CHƯƠNG 6

GIAO TUYẾN CỦA HAI MẶT

6.1. Dạng giao tuyến trong các trường hợp

1. Đa diện cắt đa diện
2. Đa diện cắt mặt cong
3. Mặt cong cắt mặt cong

6.2. Cách xác định giao tuyến – Các ví dụ

1. Trường hợp đặc biệt
2. Trường hợp tổng quát

6.3 .Một số trường hợp đặc biệt trong giao tuyến của hai mặt bậc hai

Định lý 1 - Định lý 2 - Định lý 3

6.1. Dạng giao tuyến trong các trường hợp

Hai mặt có thể là mặt đa diện hoặc mặt cong, nên ta có ba trường hợp cơ bản của giao tuyến là:

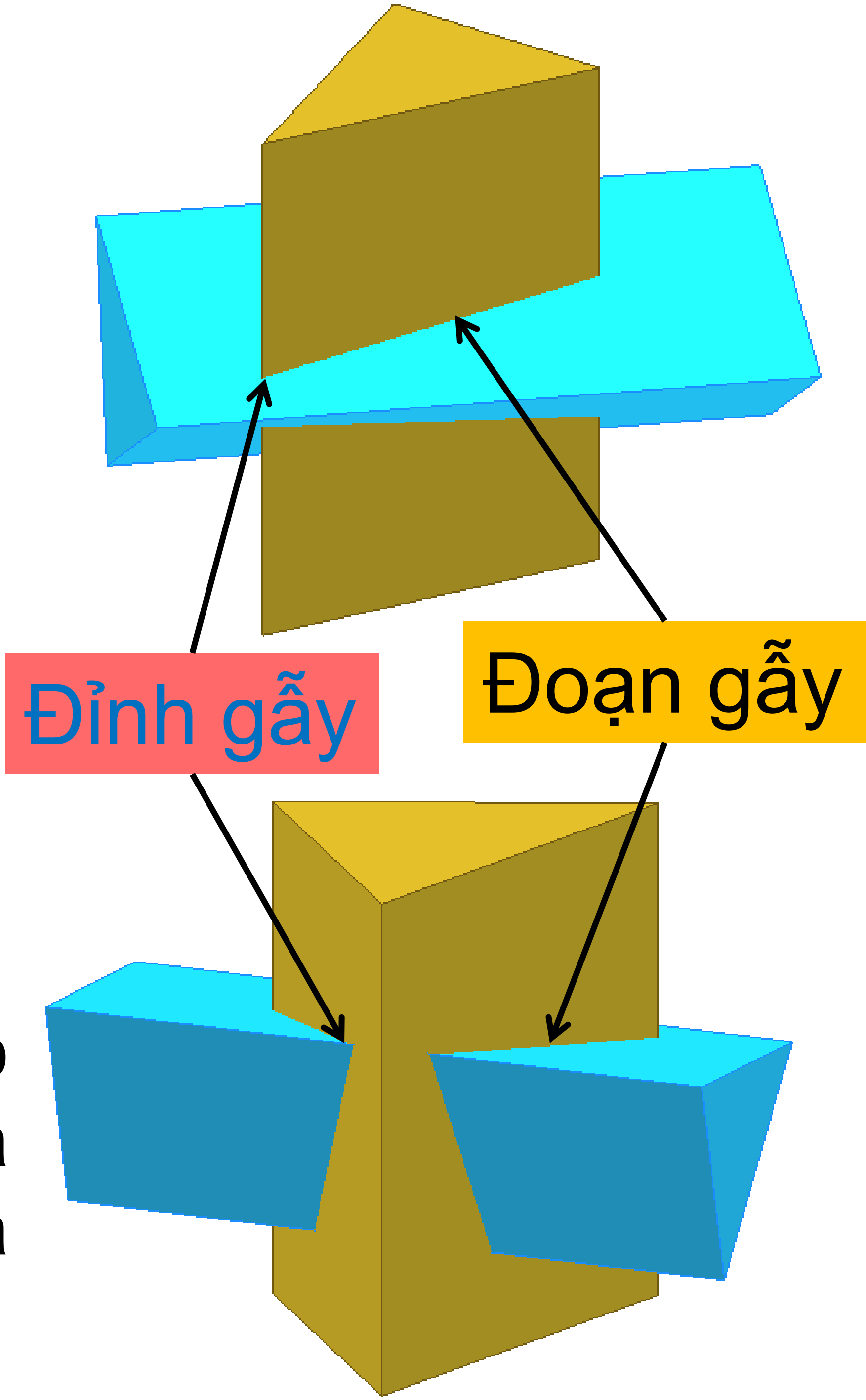
- *Đa diện cắt đa diện.*
- Đa diện cắt mặt cong.
- *Mặt cong cắt mặt cong.*

1. Đa diện cắt đa diện

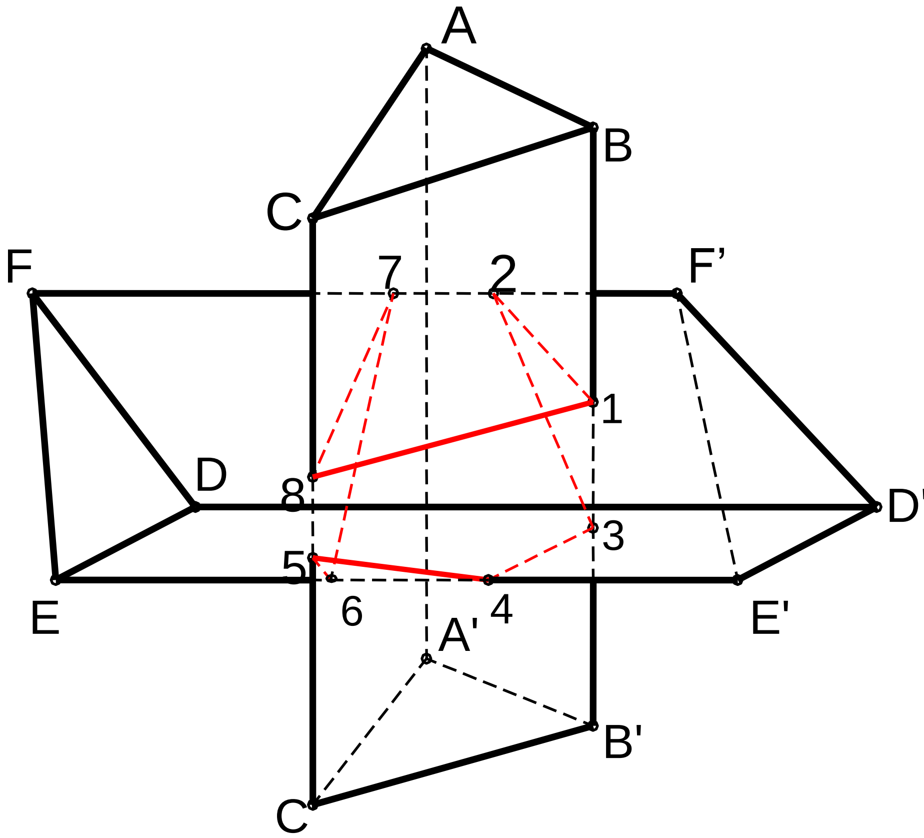
Giao tuyến của hai đa diện **thường là một hay một số đường gẫy khúc kín**. Trong đó:

- **Mỗi cạnh (đoạn gẫy) là** giao tuyến của một mặt của đa diện này với một mặt của đa diện kia.

- **Mỗi đỉnh(điểm gẫy)** là giao điểm của một cạnh của đa diện này với một mặt của đa diện kia.



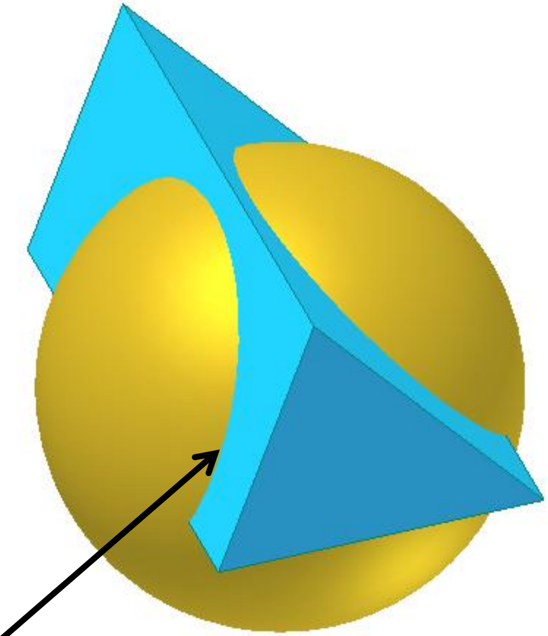
Từ việc nhận dạng đó cho thấy **để vẽ giao tuyến của hai đa diện, suy cho cùng là: trước tiên đi tìm các đỉnh (điểm) gẫy, nối hai điểm gẫy là hai điểm chung của hai mặt bên của hai đa diện thành đoạn gẫy và xét thấy khuất.**



Xác định các điểm gẫy là giao điểm của các cạnh đa diện này với các mặt đa diện kia và ngược lại, chính là bài toán tìm giao điểm của đường thẳng (cạnh đa diện) với mặt phẳng (mặt đa diện).

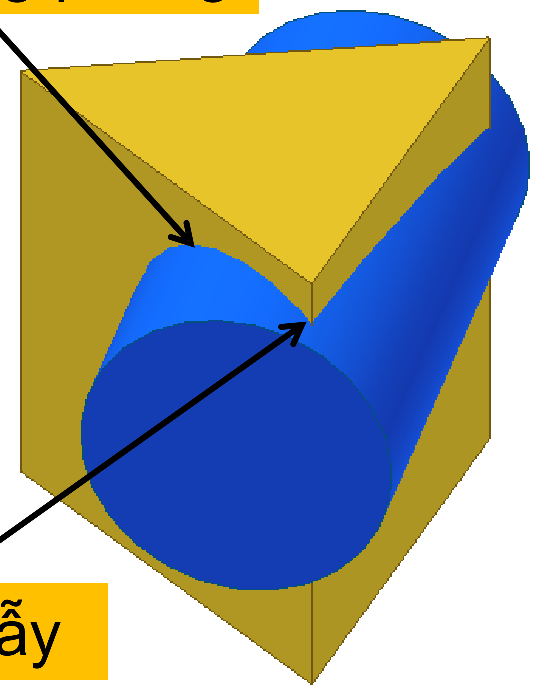
2. Đa diện cắt mặt cong

Giao tuyến của một đa diện với một mặt cong bậc n **là một hoặc một số đường cong gẫy (khép kín) bậc n trong không gian, thực chất là tập hợp các cung cong phẳng bậc n.**



Trong đó:

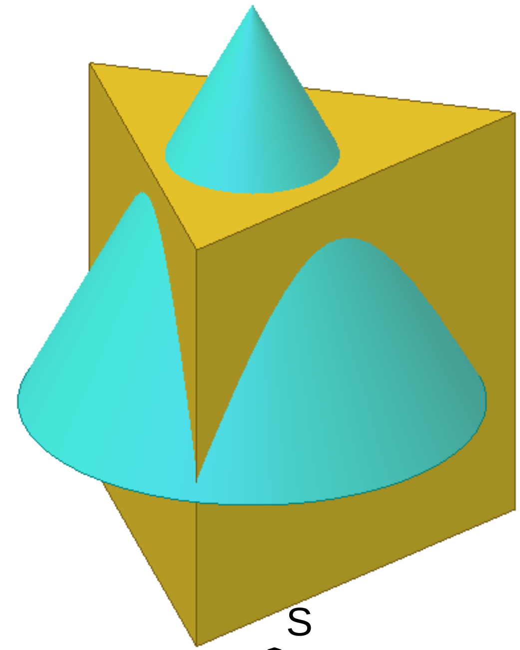
- Các **cung cong phẳng** là giao tuyến của các mặt đa diện với mặt cong.
- Các **điểm gẫy khúc** là giao điểm của các cạnh đa diện với mặt cong

