

Vấn đề 1: GIỚI HẠN-LIÊN TỤC CỦA HÀM SỐ NHIỀU BIẾN SỐ

Bài 1. Tìm giới hạn (nếu tồn tại) hoặc chỉ ra rằng giới hạn đó không tồn tại của các hàm số sau:

$$\text{a) } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}; \quad \text{b) } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 - \sin^2 y}{x^2 + 2y^2}; \quad \text{c) } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 \cos y}{2x^2 + y^2};$$

$$\text{d) } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 \sin y}{x^2 + y^2}; \quad \text{e) } \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 1}} \frac{x + 2y}{(x - 1)^2 + y}; \quad \text{f) } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y + x^3}{x^2 + \sin y^2};$$

$$\text{g) } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

$$\text{h) } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x + y) \sin \frac{1}{xy}$$

$$\text{i) } \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} (x^2 + y^2) e^{-(x+y)}$$

$$\text{k) } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y + x^3}{x^2 + \sin y^2}$$

Bài 2. Khảo sát tính liên tục của các hàm số sau:

$$\text{a. } f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2} & \text{nếu } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x^2 + y^2 = 0 \end{cases} \quad \text{tại } O(0,0)$$

$$\text{b. } f(x, y) = \begin{cases} \exp \left\{ x^{10} \sin \frac{1}{x^{10}} \cos \frac{1}{y^{10}} \right\} & \text{nếu } x \text{ và } y \text{ khác } 0 \\ 1 & \text{nếu ngược lại} \end{cases}$$

tại $(0,0)$, $(1,0)$ và $(0,1)$.

$$\text{c. } f(x, y) = \begin{cases} (1 + \sin xy)^{\frac{\cos x}{xy}} & \text{nếu } xy \neq 0 \\ e & \text{nếu } xy = 0 \end{cases} \quad \text{tại } O(0,0)$$

$$\text{d. } f(x, y) = \begin{cases} e^{(1+x)^{\frac{1}{x \cos y}}} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \end{cases} \quad \text{tại } O(0,0)$$

$$\text{e. } f(x, y) = \begin{cases} \sin \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{nếu } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x^2 + y^2 = 0 \end{cases} \quad \text{tại } O(0,0)$$