 \to h_3} \begin{bmatrix} 6 & 18 & 3 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{h_2}{2}+h_3 \to h_3} \begin{bmatrix} 6 & 18 & 3 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = U$$

Ma trận C là

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Từ đó

$$L = C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Vậy $A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 18 & 3 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Tổng quát hơn với một ma trận vuông khả nghịch A ta có phân tích LUP, đó là phân tích dạng $PA = LU$, ở đó L, U vẫn là các ma trận tam giác như trên, P là ma trận nhận được trong biến đổi sơ cấp hàng (ở đây là đổi chỗ các hàng, một số tài liệu gọi là ma trận hoán vị) của A.

Bài tập mục I.3 (1tiết – Tiếp)

- **Yêu cầu SV chuẩn bị:** Nghiên cứu GT 1, và chuẩn bị bài tập trong GT 2

Bài giảng 5

HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

Chương I, mục: I.5 + Bài tập mục I.4

Tiết thứ: 13-15 Tuần thứ: 3

Mục đích, yêu cầu: Nắm được các khái niệm về hệ PTTT tổng quát, hệ Crame, hệ thuần nhất. PP Gauss giải hệ PTTT.

Hình thức tổ chức dạy học: Lý thuyết, thảo luận trên giảng đường.

Thời gian: LT: 2 tiết; BT: 1 tiết; Tự học: 5 tiết

Địa điểm: P2 bố trí

Nội dung chính:

I.5. Hệ phương trình tuyến tính (2 tiết)

I.5.1. Hệ phương trình tuyến tính : Hệ m pttt tổng quát n ẩn $A[x_k] = [b]$, trong đó $A = [a_{ij}]_{mxn}$ là ma trận hệ số của ẩn, $[x_k] = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$ là ma trận cột ẩn số, $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}$ là ma trận cột hệ số tự do.

Nghiệm của hệ là bộ n số $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ thỏa mãn tất cả các phương trình trong hệ.

I.5.2. Hệ Cramer

Hệ n pttt n ẩn $A[x_k] = [b_k]$ (1) có $detA \neq 0$ gọi là hệ Crame.

Công thức nghiệm của hệ (1) dưới dạng ma trận:

$$[x_k] = A^{-1}[b_k] \quad (2)$$

và công thức Cramer (có chứng minh):

$$x_k = \frac{|A_k|}{|A|}, k = 1,2, \dots, n;$$

trong đó A_k là ma trận nhận được từ A bằng cách gạch bỏ cột thứ k thay bằng cột hệ số tự do.

I.5.3. Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất:

Định lý: *Để hệ m phương trình tuyến tính thuần nhất n ẩn* $A[x_k] = O$ *có nghiệm khác không điều kiện cần và đủ là:* $rankA < n$

CM: *Cần:* Hệ $A[x_k] = O$ có nghiệm khác không thì $rankA < n$. Thật vậy nếu ngược lại , $rankA = n$ thì hệ đã là hệ Gauss có nghiệm duy nhất bằng không, trái với giả thiết.

Đủ: Hệ $A[x_k] = O$ có $rankA = r < n$ thì theo định lý Croneker- Capelly sẽ có số ẩn tự do bằng $n - r \geq 1$. Cho một ẩn tự do giá trị khác 0 được nghiệm khác không.

Hệ nghiệm cơ bản, cách tìm hệ nghiệm cơ bản.

I.5.4. Hệ PTTT tổng quát. Phương pháp Gauss giải hệ PTTT

- Định lý Croneker – Capelli (tự đọc chứng minh), nghiệm tổng quát và nghiệm riêng. Tìm tất cả các nghiệm của hệ pttt tổng quát.
- Phương pháp, ý nghĩa thực hành của phương pháp Gauss giải hệ pttt tổng quát.

Phương pháp Gauss giải hệ phương trình tuyến tính tổng quát

Phương pháp Gauss là phương pháp thực hành giải hệ *m* phương trình tuyến tính tổng quát *n* ẩn; trong đó *m*, *n* là hai số nguyên dương tùy ý.

Thực chất của phương pháp Gauss là phương pháp loại trừ ẩn số bằng biến đổi tương đương hệ phương trình. Ba phép biến đổi tương đương hệ phương trình đó là:

(i) Đổi chỗ hai phương trình

(ii) Lấy hai vế của một phương trình nhân với một số $\alpha \in \mathbb{K}$ rồi cộng tương ứng vào phương trình khác

(iii) Nhân hai vế của một phương trình với một số $\alpha \in \mathbb{K}, \alpha \neq 0$.

Rõ ràng là các phép biến đổi tương đương trên chỉ tác động đến các hệ số của các phương trình mà không tác động đến các ẩn số, vì thế khi thực hiện phương pháp Gauss giải hệ phương trình tuyến tính người ta không viết các ẩn số mà chỉ viết ma trận hệ số của các phương trình. Ma trận đầu tiên của phương pháp Gauss giải hệ *m* phương trình tuyến tính tổng quát *n* ẩn $A[x_k] = [b_k]$ có dạng

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ .. & .. & \dots & .. & .. \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Nếu hệ không thuần nhất thì các ma trận của phương pháp Gauss có gạch sọc ngăn cách với cột hệ số tự do. Hàng thứ *i* của ma trận là hàng hệ số của phương trình thứ *i* được viết theo thứ tự các ẩn số $x_1, x_2, \dots, x_n$. Nếu không có gạch sọc ngăn cách người ta hiểu hệ là hệ thuần nhất. Ba biến đổi tương đương hệ phương trình nói trên tương ứng với ba biến đổi sơ cấp của ma trận $(A|b)$.

Giả sử $a_{11} \neq 0$, khi đó ta thực hiện

Bước1: Lấy hàng thứ nhất nhân với $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$ rồi cộng vào hàng thứ hai, theo thỏa thuận từ trước ta sẽ viết $-\frac{a_{21}}{a_{11}}h_1 + h_2$ và tiếp tục $-\frac{a_{31}}{a_{11}}h_1 + h_3, \dots, -\frac{a_{m1}}{a_{11}}h_1 + h_m$. Kết quả sau bước1 ta nhận được ma trận của phương pháp Gauss là

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ .. & .. & \dots & .. & \dots \\ 0 & a'_{m2} & \dots & a'_{mn} & b'_m \end{array}\right)$$

Phương trình có chứa $a_{11} \neq 0$ mà ta đã dùng để loại trừ ẩn x_1 ra khỏi các phương trình còn lại được gọi là phương trình gốc. Như vậy trong ví dụ này sau bước1 ta đã loại được một ẩn x_1 ra khỏi các phương trình thứ 2, 3,…, *m*. Các phương trình gốc được đưa lên phía trên theo thứ tự các bước 1, 2,…. Sau không quá *n*-1 bước ta sẽ nhận được hàng cuối cùng khác không có một trong hai dạng sau đây:

Loại1: Bên trái gạch sọc toàn số 0, còn bên phải khác 0- hệ vô nghiệm.

Loại2: Bên trái gạch sọc có ít nhất một hệ số khác 0. Trong trường hợp này hệ có nghiệm. Số ẩn tự do *n-r* bằng số *n* trừ đi số phương trình *r* khi kết thúc phương pháp Gauss. Cho các ẩn tự do các giá trị tùy ý trong $\mathbb{K}$ ta sẽ nhận được tất cả các nghiệm của hệ phương trình. Nghiệm của hệ phương trình phụ thuộc các ẩn tự do được gọi là *nghiệm tổng quát*. Để tìm nghiệm của hệ phương trình người ta ngược từ dưới lên theo các phương trình gốc. Khi hệ thuần nhất có nghiệm khác 0 thì hệ có *hệ nghiệm cơ bản*. Hệ nghiệm cơ bản có *n-r* nghiệm có thể tìm được bằng cách cho *n-r* bộ giá trị các ẩn tự do sao cho ma trận thành lập từ các hàng giá trị này là ma trận khả nghịch. Đơn giản nhất là cho ma trận *n-r* bộ giá trị các ẩn tự do là ma trận đơn vị $E \in M_{n-r}(\mathbb{K})$.

Khi giải và biện luận hệ phương trình tuyến tính theo tham số, ta áp dụng phương pháp Gauss đã xét ở trên đến khi gặp trường hợp trên một hàng nào đó của ma trận hệ có thừa số chung phụ thuộc tham số thì dừng lại biện luận hai trường hợp như trong thuật toán tìm hạng của ma trận đã mô tả cặn kẽ ở mục c).

Ví dụ: Giải và biện luận hệ phương trình sau theo tham số *m*. Tìm hệ nghiệm cơ bản.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 6x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 + mx_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + mx_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Giải và biện luận bằng phương pháp Gauss

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -6 & 3 \\ 1 & m & 2 & -1 \\ -1 & 2 & m & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -6 & 3 \\ 0 & m-1 & 8 & -4 \\ 0 & 3 & m-6 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -6 & 3 \\ 0 & 3 & m-6 & 4 \\ 0 & m+2 & m+2 & 0 \end{bmatrix}$$

TH1: *m* = -2 hệ trở thành

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -6 & 3 \\ 0 & 3 & -8 & 4 \end{bmatrix}$, có nghiệm tổng quát (NTQ) $\begin{cases} x_2 = \frac{8}{3}x_3 - \frac{4}{3}x_4 \\ x_1 = \frac{10}{3}x_3 - \frac{5}{3}x_4 \end{cases}$, x_3, x_4 tùy ý

hay $\begin{cases} x_3 = 3u \\ x_4 = 3v \\ x_1 = 10u - 5v \\ x_2 = 8u - 4v \end{cases}$; $u, v \in \mathbb{K}$ tùy ý. (1)

Hệ nghiệm cơ bản $\{e_1, e_2\}$ với $e_1 = (10,8,3,0), e_2 = (-5,-4,0,3)$.