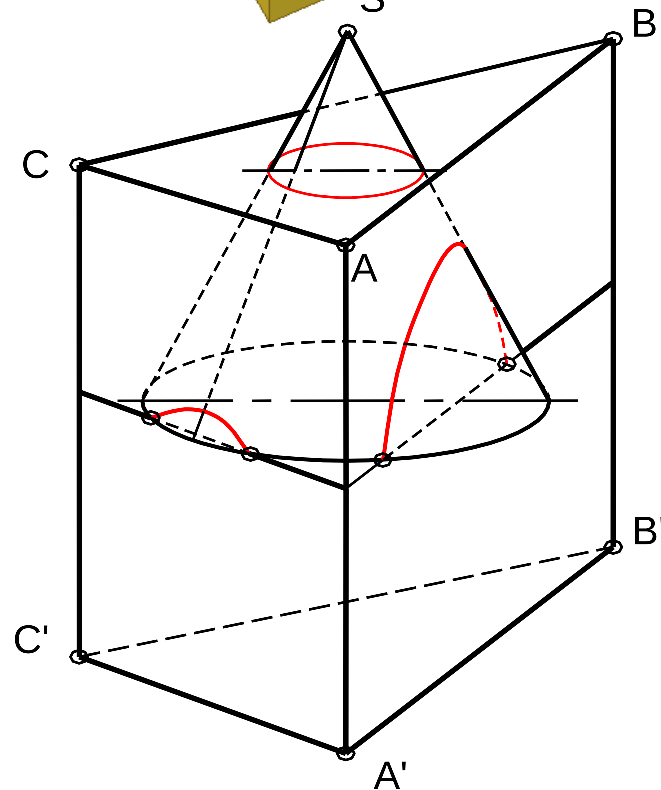


Từ việc nhận dạng trên cho thấy để **vẽ giao tuyến** của đa diện với mặt cong là:

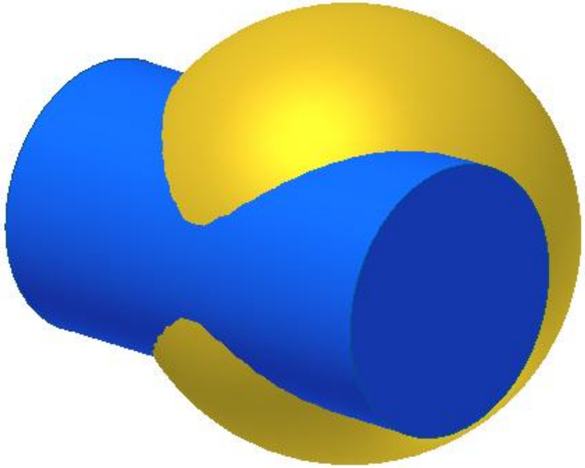
1.Xác định các cung phẳng: Là giao tuyến của các mặt đa diện với mặt cong – **Bài toán mặt phẳng cắt mặt cong**.

2.Xác định các điểm gẫy: Là giao điểm của các cạnh đa diện với mặt cong – **Bài toán đường thẳng cắt mặt mặt cong**.





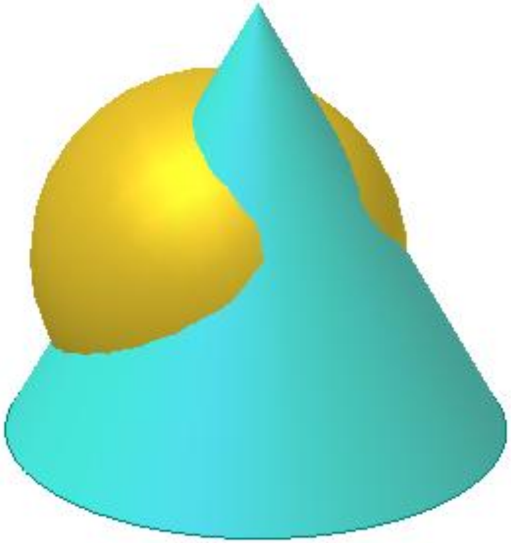
3. Mặt cong cắt mặt cong



Giao tuyến của hai mặt cong thường là một hoặc một số đường cong ghềnh. Nếu hai mặt cong là các mặt đại số bậc m và n thì **giao tuyến** của chúng là **đường cong đại số bậc mxn**.

Để vẽ giao tuyến của hai mặt cong:

Với trường hợp đặc biệt, dựa vào tính chất chiếu của một trong hai mặt cong hoặc dựa vào vị trí tương đối của hai mặt cong. **Còn trong trường hợp tổng quát:** dùng phép biến đổi hình chiếu hoặc **dùng mặt cắt phụ trợ**.



6.2. Cách xác định giao tuyến – Các ví dụ

6.2.1. Trường hợp đặc biệt (biết một hình chiếu của giao tuyến)

Xảy ra khi một trong hai mặt chiếu.

Lăng trụ chiếu: là lăng trụ có các cạnh bên cùng vuông góc với một mặt phẳng hình chiếu.

Mặt trụ chiếu: là mặt trụ có trục là đường thẳng chiếu.

1.Cách giải

Khi một trong hai mặt là mặt chiếu thì ta xác định được **một hình chiếu của giao tuyến trùng với hình chiếu suy biến của mặt chiếu**.

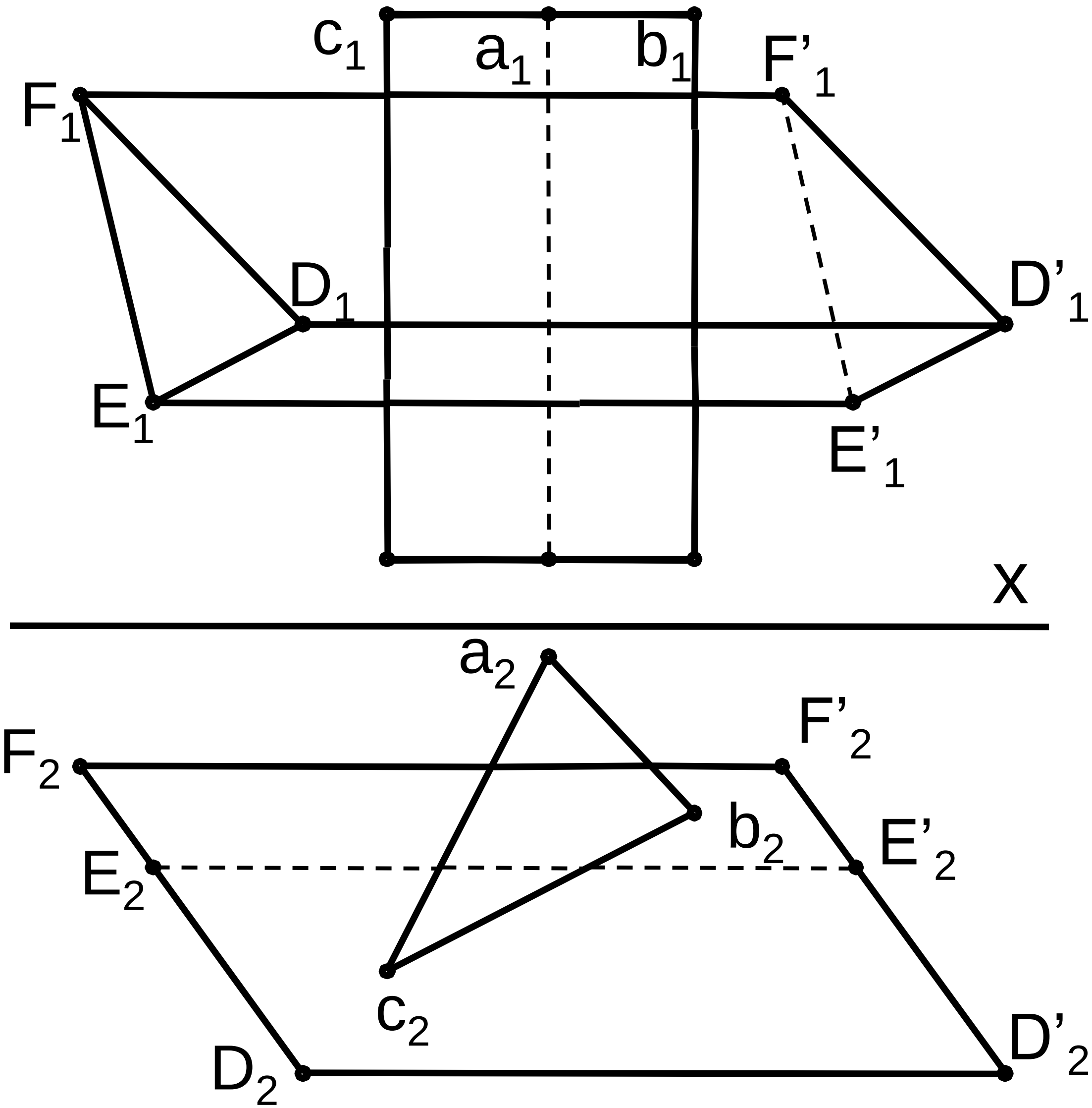
Tìm **hình chiếu thứ hai** của giao tuyến bằng cách gắn các điểm cần tìm của giao tuyến vào **các đường đặc biệt của mặt thứ hai (**đường thẳng, đường sinh trụ và nón, đường tròn vĩ tuyến của mặt xuyến,….)

Sau khi tìm được các đỉnh gãy, các điểm đặc biệt thuộc giao tuyến, ta nối các điểm lại thành giao tuyến cần tìm và **xét thấy khuất** trên các hình biểu diễn.

2.Các ví dụ

*Đa diện cắt đa diện

Ví dụ 1:
Tìm giao tuyến của lăng trụ chiếu bằng (abc) với lăng trụ nằm ngang DEF.D’E’F’ và xét thấy, khuất của giao tuyến đó.



Giải:

- Hình chiếu bằng của giao tuyến suy biến thành tam giác $a_2b_2c_2$ (vì lăng trụ **abc** chiếu bằng).

Như vậy ta chỉ còn đi **tìm hình chiếu đứng** của giao tuyến và **xét thấy khuất** cho hình biểu diễn như sau:

1.Tìm các điểm gẫy - giao điểm các cạnh của đa diện này với các mặt đa diện kia:

- Điểm 1, 2: 1 = $b \cap$(DD'F'F); 2 = $b \cap$(FF'E'E); có $1_2 \equiv 2_2 \equiv b_2$; để tìm 1_2, 2_2 ,ta gắn 1 vào đường $l \in$(DD'F'F) và **2 vào đường $n \in$ (EE'F'F),** với n//l//FF'. Tìm các hình chiếu đứng: n_1 và l_1 ta suy ra được:

$1_1 = l_1 \cap b_1$

$2_1 = n_1 \cap b_1$

- Điểm 3,4: 3 = c$\cap$(DD'F'F); 4 = c$\cap$(DD'E'E); có $3_2 \equiv 4_2 \equiv c_2$; để tìm 3_1, 4_1 ,ta gắn 3 vào đường g$\in$(DD'F'F) và **4 vào đường m$\in$(EE'F'F),** với g//m//DD'. Tìm các hình chiếu đứng: m_1 và g_1 ta suy ra được:

$3_1 = g_1 \cap c_1$

$4_1 = m_1 \cap c_1$

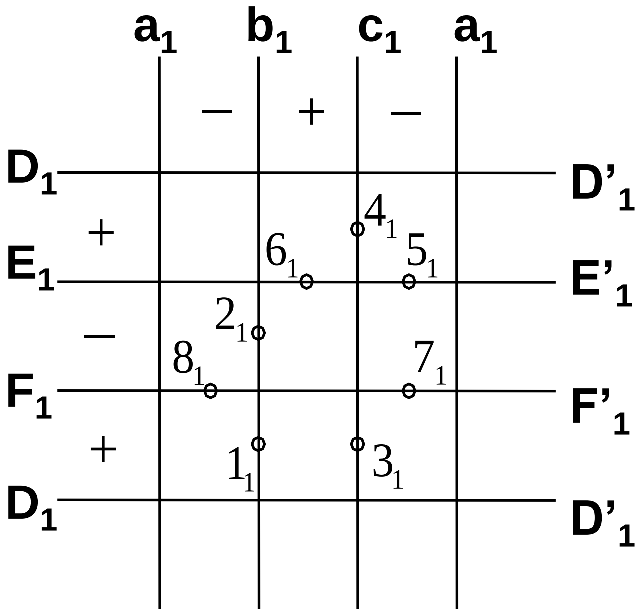
- Dễ dàng tìm được hình chiếu đứng của các điểm còn lại:

5 = EE'$\cap$(a,c); 6 = EE'$\cap$(b,c);

7 = FF'$\cap$(a,c) và 8 = FF'$\cap$(a,b).

2.Để nối các đỉnh và xét thấy khuất nhanh và chính xác, ta **khai triển các mặt bên của lăng trụ** chiếu bằng theo cạnh a và lăng trụ ngang theo cạnh DD', **mặt thấy ghi (+), mặt khuất ghi (-)**.

