BÀI TẬP GIẢI TÍCH 2

CHƯƠNG I: PHÉP TÍNH VI PHÂN HÀM SỐ NHIỀU BIẾN

Bài 1. Tìm tập xác định của các hàm số:

$a.\ z = \sqrt{x} + y$ $\quad b.\ z = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2}$ $\quad c.\ z = ln\sqrt{1-x^2-y^2}$

Bài 2. Tìm các giới hạn

$a.\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{1+x^2+y^2}{y^2}(1-cosy)$ $\quad b.\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

$c.\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x+y)sin\frac{1}{xy}$ $\quad d.\ \lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}} (x^2+y^2)e^{-(x+y)}$

$e.\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+4}-2}$ $\quad f.\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2y+x^3}{x^2+siny^2}$

Bài 3. Khảo sát tính liên tục của các hàm số sau:

$a.\ f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)sin\frac{1}{x^2+y^2} & nếu\ \ x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & nếu\ \ x^2+y^2 = 0 \end{cases}$ tại O(0,0)

$b.\ f(x,y) = \begin{cases} exp\left\{x^{10}sin\frac{1}{x^{10}}cos\frac{1}{y^{10}}\right\} & nếu\ \ x\ và\ y\ khác\ 0 \\ 1 & nếu\ \ ngược\ lại \end{cases}$

tại (0,0), (1,0) và (0,1).

$c.\ f(x,y) = \begin{cases} (1+sinxy)^{\frac{cosx}{xy}} & nếu\ \ xy \neq 0 \\ e & nếu\ \ xy = 0 \end{cases}$ tại O(0,0)

$d.\ f(x,y) = \begin{cases} e^{(1+x)^{\frac{1}{xcosy}}} & nếu\ \ x \neq 0 \\ 0 & nếu\ \ x = 0 \end{cases}$ tại O(0,0)

$e.\ f(x,y) = \begin{cases} sin\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & nếu\ \ x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & nếu\ \ x^2+y^2 = 0 \end{cases}$ tại O(0,0)

Bài 4. Tính các đạo hàm riêng cấp một của các hàm số:

$a.\ z = x^4 - 2x^2y^2 + 3xy^3$ $\quad b.\ z = \frac{x-y}{x+y}$

$c.\ z = \ln(x + \sqrt{x^2+y^2})$ $\quad d.\ z = y^2\sin\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{y}}$

$e.\ z = e^{xy}\mathrm{cosx\,siny}$ $\quad f.\ z = arctan\frac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}}$

$g.\ u = xy^2z^3 + lnz$ $\quad h.\ u = x^{yz}$

Bài 5. Tìm các đạo hàm riêng của hàm u và tính giá trị đạo hàm riêng tại các điểm tương ứng:

$a.\ u = \sin(xy\, lnz)$ tại M(1,0,1)

$b.\ u = xy^3z^3)$ tại M(1,2,0)

Bài 6. Giả sử các hàm f và g khả vi, đặt $z = yf(x^2 - y^2)$ và $u = y + g(x^2 - y^2)$. Chứng minh rằng:

$a.\ \frac{1}{x}z'_x + \frac{1}{y}z'_y = \frac{z}{y^2}$

$b.\ yu'_x + xu'_y = x$

Bài 7. Tìm các đạo hàm $\frac{\partial z}{\partial s}, \frac{\partial z}{\partial t}$ của hàm số $z = x^2 + 2xy + 3y^2, x = s + t, y = st$ tại $s = 1, t = 0$.

Bài 8. Tìm vi phân toàn phần của các hàm số:

$a.\ z = e^x(\text{cosy} + \text{xsiny})$ $\qquad$ $b.\ z = x^2\text{cosy}$

$c.\ z = \ln(x^2 + \text{y})$ $\qquad$ $c.\ u = \frac{x+y}{z-xy}$

Bài 9. Dùng quy tắc tính đạo hàm hàm ẩn, để tìm đạo hàm:

$a.\ z'_x$ và z'_y biết $z = z(x, y)$ xác định ẩn từ phương trình: $x^2 + y^2 + z^2 = 4xyz$.

$b.\ z'_x$ và z'_y tại (1,1) biết $z = z(x, y)$ xác định ẩn từ phương trình: $xe^y + yz - ze^{xy} = 0$

$c.\ dz(1,1);\ \ d^2z(1,1)$, biết $z = z(x, y)$ xác định ẩn từ phương trình: $\frac{x}{z} = ln\frac{z}{y} + 1$.