TH2: $m \neq -2$ giản ước hàng thứ ba cho *m*+2 ta được hệ tương đương

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -6 & 3 \\ 0 & 3 & m-6 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, 1 ẩn tự do x_3,

có NTQ $\begin{cases} x_3 = 4t \\ x_1 = (3m+1)t \\ x_2 = -4t \\ x_4 = (9-m)t \end{cases}$; $t \in \mathbb{K}$ tùy ý, (2)

hệ nghiệm cơ bản $\{e\}$ *với* $e = (3m+1, -4, 4, 9-m)$.

Kết luận:

(i) Khi m = -2 hệ có NTQ (1), hệ nghiệm cơ bản $\{e_1, e_2\}$

(ii) Khi $m \neq -2$ hệ có NTQ (2), hệ nghiệm cơ bản $\{e\}$.□

Bài tập mục I.4 (1 tiết) GTr.2: 2.1.45a,b; 2.1.46b,c,e;

Gợi ý: Áp dụng thuật toán tìm hạng ma trận (GTr1, tr27)

- **Yêu cầu SV chuẩn bị:** Đọc các GTr. 1 (tr. 81-85), 2 (tr. 30-32), thời gian tự học 5 tiết.

Bài giảng 6

BÀI TẬP

Chương I , mục: I.4; I.5

Tiết thứ: 16-18 Tuần thứ: 3

Mục đích, yêu cầu:

- Giải được các bài tập về ma trận nghịch đảo bằng phương pháp biến đổi sơ cấp, các bài tập về PT ma trận.
- Giải được hệ PTTT tổng quát bằng PP Gauss, tìm nghiệm tổng quát, tìm nghiệm riêng, nghiệm cơ bản.

Hình thức tổ chức dạy học: Bài tập, thảo luận trên giảng đường.

Thời gian: BT: 3 tiết; Tự học: 3 tiết

Địa điểm: P2 bố trí

Nội dung chính:

Bài tập 3 tiết : GTr2:

- **Mục I.4**. Bài 2.1.47a,b,d,j,k; 2.1.53a,f,g
- **Mục I.5** : Bài 2.3.6a,b; 2.3.7a,b,c,e; 2.3.9a,b,c; 2.3.10b,c; 2.3.16a,b; 2.3.19a, b.

- **Yêu cầu SV chuẩn bị:** Sinh viên tự các GTr. 1, 2, thời gian tự học 3 tiết.

Bài giảng 7

BÀI TẬP VÀ KIỂM TRA

Chương I , mục: I.5 + Kiểm tra chương I; Chương II, mục II.1

Tiết thứ: 19-21 Tuần thứ: 4

Mục đích, yêu cầu:

- Giải được các bài tập về hệ PTTT tổng quát.
- Bài kiểm tra 1 tiết hướng chủ yếu vào tìm ma trận nghịch đảo bằng PP biến đổi sơ cấp và giải biên luận hệ PTTT bằng PP Gauss.
- Nắm được các khái niệm cơ bản về không gian véc tơ và không gian véc tơ con, không gian sinh bởi hệ véc tơ.

Hình thức tổ chức dạy học: Lý thuyết, bài tập, thảo luận, kiểm tra trên giảng đường.

Thời gian: BT: 1 tiết; Kiểm tra đánh giá: 1 tiết; BT: 1 tiết; Tự học: 4 tiết

Địa điểm: Giảng đường do P2 bố trí

Nội dung chính:

Bài tập mục I.5: 1 tiết : GTr2:

Bài 2.3.9a,b,c; 2.3.10b,c; 2.3.16a,b; 2.3.19a, b.

Kiểm tra, đánh giá 1tiết

II.1. Không gian véc tơ và không gian véc tơ con.

II.1.1. Khái niệm không gian véctơ và không gian véctơ con

- Định nghĩa không gian vectơ $\langle V, \mathbb{K}\rangle$ trên trường $\mathbb{K}$.

Các ví dụ về các không gian vectơ thường gặp:

- E_2, E_3 – Không gian các vectơ bán kính $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$ trên mặt phẳng, trong không gian tương ứng với phép công hai vectơ theo qui tắc hình bình hành, nhân vectơ với một số thông thường;
- $\mathbb{K}^n$ – Không gian tọa độ *n* chiều $\mathbb{K}^n = \{a = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)\}$ với các tọa độ $\alpha_i \in \mathbb{K}$;
- $M_{m,n}(\mathbb{K})$- Không gian các ma trận cấp *(m,n)* trên trường $\mathbb{K}$;
- $\mathbb{R}[x]$- Không gian các đa thức hệ số thực;
- $\mathbb{F}(0,1)$ - Không gian các hàm số thực xác định trên khoảng $(0,1)$.

- Định nghĩa không gian vectơ con .

Các ví dụ về các không gian vectơ con quan trọng.

- $\mathbb{R}[x]_n$- Không gian các đa thức hệ số thực có bậc $\leq n$;
- Không gian con sinh bởi hệ vectơ $L(a_1, a_2, \dots, a_m)$ trong không gian vectơ $\langle V, \mathbb{K}\rangle$;
- N $_0$ - Không gian nghiệm của hệ PTTT thuần nhất $A[x_k] = O; A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$.
- **Yêu cầu SV chuẩn bị:** Ôn tập, đọc các GTr. 1, 2, thời gian tự học 4 tiết

Bài giảng 8
KHÔNG GIAN VECTƠ VÀ KHÔNG GIAN VECTƠ CON

Chương II, mục: II.1

Tiết thứ: 22-24 Tuần thứ: 4

Mục đích, yêu cầu:

- Nắm được các kiến thức về KGVT: cơ sở và chiều, tọa độ vectơ khi đổi cơ sở, hạng của hệ vectơ, không gian tổng, KG giao, tổng trực tiếp.

Hình thức tổ chức dạy học: Lý thuyết, thảo luận trên giảng đường.
Thời gian: LT: 3 tiết; Tự học: 5 tiết
Địa điểm: P2 bố trí
Nội dung chính:

II.1.2. Cơ sở và chiều của không gian vectơ
Hệ phụ thuộc tuyến tính và độc lập tuyến tính, các ví dụ.
Khái niệm cơ sở của KGVT; tọa độ vectơ.

Bổ đề: *Trong không gian vectơ $\langle V, \mathbb{K}\rangle$ có hai hệ vectơ*

$\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ (1)

$e'_1, e'_2, \dots, e'_m$ (2)
Hệ (1) độc lập tuyến tính, còn hệ (2) biểu diễn tuyến tính qua hệ (1) và có số vectơ $m > n$. Khi đó hệ (2) là hệ pttt. (có cm)
Định lý cơ bản về cơ sở (không chứng minh)

Các cơ sở trong một không gian vectơ (khác $\{o\}$)có cùng số các vectơ
Chiều của không gian: số vectơ trong một cơ sở của không gian vectơ V được gọi là chiều của không gian đó và ký hiệu là $dimV$.
Cơ sở và chiều của không gian nghiệm của hệ PTTT thuần nhất $A[x_k] = O; A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ (không chứng minh): gian nghiệm N_0 của hệ PTTT thuần nhất $A[x_k] = O; A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ có dim $N_0 = n - rankA$, hệ cơ sở của N_0 tìm từ công thức NTQ mỗi lần cho một ẩn tự do bằng 1, các ẩn tự do khác bằng 0 (hệ có *r* ẩn tự do).

Cơ sở và chiều của không gian sinh bởi hệ vectơ: Không gian $L = L(a_1, a_2, \dots, a_m)$ sinh bởi hệ vectơ $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ có cơ sở là một hệ con đltt lớn nhất trong đó.

II.1.3. Toạ độ véctơ khi đổi cơ sở

Ma trận chuyển cơ sở *C* là ma trận khả nghịch, công thức tọa độ của véctơ khi đổi cơ sở:

Giả sử $(V, \mathbb{K})$ là một không gian vectơ (hữu hạn chiều) trên trường $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ hoặc $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ cố định). $\{e_1, e_2, .., e_n\}$ là một cơ sở cố định của *V*. Ta cũng dùng ký hiệu $[e_k]$ để chỉ ma trận cột hình thức của $e_1, e_2, .., e_n$ tức là

$$[e_k] = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ e_n \end{bmatrix}$$

Đương nhiên khi này $[e_k]^{\mathrm{T}} = [e_1 \quad e_2 \quad \cdots \quad e_n\ ]$ là ma trận hàng hình thức của $e_1, e_2, .., e_n$. $(x_1, x_2, .., x_n)$ là tọa độ của vectơ *a* trong cơ sở $\{\mathrm{e_k}\}$, tức là $a = x_1 e_1 + x_2 e_2 + .. + x_n e_n$ hay có thể viết dưới dạng ma trận $a = [e_k]^T [x_k]$

Giả sử $\{e'_k\}$ là một cơ sở khác của *V*. Khi đó tồn tại các $c_{ij} \in \mathbb{K}$ để

$$\begin{cases} e'_k = c_{1k}e_1 + c_{2k}e_2 + \ldots + c_{nk}e_n \\ \qquad k = 1,2,..,n \end{cases} \quad (1)$$

hay dưới dạng ma trận

$$[e'_k]^T = [e_k]^T C \qquad (2).$$

Ma trận $C = \|c_{ij}\|$ xác định theo hệ thức (1) hoặc (2) được gọi là ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở $\{e_k\}$ sang cơ sở $\{e'_k\}$; trong đó tọa độ của e'_k là cột thứ *k* của ma trận *C*. Dễ dàng thấy, nếu $\{e_k\}$ là một cơ sở còn $\{e'_k\}$ là một hệ vectơ của *V* xác định theo (2) thì $\{e'_k\}$ là cơ sở của *V* khi và chỉ khi *C* là ma trận khả nghịch.

