# VI PHÂN HÀM NHIỀU BIẾN

**1)** Tìm giới hạn nếu tồn tại hoặc chỉ ra rằng giới hạn đó không tồn tại của các hàm

a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ ;

**Lời giải.**

Đặt $y=kx\ \ (k\neq 0)$ khi $x\to 0 \Rightarrow y\to 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2(1-k^2)}{x^2(1+k^2)}=\dfrac{(1-k^2)}{(1+k^2)}$

nhận giá trị khác nhau với những k khác nhau $\Rightarrow$ không tồn tại $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

b) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2-\sin^2 y}{x^2+2y^2}$;

**Lời giải.**

Đặt $y=kx\ \ (k\neq 0)$ khi $x\to 0 \Rightarrow y\to 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2-\sin^2 y}{x^2+2y^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-k^2\dfrac{\sin^2 kx}{(kx)^2}}{(1+2k^2)}=\dfrac{1-k^2}{(1+2k^2)}$ nhận

giá trị khác nhau với những k khác nhau $\Rightarrow$ không tồn tại $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2-\sin^2 y}{x^2+2y^2}$

c) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2\cos y}{2x^2+y^2}$ ;

**Lời giải.**

Đặt

$$y = kx \ (k \neq 0) \text{ khi } x \to 0 \Rightarrow y \to 0 \Rightarrow \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2 \cos y}{2x^2 + y^2} = \frac{1}{2+k^2} \lim_{x\to 0} \cos kx = \frac{1}{2+k^2}$$

nhận giá trị khác nhau với những k khác nhau $\Rightarrow$ không tồn tại $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2 \cos y}{2x^2 + y^2}$.

d) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2 \sin y}{x^2 + y^2}$ ;

**Lời giải.**

$$0 \le \left|\frac{x^2 \sin y}{x^2 + y^2}\right| \le \left|\frac{x^2 \sin y}{x^2}\right| = |\sin y| \to 0 \text{ khi } (x, y) \to (0,0) \Rightarrow \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2 \sin y}{x^2 + y^2} = 0$$

e) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}} \frac{x + 2y}{(x-1)^2 + y}$;

**Lời giải.**

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}} \frac{x + 2y}{(x-1)^2 + y} = 3 \text{ vì hàm số } f(x, y) = \frac{x + 2y}{(x-1)^2 + y} \text{ liên tục tại } (1,1).$$

f) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2 y + x^3}{x^2 + \sin y^2}$ ;

**Lời giải.**

Ta có $\sin y^2 = y^2 + o(y^2)$ khi $y \to 0$

$$\Rightarrow 0 \le \left|\frac{x^2 y + x^3}{x^2 + \sin y^2}\right| = \left|\frac{x^2 y + x^3}{x^2 + y^2 + o(y^2)}\right| \le \left|\frac{x^2 y + x^3}{x^2}\right| = |x + y| \to 0 \text{ khi } (x, y) \to (0,0)$$

$$\Rightarrow \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2 y + x^3}{x^2 + \sin y^2} = 0$$

..........................................................................................

h) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+4}-2}$

**Lời giải.**

$$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+4}-2} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{(x^2+y^2)(\sqrt{x^2+y^2+4}+2)}{x^2+y^2} = 4$$

**2)** Xác định tập lớn nhất trên đó hàm số liên tục:

a) $u = \dfrac{x+y}{x^3+y^3}$

**Lời giải.**

$u = \dfrac{x+y}{x^3+y^3}$ hàm số xác định trên $\mathbb{R}^2 - \{(x+y=0\}$,

nên liên tục trên đó.Vậy tập xác định lớn nhất trên đó hàm số liên tục là tập $\mathbb{R}^2 - \{(x+y=0\}$

b) $f(x,y) = \begin{cases} x^4 & \text{khi } y \ge x^2 \\ y^2 & \text{khi } y < x^2 \end{cases}$

**Lời giải.**

hàm số liên tục $\forall x, y : y \ne x^2$ và $\lim\limits_{y\to x^2+} f(x,y) = \lim\limits_{y\to x^2-} f(x,y) = x^4 = f(x,x^2)$,nên

$f(x,y)$ liên tục trên $y = x^2 \Rightarrow$ hàm số liên tục trên $\mathbb{R}^2$.