$d.\ dz(0,1)$, biết $z = z(x, y)$ xác định ẩn từ phương trình $z - ye^{x/z} = 0$

$e.\ d^2y(0)$, biết $y = y(x)$ xác định ẩn từ phương trình $x^3 + y^3 - 3xy - 1 = 0$.

Bài 10. Xét sự khả vi của các hàm số sau:

a. $z = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ tại O(0,0).

b. $z = \sqrt{|xy|}$ tại O(0,0).

Bài 11. Cho hàm số:

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2 + y^2} & n\acute{e}u\ (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & n\acute{e}u\ (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

Tính các đạo hàm riêng $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$. Chỉ ra rằng $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

Bài 12. a. Tìm $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$ của hàm số $z = \cos(xe^y)$.

b. Tìm $f''_{xy},\ f'''_{xyy}$ của hàm số $z = 2x^2y + x^2lny$.

Bài 13. Tính đạo hàm riêng đến cấp hai của các hàm số:

$a.\ z = xlny + \tan(xy)$ $\qquad$ b. $z = x^y$

$c.\ z = x^3\ln(x + y)$

Bài 14. Tính vi phân cấp hai của các hàm số:

$a.\ z = x^4 + 3\text{x}y^2 - y^3)$ $\qquad$ $b.\ u = x^2 + y^2 - 3z^3 + xy + 3xz$

Bài 15. Xét xem hàm nào sau đây là nghiệm của phương trình Laplace $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

$a.\ u = 2x^2 + y^2$

$b.\ u = y^3 - 3x^2y$

Bài 16. Cho hàm số $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ và điểm $A(2,2,1)$. Tính đạo hàm của *u* theo hướng vecto $\overrightarrow{OA}$. Tìm $max\left|\frac{\partial u(A)}{\partial \overrightarrow{l_0}}\right|$.

Bài 17. Tìm vecto gradient và tìm tốc độ biến thiên của hàm *f* tại điểm P cho trước theo hướng vecto $\vec{l}$.

a. $u = \frac{z}{x+y},\quad P = (1,1,4),\ \vec{l} = (1,2,3)$

b. $u = xsinyz,\quad P(1,3,0),\ \vec{l} = (1,2,-1).$

Bài 18. Ứng dụng vi phân để tính giá trị gần đúng biểu thức $z(-0{,}95; 0{,}02)$, biết $z = z(x, y)$ là hàm số ẩn xác định từ phương trình: $xe^y + yz + e^z = 0.$

Bài 19. Tính gần đúng giá trị các biểu thức sau bằng vi phân, so sánh với giá trị tính bằng máy tính bỏ túi:

$a.\ \sqrt{(1{,}02)^2 + (1{,}97)^3}$

$b.\ \sqrt{5e^{0{,}06} + (2{,}03)^2}$

$c.\ ln\left(\sqrt[3]{1{,}03} + \sqrt[4]{0{,}98}\right)$

Bài 20. Tìm cực trị của các hàm số:

$a.\ z = 4(x - y) - x^2 - y^2$

$b.\ z = x + y - xe^x$

$c.\ z = x^4 + y^4 - 2(x + y)^2$

$d.\ z = x^4 - 2x^2y + y^2 - y^3$

$e.\ z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$

$f.\ u = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$

$g.\ u = x^3 + y^2 + z^2 - 3x^2 - 2y$

$i.\ z = xyln(x^2 + y^2)$

Bài 21. Tìm cực trị có điều kiện của các hàm số:

$a.\ z = x^2 - y^2$ với điều kiện $x^2 + y^2 = 1.$

$b.\ z = x + 3y + y^2$ với điều kiện $x^2 + y^2 - xy = 3.$

$c.\ u = x^2 + y^2 + z^2$ với điều kiện $x^2 + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{4} = 1$

$d.\ u = x + y^2 + z$ với điều kiện $y - x = 1,\ z - xy = 1$

$e.\ u = 2x + 2y - z$ với điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 = 9$

$f.\ u = xy + yz$ với điều kiện $x^2 + y^2 = 2, y + z = 2, (x, y, z > 0)$.

Bài 22. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của các hàm số:

$a.\ z = 9x^2 - 4y^2$ trong miền $D = \left\{(x, y) | \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \le 1\right\}$

$b.\ z = x^2y + xy^2 + 3xy$ trong miền $D = \{(x, y) | 0 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 3\}$

$c.\ z = x^2 + y^2 - x - 2y$ trong miền $D = \{(x, y) | x \ge 0,\ y \ge 0,\ x + y \le 2\}$

$d.\ z = x^2 + y^2 - 12x + 16y$ trong miền $D = \{(x, y): x^2 + y^2 \le 25\}$.