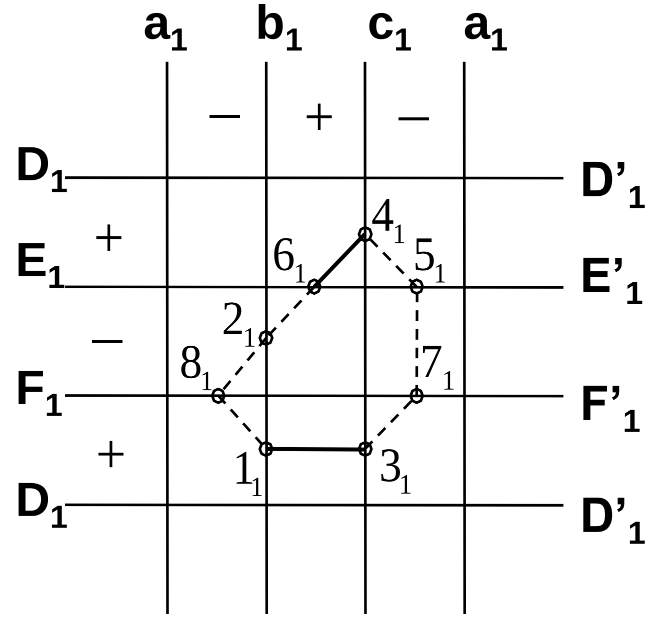
Ở đây, **xét trên hình chiếu đứng.**



Trên hình khai triển **điền hình chiếu đứng của các điểm gẫy** tương ứng với **cạnh và mặt chứa nó**.

Nếu khai triển các lăng trụ theo cạnh có giao điểm thì sao?

Lần lượt **nối hai điểm cùng thuộc một mắt lưới (chính là 2 điểm chung của hai mặt bên của hai đa diện)** được các đoạn gẫy của giao tuyến.



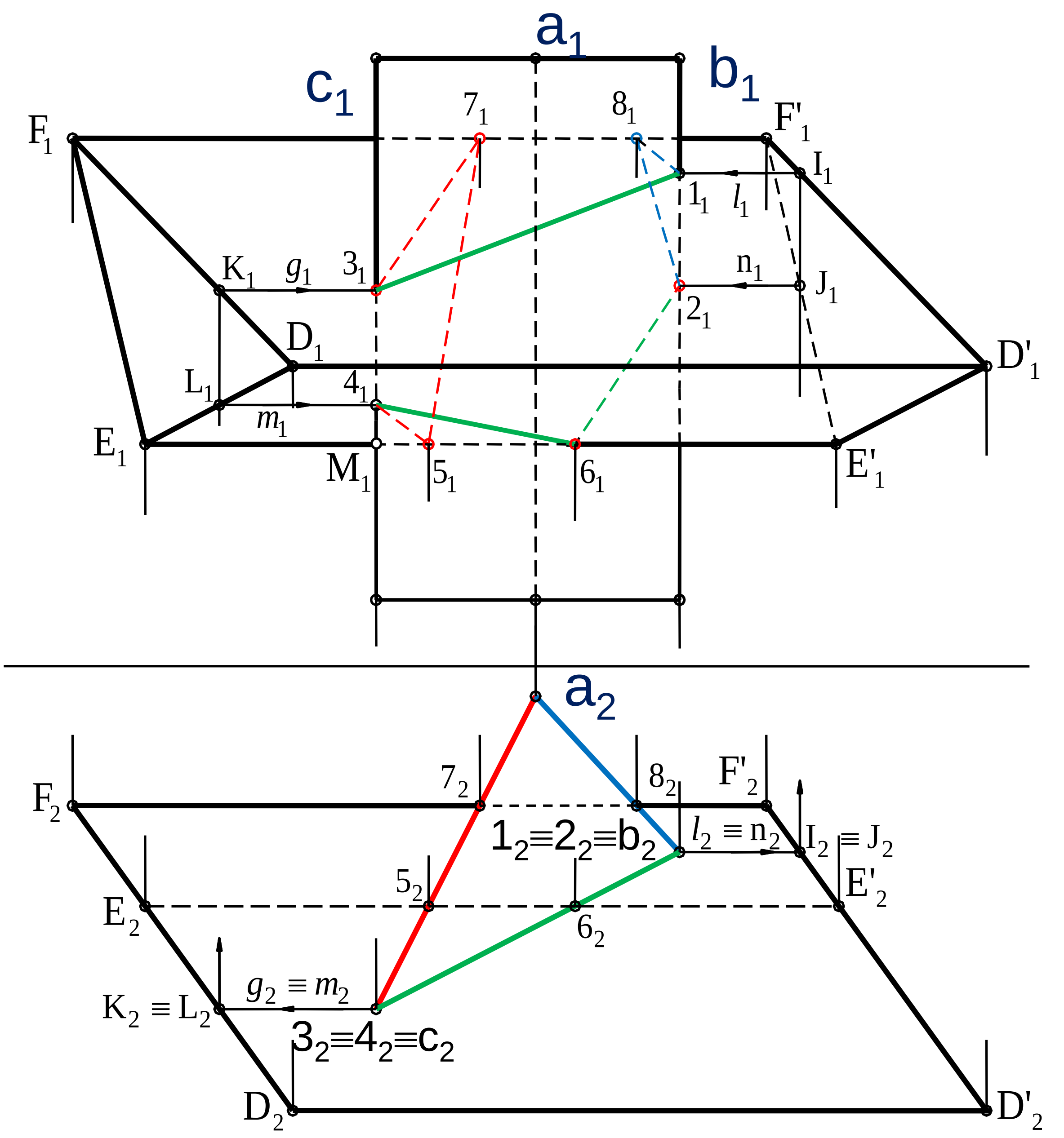
Khi nối các đỉnh của giao tuyến cần lưu ý:

1.Chỉ được nối hai đỉnh bằng một đoạn thẳng **khi hai đỉnh đó cùng thuộc hai mặt bên** nào đó của hai đa diện.

2.Một **đoạn gẫy sẽ thấy, khi và chỉ khi** nó **thuộc hai mặt bên (của hai đa diện) đều thấy**, **còn lại là khuất**.

3.Nối các cạnh gẫy giao tuyến theo sơ đồ khai triển và xét thấy khuất cho hình biểu diễn

Lưu ý khi xét thấy khuất cho hình biểu diễn: **Đoạn thẳng nối 2 điểm gãy thuộc cùng một cạnh** của đa diện **luôn khuất**



*Đa diện cắt mặt cong

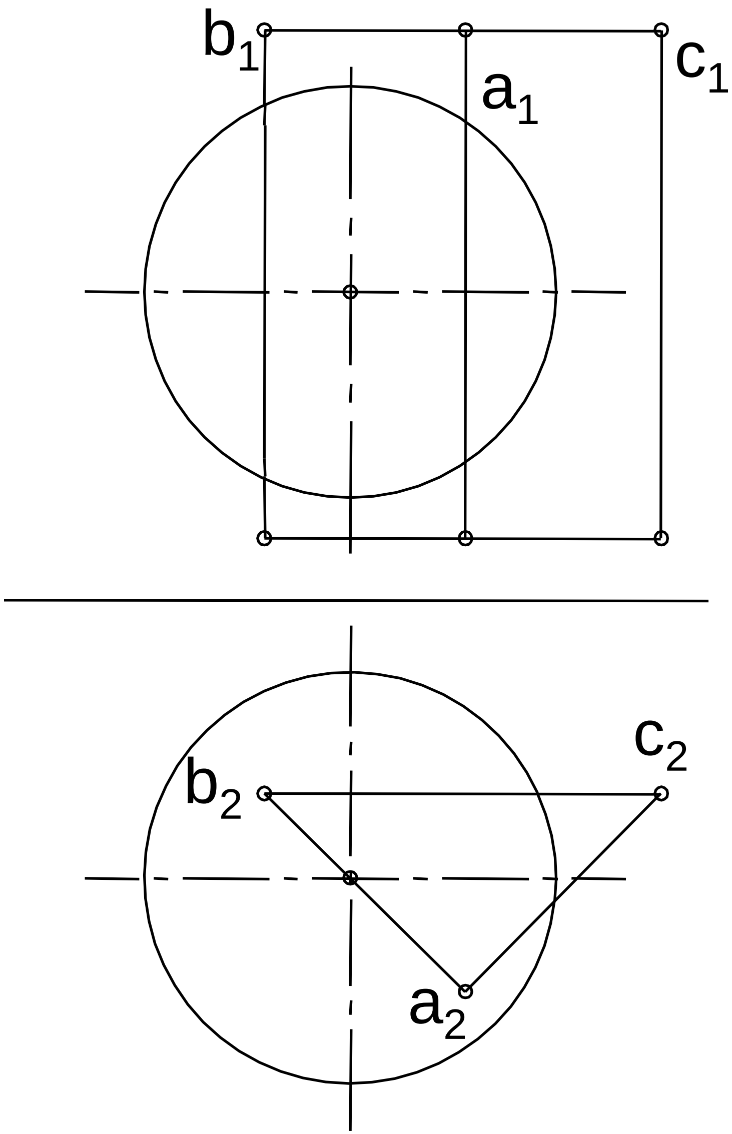
Ví dụ 2: Tìm giao tuyến của **lăng trụ chiếu bằng (abc)** với mặt cầu Φ.

Giải: Hai mặt đáy trên và dưới lăng trụ không cắt mặt cầu.

Do vậy, chỉ cần tìm các cung tròn là giao tuyến của 3 mặt bên {**(a,b), (b,c) và (a,c)**} với mặt cầu;

Và các điểm gãy:

1,2 = b ∩ Φ; 6,7 = a ∩ Φ.



- Hình chiếu bằng của giao tuyến thuộc **tam giác $a_2b_2c_2$.**

- Do vậy, ta **chỉ cần tìm hình chiếu đứng** của giao tuyến và **xét thấy khuất** cho hình biểu diễn.

- Các điểm gẫy: **1,2 = b ∩** Φ;

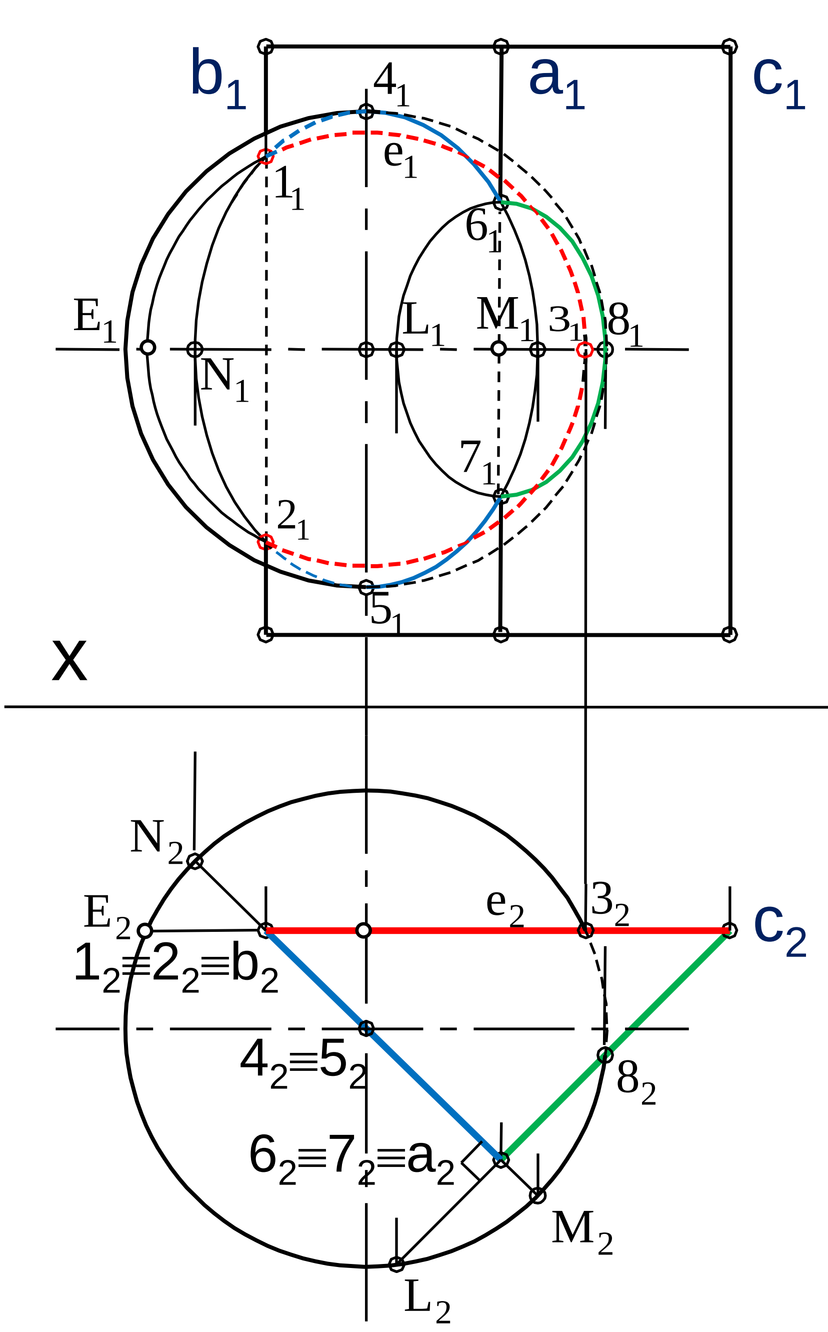
6,7 = a ∩ Φ, ta biết: $1_2 \equiv 2_2 \equiv b_2$, $6_2 \equiv 7_2 \equiv a_2$; để tìm hình chiếu đứng 1_1 ,2_1 ,6_1 ,7_1 chỉ cần gắn nó vào các đường tròn có mặt phẳng // MPHC đứng;