Gọi $(x_1, x_2, \dots, x_n), (x'_k, x'_k, \dots, x'_k)$ là các tọa độ của cùng một vectơ *a* trong các cơ sở $\{e_k\}, \{e'_k\}$ tương ứng. Ta có $[x_k] = C[x'_k]$ (3).

II.1.4. Hạng của hệ vectơ. Định lý về hạng của ma trận

Khái niệm hạng của hệ vectơ, Định lý về hạng của ma trận (có chứng minh):

Định lý về hạng của ma trận

Hạng của hệ vectơ $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ trong V được ký hiệu là $rank\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Ta có $rank\{a_1, a_2, \dots, a_n\} = dim\, L(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Giả sử $A = \|a_{ij}\|_{m\times n}$ là ma trận có *m* hàng, *n* cột với $a_{ij} \in \mathbb{K}$. Khi đó ta gọi $h_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}), c_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})$ tương ứng là các vectơ hàng thứ *i*, cột thứ *j* của ma trận *A*.

Định lý về hạng của ma trận: *Hạng của ma trận A bằng hạng của hệ các vectơ hàng cũng bằng hạng của hệ các vectơ cột* . Như vậy là

$$rankA = rank\{h_1, h_2, \dots, h_m\} = rank\{c_1, c_2, \dots, c_n\}.$$

Hạng của hệ vectơ

Hạng của hệ vectơ $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ bằng số vectơ trong hệ con độc lập tuyến tính lớn nhất trong $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$. Có thể lấy một hệ con độc lập tuyến tính lớn nhất tùy ý trong $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ làm cơ sở của không gian $L(a_1, a_2, \dots, a_m)$ sinh bởi hệ vectơ $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$

Bài toán tìm cơ sở và chiều của không gian $L = L(a_1, a_2, \dots, a_m)$ được đưa về bài toán tìm hạng của ma trận *A* thành lập từ các hàng (hoặc các cột) tọa độ của các vectơ a_k. Khi thực hiện phương pháp Gauss tìm hạng của ma trận *A* có liên quan đến tìm cơ sở và chiều của không gian vectơ ta không được đổi chỗ các hàng (cột). Số phần tử khác không trong ma trận cuối cùng của phương pháp Gauss nằm ở khác hàng, khác cột mà trên các hàng có số thứ tự $i_1, i_2, \dots, i_k$ thì các vectơ $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}$ có thể lấy làm cơ sở của $L(a_1, a_2, \dots, a_m)$. Chú ý ở đây ta tìm cơ sở trong số các vectơ đã cho $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$.

Ví dụ: Cho $a_1 = (2,-1,1,1), a_2 = (-\lambda, 2,1,1), a_3 = (\lambda, \lambda, 2,2)$, $a_4 = (2, \lambda + 1,4,4)$ là các vectơ trong $\mathbb{R}^4$. Ta hãy tìm cơ sở của $L = L(a_1, a_2, a_3, a_4)$ tùy theo các giá trị khác nhau của tham số λ.

Trước hết ta thành lập ma trận A từ các hàng tọa độ của các vectơ theo thứ tự a_1, a_2, a_3, a_4 là

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ -\lambda & 2 & 1 & 1 \\ \lambda & \lambda & 2 & 2 \\ 2 & \lambda+1 & 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

Áp dụng thuật toán tìm hạng ma trận, sau bước thứ nhất ta nhận được ma trận

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\lambda-2 & 3 & 0 & 0 \\ \lambda-4 & \lambda+2 & 0 & 0 \\ -6 & \lambda+5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

và sau khi lấy hàng hai nhân với -1 rồi cộng vào hàng ba ta có

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\lambda-2 & 3 & 0 & 0 \\ 2\lambda-2 & \lambda-1 & 0 & 0 \\ -6 & \lambda+5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Trường hợp 1: $\lambda = 1$, ta nhận được

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

cho ta cơ sở của L là $\{a_1 = (2,-1,1,1), a_2' = (-1,2,1,1)\}$.

Trường hợp 2: $\lambda \neq 1$, sau khi giản ước hàng 3 cho $\lambda - 1$ và dùng nó làm gốc ta nhận được

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\lambda-8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2\lambda-16 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Xảy ra hai trường hợp nhỏ trong trường hợp 2 này

i) $\lambda = -8$ có

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

cho cơ sở là $\{a_1 = (2,-1,1,1), a'_3 = (-2,-2,1,1)\}$

ii)Khi $\lambda \neq -8$ ta được

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

cho cơ sở $\{a_1, a_2, a_3\}$. Như vậy cuối cùng ta có kết luận: Khi $\lambda = 1$ cơ sở là $\{a_1, a'_2\}$; khi $\lambda = -8$ cơ sở là $\{a_1, a'_3\}$; Khi λ khác 1 và -8 cơ sở là $\{a_1, a_2, a_3\}$□

II.1.5. Không gian tổng, giao; tổng trực tiếp

Không gian tổng $L_1 + L_2$, không gian giao $L_1 \cap L_2$. Định lý về chiều KG tổng, KG giao (có chứng minh). Khái niệm tổng trực tiếp $L_1 \oplus L_2$. Định lý về tổng trực tiếp (không chứng minh): GT1, bổ đề 3, tr186.

Yêu cầu SV chuẩn bị: Đọc các GTr. 1 (tr. 95-118), 2 (tr. 63-67), làm các bài tập về nhà, thời gian tự học 5 tiếng.

Bài giảng 9
BÀI TẬP VỀ KGVT

Chương II, mục: II.1

Tiết thứ: 25-27 Tuần thứ: 5

Mục đích, yêu cầu:

- Làm các bài tập cơ bản về KGVT.

Hình thức tổ chức dạy học: Lý thuyết, thảo luận trên giảng đường.
Thời gian: BT 3 tiết, Tự học: 5 tiết
Địa điểm: P2 bố trí
Nội dung chính:

Bài tập 3 tiết

- Nhận biết không gian vectơ con

- Cơ sở của không gian vectơ , của không gian sinh bởi hệ vectơ

- Hạng của hệ vectơ

- Không gian tổng, giao; tổng trực tiếp
- Tọa độ vectơ khi đổi cơ sở

GTr2, II.1:

3.1.10a,b; 3.1.11a,c,d; 3.1.12a,b; 3.1.18a,b; 3.1.19; 3.1.20b; 3.1.23; 3.1.30a,b; 3.1.31b; 3.1.32b; 3.1.33a; 3.1.34a; 3.1.37a; 3.1.35a,c;

Yêu cầu SV chuẩn bị:

Đọc các GTr. 1 (tr. 95-108), 2 (tr. 63-67), thời gian tự học 4 tiếng.

Bài giảng 10

BÀI TẬP VỀ KGVT

ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

Chương II, mục: II.1, II.2

Tiết thứ: 28-30 Tuần thứ: 5

Mục đích, yêu cầu:

- Làm các bài tập cơ bản về KGVT.
- Nắm vững được các kiến thức cơ bản về AXTT, TTTT trong KGVT: KG nhân, KG ảnh, AXTT ngược.

Hình thức tổ chức dạy học: Lý thuyết, thảo luận trên giảng đường.
Thời gian:; BT 1 tiết, LT: 2 tiết, Tự học: 5 tiết
Địa điểm: P2 bố trí
Nội dung chính:

Bài tập 1 tiết

- Không gian tổng, giao; tổng trực tiếp
- Tọa độ vectơ khi đổi cơ sở

GTr2, II.1:

3.1.36a,c; 3.1.38a,b; 3.1.39b; 3.1.40b; 3.1.41b;

Lý thuyết 2 tiết

II.2. Ánh xạ tuyến tính và toán tử tuyến tính
II.2.1. Khái niệm AXTT và TTTT
Định nghĩa AXTT và TTTT, các ví dụ. Cách cho AXTT:
Định lý 1.

Đối với mỗi hệ cơ sở $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ *trong KGVT* $\langle V, \mathbb{K}\rangle$ *và hệ n vectơ tùy ý* $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ *trong KGVT* $\langle W, \mathbb{K}\rangle$ *tồn tại duy nhất một AXTT* $f: V \to W$ *sao cho* $f(e_k) = w_k, k = 1,2,\dots,n.$

Chứng minh (Tự đọc: GTr.1, tr.121)

II.2.2. Nhân và ảnh của ánh xạ tuyến tính

Giả sử $f \in L(V,W)$ là ánh xạ tuyến tính từ không gian vectơ $(V,\mathbb{K})$ vào không gian vectơ $(W,\mathbb{K})$.

$Kerf = \{a \in V: f(a) = 0\}$ là một không gian vectơ con của V và được gọi là không gian nhân hay đơn giản là nhân của f.

$Imf = \{b \in W: \exists a \in V f(a) = b\}$ là một không gian vectơ con của W và được gọi là không gian ảnh của f. Ta có

Định lý 2. *Giả sử $f \in L(V,W)$ là ánh xạ tuyến tính từ không gian vectơ $(V,\mathbb{K})$ vào không gian vectơ $(W,\mathbb{K})$. Khi đó ta có*

$$dimV = dimKerf + dimImf \qquad (1)$$

Chứng minh (GTr.1, tr.123)

Ánh xạ tuyến tính ngược (*ss với GTr,tr125-127*)

Định nghĩa AXTT ngược của AXTT $f: V \to W$. Định lý về 4 điều kiện tương đương tồn tại AXTT ngược

Định lý 3.