$e.\ z = 4xy^2 - x^2y^2 - xy^3$ trong miền tam giác OAB với tọa độ các đỉnh $O(0,0), A(0,6), B(6,0)$.

Bài 23. Tìm thể tích của hình hộp chữ nhật lớn nhất trong số các hình hộp chữ nhật với các cạnh song song với các trục toạ độ và nội tiếp trong ellipsoid:

$$\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 1.$$

Bài 24. Tìm phương trình mặt phẳng tiếp xúc với đồ thị của hàm số

a. $z(x, y) = \dfrac{x^2 + y^2}{xy}$ tại điểm $P\left(2, 1, \dfrac{5}{2}\right)$

b. $f(x, y) = x^2 + 3y^2$ tại điểm $P(2, 3, 31)$

Bài 25. Tìm phương trình tiếp diện và pháp tuyến với mặt đã cho tại điểm cho trước:

a. $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ tại $P(4, 1, -1)$

b. $x = y^2 + z^2 - 4$ tại $P(-3, 1, 0)$

CHƯƠNG II: TÍCH PHÂN BỘI

Bài 1. Tính các tích phân kép:

a. $I = \iint\limits_D (6x^2y^3 - 5y^4)dxdy$ trong đó $D = \{(x,y): 0 \le x \le 3, 0 \le y \le 1\}$

b. $I = \iint\limits_D \frac{xy^2}{x^2+1}dxdy$ trong đó $D = \{(x,y): 0 \le x \le 1, -3 \le y \le 3\}$

c. $I = \iint\limits_D e^{|x-y|}dxdy$ trong đó $D = \{(x,y): 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$

d. $I = \iint\limits_D (x^2 + 3xy - y\sqrt{x})dxdy$ trong đó $D = [0,2] \times [-2,2]$

Bài 2. Tính tích phân kép

a. $I = \iint\limits_D x^3y^2dxdy$ trong đó $D = \{(x,y): 0 \le x \le 2, -x \le y \le x\}$

b. $I = \iint\limits_D \frac{y}{x^2+1}dxdy$ trong đó $D = \{(x,y): 0 \le x \le 1, 0 \le y \le \sqrt{x}\}$

c. $I = \iint\limits_D x\sin(x+y)dxdy$ trong đó $D = \{(x,y): 0 \le x \le \pi/2, 0 \le y \le x\}$

d. $I = \iint\limits_{x^2+y^2 \le 4} \left(x^2+y^2\right)^{3/2}dxdy$

Bài 3. Đổi thứ tự lấy tích phân rồi tính các tích phân sau:

a. $I = \int_0^1 dy \int_{3y}^3 e^{x^2}dx$

b. $I = \int_0^3 dy \int_{y^2}^9 y\cos x^2 dx$

c. $I = \int_0^1 dx \int_x^1 \cos y^2 dy$

d. $I = \int_0^1 dx \int_x^1 xydy$

Bài 4. Dùng các phép đổi biến thích hợp tính các tích phân:

a. $I = \iint\limits_D (x^2 - y^2)dxdy$ trong đó D là hình vuông với các đỉnh $(0,2),(1,1),(2,2),(1,3)$;

b. $I = \iint\limits_D xydxdy$, trong đó D là miền trong góc phần tư thứ nhất của mặt phẳng xOy giới hạn bởi các đường thẳng $y = x$, $y = 3x$ và các hypebol $xy = 1$, $xy = 3$.

c. $I = \iint\limits_D \frac{x-2y}{3x-y} dxdy$ trong đó D giới hạn bởi các đường

$x-2y=0,\ x-2y=4,\ 3x-y=1,\ 3x-y=8.$

d. $I = \iint\limits_D e^{x+y} dxdy$ trong đó D là miền giới hạn bởi $|x|+|y| \le 1$;

e. $I = \iint\limits_D (x+y)^3(x-y)^2 dxdy$ với $D = \{(x,y): y+x=1, x+y=3, x-y=-1, x-y=1\}$

Bài 5*. Chứng minh rằng:

a. $I = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} e^{y/(x+y)} dy = \frac{e-1}{2}$

b. $I = \iint\limits_D \cos\frac{x-y}{x+y} dxdy = \frac{\sin 1}{2}$ trong đó D là miền giới hạn bởi $x+y=1, x=0, y=0$.