- Hình chiếu đứng của các giao tuyến của các mặt bên:

(a,b) ∩ Φ là cung elip $1_1 4_1 6_1$ và $7_1 5_1 2_1$ (4_1 và 5_1 điểm thấy khuất);

(b,c) ∩ Φ là cung tròn e_1;

(a,c) ∩ Φ là cung elip $7_1 8_1 6_1$



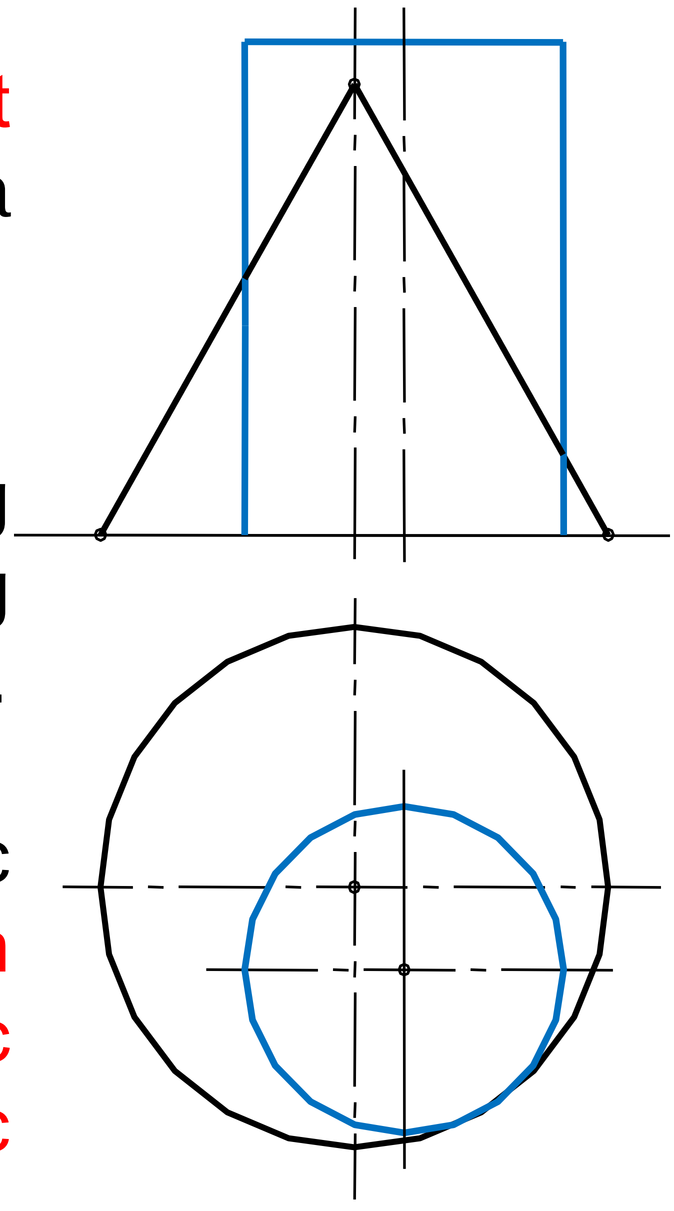
*Mặt cong cắt mặt cong:

Ví dụ 3: Tìm giao tuyến của mặt nón Φ và **mặt trụ θ** đều có trục là đường thẳng chiếu bằng.

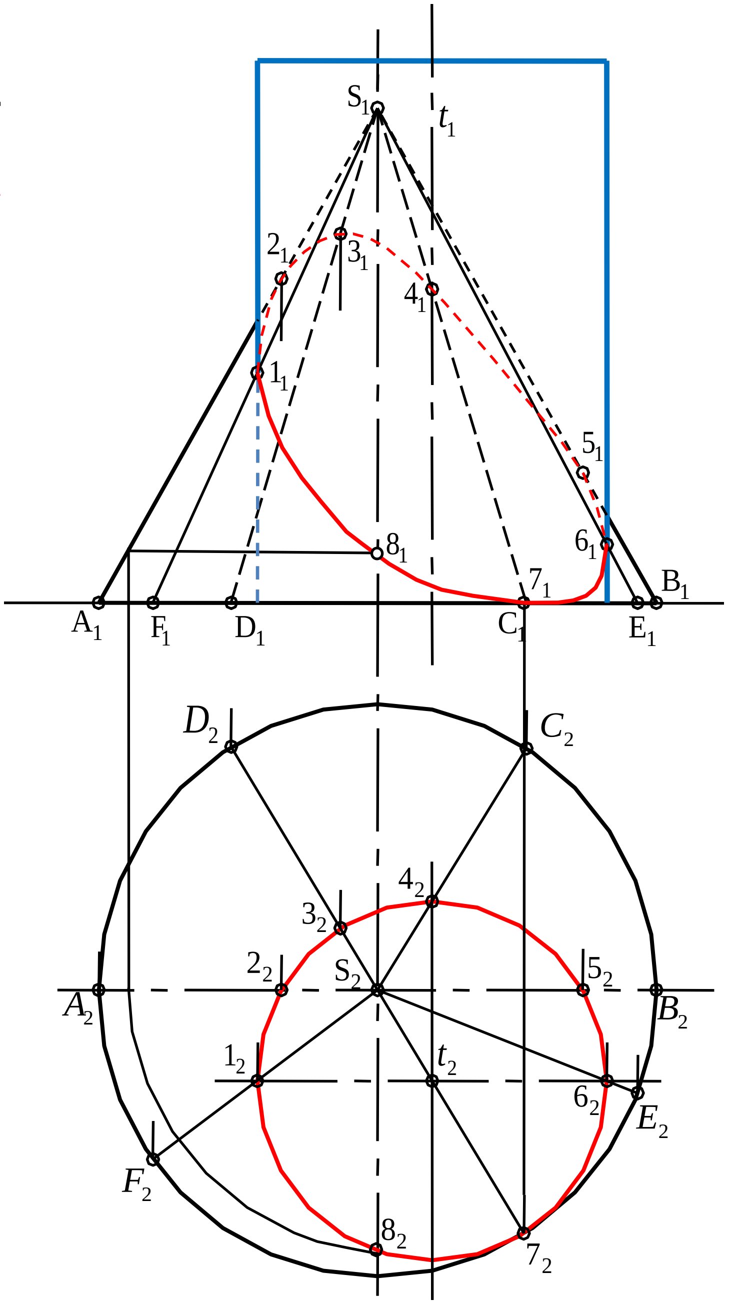
Giải:

-G**iao tuyến là một đường cong bậc bốn** có hình chiếu bằng trùng với hình chiếu bằng của mặt trụ θ_2.

- Để tìm hình chiếu đứng của các điểm thuộc giao tuyến, ta **gắn chúng vào** các **đường sinh**, hoặc các **đường tròn** nằm trong các mặt phẳng // đáy nón Φ như sau:



- Gắn điểm 1∈SF và 6∈SE là các điểm giới hạn thấy, khuất trên hình chiếu đứng;
- Điểm 2 và 5 là hai điểm nằm trên đường sinh biên SA và SB của nón;
- Điểm 7 là điểm mà hai đường chuẩn của trụ và nón tiếp xúc.
- Các điểm trung gian: 3∈SD, 4∈SC và 8 gắn vào đường tròn // đáy của nón Φ;
- **Cuối cùng là xét thấy khuất** cho giao tuyến và toàn hình biểu diễn.



6.2.2.Trường hợp tổng quát

(**Chưa xác định được hình chiếu nào của giao tuyến**)

Để tìm các điểm thuộc giao tuyến, thường **sử dụng một trong các phương pháp sau:**

1.Dùng mặt cắt phụ trợ là **Mặt phẳng hoặc mặt cầu; c**ác mặt phụ trợ được chọn sao cho các **giao tuyến phụ dễ vẽ và có thể xác chính xác các giao điểm của các giao tuyến phụ.**

2. Dùng các phép biến đổi hình chiếu để đưa các yếu tố bài toán trở thành đặc biệt so với Hệ thống MPHC, khi đó lại vận dụng cách làm như trường hợp đặc biệt sau đó biến đổi kết quả về vị trí (Hình biểu diễn) ban đầu.

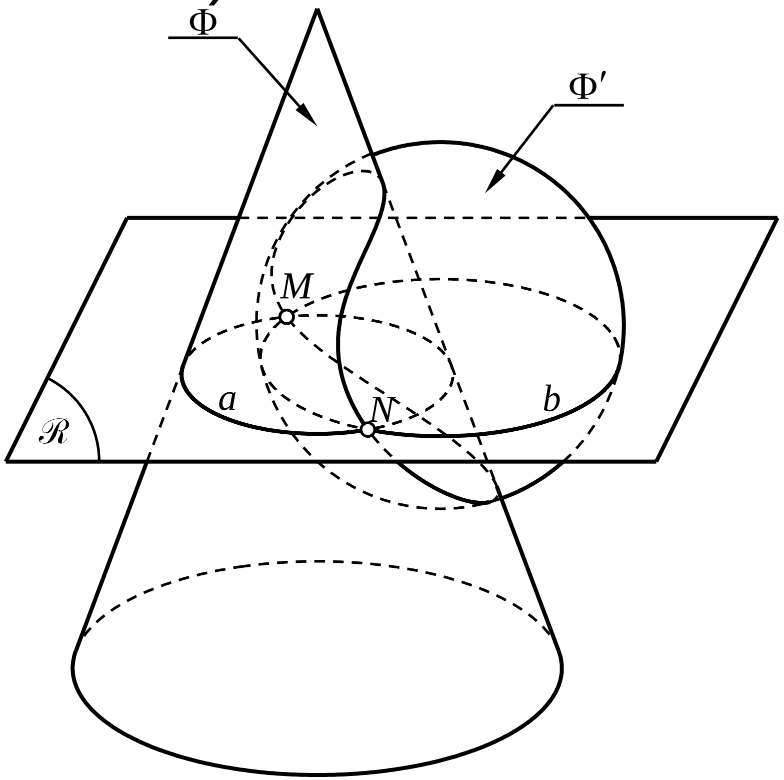
a)Trường hợp chọn mặt cắt phụ trợ R là mặt phẳng

Một số gợi ý chọn mặt phẳng phụ trợ R như sau:

* **Mặt trụ cắt mặt trụ:** ta chọn R là mặt phẳng song song với trục của hai trụ. Giao tuyến phụ của R với mỗi trụ là hai đường sinh

* **Mặt trụ cắt mặt nón**: ta chọn R là mặt phẳng đi qua đỉnh nón và song song với trục của trụ. Giao tuyến phụ của R với trụ (và với nón) là hai đường sinh của trụ (và của nón)

* **Mặt nón cắt mặt nón:** ta chọn R là mặt phẳng đi qua đỉnh hai nón. Giao tuyến phụ của R với mỗi nón là hai đường sinh.