Giả sử $\langle V,\mathbb{K}\rangle$ và $\langle W,\mathbb{K}\rangle$ là các không gian vectơ trên cùng một trường $\mathbb{K}$ có $dimW = dimV$, $f \in L(V,W)$. Khi đó 4 khẳng định sau tương đương:

i) $f: V \to W$ *là song ánh*

ii) Tồn tại AXTT ngược $g: W \to V$

iii) $kerf = \{o\}$

iv) $imf = W$

Chứng minh định lý này hoàn toàn giống như chứng minh định lý ở tr125 GTr1 chỉ có chút ít thay đổi trong từ ngữ từ toán tử tuyến tính sang ánh xạ tuyến tính (VT689)

Chứng minh c) iii) $\Rightarrow$ iv) (các phần còn lại tự đọc GTr.1, tr125)

Bài giảng 11
ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

Chương II, mục: II.1, II.2

Tiết thứ: 31-33 Tuần thứ: 6

Mục đích, yêu cầu:

- Làm các bài tập cơ bản về AXTT.
- Nắm vững được các kiến thức cơ bản về Ma trận của AXTT, hạng của AXTT.

Hình thức tổ chức dạy học: Lý thuyết, thảo luận trên giảng đường.
Thời gian:; LT 2 tiết, BT: 1 tiết, Tự học: 5 tiết
Địa điểm: P2 bố trí
Nội dung chính:

II.2.3. Ma trận của ánh xạ tuyến tính. Hạng của ánh xạ tuyến tính

1. Định nghĩa ma trận A của AXTT f (trong các cơ sở $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ của $\langle V, \mathbb{K}\rangle$ và $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ của $\langle W, \mathbb{K}\rangle$) dưới dạng ma trận hình thức

$[f(e_1)\ f(e_2) \ldots\ f(e_n)] = [w_1\ w_2 \ldots\ w_n]A$ hay

$[f(e_k)]^T = [w_j]^T A \quad (2)$

Ma trận A của TTTT f : Khi f là TTTT người ta lấy hai cơ sở $\{e_k\}$ và $\{w_j\}$ trùng làm một. Trong $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ của KGVT V, ma trận của TTTT f xác định bởi hệ thức: $[f(e_1)\ f(e_2) \ldots\ f(e_n)] = [e_1\ e_2 \ldots\ e_n]A$ hay

$[f(e_k)]^T = [e_k]^T A \quad (3)$

(các ký hiệu như GTr1, tr7)
Dạng tọa độ của AXTT:

Giả sử trong các cơ sở cố định $(e_1, e_2, .., e_n)$ của V, $(w_1, w_2, .., w_m)$ của W AXTT f có ma trận là A. Ký hiệu $[x_k]$ là ma trận cột tọa độ của vectơ a, còn $[y_k]$
là ma trận cột tọa độ của vectơ *f*(*a*), *t.l.*

$f(a) = y_1 w_1 + y_2 w_2 + \dots + y_m w_m$

Khi đó ta có

$A[x_k] = [y_k] \quad (4)$

Ví dụ: TTTT φ quay vectơ đi một góc α, $(\alpha > 0)$ cùng k.đ.h. trong mặt phẳng (GTr.1, tr.134), $\varphi(\vec{a})$ nhận được từ $\vec{a}$ bằng cách quay $\vec{a}$ đi một góc α, $(\alpha > 0)$ cùng k.đ.h. Dễ dàng chứng tỏ được $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ xác định như trên là TTTT và trong cơ sở chính tắc $\vec{\imath} = (1,0), \vec{\jmath} = (0,1)$ có ma trận

$$A = \begin{bmatrix} cos\alpha & sin\alpha \\ -sin\alpha & cos\alpha \end{bmatrix}$$

Theo (4)

$$\begin{cases} x = x'cos\alpha - y'sin\alpha \\ y = x'sin\alpha + y'cos\alpha \end{cases}$$

trong đó $a = (x, y), \varphi(\vec{a}) = (x', y')$.

Ma trận của AXTT, TTTT khi đổi cơ sở:

Giả sử trong các cơ sở $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ của V, $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ của W AXTT f có ma trận A; còn trong các cơ sở tương ứng khác $\{e'_1, e'_2, \dots, e'_n\}$ của V, $\{w'_1, w'_2, \dots, w'_n\}$ của W AXTT f có ma trận A'. Gọi B là ma trận chuyển cơ sở từ $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ sang $\{e'_1, e'_2, \dots, e'_n\}$; C là ma trận chuyển cơ sở từ $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ sang $\{w'_1, w'_2, \dots, w'_n\}$. Khi đó ta có

$A' = C^{-1}AB \quad (1)$

CM: Theo định nghĩa $[f(e_k)]^T = [w_j]^T A \quad (2)$

$[f(e'_k)]^T = [w'_j]^T A' \quad (3)$

$[e'_k]^T = [e_k]^T B \quad (4)$

$[w'_j]^T = [w_j]^T C \quad (5)$

Từ (4), (2) có $[f(e'_k)]^T = [f(e_k)]^T B = [w_j]^T AB \quad (6)$

Từ (3), (5) ta có $[f(e'_k)]^T = [w'_j]^T A' = [w_j]^T C\, A' \quad (7)$

So sánh (6), (7) ta có $AB = C\ A'$ hay $A' = C^{-1}AB$.

Trường hợp TTTT, ta có $A' = C^{-1}AC$ (7.1); Trong đó A là ma trận của TTTT f trong cơ sở $\{e_k\}$, A' là ma trận của nó trong cơ sở mới $\{e'_k\}$; C là ma trận chuyển cơ sở từ $\{e_k\}$ sang $\{e'_k\}$. □

2. Hạng của ánh xạ tuyến tính được ký hiệu là $rankf$, theo định nghĩa

$$rankf = \dim(Imf)$$

Giả sử trong các cơ sở cố định $(e_1, e_2, .., e_n)$ của V, $(w_1, w_2, .., w_m)$ của W AXTT f có ma trận là A, khi đó

$$rankf = \dim(Imf) = rankA \quad (8)$$

Theo biểu thức tọa độ của ánh xạ tuyến tính, nếu ký hiệu $[x_k]$ là ma trận cột tọa độ của vectơ a thì $f(a) = 0$ tương đương với

$$A[x_k] = O \quad (1)$$

tức là tọa độ $(x_1, x_2, .., x_n)$ của a thỏa mãn hệ phương trình tuyến tính thuần nhất (1). Giải hệ (1) ta được hệ nghiệm cơ bản $(e_1, e_2, .., e_r)$, $e_k \in \mathbb{K}^n$ cho ta hệ cơ sở của $Kerf$ với các vectơ trong V có cùng tọa độ như $\{e_1, e_2, .., e_r\}$ mà ta vẫn ký hiệu là $(e_1, e_2, .., e_r)$.

Ví dụ: Tùy thuộc vào các giá trị khác nhau của tham số λ ta hãy tìm cơ sở của $Kerf$ trong đó $f \in L(V, W)$ và có ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & \lambda & -1 & -1 \\ \lambda & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Giải hệ phương trình (1) bằng phương pháp Gauss sau bước đầu tiên ta thu được ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 3 & \lambda - 1 & 0 & -3 \\ \lambda + 2 & \lambda + 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Trường hợp 1. $\lambda = -2$ ta nhận được hệ

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Có nghiệm tổng quát

$$\begin{cases} x_2 = x_1 - x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$$

với x_1, x_4 tùy ý cho ta hệ cơ sở của $Kerf$ là

$\{a_1 = (1,1,0,0), a_2 = (0,-1,1,1)\}$.

Trường hợp 2. $\lambda \neq -2$ ta nhận được

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 4 & 0 & -3 \end{bmatrix},$$

cho nghiệm tổng quát

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_3 = \dfrac{1}{3}(2\lambda - 2)x_2 \\ x_4 = \dfrac{1}{3}(\lambda - 4)x_2 \end{cases}$$

với x_2 tùy ý; cho cơ sở $\{a_3 = (-3,3,2\lambda - 2, \lambda - 4)\}$.□

Cùng ví dụ trên bây giờ ta tìm cơ sở của *Imf*.

Vì $Imf = L(f(e_1), f(e_2), .., f(e_n))$ nên *Imf* có cơ sở là một hệ con độc lập tuyến tính lớn nhất trong $\{f(e_1), f(e_2), .., f(e_n)\}$. Vì tọa độ của $f(e_i)$ là vectơ cột thứ *i* của *A* cho nên đó chính là hệ con độc lập tuyến tính lớn nhất trong hệ các vectơ cột của *A*. Khi áp dụng phương pháp Gauss tìm hạng của *A*, không đổi chỗ các cột, thì trong ma trận cuối cùng các phần tử khác không trong ma trận nằm ở khác hàng, khác cột mà trên các cột có số thứ tự $j_1, j_2, .., j_s$ thì các vectơ $f(e_{j_1}), f(e_{j_2}), .., f(e_{j_s})$ có thể lấy làm cơ sở của *Imf*.

Áp dụng cho ví dụ đang xét, tìm *rankA* thoạt đầu ta nhận được ma trận

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & \lambda - 1 & 0 & -3 \\ \lambda + 2 & \lambda + 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Trường hợp 1. $\lambda = -2$ ta nhận được ma trận

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ có hạng như } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

cho ta cơ sở của *Imf* gồm hai vectơ cột thứ ba, thứ tư tức là

$\{(1,-1,1),(-2,-1,1)\}$.