**3)** Xét sự liên tục của các hàm số f(x,y)

a) $f(x,y) = \begin{cases} \exp\left(x^{10}\sin\dfrac{1}{x^{10}}\cos\dfrac{1}{y^{10}}\right) & \text{khi } xy \ne 0 \\ 1 & \text{khi } x = y = 0 \end{cases}$ tại $(0,0); (1,0); (0,1)$

**Lời giải.**

+) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \exp\left(x^{10}\sin\frac{1}{x^{10}}\cos\frac{1}{y^{10}}\right)=1$ vì

$$0\le\left|x^{10}\sin\frac{1}{x^{10}}\cos\frac{1}{y^{10}}\right|\le x^{10}\to 0 \text{ khi } x\to 0, y\to 0$$

$\Rightarrow$ Hàm số liên tục tại $O(0,0)$.

+) không tồn tại $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} \exp\left(x^{10}\sin\frac{1}{x^{10}}\cos\frac{1}{y^{10}}\right)$ vì không tồn tại $\lim\limits_{y\to 0}\cos\frac{1}{y^{10}}\Rightarrow$ hàm số không liên tục tại $O(1,0)$.

+) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} \exp\left(x^{10}\sin\frac{1}{x^{10}}\cos\frac{1}{y^{10}}\right)=\cos 1\ne f(0,1)$ vì $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} x^{10}\sin\frac{1}{x^{10}}=1$ và

$$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\cos\frac{1}{y^{10}}=\cos 1$$

$\Rightarrow$ hàm số không liên tục tại $O(0,1)$.

b) $f(x,y)=\begin{cases} e^{(1+x)^{\frac{1}{x\cos y}}} & \text{khi } x\ne 0\\ e & \text{khi } x=0\end{cases}$ tại $O(0,0)$.

**Lời giải.**

Vì $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} e^{(1+x)^{\frac{1}{x\cos y}}}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right)^{\frac{1}{\cos y}}=e \quad\Rightarrow$ hàm số liên tục tại $O(0,0)$.

c) $f(x,y)=\begin{cases} (1+\sin xy)^{\frac{\cos x}{xy}} & \text{khi } xy\ne 0\\ e & \text{khi } x=y=0\end{cases}$ tại $O(0,0)$.

**Lời giải.**

Vì $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(1+\sin xy)^{\frac{\cos x}{xy}} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left[(1+\sin xy)^{\frac{1}{\sin xy}}\right]^{\frac{\cos x}{xy}\sin xy} = e$

$\Rightarrow$ Hàm số liên tục tại $O(0,0)$ .

d) $f(x,y)=\begin{cases}\sin\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{khi } x^2+y^2\neq 0\\ 0 & \text{khi } x^2+y^2=0\end{cases}$ tại $O(0,0)$ .

**Lời giải.**

Đặt

$y=kx\ \ (k\neq 0)$ khi $x\to 0\Rightarrow y\to 0\Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\sin\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1-k^2}{1+k^2}=\sin\dfrac{1-k^2}{1+k^2}$

nhận các giá trị khác nhau khi cho k những giá trị khác nhau

$\Rightarrow$ Hàm số không liên tục tại $O(0,0)$ .

e) $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} & \text{khi } x^2+y^2\neq 0\\ 0 & \text{khi } x^2+y^2=0\end{cases}$ tại $O(0,0)$

**Lời giải.**

vì $\Rightarrow 0\leq\left|(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}\right|\leq\left|x^2+y^2\right|\to 0$ khi $(x,y)\to(0,0)$

$\Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left[(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}\right]=0\Rightarrow$ Hàm số liên tục tại $O(0,0)$ .

**4)** Hàm số $f(x,y)=\sin\dfrac{1}{1-x^2-y^2}$ liên tục đều trong hình tròn $x^2+y^2<1$ ?

**Lời giải.**

Chọn $0<\varepsilon_0<1$ với dãy $(x_n,y_n), x_n=y_n=\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{n\pi}}$ và

$(x'_n,y'_n),\ \ x'_n=y'_n=\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2n\pi}}$

Thỏa mãn $(x_n,y_n),(x'_n,y'_n)\in\left\{x^2+y^2<1\right\}$ và

$$\sqrt{(x_n-x'_n)^2+(y_n-y'_n)^2}=\sqrt{2(x_n-x'_n)^2}=\sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2n\pi}}-\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{n\pi}}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2n\pi}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2n\pi}}+\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{n\pi}}}<\frac{\sqrt{2}}{2n\pi}\frac{1}{\sqrt{\frac{n\pi-1}{2n\pi}}}=\frac{1}{n\pi}\times\frac{\sqrt{n\pi}}{\sqrt{n\pi-1}}<\frac{1}{n\pi-1}\to 0 \text{ khi } n\to\infty$$