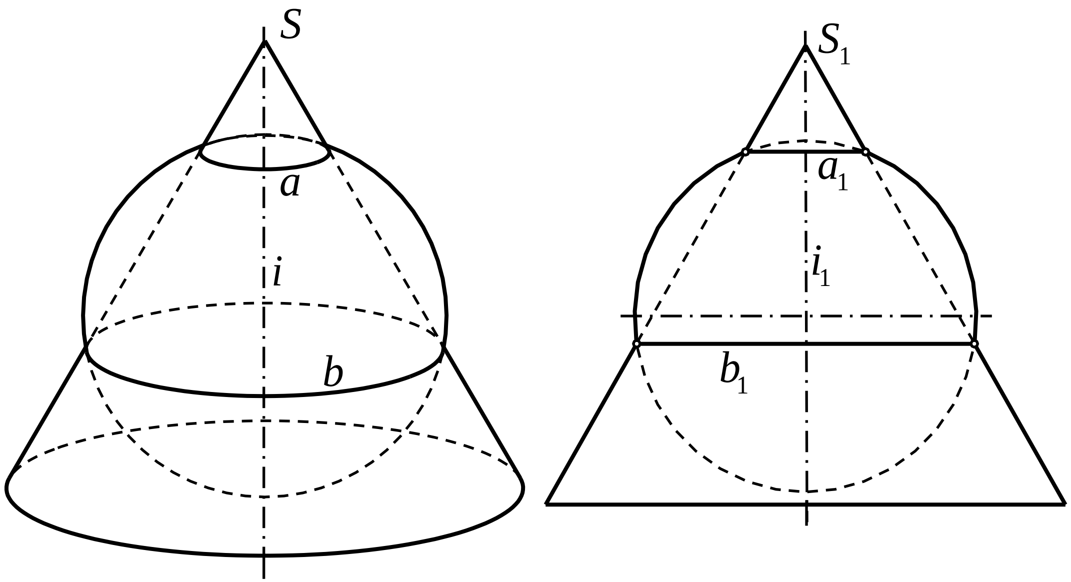


Hướng dẫn học (VN):

Cho ví dụ vận dụng tìm giao tuyến của **mặt cầu Φ** cắt **nón tròn xoay θ** có trục vuông góc với mặt phẳng hình chiếu bằng.

b)Trường hợp chọn mặt cắt phụ trợ ℛ là mặt cầu: Dùng để xác định giao tuyến của hai mặt tròn xoay.

1.Xuất phát từ: mặt cầu có tâm nằm trên trục của mặt tròn xoay nào đó, thì mặt cầu sẽ cắt mặt tròn xoay theo những đường tròn.

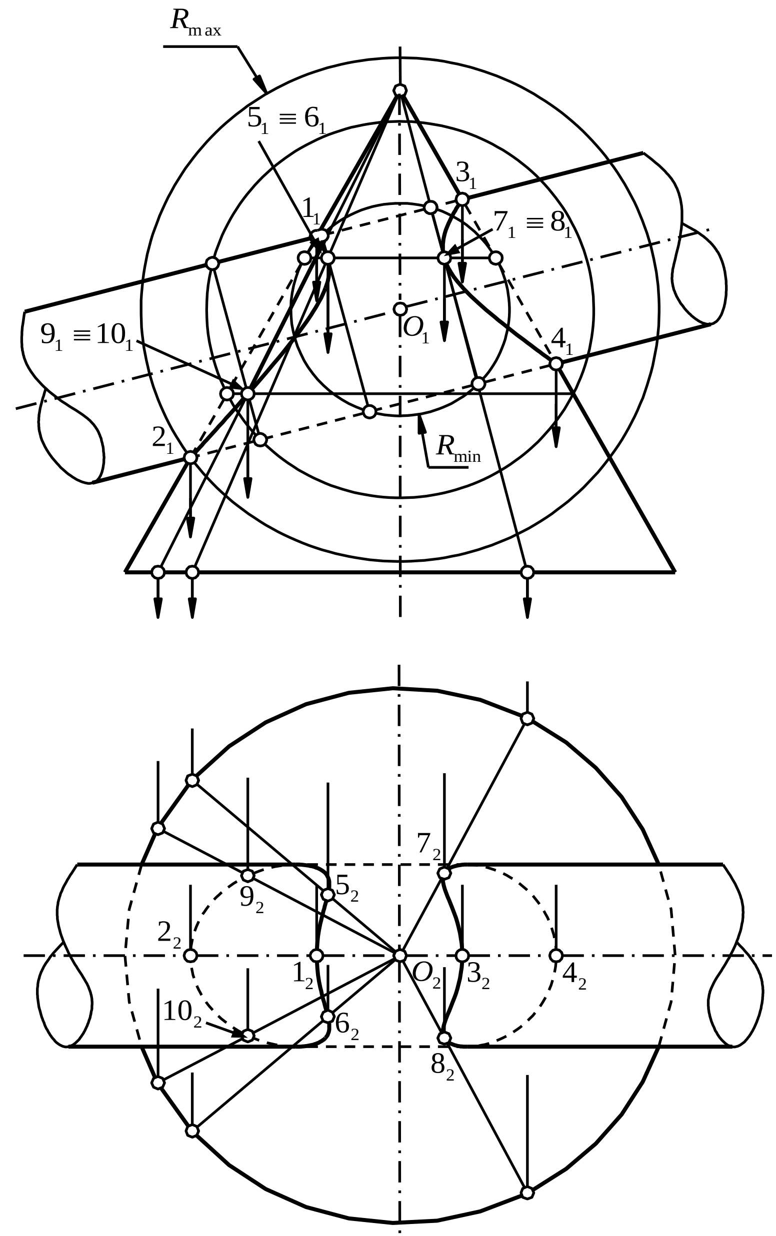


2.Khi trục của mặt tròn xoay lại song song với mặt phẳng hình chiếu nào đó thì hình chiếu của đường tròn giao tuyến đó sẽ suy biến thành đoạn thẳng trên mặt phẳng hình chiếu ấy.

Ví dụ: Tìm giao tuyến của hai mặt nón và trụ tròn xoay có trục cắt nhau và mặt phẳng chứa hai trục lại song song với mặt phẳng hình chiếu đứng.

Giải: - Vì hai mặt tròn xoay có trục cắt nhau nên hình chiếu thẳng góc của giao tuyến lên mặt phẳng(MP hình chiếu đứng) song song với mặt phẳng chứa hai trục có dạng Hypebol.

- **Dùng mặt cầu phụ trợ có tâm là giao điểm của hai trục** sẽ tim được hình chiếu đứng có dạng Hypebol, từ đó sẽ timg được hình chiếu bằng.

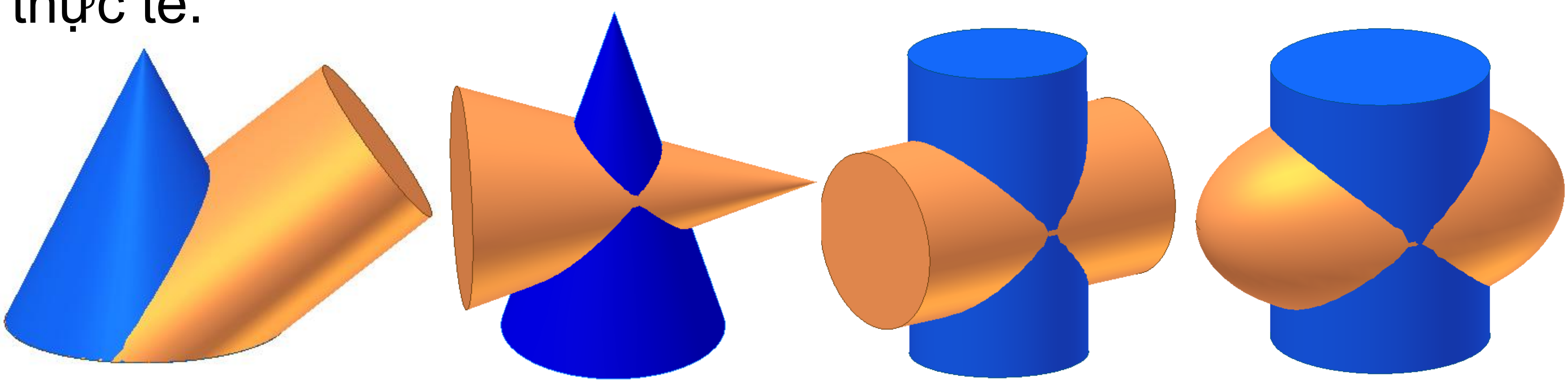


6.3.Một số trường hợp đặc biệt trong giao tuyến của hai mặt bậc hai

Mặt cong thường gặp trong kỹ thuật là mặt **bậc hai (nón, trụ, cầu, elipxoit,…)**. Giao tuyến không suy biến của hai mặt bậc hai là **đường cong ghềnh bậc bốn**.

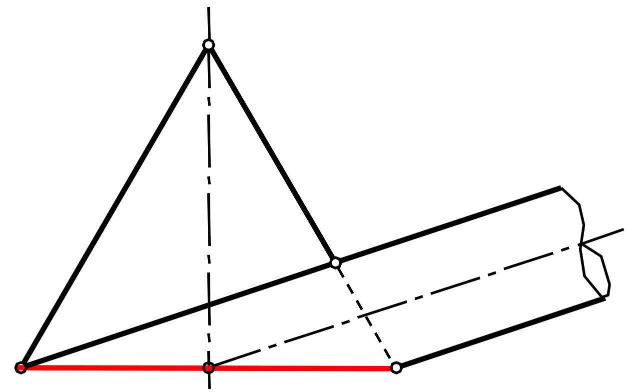
Trong một số **trường hợp đặc biệt** thì giao tuyến suy biến thành những đường cong bậc hai (đường cong phẳng).

Sau đây ta sẽ nghiên cứu 3 định lý về hai mặt bậc hai cắt nhau theo hai đường cong bậc hai thường gặp trong thực tế.

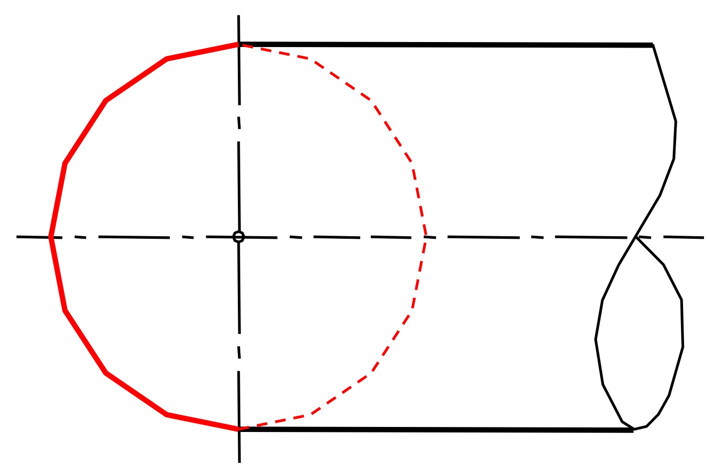


Định lý 1: *Nếu hai mặt bậc hai đã cắt nhau theo một đường bậc hai thì chúng còn cắt nhau theo một đường bậc hai nữa*.

Ví dụ: Vẽ hình chiếu đứng của giao tuyến của mặt nón Φ với mặt trụ θ có chung đáy là một đường tròn và chung mặt phẳng đối xứng là một mặt phẳng mặt.