Cũng có thể lấy cơ sở gồm hai vectơ cột thứ 1,2; thứ 1, 3.

Tương tự cho trường hợp $\lambda \neq -2$ thuật toán tìm hạng ma trận cho ta

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix},$$

hay cơ sở của *Imf* gồm ba vectơ cột thứ nhất,thứ ba và thứ tư tức là

$$\{(1,2,\lambda)(1,-1,1),(-2,-1,1)\}.$$

II.2.4. Không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

Bài tập 1 tiết: Giải được các bài tập cơ bản về AXTT, TTTT sau:

AXTT:GTr2: 3.2.1, 3.2.3; 3.2.13; 3.2.14; 3.2.15a,b

Bài giảng: 12

BÀI TẬP VỀ AXTT

Chương II, mục: II.2

Tiết thứ: 34-36 Tuần thứ: 6

Mục đích, yêu cầu:

- Giải được các bài tập cơ bản về AXTT, TTTT; tìm được ma trận của AXTT, TTTT. Ma trận AXTT khi đổi cơ sở.

Hình thức tổ chức dạy học: Bài tập, thảo luận trên giảng đường.

Thời gian: BT: 3 tiết; Tự học: 6 tiếng

Địa điểm: P2 bố trí

Nội dung chính:

AXTT:GTr2: 2.3.11a,c,d; 3.2.16a,b,c; 3.2.22a,b;3.2.26a,b; 3.2.23a,b; 3.2.25a,c; 3.2.28a,c; -30b; -32

Yêu cầu SV chuẩn bị: Đọc các GTr. 1, 2 (tr.67-69), thời gian tự học 6 tiếng.

Ghi chú:

Bài giảng: 13

TRỊ RIÊNG, VÉC TƠ RIÊNG

Chương II, mục: II.3

Tiết thứ: 37-39 Tuần thứ: 7

Mục đích, yêu cầu:

- Nắm vững kiến thức về trị riêng, vec tơ riêng, điều kiện chéo hóa và phương pháp chéo hóa ma trận.
- Làm được các bài tập cơ bản về trị riêng, vec tơ riêng.

Hình thức tổ chức dạy học: Bài tập, thảo luận trên giảng đường.

Thời gian: LT 2 tiết, BT: 1 tiết; Tự học: 6 tiếng

Địa điểm: P2 bố trí

Nội dung chính:

Nội dung chính:

***Lý thuyết 2 tiết, II.3*:**

II.3. Trị riêng, vectơ riêng

II.3.1 Trị riêng, vectơ riêng của TTTT: định nghĩa vectơ riêng, trị riêng của TTTT; không gian một chiều bất biến đối với TTTT f. Định lý về trị về trị riêng, vectơ riêng. Ví dụ.

II.3.2 Chéo hóa TTTT : Điều kiện chéo hóa được: *Toán tử tuyến tính f trong không gian vectơ V chéo hóa được khi và chỉ khi tồn tại cơ sởcủa V gồm toàn các vectơ riêng của f.*

Giả sử $f \in L(V)$ và trong một cơ sở ban đầu nào đó của không gian vectơ V toán tử tuyến tinh *f* có ma trận A; $dimV = n$. Ta nói *f* chéo hóa được nếu tồn tại một cơ sở nào đó của *V* mà trong đó *f* có ma trận *D* là ma trận đường chéo. Cơ sở này được gọi là cơ sở đường chéo của *f* (hay của *A*).

Vetơ $e \in V, e \neq 0$ được gọi là vectơ riêng của *f* (hay của *A*) ứng với trị riêng $\lambda \in \mathbb{K}$ nếu $f(e) = \lambda e$. Tập tất cả các vectơ riêng ứng với cùng một trị riêng λ cùng với vectơ không (o) tạo thành không gian vectơ con trong *V* được ký hiệu là $V_\lambda(f)$ và gọi là không gian riêng của f ứng với trị riêng λ. Tập $\sigma(f)$ tất cả các trị riêng của f được gọi là phổ của f.

Cơ sở $\{e_1, e_2, .., e_n\}$ của V là cơ sở đường chéo của f khi và chỉ khi đây là cơ sở gồm toàn các vectơ riêng của f.

Nếu f có n trị riêng khác nhau trong trường $\mathbb{K}$ thì n vectơ riêng tương ứng với chúng tạo thành cơ sở đường chéo của f. Trong trường hợp f có các trị riêng bội thì cho dù f có n trị riêng (kể cả bội) câu trả lời về chéo hóa của f vẫn không xác định. Vấn đề là có tồn tại cơ sở của V gồm toàn các vectơ riêng của f không.

Ví dụ: Giả sử

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

là ma trận của f trong không gian vectơ V có dim$V$ = 3. Hãy làm rõ vấn đề chéo hóa của f. Nếu f chéo hóa được hãy tìm ma trận đường chéo, ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở ban đầu sang cơ sở đường chéo.

Ta biết rằng trị riêng của f là nghiệm của đa thức đặc trưng $|A - \lambda E| = O$ hay $(\lambda - 1)^2(2 - \lambda) = 0$. Như vậy $\sigma(f) = \{1,1,2\}$ trong đó $\lambda = 1$ là nghiệm bội hai.

Với $\lambda_1 = 1$ vectơ riêng $e = (x_1, x_2, x_3)$ thỏa mãn hệ phương trình tuyến tinh thuần nhất $(A - \lambda_1 E)[x_k] = O$. Không gian riêng $V_1(f)$ gồm các vectơ có cùng tọa độ như các vectơ của không gian nghiệm của hệ phương trình này. Giải hệ (1) ta tìm được cơ sở của $V_1(f)$ là $\{e_1, e_2\}$; trong đó $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,0,1)$.

Với $\lambda_3 = 2$, $V_2(f)$ có cơ sở $e_3 = (-1,1,1)$.

Rõ ràng $\{e_1, e_2, e_3\}$ độc lập tuyến tính nên tạo thành cơ sở đường chéo của f. Ma trận chuyển cơ sở C từ cơ sở ban đầu sang cơ sở đường chéo có các cột theo thứ tự chính là các cột tọa độ của e_1, e_2, e_3 ;

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

trong cơ sở (e_1, e_2, e_3) f có ma trận đường chéo

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

và $D = C^{-1}AC$ □

Đối với ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ta cũng có 3 trị riêng thực $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$. Với $\lambda_1 = 1$, không gian nghiệm của hệ phương trình xác định vectơ riêng có cơ sở (e_1) với $e_1 = (0,1,0)$, với $\lambda_3 = 2$ có cơ sở (e_2) với $e_2 = (1,2,-1)$. Như vậy f chỉ có hai vectơ riêng độc lập tuyến tính cho nên nó không chéo hóa được mặc dù giống như ví dụ trên nó cũng có 3 trị riêng thực. □

***Bài tập 1 tiết, II.3*: GTr.2:** 3.3.1d,e,h; -2a,b,c; -3; -9; -19c,d; -24.

Yêu cầu SV chuẩn bị: Đọc các GTr. 1, 2, thời gian tự học 8 tiếng.

Bài giảng: 14

DẠNG TOÀN PHƯƠNG TRONG KGVT

Kiểm tra chương 2 (1 tiết).

Chương III, mục: III.1.

Tiết thứ: 40-42 Tuần thứ: 7

Mục đích, yêu cầu:

- Nắm được lý thuyết về dạng toàn phương (DTP) trong KGVT: DTP, ma trận của DTP, cơ sở chính tắc của DTP.
- Đưa DTP về dạng chính tắc bằng phương pháp Lagrange.

Hình thức tổ chức dạy học: Lý thuyết, thảo luận trên giảng đường.

Thời gian: KT: 1 tiết; LT: 2 tiết; Tự học: 7 tiếng

Địa điểm: P2 bố trí

Nội dung chính:

III.1. Dạng toàn phương trong KGVT

III.1.1. Dạng song tuyến tính đối xứng và dạng toàn phương

Khái niệm dạng STT, dạng STT đối xứng, DTP trong không gian vectơ. Ma trận của dạng STT, DTP. Ma trận của DTP khi đổi cơ sở.

III.1.2. Đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc

- Khái niệm cơ sở chính tắc của DTP.
- *Phương pháp Lagrange:* Đây là các phương pháp đưa dạng toàn phương trong không gian vectơ $(V, \mathbb{R})$ về dạng chính tắc.

Phương pháp Lagrange thực chất là phương pháp tách dần các bình phương.

Ví dụ 1: Đưa dạng toàn phương sau về dạng chính tắc

$$F(x) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 4x_2x_3 \qquad (1)$$

Ta có $F(x) = (x_1 + x_2 + 2x_3)^2 - 8x_2x_3 - 6x_3^2$

$$= (x_1 + x_2 + 2x_3)^2 - 6\left[\left(\frac{2}{3}x_2 + x_3\right)^2 - \frac{4}{9}x_2^2\right]$$

$$= (x_1 + x_2 + 2x_3)^2 + \frac{8}{3}x_2^2 - 6\left(\frac{2}{3}x_2 + x_3\right)^2 \quad (2)$$

Đặt

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = t_1 \\ x_2 = t_2 \\ \frac{2}{3}x_2 + x_3 = t_3 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x_1 = t_1 + \frac{1}{3}t_2 - 2t_3 \\ x_2 = t_2 \\ x_3 = -\frac{2}{3}t_2 + t_3 \end{cases} \quad (3)$$

Dưới dạng ma trận (3) là $[x_i] = C[t_i]$; trong đó $C = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2/3 & 1 \end{bmatrix}$.