$\left|f(x_n,y_n)-f(x'_n,y'_n)\right|=\left|\sin\frac{n\pi}{2}-\sin n\pi\right|=1>\varepsilon_0\Rightarrow f(x,y)$ không liên tục đều trong hình tròn $x^2+y^2<1$

**5)** Tìm các đạo hàm riêng cấp một của các hàm số sau và mô tả chúng như hệ số góc:

a) $u=x^4-2x^2y^2+3xy^3$

**Lời giải.**

$u=x^4-2x^2y^2+3xy^3\Rightarrow u'_x=4x^3-4xy^2+3y^3$ và $u'_y=-4x^2y+9xy^2$

Đối với $u'_x=4x^3-4xy^2+3y^3$ cho $y=y_0=const$ khi cho x những giá trị khác nhau,ứng với mỗi $x$ thì giá trị $u'_x=4x^3-4xy^2+3y^3$ tương ứng thu được là hệ số góc của tiếp tuyến của đường cong $\begin{cases}u=x^4-2x^2y^2+3xy^3\\ y=y_0\end{cases}$ tại $(x,y_0)$

tương tự cho trường hợp $u'_y=-4x^2y+9xy^2$

b) $u = \dfrac{x - y}{x + y}$

**Lời giải.**

$$u = \frac{x - y}{x + y} \Rightarrow u'_x = \frac{2y}{(x + y)^2}; u'_y = \frac{-2x}{(x + y)^2}$$

Đối với $u'_x = \dfrac{2y}{(x + y)^2}$ cho $y = y_0 = const$ khi cho x những giá trị khác nhau,ứng với mỗi $x \neq y_0$ thì giá trị $u'_x = \dfrac{2y}{(x + y)^2}$ tương ứng thu được là hệ số góc của tiếp tuyến của đường cong $\begin{cases} u = \dfrac{x - y}{x + y} \\ y = y_0 \end{cases}$ tại $(x, y_0)$

tương tự cho trường hợp $u'_y = \dfrac{-2x}{(x + y)^2}$

c) $u = x\ln(x^3 + y^3)$ ;

**Lời giải.**

$$u = x\ln(x^3 + y^3) \Rightarrow u'_x = \ln(x^3 + y^3) + \frac{3x^3}{x^3 + y^3} \text{ và } u'_y = \frac{3xy^2}{x^3 + y^3}.$$

Đối với $u'_x = \ln(x^3 + y^3) + \dfrac{3x^3}{x^3 + y^3}$ cho $y = y_0 = const$ khi cho x những giá trị khác nhau,ứng với mỗi $x \neq -y_0$ thì giá trị $u'_x = \ln(x^3 + y^3) + \dfrac{3x^3}{x^3 + y^3}$ tương ứng thu được là hệ số góc của tiếp tuyến của đường cong

$$\begin{cases} u = x\ln(x^3 + y^3) \\ y = y_0 \end{cases}$$

tại $(x, y_0)$

tương tự cho trường hợp $u'_y = \dfrac{3xy^2}{x^3 + y^3}$ .

d) $u = xe^{3/y}$;

**Lời giải.**

$$u = xe^{3/y} \Rightarrow u'_x = e^{3/y} \quad \text{và} \quad u'_y = -\frac{3x}{y^2}e^{3/y}$$

Đối với $u'_x = e^{3/y}$ cho $y = y_0 = const \neq 0$ khi cho x những giá trị khác nhau,ứng với mỗi thì giá trị $u'_x = e^{3/y}$ tương ứng thu được là hệ số góc của tiếp tuyến của đường cong

$$\begin{cases} u = u = xe^{3/y} \\ y = y_0 \neq 0 \end{cases}$$

tại $(x, y_0)$

tương tự cho trường hợp $u'_y = -\dfrac{3x}{y^2}e^{3/y}$ .

e) $u = xy^2z^3 + \ln z$ ;