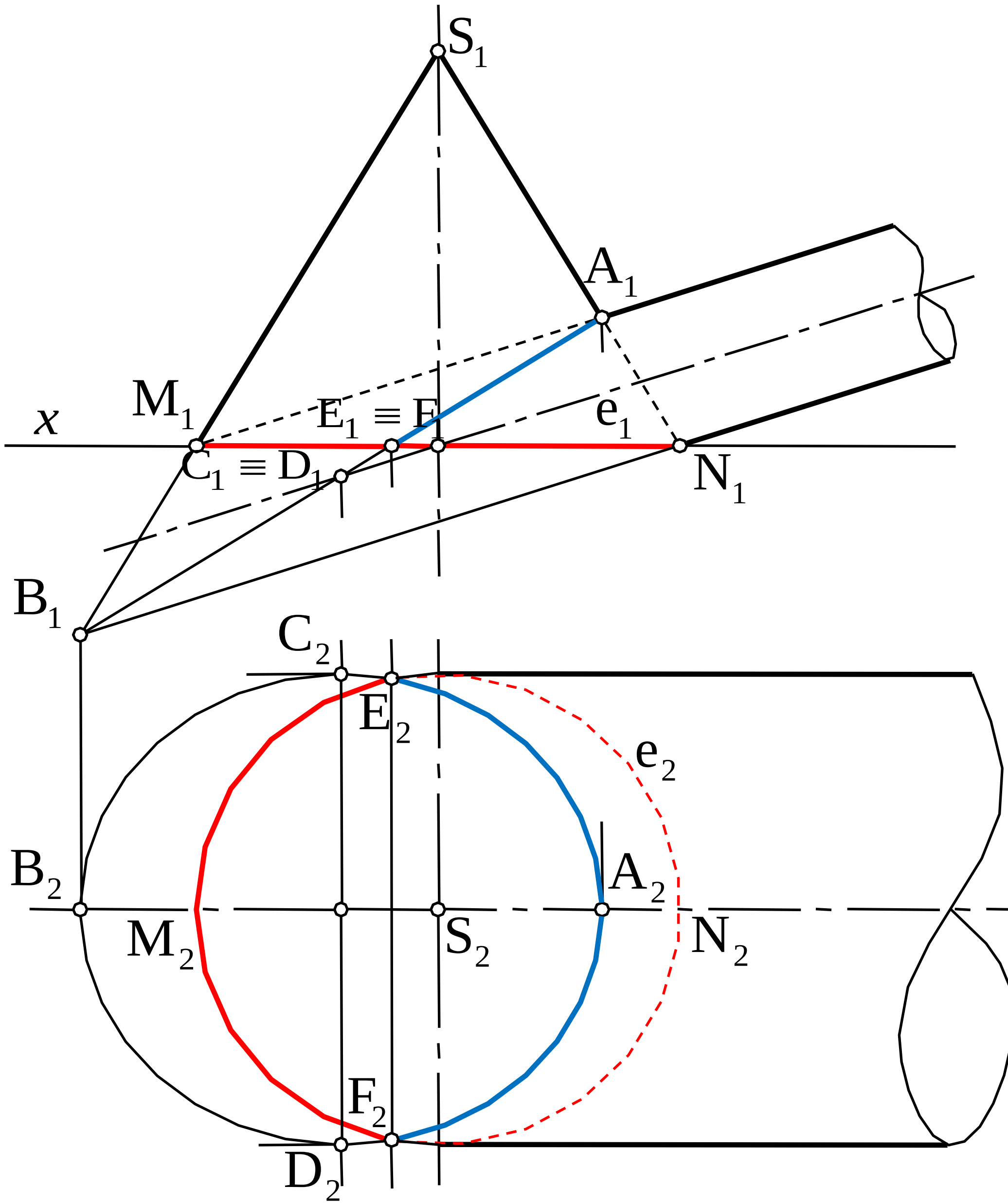


Giải: Theo định lý 1, vì hai mặt đã có chung một **đường tròn đáy** nên sẽ có chung một đường bậc hai nữa.



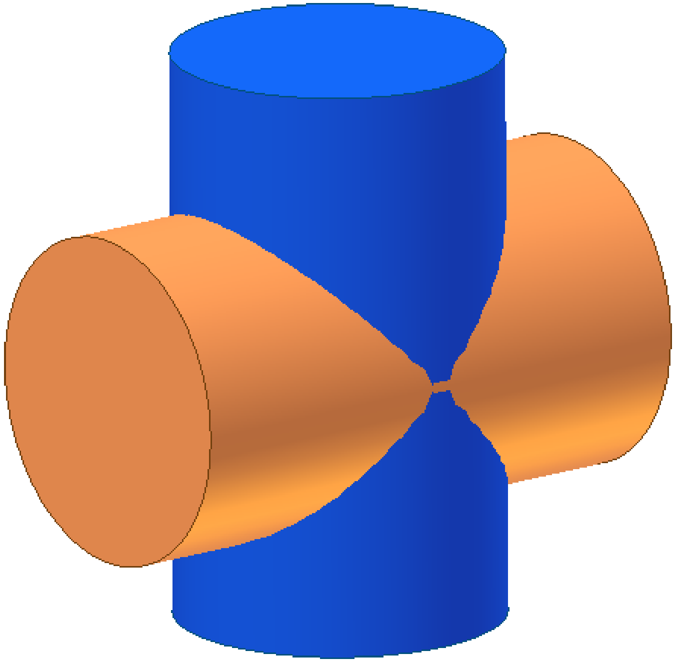
Đường bậc hai này phải thuộc mặt phẳng $\mathscr{R}$ **vuông góc với mặt phẳng đối xứng chung** của hai mặt Φ và θ nên $\mathscr{R}$ là mặt chiếu đứng, và giao tuyến này là một cung của một **elip f** (mặt phẳng $\mathscr{R}$ cắt mặt nón và mặt trụ theo một elip). Elíp f này có hình chiếu đứng là đoạn thẳng $f_1=A_1B_1$, hình chiếu bằng là elip f_2 có trục dài là A_2B_2 và trục ngắn C_2D_2.

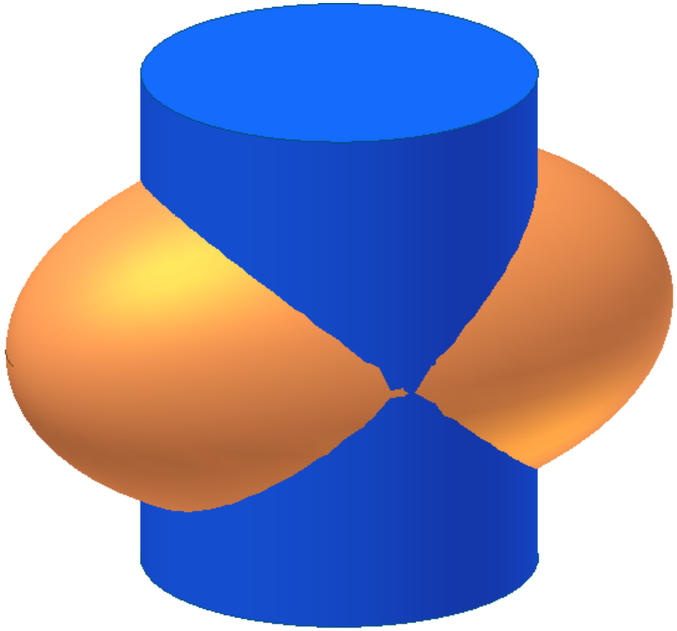
Như vậy, giao tuyến của hai mặt Φ và θ là đường tròn e và cung EAF của elip f.



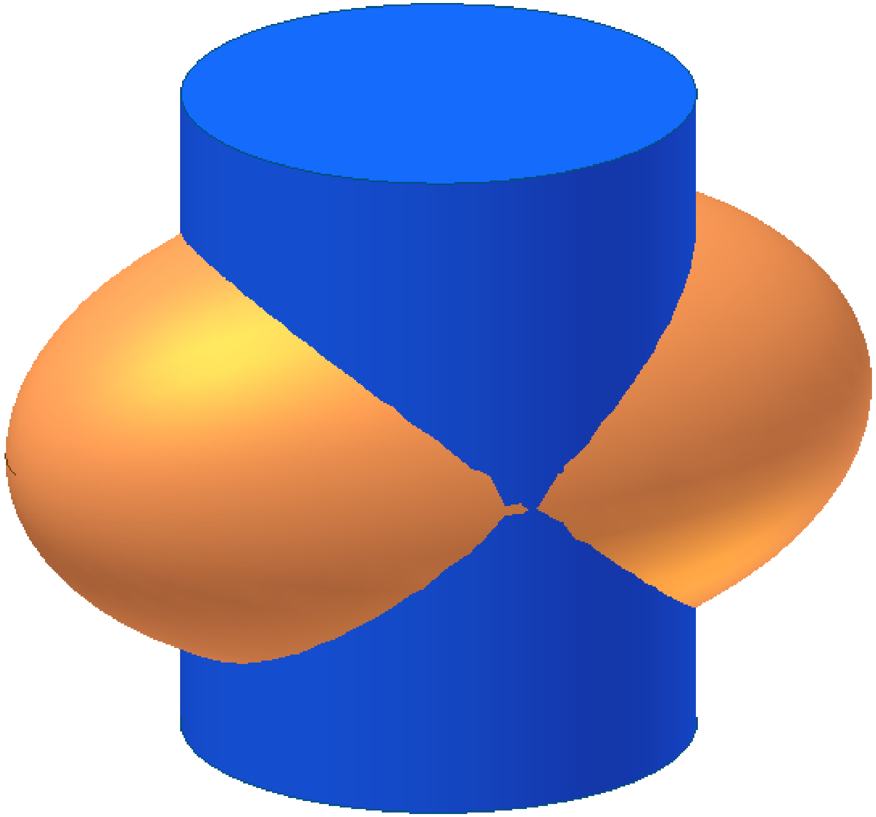
Định lý 2:

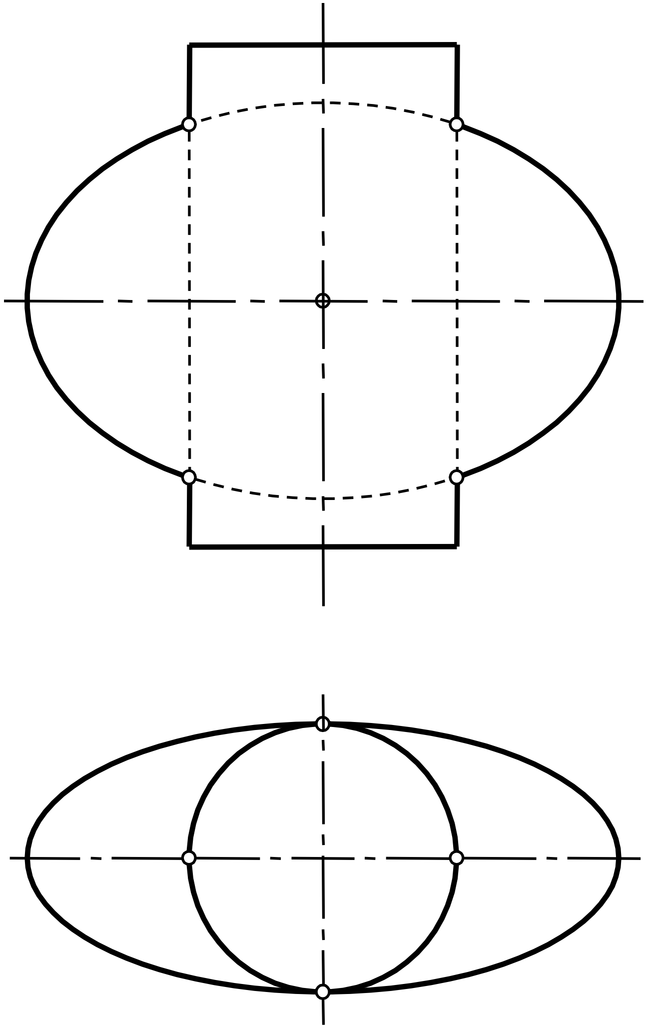
Nếu hai mặt bậc hai tiếp xúc với nhau ở hai điểm và đường thẳng nối hai điểm tiếp xúc đó không thuộc một đường sinh nào trong hai mặt bậc hai đó thì giao tuyến của hai mặt bậc hai sẽ là hai đường cong bậc hai đi qua hai điểm tiếp xúc đó.