Bằng đổi biến (3) theo (2) ta nhận được dạng chính tắc

$$F(x) = t_1^2 + \frac{8}{3}t_2^2 - 6t_3^2;$$

trong đó $x = t_1e_1'' + t_2e_2'' + t_3e_3''$ với (e_1'', e_2'', e_3'') là cơ sở chính tắc của dạng toàn phương theo phương pháp Lagrange;

$$e_1'' = (1,0,0), e_2'' = \left(1/3, 1, -2/3\right), e_3'' = (-2,0,1).$$

Ma trận C chính là ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở ban đầu sang cơ sở chính tắc (e_1'', e_2'', e_3'').

Ví dụ 2:

$$F(x) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 \quad (2)$$

Đầu tiên xét phép đổi biến

$$\begin{cases} x_1 = x_1^{'} - x_2^{'} \\ x_2 = x_1^{'} - x_2^{'} \\ x_3 = x_3^{'} \end{cases}$$

ta đưa dạng toàn phương về dạng

$$F(x) = x_1^{'2} - x_2^{'2} + 2x_1^{'}x_3^{'}$$

sau đó tiến hành làm như trong Ví dụ 1, ta đưa về dạng chính tắc

$$F(x) = t_1^2 - t_2^2 - t_3^2 .$$

Ma trận của phép đổi biến $[x_i] = C[t_i]$ là

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Phương pháp Jacobi (đọc thêm GT1):

Yêu cầu SV chuẩn bị:

Đọc các GTr. 1 (tr. 156-177), 2 (tr.110-112), thời gian tự học 7 tiếng.

Bài giảng: 15

DẠNG TOÀN PHƯƠNG TRONG KGVT (tiếp)

Chương III, mục: III.1.

Tiết thứ: 43-45 Tuần thứ: 8

Mục đích, yêu cầu:

- Nắm được lý thuyết về DTP trong KGVT, đưa DTP về DCT bằng PP Lagrange, vận dụng giải bài tập

Hình thức tổ chức dạy học: Lý thuyết, thảo luận trên giảng đường.

Thời gian: LT: 1 tiết; BT: 2 tiết; Tự học: 7 tiếng

Địa điểm: P2 bố trí

Nội dung chính:

III.1.2. Đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc (tiếp)

- Luật quán tính.
- Khái niệm về DTP xác định dương. Điều kiện ký số về DTP định dương (không chứng minh). Định lý Silvester (không chứng minh)

Bài tập 2 tiết (#41-42)

GT2 4.2.1a,b,c.; 4.2.2; 4.2.6a,c,e;

Yêu cầu SV chuẩn bị:

Làm các bài tập cho về nhà, thời gian tự học 7 tiếng.

Bài giảng: 16

KHÔNG GIAN EUCLID

Chương III, mục: III.2+BT III.1

Tiết thứ: 46-48 Tuần thứ: 8

Mục đích, yêu cầu:

- Nắm được các kiến thức cơ bản về ứng dụng của ĐSTT vào hình học giải tích. Không gian Euclid: tích vô hướng, độ dài, khoảng các, góc giữa hai vectơ.

Hình thức tổ chức dạy học: Lý thuyết, thảo luận trên giảng đường.

Thời gian: LT: 2 tiết; BT: 1 tiết; Tự học: 6 tiếng

Địa điểm: P2 bố trí

Nội dung chính:

***2 tiết 46-47 LT, III.2 (còn 2t.)*:**

III.2. Không gian Euclid

III.2.1. Tích vô hướng: Khái niệm tích vô hướng, KG Euclid. Các ví dụ về tích vô hướng. DTP xác định dương và tích vô hướng. Các bất đẳng thức Cauchy-Bunhiakovsky và Minkovsky trong tích vô hướng.

III.2.1. Cơ sở trực chuẩn: Hệ trực giao, hệ trực chuẩn, hệ cơ sở trực chuẩn. Tọa độ của vectơ trong hệ cơ sở trực chuẩn. Quá trình trực chuẩn hóa Gram-Schmidt.

Ký hiệu **E** là không gian Euclid, dim**E** = n, $\langle a, b\rangle$ là tích vô hướng trong **E**, $\|a\| = \sqrt{\langle a, a\rangle}$ là độ dài (hay chuẩn) của vectơ a. Hai vectơ a, b được gọi là trực giao nếu $\langle a, b\rangle = 0$, khi đó ta thường viết theo cách của hình học là $a \perp b$.

Hệ các vectơ $(a_1, a_2, \dots, a_m)$ được gọi là hệ trực giao nếu $a_i \neq o$, $a_i \perp a_j$ nếếu $i \neq j$. Hệ các vectơ $(e_1, e_2, \dots, e_m)$ được gọi là hệ trực chuẩn nếu nó là hệ trực giao và được chuẩn hóa tức là độ dài tất cả các vectơ đều bằng 1: $\|e_i\| = 1,\ i = 1,2, \dots, m$.

Hệ trực chuẩn $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ mà là cơ sở của **E** được gọi là hệ cơ sở trực chuẩn của **E**. Trong hệ cơ sở trực chuẩn cố định của **E** khi $a, b \in$ **E**, $a = (a_1, a_2, \dots, a_n), b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ thì $\langle a, b\rangle = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$ và $\|a\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}$ được gọi là độ dài Euclid.

Ma trận $C \in M_n(\mathbb{R})$ được gọi là ma trận trực giao nếu $C^T C = E$. Dễ dàng thấy, ma trận C là ma trận trực giao khi và chỉ khi $C^{-1} = C^T$ và khi C là ma trận trực giao thì hệ các vectơ hàng của C (cũng như vậy hệ các vectơ cột của C) tạo thành hệ cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{R}^n$.

Dễ dàng thấy biến đổi trực giao, tức là biến đổi có dạng

$$[x_i] = C[x_i']$$

với C là ma trận trực giao, bảo toàn tích vô hướng. Thật vậy

$$\langle x, y\rangle = [x_i]^T[y_i] = [x_i']^T C^T C[y_i'] = [x_i']^T[y_i'] = \langle x', y'\rangle.$$

Trong đó $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), x' = (x_1', x_2', \dots, x_n'); y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$,

$y' = (y_1', y_2', \dots, y_n')$.

Quá trình trực chuẩn Gram-Schmidt cho phép ta xây dựng hệ trực chuẩn $(e_1, e_2, \dots, e_m)$ từ một hệ độc lập tuyến tính tùy ý $(a_1, a_2, \dots, a_m)$ thỏa mãn điều kiện

$$e_j \in L(a_1, a_2, \dots, a_j); j = 1,2,.,m \quad (1)$$

Xây dựng hệ trực chuẩn theo phương pháp Gram-Schmidt được thực hiện qui nạp theo số vectơ m của hệ $a_1, a_2, \dots, a_m$ như sau: Đặt $e_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|}$. Nếu $(e_1, e_2, \dots, e_k)$ là hệ trực chuẩn đã được xây dựng từ hệ độc lập tuyến tính $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ và $(a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1})$ độc lập tuyến tính thì xây dựng

$$e_{k+1}' = a_{k+1} - \langle a_{k+1}, e_1\rangle e_1 - \langle a_{k+1}, e_2\rangle e_2 - \cdots - \langle a_{k+1}, e_k\rangle e_k \quad (2)$$

Đặt $e_{k+1} = \frac{e_{k+1}'}{\|e_{k+1}'\|}$ ta nhận được hệ trực chuẩn có k+1 vectơ.

Ví dụ: Trực chuẩn hóa cơ sở (a_1, a_2, a_3) trong $\mathbb{R}^3$ với

$a_1 = (0,1,1), a_2 = (1,0,1),\ a_3 = (1,1,1)$.

Đặt $e_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|} = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

$$e_2' = a_2 - \langle a_2, e_1\rangle e_1 = a_2 - \frac{1}{\sqrt{2}} e_1 = \left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

e_2' song song với $e_2'' = (2, -1, 1)$.

Đặt $e_2 = \frac{e_2''}{\|e_2''\|} = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

Tương tự

$$e_3' = a_3 - \langle a_3, e_1\rangle e_1 - \langle a_3, e_2\rangle e_2 = a_3 - \sqrt{2} e_1 - \frac{2}{\sqrt{6}} e_2 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

song song với $e_3'' = (1,1,-1)$.Đặt $e_3 = \frac{e_3''}{\|e_3''\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Như vậy hệ cơ sở trực chuẩn trong $\mathbb{R}^3$ là (e_1, e_2, e_3) đã xây dựng xong □

Giả sử rằng $A \in M_{n\times m}(\mathbb{R}$ là ma trận gồm m cột độc lập tuyến tính, A viết dưới dạng các vector cột là $\mathrm{A} = (\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, ..., \mathrm{v}_m)$. Trực chuẩn hoá Gram-Schmidt các vector $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, ..., \mathrm{v}_m$ ta được các vector $e_1, e_2, ..., e_m$ mặt khác từ quá trình Gram-Schmidt ta thấy rằng

$$v_k = \sum_{i=1}^{k} \langle v_k, e_i\rangle e_i$$

vì vậy ta có thể viết

$$A = (v_1, v_2, ..., v_m) = (e_1, e_2, ..., e_m)\begin{bmatrix} \langle v_1, e_1\rangle & \langle v_2, e_1\rangle & \cdots & {}_1\rangle \\ 0 & \langle v_2, e_2\rangle & \cdots & {}_2\rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & {}_m\rangle \end{bmatrix} \quad QR$$

Như vậy Q là ma trận các cột trực giao, còn R là ma trận vuông cấp m các hệ số khi khai triển các vector v_k theo cơ sở trực chuẩn thu được từ quá trình trực chuẩn hóa Gram-Schmidt các vector này (hệ số Fourier). Rõ ràng $\langle v_i, e_i\rangle \neq 0$ vì vậy R khả nghịch. Ta có thể phát biểu kết quả này dưới dạng định lý sau.