**Lời giải.**

$$u = xy^2z^3 + \ln z \Rightarrow u'_x = y^2z^3;\; u'_y = 2xyz^3;\; u'_z = 3xy^2z^2 + \frac{1}{z}$$

f) $u(x, y.z.t) = xz\tan(yt)$

**Lời giải.**

$$\Rightarrow u'_x = z\tan(yt); u'_y = xzt\left(1 + \tan^2(yt)\right); u'_z = x\tan(yt); u'_t = xzy\left(1 + \tan^2(yt)\right)$$

**6)** Tìm các đạo hàm riêng của hàm u và tính chúng tại các điểm chỉ ra

a) $u = \sin(xy\ln z)$ tại $M(1,0,1)$ ;

**Lời giải**.

$u = \sin(xy\ln z) \Rightarrow u'_x = y\ln z\cos(xy\ln z);\ u'_y = x\ln z\cos(xy\ln z);\ u'_z = \dfrac{xy}{z}\cos(xy\ln z)$

$$u'_x(1,0,1) = u'_y(1,0,1) = u'_z(1,0,1) = 0$$

b) $u = xy^3z^3$ tại $M(1,2,0)$

**Lời giải.**

$u = xy^3z^3 \Rightarrow u'_x = y^3z^3;\ u'_y = 3xy^2z^3;\ u'_z = 3xy^3z^2$

$\Rightarrow u'_x(1,2,0) = u'_y(1,2,0) = u'_z(1,2,0) = 0$

**7)** Giả sử các hàm f và g khả vi, đặt $z = yf(x^2 - y^2)$ và $u = y + g(x^2 - y^2)$

Chứng minh rằng $\dfrac{z'_x}{x} + \dfrac{z'_y}{y} = \dfrac{z}{y^2}$ và $yu'_x + xu'_y = x$

**Lời giải.**

+) $z = yf(x^2 - y^2) \Rightarrow z'_x = 2xyf'(x^2 - y^2); z'_y = f(x^2 - y^2) - 2y^2f'(x^2 - y^2)$

$\dfrac{z'_x}{x} + \dfrac{z'_y}{y} = 2yf'(x^2 - y^2) + \dfrac{f(x^2 - y^2)}{y} - 2yf'(x^2 - y^2) = \dfrac{f(x^2 - y^2)}{y} = \dfrac{z}{y^2}$ đpcm.

+) $u = y + g(x^2 - y^2) \Rightarrow u'_x = 2xg'(x^2 - y^2); u'_y = 1 - 2yg'(x^2 - y^2)$

$yu'_x + xu'_y = x \Leftrightarrow 2xyg'(x^2 - y^2) + x - 2xyg'(x^2 - y^2) = x$ đpcm.

**8)** Tìm $\dfrac{\partial z}{\partial s}; \dfrac{\partial z}{\partial t}$ của $z = x^2 + 2xy + 3y^2$ với $x = s + t$ ; $y = st$ tại $s = 1; t = 0$.

**Lời giải.**

$x(1,0) = 1; y(1,0) = 0$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}\right|_{(s,t)=(1,0)} = (2x + 2y) + (2x + 6y)t\big|_{(s,t)=(1,0)}$$

$$= 2(t + s + ts) + (2s + 2t + 6ts)t\big|_{(s,t)=(1,0)} = 2$$

.....................................................................................

$$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}\Big|_{(s,t)=(1,0)}=(2x+2y)+(2x+6y)s\big|_{(s,t)=(1,0)}=4$$

**9)** Tìm $z'_x\,;z'_y$ trong đó hàm số $z=z(x,y)$ được xác định :

a) $x^2+y^2+z^2=4xyz$ ;

**Lời giải.**

Đặt $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-4xyz$

$$z'_x(x,y)=-\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}=-\frac{x-2yz}{z-2xy} \quad \text{và} \quad z'_y(x,y)=-\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}=-\frac{y-2xz}{z-2xy}$$

b) $xz=\ln(x+y+z)$.