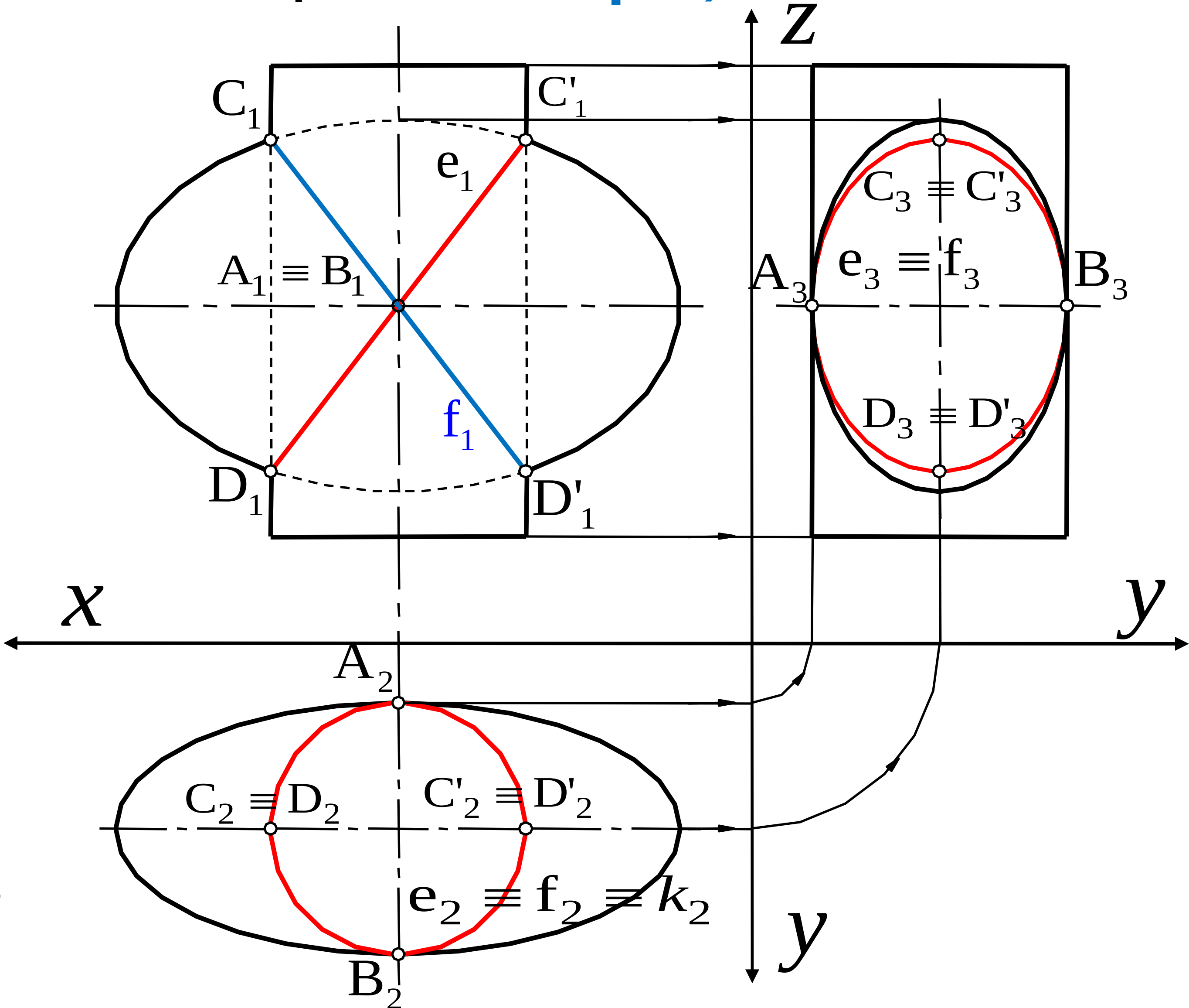
Ví dụ: Tìm giao tuyến của mặt trụ tròn xoay và mặt elipxoit tròn xoay có chung trục là một đường thẳng chiếu bằng.





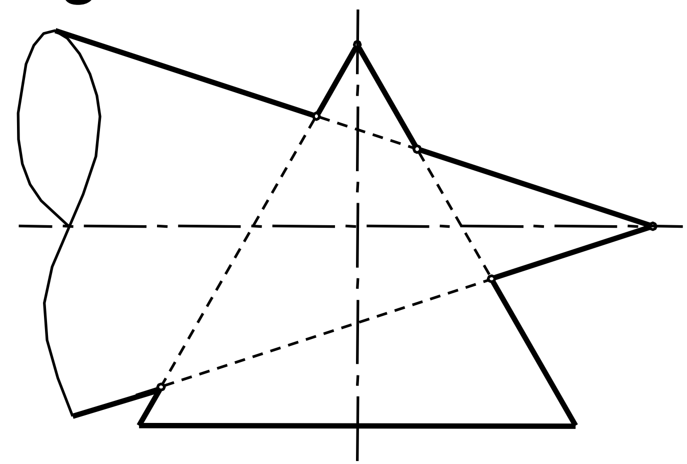
Giải: - Hai mặt tiếp xúc với nhau tại hai điểm A, B và đoạn thẳng AB không thuộc hai mặt nên theo định lý 2 giao tuyến của hai mặt là **hai elip e, f.**

- **Hình chiếu đứng** suy biến thành hai đoạn thẳng: **$f_1 \equiv C_1D'_1$** và **$e_1 \equiv C'_1D_1$**; **hình chiếu bằng** trùng với hình chiếu bằng của mặt trụ là đường tròn k_2; và **hình chiếu cạnh** là hai elip trùng nhau có trục ngắn A_3B_3 và trục dài C_3D_3.

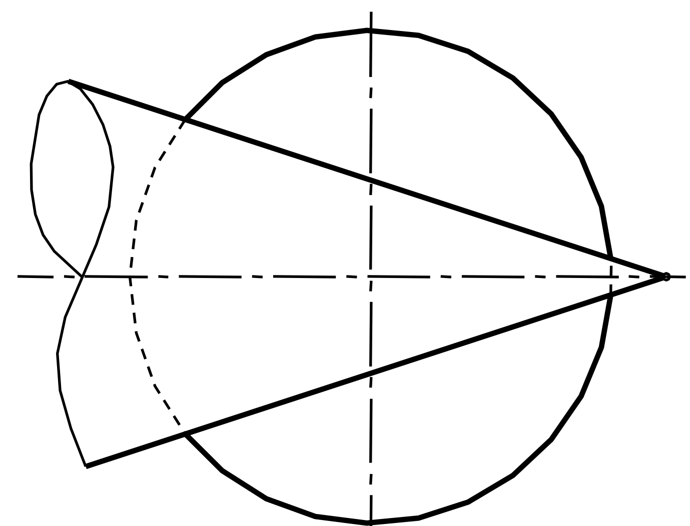


Định lý 3:

Nếu giao của hai mặt bậc hai ***cùng nội tiếp*** *(hay* ***cùng ngoại tiếp****) một mặt bậc hai thứ ba thì giao của chúng là hai đường bậc hai đi qua hai giao điểm của hai đường tiếp xúc.*



Tìm giao tuyến của hai mặt nón tròn xoay Φ và θ; có hai trục là đường thẳng chiếu bằng, đường thẳng chiếu cạnh cắt nhau tại O, cùng ngoại tiếp mặt cầu tâm O.

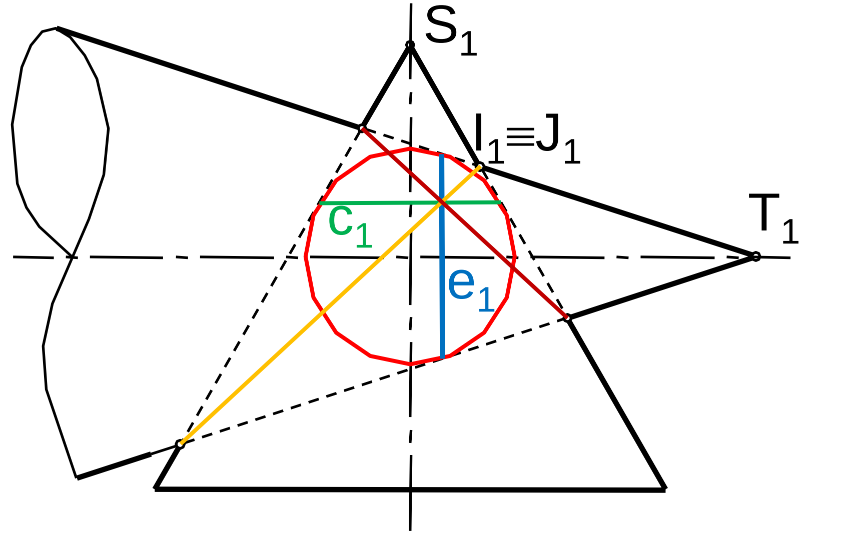


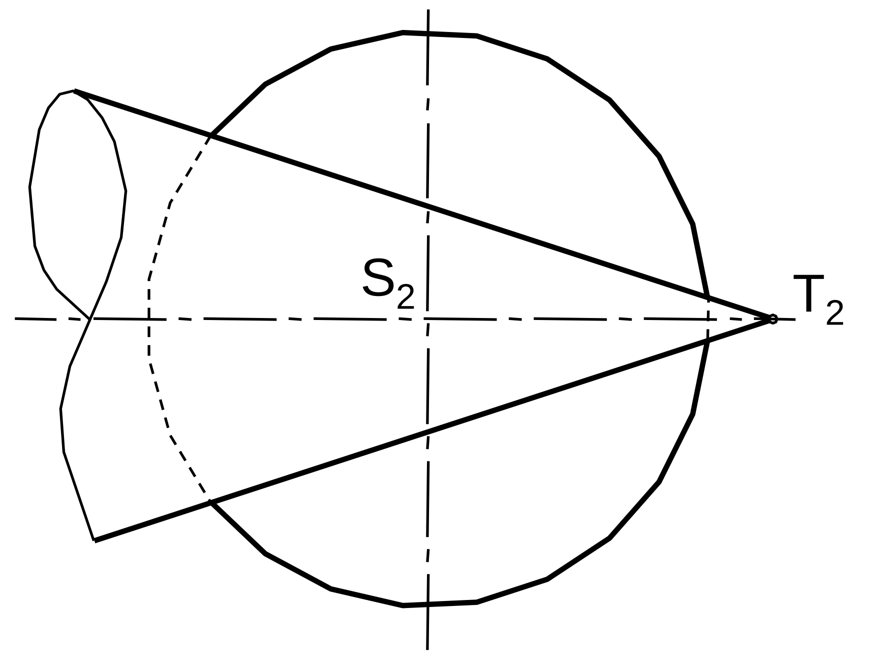
Giải:- Hai mặt nón cùng ngoại tiếp mặt bậc hai (mặt cầu):

Mặt nón Φ(S) ngoại tiếp mặt cầu theo **đường tròn c**; mặt nón θ(T) ngoại tiếp mặt cầu theo **đường tròn e**.

Giao tuyến của hai mặt nón là hai elíp đi qua giao điểm I và J của hai đường tiếp xúc

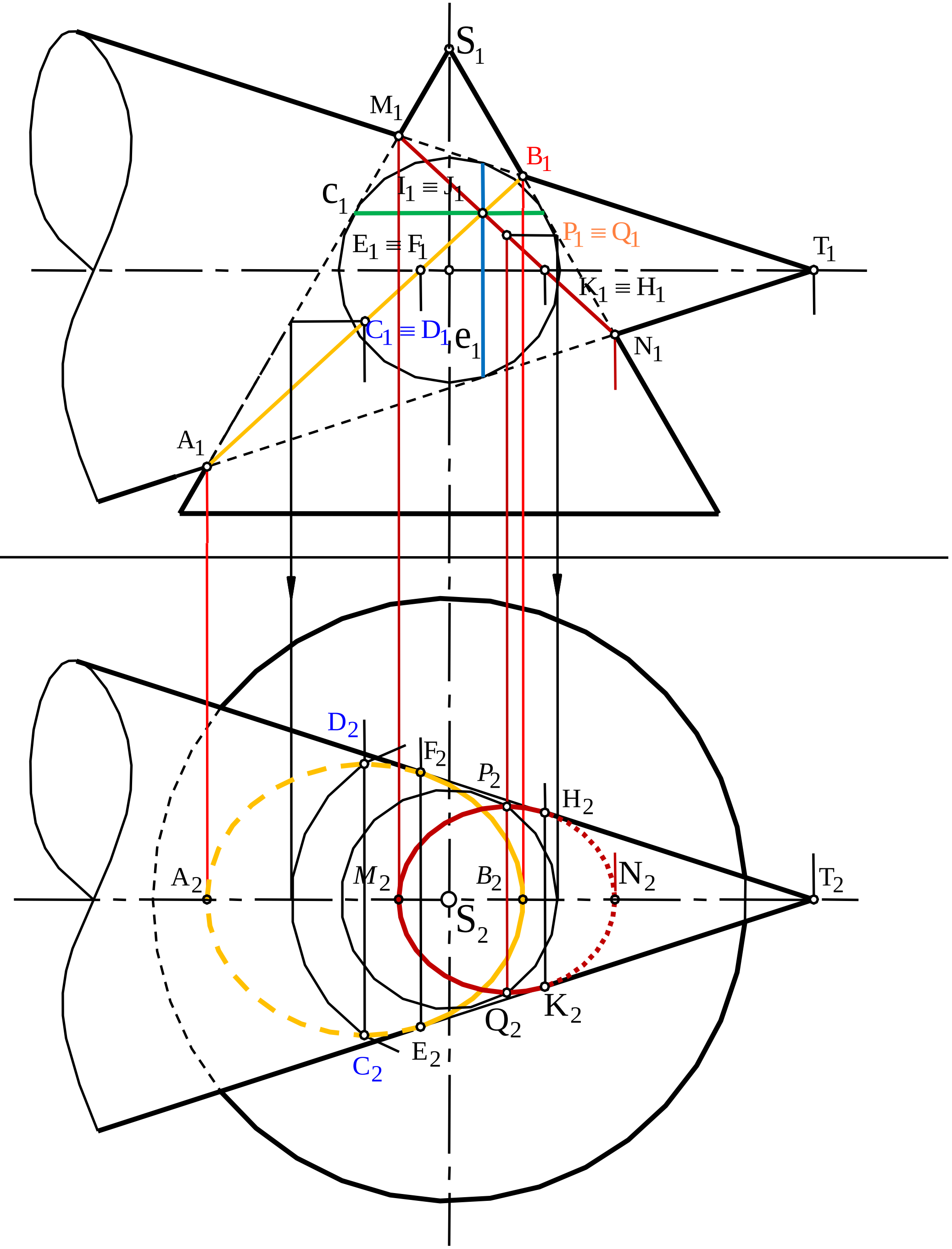
(I, J =c ∩ e).