Định lý: *Giả sử* $A \in M_{n\times m}(\mathbb{R}$ *với* $\mathrm{rank}(\mathrm{A}) = \mathrm{m}$, *khi đó có thể phân tích*

$$A = Q\mathrm{R}$$

trong đó Q là ma trận có các cột trực giao, còn R là ma trận tam giác trên cấp m khả nghịch.

Từ định lý trên ta thấy, nếu A là ma trận vuông cấp n khả nghịch thì Q là ma trận trực giao cấp n. Một điều chú ý thêm là phân tích QR nói chung không duy nhất (phân tích sẽ duy nhất nếu thêm điều kiện với ma trận R).

Ví dụ: Cho ma trận $A=(v_1,v_2,v_3)=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}$

Tìm một phân tích QR của nó. Để giải quyết bài toán, đầu tiên ta trực chuẩn hóa Gram-Schmidt các vector v_1,v_2,v_3, ví dụ ta tìm được

$$e_1=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right),e_2=\left(-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right),e_3=\left(0,-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Khi đó $Q=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{2}{\sqrt{6}}&0\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$

Còn

$$R=\begin{bmatrix}\langle v_1,e_1\rangle&\langle v_2,e_1\rangle&\langle v_3,e_1\rangle\\0&\langle v_2,e_2\rangle&\langle v_3,e_2\rangle\\0&0&\langle v_3,e_3\rangle\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt{3}&\frac{2}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\0&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$

***Bài tập 1 tiết (# 48), III.1*:**

4.2.3;

Yêu cầu SV chuẩn bị:

Đọc các GTr. 1 (tr. 178-196), 2 (tr. 103-106), làm bài tập về nhà, thời gian tự học 6 tiếng.

Bài giảng: 17
KHÔNG GIAN EUCLID (tiếp)

Chương III, mục: III.2+BT III.1

Tiết thứ: 49-51 Tuần thứ: 9

Mục đích, yêu cầu:

- Nắm được các kiến thức cơ bản về phép chiếu trực giao, định lý chéo hóa trực giao ma trận đối xứng.

Hình thức tổ chức dạy học: Lý thuyết, thảo luận trên giảng đường.

Thời gian: LT: 2 tiết; BT: 1 tiết; Tự học: 6 tiếng

Địa điểm: P2 bố trí

Nội dung chính:

***2 tiết 49-50 LT, III.2*:**

III.2.3. **Định lý chéo hóa trực giao ma trận đối xứng**: Định lý về phần bù trực giao, chiếu trực giao.

Giả sử L là một không gian vectơ con của **E**. Không gian vectơ con trực giao với L là $L^{\perp}$ xác định như sau

$$L^{\perp} = \{a \in \mathbf{E}: \forall l \in L \ \langle a, l \rangle = 0\}$$

Ta có

$$\mathbf{E} = L \oplus L^{\perp}. \qquad (1)$$

Theo (1) thì mỗi vectơ $a \in E$ biểu diễn duy nhất thành

$$a = l + l_1 \qquad (2)$$

Trong đó $l \in L, l_1 \in L^{\perp}$. Vectơ l trong (2) được gọi là chiếu trực giao của a trên L và viết $l = P_L(a)$.

Với $a \in \mathbf{E}$ và L là không gian vectơ con của **E** ta có

$$\min_{l \in L} \|a - l\| = \|a - P_L(a)\| \qquad (3)$$

Người ta gọi (3) là ***định lý chiếu trực giao*** hay còn gọi là ***định lý xấp xỉ***. Người ta còn nói $\|a - P_L(a)\|$ là *khoảng cách ngắn nhất* từ vectơ a đến không gian con L.

Ví dụ: Trong $\mathbb{R}^3$ tìm xấp xỉ tốt nhất của $a = (1,1,1)$ trong không gian $L(a_1, a_2)$ sinh bởi $a_1 = (0,1,1), a_2 = (1,0,1)$.

Từ (2) và (3) theo ví dụ trên, vì $e_1 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), e_2 = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ là cơ sở trực chuẩn của $L(a_1, a_2)$ nên ta có

$$P_L(a) = \langle a, e_1\rangle e_1 + \langle a, e_2\rangle e_2 = \sqrt{2}e_1 + \frac{2}{\sqrt{6}}e_2 = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right). \square$$

Toán tử chiếu trực giao

Giả sử L là một không gian vectơ con của **E**, $\mathbf{E} = L \oplus L^{\perp}$. Thành lập toán tử tuyến tính

$$P_L : \mathbf{E} \to \mathbf{E}$$

theo qui tắc: nếu $a \in \mathbf{E}, a = l + l_1, l \in L, l_1 \in L^{\perp}$ thì đặt $P_L(a) = l$. Người ta gọi P_L là *toán tử chiếu trực giao* trên không gian L.

Ví dụ: Trong $\mathbb{R}^3$ cho $a_1 = (1, -1, 1), a_2 = (-1, 1, 2)$, $a_3 = (4, -4, 1)$, $L = L(a_1, a_2, a_3)$ là không gian sinh bởi a_1, a_2, a_3.

(i) Tìm ma trận của toán tử chiếu trực giao P_L;

(ii) Tìm cơ sở của $L^{\perp}$;

Dễ thấy cơ sở của $L = L(a_1, a_2, a_3)$ là (a_1, a_2). Áp dụng quá trình Gram-Schmidt ta nhận được cơ sở trực chuẩn của L là

$$e_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), e_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

(i) Trong cơ sở chính tắc $i = (1,0,0), j = (0,1,0), k = (0,0,1)$ của $\mathbb{R}^3$ ta có

$$P_L(i) = \langle i, e_1\rangle e_1 + \langle i, e_2\rangle e_2 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right),$$

$$P_L(j) = \langle j, e_1\rangle e_1 + \langle j, e_2\rangle e_2 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right),$$

$$P_L(k) = \langle k, e_1\rangle e_1 + \langle k, e_2\rangle e_2 = (0,0,1).$$

Như vậy P_L có ma trận

$$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Có thể tính theo cách khác theo công thức $A = [e_1][e_1]^T + [e_2][e_2]^T$; trong đó như thường lệ $[e_i]$ là ma trận cột tọa độ của vectơ e_i . Thực ra là có thể chứng minh được định lý sau: *Nếu không gian vectơ con L trong $\mathbb{R}^n$ mà có cơ sở trực chuẩn $(e_1, e_2, \dots, e_m)$ thì toán tử chiếu trực giao trên L có ma trận*

$$A = [e_1][e_1]^T + [e_2][e_2]^T + \cdots + [e_m][e_m]^T \quad (*)$$

(ii) $L^{\perp} = \{a \in E: \forall l \in L \ \langle a, l \rangle = 0\}$. Giải hệ $\langle a, e_1 \rangle = \langle a, e_2 \rangle = 0$ ta được cơ sở của $L^{\perp}$ là (e); $e = (1,1,0)$.

Khái niệm TT tự liên hợp, ma trận của TT tự liên hợp. Trị riêng của TT tự liên hợp (không chứng minh).

Định lý chéo hóa trực giao ma trận đối xứng (không chứng minh). Thuật toán chéo hóa trực giao ma trận đối xứng và đưa DTP về dạng chính tắc bằng phương pháp chéo hóa trực giao.

Thuật toán chéo hóa ma trận đối xứng:

Bước 1: Giải phương trình đặc trưng $|A - \lambda E| = 0$.

Bước 2: Gọi $\lambda_1, ..., \lambda_k$ là các trị riêng với bội $n_1, ..., n_k$ tương ứng. Hiển nhiên $\mathrm{n}_1 + ... + \mathrm{n}_k = \mathrm{n}$. Với mỗi λ_i tìm được n_i vector riêng độc lập tuyến tính, trực chuẩn hóa Gram-Schmidt hệ này ta được n_i vector trực chuẩn là $e_{i1}, ..., e_{in_i}$.

Bước 3: Cơ sở mới thu được là $(\mathrm{e}) = \left(\mathrm{e}_{11}, ..., \mathrm{e}_{1n_1}, ..., \mathrm{e}_{k1}, ..., \mathrm{e}_{kn_k}\right)$. Gọi ma trận C là ma trận tạo thành từ các cột vector cơ sở này thì

$$\bar{A} = C^T A C = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \end{bmatrix}.$$

Ví dụ: Cho ma trận đối xứng

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Ta đi tìm ma trận trực giao C sao cho $C^T A C$ có dạng chéo.

Ta có

$$|A - \lambda E| = (\lambda - 1)^2 (4 - \lambda) = 0$$

Với $\lambda = 1$ giải được các vector riêng $v_1 = (-1,1,0), v_2 = (-1,0,1)$, trực chuẩn hóa Gram-Schmidt ta được $e_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), e_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$. Với $\lambda = 4$ tìm được vector riêng $\mathrm{e}_3 = (1,1,1)$, chuẩn hóa ta được $e_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Như vậy

$$C=\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}, C^T AC=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

***Bài tập 1 tiết (# 51), III.2*:**

4.1.1a, b; 4.1.2a,b;

Yêu cầu SV chuẩn bị:

Đọc lại phần lý thuyết, làm bài tập về nhà, thời gian tự học 6 tiếng.