**Lời giải.**

Đặt $F(x,y,z)=xz-\ln(x+y+z)$

$$\Rightarrow F'_x=z-\frac{1}{x+y+z};F'_y=-\frac{1}{x+y+z};F'_z=x-\frac{1}{x+y+z}$$

$$\Rightarrow z'_x(x,y)=-\frac{F'_x}{F'_z}=-\frac{z(x+y+z)-1}{x(x+y+z)-1} \text{ và } z'_y(x,y)=-\frac{F'_y}{F'_z}=\frac{1}{x(x+y+z)-1}$$

**10)** Sử dụng quy tắc đạo hàm hàm ẩn để tìm

a)Với $z=z(x,y)$ được xác định $\frac{x}{z}=\ln\frac{z}{y}+1$.Tìm $dz(1,1);d^2z(1,1)$

**Lời giải.**

Đặt $F(x,y,z)=\ln\frac{z}{y}+1-\frac{x}{z}\Rightarrow F'_x=-\frac{1}{z};F'_y=-\frac{1}{y};F'_z=\frac{x+z}{z^2}$ nhận thấy $z(1,1)=1$

$$z'_x=-\frac{F'_x}{F'_z}=\frac{z}{z+x} \text{ và } z'_y=-\frac{F'_x}{F'_z}=\frac{z^2}{y(z+x)}\Rightarrow dz(1,1)=\frac{1}{2}(dx+dy)$$

$$z''_{xx}=\frac{(z+x)z'_x-z(1+z'_x)}{(z+x)^2}=\frac{xz'_x-z}{(z+x)^2};\quad z''_{xy}=\frac{(z+x)z'_y-zz'_y}{(z+x)^2}=\frac{xz'_y}{(z+x)^2}\Rightarrow$$

...........................................................................................

$$z''_{yy} = \frac{2zz'_y y(z+x) - z^2(z+x+yz'_y)}{y^2(z+x)^2} \Rightarrow z''_{yy}(1,1) = -\frac{1}{8} = z''_{xx}(1,1),\, z''_{xy}(1,1) = \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow\ d^2z(1,1) = -\frac{1}{8}\left(dx^2 - 2dxdy + dy^2\right) = -\frac{1}{8}(dx-dy)^2$$

<u>hoặc</u> $d\left(\frac{x}{z}\right) = d\left(\ln\frac{z}{y} + 1\right) \Leftrightarrow d\left(\frac{x}{z}\right) = \frac{y}{z}d\left(\frac{z}{y}\right) \Leftrightarrow \frac{zdx - xdz}{z^2} = \frac{ydz - zdy}{zy}$

$\Leftrightarrow (zy + yx)dz = zydx + z^2dy$ đã cắt

$$\Rightarrow dz(1,1) = \left.\frac{zydx + z^2dy}{zy + xy}\right|_{(x,y,z)=(1,1,1)} = \frac{1}{2}(dx+dy)$$

Từ $(zy + yx)dz = zydx + z^2dy$ ta có $d\left[(zy+yx)dz\right] = d\left(zydx + z^2dy\right)$

$$\Leftrightarrow ydz^2 + zdzdy + xdydz + ydxdz + (zy+xy)d^2z = ydzdx + zdxdy + 2zdzdy$$

$$\Leftrightarrow ydz^2 - zdzdy + xdydz + (zy+xy)d^2z = zdxdy$$

Với $z(1,1) = 1$ và $dz(1,1) = \frac{1}{2}(dx+dy)$ ta được

$$\Rightarrow \frac{(dx+dy)^2}{4} + 2d^2z = dxdy \Rightarrow 2d^2z = -\frac{(dx+dy)^2}{4} + dxdy = -\frac{(dx-dy)^2}{4}$$

$$\Rightarrow d^2z = -\frac{(dx-dy)^2}{8}$$

b) Với $z = z(x,y)$ được xác định $z - ye^{x/z} = 0$. Tìm $dz(0,1)$

**Lời giải.**

Đặt $F(x,y,z) = z - ye^{x/z}$

$$\Rightarrow z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = \frac{zye^{x/z}}{z^2 + xye^{x/z}};\ z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} = \frac{z^2e^{x/z}}{z^2 + xye^{x/z}} \text{ và}$$

$z(0,1) = 1 \Rightarrow dz(0,1) = dx + dy$

........................................................................................................

c) Tìm $d^2y(0)$ với $y = y(x)$ được xác định $x^3 + y^3 - 3xy - 1 = 0$

**Lời giải.**

$F(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy - 1 \Rightarrow y(0) = 1$

$$\Rightarrow y' = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{x^2 - y}{y^2 - x}\Bigg|_{(0,1)} = 1$$

$$\Rightarrow y'' = -\frac{(2x - y')(y^2 - x) - (2yy' - 1)(x^2 - y)}{(y^2 - x)^2}\Bigg|_{x=0} = 0 \Rightarrow d^2y(0) = 0$$

**11)** Nhiệt độ tại mỗi điểm trên đĩa kim loại phẳng cho bởi

$T(x,y) = \dfrac{120}{2 + 2x^2 + 3y^2}$ trong đó T đo theo $^{o}C$ , x và y theo mét. Tìm vận tốc biến thiên nhiệt độ theo vị trí tại điểm (2,2) theo chiều trục Ox và theo chiều trục Oy.