Bài 6. Tính các tích phân bằng cách đổi sang tọa độ cực:

a. $I = \iint\limits_D xydxdy$ trong đó $D = \left\{(x,y): x^2+y^2 \le 9\right\}$;

b. $I = \iint\limits_D (x+y)dxdy$ trong đó $D = \left\{(x,y): x^2+y^2=1, x^2+y^2=4, x<0\right\}$;

c. $I = \iint\limits_D e^{-x^2-y^2} dxdy$ trong đó $D = \left\{(x,y): x^2+y^2 \le 4, x \ge 0\right\}$;

d. $I = \iint\limits_D \frac{dxdy}{x^2+y^2}$ trong đó $D = \left\{(x,y): x^2+y^2 \le 1, x^2+y^2 \le 2, x \ge 0, y \ge 0\right\}$;

e. $I = \iint\limits_D \frac{y}{x} dxdy$ trong đó $D = \left\{(x,y): (x-1)^2+y^2 \le 1, x^2+y^2 \ge 1, y \ge 0\right\}$;

f. $I = \iint\limits_D \frac{ydxdy}{\sqrt{4+x^2+y^2}}$ trong đó $D = \left\{(x,y): x^2+y^2 \le 4, x \ge 0, y \ge 0\right\}$;

Bài 7. Tính diện tích miền giới hạn bởi các đường:

a. $r = \cos\theta$ và $r = \sin\theta$;

b. $x^2+y^2=2x$ và $x^2+y^2=2\sqrt{3}y$

c. $\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\right)^2 = xy \quad x \ge 0, y \ge 0$

d. $y^2 = ax,\ y^2 = bx,\ xy = 1,\ xy = 2\ (0 < a < b)$

Bài 8. Tính các tích phân:

a. $I = \int_0^1 dx \int_1^2 dy \int_2^3 \cos\left[\pi(x+y+z)\right] dz$

b. $I = \iiint_V x^2 \cos z \, dxdydz$, $V = \left\{(x,y,z): z = 0, z = \pi, x = 0, y = 0, x + y = 1\right\}$

c. $I = \iiint_V x^2 y^2 z dxdydz$ trong đó $V = \left\{(x,y,z): \dfrac{x^2}{4} + y + \dfrac{z^2}{9} \le 1\right\}$.

Bài 9. Tính các tích phân ba lớp:

a. $I = \iiint_V xydxdydz$ trong đó V là miền phía dưới mặt phẳng $x + y - z + 1 = 0$ và trên miền trong mặt phẳng xOy được giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x}, y = 0, x = 1$;

b. $I = \iiint_V xdxdydz$ trong đó $V = \left\{(x,y,z): 4z^2 + 4y^2 \le x, x = 4\right\}$;

c. $I = \iiint_V x^2 dxdydz$ trong đó V giới hạn bởi mặt Oxz và hai nửa mặt cầu:

$y = \sqrt{9 - x^2 - z^2}$ và $y = \sqrt{16 - x^2 - z^2}$.

d. $I = \iiint_V zdxdydz$ trong đó V nằm trên paraboloid $z = x^2 + y^2$ và nằm dưới mặt phẳng $z = 2y$.

e. $I = \iiint_V zydxdydz$ trong đó V nằm trên mặt phẳng $z = 0$ và nằm dưới mặt phẳng $z = y$ và nằm trong mặt trụ $x^2 + y^2 = 4$.

f. $I = \iiint_V \left[(x+y)^2 - z\right] dxdydz$ trong đó V giới hạn bởi mặt phẳng Oxy và mặt nón $(z-1)^2 = x^2 + y^2$.

Bài 10. Dùng toạ độ trụ hãy tính các tích phân:

a. $I = \iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$ trong đó V là miền nằm trong mặt trụ $x^2+y^2=16$

$x^2+y^2=16$ và các mặt phẳng $z=-5, z=4$.

b. $I = \iiint\limits_V x^2\,dxdydz$ trong đó V là miền nằm trong mặt trụ $x^2+y^2=1$, trên mặt phẳng z

= 0 và dưới mặt nón $4x^2+4y^2=z^2$.

c. $I = \iiint\limits_V z e^{x^2+y^2}\,dxdydz$ trong đó $V=\left\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2 \le 2,\ z \ge \sqrt{x^2+y^2}\right\}$

d. $I = \iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$ trong đó $V=\left\{(x,y,z): x^2+y^2 \le 2x, 0 \le z \le a\right\}$.