Bài giảng: 18

PHÂN LOẠI CÁC ĐƯỜNG CONG VÀ MẶT CONG BẬC HAI

Chương III, mục: III.3.1 +BT III.2

Tiết thứ: 52-54 Tuần thứ: 9

Mục đích, yêu cầu:

- Nắm được phương pháp đưa phương trình đường cong bậc hai tổng quát về dạng chính tắc bằng phương pháp chéo hóa trực giao (phép quay) và phép tịnh tiến; phân loại các đường cong bậc hai chính tắc.

Hình thức tổ chức dạy học: Lý thuyết, thảo luận trên giảng đường.

Thời gian: LT: 1 tiết; BT: 2 tiết; Tự học: 7 tiếng

Địa điểm: P2 bố trí

Nội dung chính:

***Tiết 52 LT, III.3*:**

III.3. Phân loại các đường cong và mặt cong bậc hai

III.3.1. Phân loại các đường cong bậc hai trong mặt phẳng

- Phép biến đổi trực giao rút gọn phần bậc hai (phép quay)
- Phép tịnh tiến gốc đưa các đường cong bậc hai về dạng chính tắc

Chúng ta hiểu mặt phẳng hoặc không gian Euclide như là các không gian tọa độ thực trên đó có trang bị tích vô hướng, mỗi vector đồng nhất với một điểm, vector 0 đồng nhất với gốc O. Chúng ta thường sử dụng hệ truc tọa độ trực chuẩn Descartes (đã quen thuộc ở bậc học dưới) để mô tả trong trường hợp hai hoặc ba chiều. Trên không gian đó có thể xây dựng các khái niệm khoảng cách, góc... như đã nói trong các bài trước.
Đường bậc hai tổng quát trên mặt phẳng với hệ tọa độ trực chuẩn Descartes Oxy có dạng

$$a_{11}x^2 + 2\mathrm{a}_{12}xy + a_{22}y^2 + a_1x + a_2y + c = 0$$

ở đó các hệ số a_{11}, a_{12}, a_{22} không đồng thời bằng 0.
Ma trận của dạng toàn phương là $A = A^T$ có thể đưa về dạng chéo bằng biến bối trực giao, nghĩa là tồn tại ma trận C sao cho

$$C^T AC = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

ở đó C là ma trận trực giao. Có thể chọn

$$C=\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}$$

và xét phép đổi biến

$$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}.$$

Ta có thể đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc $\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2$. Phép đổi biến ở trên thực chất là quay hệ tọa độ ban đầu đi một góc φ và khi đó đường bậc hai có dạng

$$\lambda_1 x'^2+2\lambda_2 y'^2+a_1'x'+a_2'y'+c=0$$

Tiếp tục sử dụng phép tịnh tiến gốc ta có thể đưa về một trong các loại sau đây:

1) Ellipse (hoặc đường tròn)

$$\frac{x^2}{\mathrm{a}^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

2) Hyperbola

$$\frac{x^2}{\mathrm{a}^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

3) Ellipse ảo

$$\frac{x^2}{\mathrm{a}^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$$

4) Cặp đường thẳng ảo cắt nhau (tại một điểm thực)

$$\frac{x^2}{\mathrm{a}^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$$

5) Cặp đường thẳng cắt nhau

$$\frac{x^2}{\mathrm{a}^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$$

6) Parabola

$$x^2=2py$$

7) Cặp đường thẳng song song

$$\frac{x^2}{\mathrm{a}^2}=1$$

8) Cặp đường thẳng ảo song song

$$\frac{x^2}{\mathrm{a}^2}=-1$$

9) Cặp đường thẳng trùng nhau

$$\frac{x^2}{\mathrm{a}^2}=0$$

Các đường bậc hai Ellipse, Hyperbola, Parabola là những đường Conic đã được học trong bậc học phổ thông.

***BT 2 tiết (#53-54) III.2*:**

4.1.3a,b; 4.1.6a,b; 4.1.7a,b; 4.1.8a, b;

Yêu cầu SV chuẩn bị:

Đọc các GTr. 1 (tr.201-203), 2 (tr. 107-110), thời gian tự học 7 tiếng.

Bài giảng: 19

PHÂN LOẠI CÁC ĐƯỜNG CONG VÀ MẶT CONG BẬC HAI (tiếp)

Chương III, mục: III.3.2

Tiết thứ: 55-57 Tuần thứ: 10

Mục đích, yêu cầu:

- Nắm được phương pháp đưa phương trình mặt bậc hai tổng quát về dạng chính tắc bằng phương pháp chéo hóa trực giao; phân loại các mặt cong bậc hai chính tắc.

Hình thức tổ chức dạy học: Lý thuyết, thảo luận trên giảng đường.

Thời gian: LT: 1 tiết; BT: 2 tiết; Tự học: 7 tiếng

Địa điểm: P2 bố trí

Nội dung chính:

***2 tiết 55-56 LT, III.3*:**

III.3. 2. Phân loại các mặt cong bậc hai trong không gian

Trong không gian hệ tọa độ trực chuẩn Decartes $Oxyz$ mặt bậc hai tổng quát là tập các điểm thỏa mãn phương trình đại số

$$a_{11}x^2+2\mathrm{a}_{12}xy+2\mathrm{a}_{13}x\mathrm{z}+a_{22}y^2+2\mathrm{a}_{23}yz+a_{33}z^2+2\mathrm{a}_1x+2\mathrm{a}_2y+2\mathrm{a}_3z+c=0.$$

Xét dạng toàn phương với ma trận là $A=\left[a_{ij}\right]_{3\times 3}$, ở đó $A=A^T$. Tồn tại ma trận chuyển cơ sở C để

$$C^TAC=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{bmatrix}$$

Ma trận C là ma trận trực giao, có thể chọn C sao cho $\det(C)=1$, ví dụ

$$C=\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Phép đổi biến

$$\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=C\begin{bmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{bmatrix}$$

là phép quay hệ trục tọa độ đi một góc $\varphi.$ Mặt cong khi đó có dạng

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + 2a'_1 x' + 2a'_2 y' + 2a'_3 z' + c = 0$$

Tịnh tiến gốc tọa độ nếu cần ta sẽ đưa mặt bậc hai về một trong các dạng sau

1) Ellipsoid (cầu)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

2) Ellipsoid ảo

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$$

3) Nón ảo

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$$

4) Hyperboloid 1 tầng

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

5) Hyperboloid 2 tầng

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

6) Nón Elliptic

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

7) Paraboloid Elliptic

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$$

8) Paraboloid Hyperbolic (yên ngựa)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$$

9) Trụ Elliptic

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$$

10) Trụ Elliptic ảo

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$$

11)Trụ Parabolic

$$y^2 = 2px$$

12) Trụ Hyperbolic

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

13) Cặp mặt phẳng ảo liên hợp

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$$

14) Cặp mặt phẳng cắt nhau

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

15) Cặp mặt phẳng thực song song

$$\frac{x^2}{a^2} = 1$$

16) Cặp mặt phẳng ảo song song

$$\frac{x^2}{a^2} = -1$$

17) Cặp mặt phẳng trùng nhau

$$\frac{x^2}{a^2} = 0$$

***Bài tập 1 tiết (#57), III.3 (1t., còn 2 t.)*:**

4.2.4a,b,c; 4.2.11a,d.

Yêu cầu SV chuẩn bị:

Đọc các GTr. 1 (tr.201-203), 2 (tr. 107-110), thời gian tự học 7 tiếng.

Bài giảng: 20

BÀI TẬP VÀ ÔN TẬP

Chương III, mục: III.3 + OT

Tiết thứ: 58-60 Tuần thứ: 10

Mục đích, yêu cầu:

- Biết phân loại các mặt cong bậc hai chính tắc, phác họa các mặt cong, ôn tập toàn bộ chương trình.

Hình thức tổ chức dạy học: Lý thuyết, thảo luận trên giảng đường.

Thời gian: BT: 2 tiết; OT: 1 tiết; Tự học: 7 tiếng

Địa điểm: P2 bố trí

Nội dung chính:

***2 tiết 58-59 BT III.3*:**

4.2.12a,b,g; 4.2.13a,c; 4.2.14a,b.

***1 tiết (#60)*:** **Ôn tập 1 tiết.**

Yêu cầu SV chuẩn bị:

Làm bài tập về nhà, ôn tập toàn bộ chương trình, thời gian tự học 7 tiếng.

Giáo trình, tài liệu tham khảo

TT	Tên giáo trình, tài liệu	Tình trạng giáo trình, tài liệu			
1	Giáo trình: 1. Đại số tuyến tính, Nguyễn Xuân Viên, HVKTQS - 2014 2. Bài tập ĐSTT và HHGT, Nguyễn Xuân Viên, Nguyễn Hoài Anh, Nguyễn thị Thanh Hà, Nxb QĐND - 2010	Có ở thư viện (website) Có Có	Giáo viên hoặc khoa có	Đề nghị mua mới	Đề nghị biên soạn mới
2	Tài liệu tham khảo: 1. Toán cao cấp, Tập 1, Nguyễn Đình Trí (chủ biên), NXB GD 2006 2. Linear Algebra with Application, J. T. Scheick, Graw- Hill-1997 3. Linear Algebra, 3^{rd}, S. Lang, Springer, 2004. 4. Основы линейной алгебры, Мальцев А.И., М., Наука 1970.		GV có GV có bản điện tử tiếng Anh, Nga nt		