**Lời giải.**

vận tốc biến thiên nhiệt độ theo vị trí tại điểm (2,2) theo chiều trục Ox được xác định

$$T'_x(2,2) = -\frac{480x}{\left(2 + 2x^2 + 3y^2\right)^2}\Bigg|_{(2,2)} = -\frac{240}{121}$$

vận tốc biến thiên nhiệt độ theo vị trí tại điểm (2,2) theo chiều trục Oy được xác định

$$T'_y(2,2) = -\frac{720y}{\left(2 + 2x^2 + 3y^2\right)^2}\Bigg|_{(2,2)} = -\frac{360}{121}$$

**12)** Điện trở toàn phần của hai dây dẫn với điện trở $R_1$ và $R_2$ trong một mạch điện mắc song song cho bởi công thức $\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} = \dfrac{1}{R}$ Tìm $\dfrac{\partial R}{\partial R_1}$ và $\dfrac{\partial R(25,40)}{\partial R_1}$.

**Lời giải.**

$$\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=\frac{1}{R}\Rightarrow R=\frac{R_2R_1}{R_2+R_1}\Rightarrow\frac{\partial R}{\partial R_1}=\frac{{R_2}^2}{\left(R_2+R_1\right)^2}\Rightarrow\frac{\partial R(25,40)}{\partial R_1}=\frac{64}{169}$$

**13)** Chiều dài $\ell$ , chiều rộng w và chiều cao h của một chiếc hộp thay đổi theo thời gian. Tại một thời điểm nhất định các kích thước này là $\ell = 2m$, $w = h = 3m$, $\ell$ và w tăng lên với vận tốc 0,2m/s còn h giảm đi với vận tốc 0,3m/s. Tại thời điểm đó hãy tìm vận tốc biến thiên của các đại lượng sau: (a) thể tích, (b) diện tích xung quanh.

**Lời giải.**

Thể tích hộp và diện tích xung quanh $V = wh\ell;\ S_{xq} = 2(\ell + w)h$

Sự biến thiên của đại lượng thể tích khi vận tốc biến thiên được xác định

$$V'_\ell\Delta\ell + V'_h\Delta h + V'_w\Delta w$$
$$= 0,2wh - 0,3w\ell + 0,2h\ell = 9\times 0,2 - 6\times 0,3 + 0,2\times 6 = 1,2m^3/s$$

Sự biến thiên của đại lượng diện tích xung quanh khi vận tốc biến thiên được xác định

$$S'_\ell\Delta\ell + S'_h\Delta h + S'_w\Delta w + V'_\ell\Delta\ell = 2\left(h\Delta\ell + h\Delta w + (\ell + w)\Delta h)\right)$$
$$= 2\left(0,2\times 3 - 0,3\times 3 + 0,2\times 5\right) = 1,4m^3/s$$

**14)** Cho hàm $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{khi } x^2+y^2\neq 0\\ 0 & \text{khi } x^2+y^2=0\end{cases}$

Chứng minh rằng tồn tại các đạo hàm riêng cấp 2 và $\dfrac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x\partial y}\neq\dfrac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y\partial x}$.

**Lời giải.**

Ta có $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0=\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial y}$

.......................................................................................................

Với $x \neq 0$ ta có $f'_y(x,y) = \dfrac{3xy^2(x^2+y^2) - 2xy^4}{(x^2+y^2)^2}$;

và $y \neq 0$ ta có $f'_x(x,y) = \dfrac{y^3(x^2+y^2) - 2x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}$

$$\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x \partial y} = \lim_{y \to 0} \frac{f'_x(0,y) - f'_x(0,0)}{y} = \lim_{y \to 0} \frac{y^5}{y^5} = 1$$

$$\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y \partial x} = \lim_{x \to 0} \frac{f'_y(x,0) - f'_y(0,0)}{y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x \partial y} \neq \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y \partial x}$$