Bài 11. Tính các tích phân bằng cách đổi sang toạ độ cầu:

a. $I = \int\limits_{-3}^{3} dx \int\limits_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{9-x^2-y^2}} z\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dz$;

b. $I = \iiint\limits_V (x^2+y^2)\,dxdydz$ trong đó $V=\left\{(x,y,z): r^2 \le x^2+y^2+z^2 \le R^2, z \ge 0\right\}$

c. $I = \iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$ trong đó $V=\left\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2 \le 2z\right\}$;

d. $I = \iiint\limits_V x^2y^2z^2\,dxdydz$ trong đó $V=\left\{(x,y,z): \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2} \le 1\right\}$;

e. $I = \iiint\limits_V \sqrt{x^2+4y^2+9z^2}\,dxdydz$

trong đó $V=\left\{(x,y,z): x^2+4y^2+9z^2 \le 1, x,y,z \ge 0\right\}$.

Bài 12. Tính thể tích của các vật thể:

a. Nằm dưới mặt cong $z=xy$ và phía trên hình chữ nhật $[0,6]\times[0,4]$;

b. Dưới mặt paraboloid elliptic $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}+z=1$ và phía trên hình chữ nhật

$[-1,1]\times[-2,2]$;

c. giới hạn bởi mặt cong $z = 1 + e^x \sin y$ và các mặt phẳng $x = \pm 1, y = 0, y = \pi$;

d. nằm trong góc phần tám thứ nhất giới hạn bởi mặt trụ $z = 9 - x^2$ và các mặt phẳng $x = 2, y = 4$;

e. Nằm dưới mặt paraboloid $z = x^2 + y^2$ và phía trên hình tròn $x^2 + y^2 \le 9$;

f. Nằm trên mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ và nằm dưới mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$;

g. Giới hạn bởi: $0 \le z \le 2 - x - y,\ 0 \le y \le 1,\ 1 \le 2x + y,\ x + y \le 1$.

Bài 13. Tính thể tích của các vật thể:

a. Nằm dưới mặt phẳng $x + 2y - z = 0$ và phía trên miền giới hạn bởi các mặt $y = x, y = x^4$;

b. Nằm dưới mặt cong $z = xy$ và trên tam giác với đỉnh $(1,1),(4,1),(1,2)$;

c. Giới hạn bởi các mặt trụ $y = x^2; z = x^2$ và các mặt phẳng $z = 0, y = 4$;

d. Giới hạn bởi mặt trụ $x^2 + y^2 = 1$ và các mặt phẳng $y = z,\ x = 0,\ z = 0$ trong góc phần tám thứ nhất;

e. Giới hạn bởi các mặt $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ và $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$;

f. Giới hạn bởi các mặt parараboloid $2z = x^2 + y^2$ và $z = 8 - x^2 - y^2$;

g.Giới hạn bởi các mặt parараboloid $z = x^2 + y^2 + 1$ và mặt phẳng $z = 5$;

h. Giới hạn bởi các mặt trụ $x^2 + y^2 = a^2$ và $x^2 + z^2 = a^2$.

Bài 14. Tìm thể tích vật thể tạo thành bằng cách lấy giao của các mặt trụ parabol $y = 1 - x^2;\ y = x^2 - 1$ và các mặt phẳng $x + y + z = 2\ ; 2x + 2y - z + 10 = 0$.

Bài 15. Tìm thể tích vật thể nằm phía trong mặt $x^2 + y^2 + z^2 = 4$,trên mặt phẳng xOy và dưới mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Bài 16. Tính diện tích các mặt cong:

a. Phần mặt trụ $z^2 + y^2 = 9$ nằm trên miền hình chữ nhật có đỉnh $(0,2),(0,0)$; $(4,0),(4,2)$.

b. Phần mặt cong $z = xy$ nằm mặt trụ $x^2 + y^2 = 1$;

c. Phần mặt pararaboloid $2x = z^2 + y^2$ nằm trên miền trong góc phần tám thứ nhất giới hạn bởi các mặt $x = y^2 ; x = 1$.

d. Phần mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ nằm bên trong mặt trụ $x^2 + y^2 = ax$.