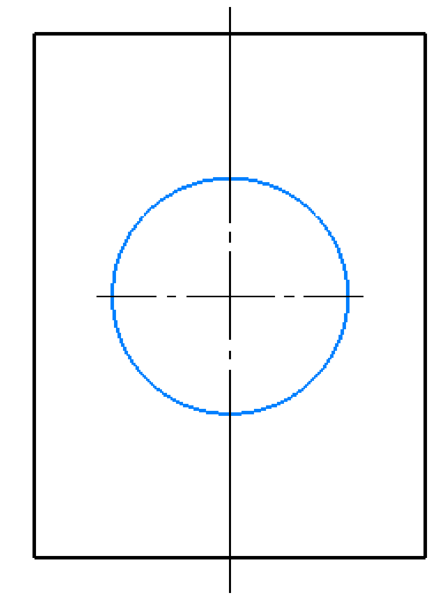
+ Elíp giao tuyến thứ nhất có trục dài là AB, trục ngắn là CD, điểm giới hạn thấy khuất trên $\mathscr{P}_2$ là E, F. Hình chiếu đứng suy biến thành A_1B_1, để tìm hình chiếu bằng ta chỉ cần gắn các điểm vào đường tròn // đáy nón Φ(S).

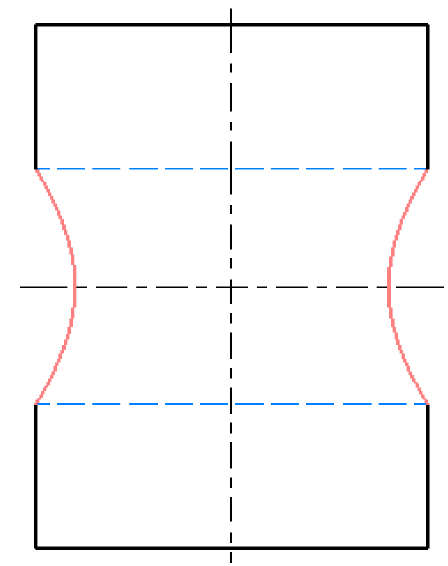
+ Elíp giao tuyến thứ hai có trục dài là MN, trục ngắn là PQ.

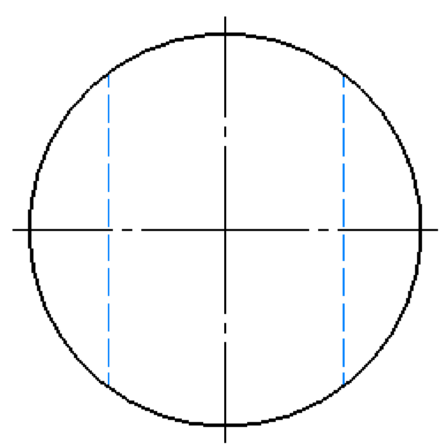


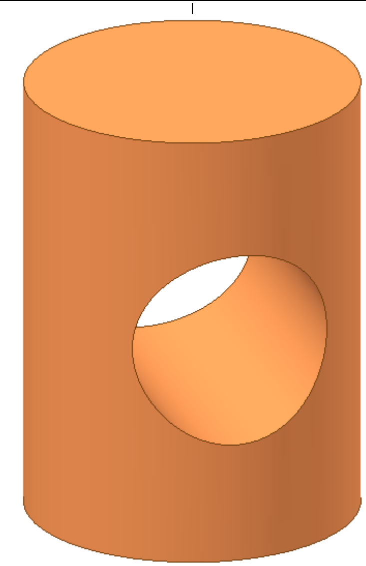
VÍ DỤ THƯỜNG GẶP VỀ GIAO TUYẾN CỦA 2 MẶT BẬC 2

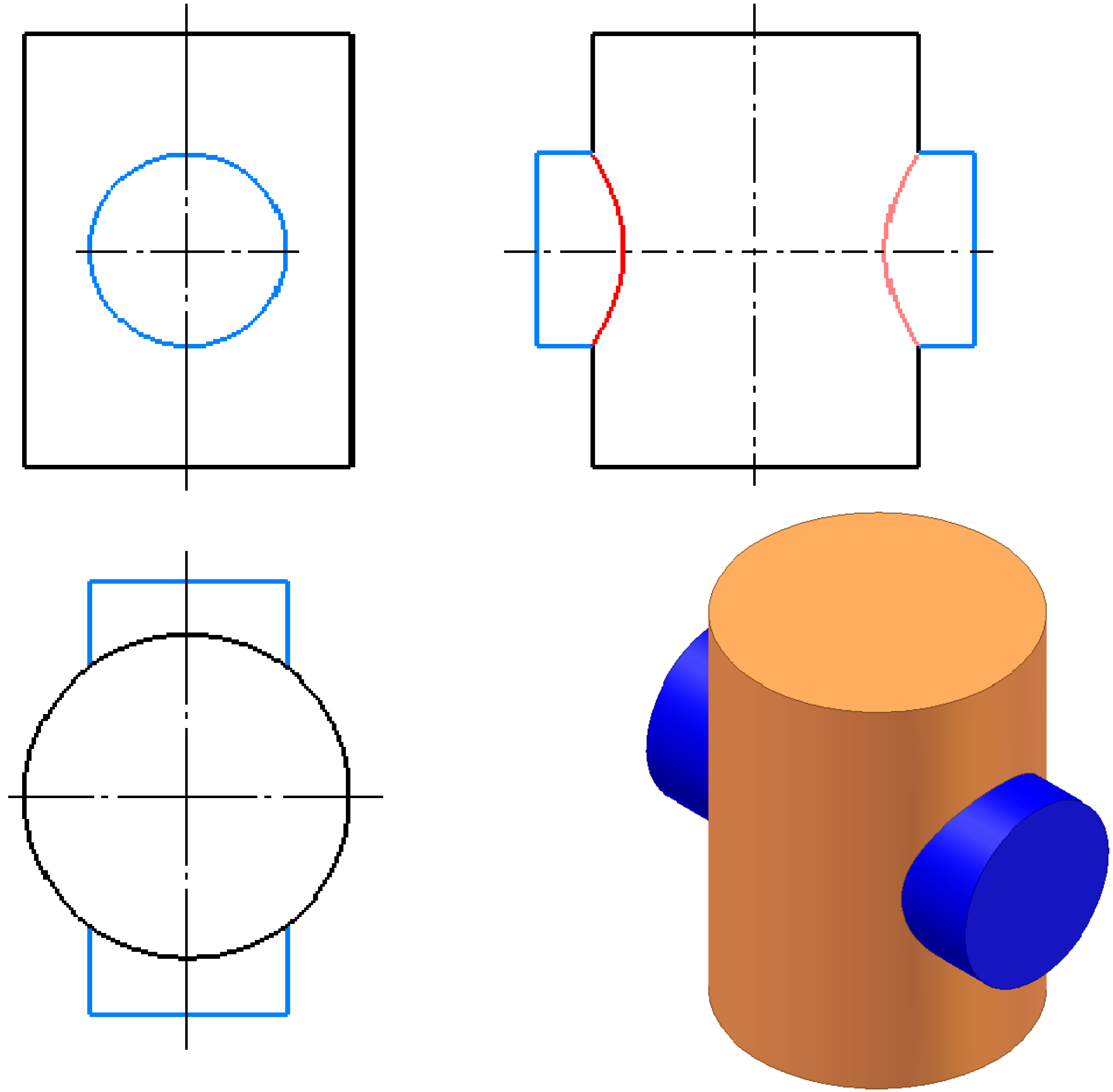
Hai mặt trụ có trục cắt nhau,
mặt phẳng chứa 2 trục // MPHC cạnh;
Cho nên HC cạnh của giao tuyến có dạng Hypebol.

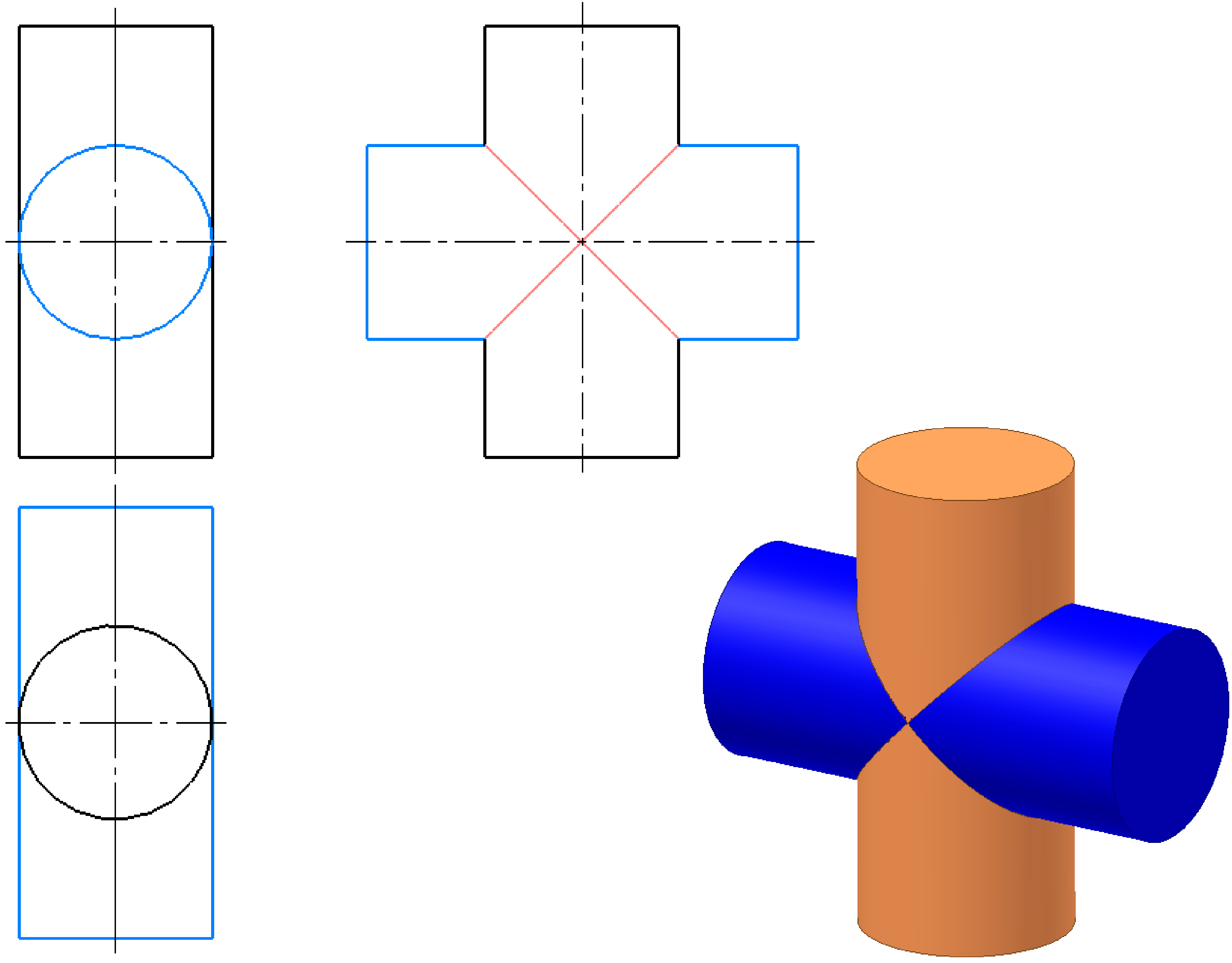












BÀI TẬP LỚN 4,5,6

1.Hoàn thành từng bài tập và nộp vào **buổi học cuối cùng(Tuần thứ 15).**

2.Các bài Hình họa trình bày trên khổ giấy A4(**Vẽ hình lớn nhất có thể trên khuôn khổ tờ giấy A4**).

3.Các bài Vẽ kỹ thuật cơ bản thì tùy theo độ phức tạp của vật thể và tỷ lệ lựa chọn để biểu diễn mà chọn khổ giấy A4 hoặc A3 cho phù hợp.

4.Sau khi hoàn thành đóng thành quyển A4 có bìa và ghi đầy đủ thông tin trên bìa theo hướng dẫn trong cuốn Bài tập Hình học họa hình.