Bài 17. *Mật độ tại mỗi điểm của một microchip hình vuông cạnh 1 cm là* $(45 + r^2)g / cm^2$ *, trong đó r là khoảng cách theo cm từ điểm đó đến tâm của chip. Khối lượng của chip là bao nhiêu?*

Bài 18. *Miếng vàng mỹ nghệ xác định bởi* $0 \le x \le 2, 0 \le y \le 2\pi$ *(theo cm) và có mật độ khối lượng* $\rho(x, y) = x^2 \sin^2 4y + 3\ (g / cm^2)$ *.Nếu vàng được bán với giá 1 triệu VND/g, lượng vàng trong miếng vàng đó trị giá bao nhiêu?*

Bài 19. Tìm thể tích của vật thể V:

a. Giới hạn bởi mặt cong $\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2 = az(x^2 + y^2),\ a > 0; x \ge 0; y \ge 0; z \ge 0$;

b. Giới hạn bởi các mặt cong $z = 6 - x^2 - y^2$ và $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Bài 20. *Dùng toạ độ trụ hoặc toạ độ cầu tuỳ theo mức độ tiện lợi tìm thể tích và trọng tâm của vật thể nằm trên mặt nón* $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ *và nằm dưới mặt cầu* $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Bài 21. Tìm thể tích của vật thể giới hạn bởi mặt đóng $\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2 = x$.

Bài 22. *Tìm khối lượng và trọng tâm của hình lập phương cho bởi* $0 \le x \le 12,\ \ 0 \le x \le 12,\ 0 \le x \le 12$ *và hàm mật độ* $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

Bài 23. *Tìm khối lượng và trọng tâm của vật thể:*

a. Nằm dưới mặt phẳng $z = x + y + 1$ *và trên miền trong mặt phẳng Oxy giới hạn bởi các đường cong* $y = \sqrt{x}, y = 0, x = 1$ *và với mật độ hằng số.*

b. Trong góc phần tám thứ nhất giới hạn bởi mặt trụ $x^2 + y^2 = 1$ *và các mặt phẳng* $y = z$, $x = 0$, $z = 0$ *và với hàm mật độ* $\rho(x, y, z) = x + y + z + 1$.

Bài 24. *Viết ra công thức mà không tính giá trị, tích phân biểu diễn khối lượng, trọng tâm của nửa mặt cầu* $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \ge 0$ *với hàm mật độ:*

$$\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} .$$

Chương III: TÍCH PHÂN ĐƯỜNG, TÍCH PHÂN MẶT

Bài 1. Tính các tích phân sau:

a. $\int_L (x+y)\,ds$ trong đó L là biên của tam giác có đỉnh A(0,0), B(1,0), C(0,1).

b. $\int_L x^2(1+y)\,ds$ trong đó L là nửa đường tròn $x^2+y^2=4,\ y\ge 0$.

c. $\int_L xy\,ds$ trong đó L là cung có phương trình tham số $x=2t, y=t^4, t\in[0,1]$.

d. $\int_L \sqrt{x^2+y^2}\,ds$, trong đó L là đường tròn $x^2+y^2=2x$.

e. $I=\int_L \frac{ds}{x-y}$, với L là một phần đường thẳng $y=\frac{1}{2}x-1$ nối hai điểm $A\ 0,-1$ và $B\ 2,0$.

Bài 2*. Tính $\int_L x^2 ds$, L là đường tròn $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x+y+z=0 \end{cases}$

Bài 3. Tính các tích phân đường:

a. $\int_{ABC} xy\,dx+(x-y)\,dy$, ABC là đường gấp khúc A(0,0), B(2,0), C(3,2).

b. $\int_{OAB} (\cos y-1)e^x dx+(2y-\sin y)e^x dy$ trong đó OAB là đường gấp khúc : O(0;0), A(1,1); B(2,0).

c. $\int_L x\left(y+\frac{x}{4}\right)dx+y\left(x+\frac{y}{4}\right)dy$, L là nửa đường tròn $x^2+y^2=a^2\ (y\ge 0,\ a>0)$ theo chiều từ $A(1,0)$ đến $B(-1,0)$

d. $\int_{AB} (5x^4+4y)\,dx-(4y^3+3x)\,dy$, trong đó AB là nửa đường tròn $x=\sqrt{a^2-y^2}$, theo chiều từ $A(0;-a)$ đến $B(0;a), (a>0)$.

e. $\oint_L (xy+x+y)\,dx+(xy+x-y)\,dy$, L là đường tròn $x^2+y^2=ax$ (a >0).

$f.\ \oint\limits_L \left[\sqrt{x^2+y^2}dx + y\left(xy + \ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\right)dy\right]$ trong đó L là đường tròn $(x-1)^2+(y-1)^2=1$, tích phân lấy theo chiều dương

g. $\int\limits_L \left(-x^2y - x + y\right)dx + \left(xy^2 + x - y\right)dy$, L là nửa đường tròn $x^2+y^2= 2ay$, $x >0$, $a > 0$ hướng đi từ O(0,0) đến A(0,2a) .

Bài 4: Tính $\oint\limits_L \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}$ với L là đường cong kín, trơn lấy theo chiều dương, không đi qua O(0,0), giới hạn miền đơn liên D.

Bài 5.

a. Cho tích phân: $J = \int\limits_{AB} (2x + y^2\sin 2x)dx + (k.y\cos^2 x - y^2)dy$,

- Tìm k để J không phụ thuộc đường lấy tích phân.
- Tính J với $k = -2$, và AB là cung $y = x^3 - 2x + 1$ đi từ A(1,0) đến B(0,1).

b. Tính tích phân đường $\oint\limits_{AB} \left(x^2 - 2xy^2 + 3\right)dx + \left(y^2 - 2x^2y + 3\right)dy$ trong đó AB là 1/4 cung tròn $x^2 + y^2 = 1;\ x, y \ge 0$, nối A(1;0) đến B(0;1).

c. Tính $I = \int\limits_{AB} \frac{(1-x^2)dy + 2xydx}{(1-x^2)^2 + y^2}$, với AB là đường cong nối A(0;0), B(1,1) không cắt Ox tại điểm nào khác ngoài A.

Bài 6: Chứng minh các biểu thức sau là vi phân toàn phần của hàm u(x,y) nào đó, tìm hàm đó:

a. $\left(x^2 + 2xy - y^2\right)dx + \left(x^2 - 2xy - y^2\right)dy$

b. $\left[e^{x+y} + \cos(x-y)\right]dx + \left[e^{x+y} - \cos(x-y) + 2\right]dy$

Bài 7: Tính các tích phân mặt loại một

a. $\iint\limits_S zds$, với S là bán cầu $x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\ z \ge 0$

b. $\iint\limits_S (x+y+z)ds$, trong đó S là phần mặt phẳng $x + y = 1$ nằm trong góc phần tám thứ nhất và giới hạn bởi mặt phẳng $z = 1$.

c. $\oiint\limits_S \left(x^2+y^2\right)ds$ với S là mặt nón $z=\sqrt{x^2+y^2}$, bị chắn bởi mặt phẳng $z=1$, kể cả đáy nón.

d. $\iint\limits_S zds$ với S là phần mặt nón $z=\sqrt{x^2+y^2}$ nằm giữa hai mặt trụ $x^2+y^2=1$ và $x^2+y^2=9$

e. $\iint\limits_S (xy+yz+zx)ds$ với S là phần mặt nón $z=\sqrt{x^2+y^2}$ bị cắt bởi mặt trụ $x^2+y^2=ax$

Bài 8: Dùng công thức Stokes để tính:

a. $\oint\limits_L x^2y^3dx+dy+zdz$ nếu L là đường tròn $\begin{cases} x^2+y^2=R^2 \\ z=0 \end{cases}$

b. $\oint\limits_L (y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$; L là giao tuyến của mặt trụ $x^2+y^2=a^2$ với mặt phẳng $\frac{x}{a}+\frac{z}{h}=1$ theo hướng ngược chiều kim đồng hồ nếu đứng nhìn theo hướng dương của Oz.

Bài 9: Tính các tích phân mặt loại hai:

a. $\iint\limits_S xdydz+dxdz+xz^2dxdy$ S là mặt ngoài của phần hình cầu xác định bởi $x^2+y^2+z^2=1, x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0.$

b. $\iint\limits_S \left(y-z\right)\text{dydz}+\left(z-x\right)\text{dzdx}+\left(x-y\right)\text{dxdy}$, với S là phía ngoài của mặt nón $x^2+y^2=z^2\ \left(0\le z\le a\right)$, không kể đáy.

c. $\iint\limits_S \left(x^2+y^2\right)dxdy$ S là mặt dưới của mặt tròn $x^2+y^2=R^2$, $z=0$.

d. $\iint\limits_S xdydz+ydzdx+zdxdy$, với S là mặt ngoài của hình trụ $x^2+y^2=R^2, -2\le z\le 2$ không kể hai đáy.

e. $\iint\limits_S x^2dydz + ydzdx + dxdy$, S là mặt xung quanh của khối trụ

$x^2 + y^2 \le -2ax, (a > 0), 0 \le z \le a$ (không kể 2 đáy) , tích phân lấy theo phía ngoài.

f. $\iint\limits_S xzdydz + yxdzdx + zydxdy$ S là mặt phía ngoài của hình tạo bởi các mặt

x = 0, y = 0, z = 0, x+y+z = 1.

g. $\iint\limits_S x^3dydz + y^3dzdx + z^3dxdy$ S là phía ngoài mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

CHƯƠNG VIII: PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

Bài 1: Giải các phương trình:

a. $y' = e^{x+y} + e^{x-y}$

b. $\dfrac{dy}{x\sqrt{1-y^2}} + \dfrac{dx}{y\sqrt{1-x^2}} = 0$

Bài 2: Giải các phương trình vi phân đẳng cấp sau:

a. $xy' = y + x\sin\dfrac{y}{x}$ với điều kiện $y(1) = \dfrac{\pi}{2}$

b. $(x + 2y)dx - xdy = 0$

c. $y' = \dfrac{y}{x + y}$

d. $(x + y - 2)dx + (x - y + 4)dy = 0$

e. $(2x + y + 1)dx - (4x + 2y - 3)dy = 0$

f. $y' = \dfrac{y}{x} + \operatorname{tg}\dfrac{y}{x}$

Bài 3: Giải các phương trình vi phân tuyến tính sau:

a. $\left(1 + x^2\right)y' - 2xy = \left(1 + x^2\right)^2$

b. $xy' - y = x^2\operatorname{arctg}x$

c. $y = xy' + y'\ln y$

d. $2ydx + \left(y^2 - 6x\right)dy = 0$

Bài 4: Giải các phương trình vi phân Bernoulli:

a. $xy' + y = y^2\ln x$

b. $(2xy^2 - y)dx + xdy = 0$

c. $2y' - \frac{x}{y} = \frac{xy}{x^2 - 1}$

d. $y' = \frac{2x}{x^2 \cos y + 4\sin 2y}$

e. $2y' - \frac{x}{y} = \frac{xy}{x^2 - 1}$

Bài 5: Giải các phương trình vi phân toàn phần sau:

a. $\left(1 + x\sqrt{x^2 + y^2}\right)dx + \left(\sqrt{x^2 + y^2} - 1\right)ydy = 0$

b. $\left(2xe^y + e^x\right)dx + \left(x^2 + 1\right)e^y dy = 0$

c. $\left(2xy + y^2\right)dx + \left(x^2 + 2xy - y\right)dy = 0$

Bài 6:Tìm thừa số tích phân dạng $\alpha(x)$, $\alpha(y)$ để giải phương trình:

a. $\left(x + 2y\right)dx - xdy = 0$

b. $\frac{y}{x}dx + \left(y^2 - \ln x\right)dy = 0$

c. $\left(2xy^2 - y\right)dx + \left(y^2 + x + y\right)dy = 0$

d. $(y + x^2y^2)dx + (2x + yx^3)dy = 0$

e. $(\sin^2 y - x^2)dx - x\sin 2ydy = 0$

f. $\left(\frac{x}{y} + 1\right)dx + \left(\frac{x}{y} - 1\right)dy = 0$

Bài 7: Giải các phương trình vi phân sau:

a. $y'' - 3y' + 2y = e^x + xe^{3x}$

b. $y'' - 5y' + 6y = (x + 1)e^{2x}$

c. $y'' - 2y' + y = 2e^{-x}$

d. $y'' + 9y = 6\cos 3x$

e. $y'' + y' = 2x$

f. $y'' - y' = 2\cos^2 x - x$

g. $y'' + y' = xe^{-x}$

h. $y'' + 2y' + y = 4e^{-x}$

i. $y'' - 3y' + 2y = xe^{3x}$

k. $y'' + y = -2\sin x$

Bài 8: Giải các phương trình vi phân sau:

a. $y'' + 4y = \frac{1}{\sin 2x}$

b. $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$

c. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{1 + x^2}$

d. $y'' - y' = \dfrac{1}{1 + e^x}$ thỏa mãn điều kiện $y(0) = 1, y'(0) = 2$

Bài 9: Giải các phương trình Euler sau:

a. $x^2 y'' + xy' + y = 2\sin(\ln x)$

b. $x^2 y'' - xy' + y = \cos(\ln x)$

c. $x^2 y'' + xy' + y = x$

Bài 10*: Giải phương trình: $xy'' + 2y' - xy = e^x$ bằng phép đổi hàm $z = xy$.

Bài 11: Giải hệ phương trình:

a. $\begin{cases} x' = 2x + 3y \\ y' = -3x + 2y \end{cases}$

b. $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = -x + 4y \end{cases}$

c. $\begin{cases} x' = 3x - y \\ y' = 4x - y \end{cases}$

d. $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 3x + 4y \end{cases}$

e. $\begin{cases} x' = 5x + 3y \\ y' = -3x - y \end{cases}$