**15)** Tính :

a) $d\left(\dfrac{x+y}{z-xy}\right)$

**Lời giải.**

$$d\left(\frac{x+y}{z-xy}\right) = \left(\frac{x+y}{z-xy}\right)'_x dx + \left(\frac{x+y}{z-xy}\right)'_y dy + \left(\frac{x+y}{z-xy}\right)'_z dz$$

$$= \frac{1}{(z-xy)^2}\left[(z+y^2)dx + (z+x^2)dy - (x+y)dz\right]$$

**Hoặc**

$$d\left(\frac{x+y}{z-xy}\right) = \frac{(z-xy)(dx+dy) - (x+y)(dz - xdy - ydx)}{(z-xy)^2}$$

$$= \frac{1}{(z-xy)^2}\left[(z+y^2)dx + (z+x^2)dy - (x+y)dz\right]$$

b) $d(x^2 \cos y)$

**Lời giải.**

$$d(x^2\cos y) = 2x\cos y dx - x^2 \sin y dy$$

**16)** Cho $z = \arccos(x \ln y)$ tính $dz(0,1)$ và $d^2z(0,1)$.

**Lời giải.**

+) $z'_x = -\dfrac{\ln y}{\sqrt{1-x^2\ln^2 y}}; z'_y = -\dfrac{x}{y\sqrt{1-x^2\ln^2 y}} \Rightarrow dz(0,1) = 0$

+)

$$z''_{xx} = -\frac{x\ln^3 y}{\left(1-x^2\ln^2 y\right)^{3/2}}; z''_{yy} = \frac{(1-x^2\ln^2 y - x^2\ln y)x}{\left(1-x^2\ln^2 y\right)^{3/2}}; z''_{xy} = -\frac{1}{y\left(1-x^2\ln^2 y\right)^{3/2}}$$

$\Rightarrow d^2z(0,1) = -2dxdy$

**17)** Cho $f(x,y) = \cos(xe^y)$ tính $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$.

**Lời giải.**

$f'_x(x,y) = -e^y \sin(xe^y) \to f''_{x^2}(x,y) = -e^{2y}\cos(xe^y)$

$$\Rightarrow \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = xe^{3y}\sin(xe^y) - 2e^{2y}\cos(xe^y)$$

**18)** Tìm các đạo hàm riêng cấp hai của các hàm số:

a) $z = x\ln y + \tan(xy)$

**Lời giải.**

$z'_x = \ln y + y\left[1+\tan^2(xy)\right] \Rightarrow z''_{xx} = 2y^2\tan(xy)\left[1+\tan^2(xy)\right]$

$z'_y = \dfrac{x}{y} + x\left[1+\tan^2(xy)\right] \Rightarrow z''_{yy} = -\dfrac{x}{y^2} + 2x^2\tan(xy)\left[1+\tan^2(xy)\right]$

$z''_{xy} = \dfrac{1}{y} + \left(1+2xy.\tan(xy)\right)\left[1+\tan^2(xy)\right]$

b) $z = x^y$.

**Lời giải.**

.......................................................................................................

$z'_x = yx^{y-1} \Rightarrow z''_{xx} = y(y-1)x^{y-2}$

$z''_{xy} = x^{y-1} + yx^{y-1}\ln x;$

$z'_y = x^y \ln x \Rightarrow z''_{yy} = x^y \ln^2 x$

**19)** Tìm các đạo hàm riêng $f''_{xy}$ và $f'''_{xy^2}$ với $f(x,y) = 2x^2y + x^2\ln y$.

**Lời giải.**

$f'_x(x,y) = 4xy + 2x\ln y \Rightarrow f''_{xy}(x,y) = 4x + \dfrac{2x}{y};\ f'''_{xy^2}(x,y) = -\dfrac{2x}{y^2}$

**20)** Xét xem hàm nào sau đây là nghiệm của phương trình Laplace

a) $u = 2x^2 + y^2$ ;

**Lời giải.**

$u''_{xx} = 4; u''_{yy} = 2 \Rightarrow u = 2x^2 + y^2$ không là nghiệm của phương trình Laplace

b) $u = x^2 - y^2$;

**Lời giải.**

$u''_{xx} = 2;\ u''_{yy} = -2 \Rightarrow u''_{xx} + u''_{yy} = 0$

$\Rightarrow u = x^2 - y^2$ là nghiệm của phương trình Laplace

c) $u = x^3 - 3x^2y$.

**Lời giải.**

$u = x^3 - 3x^2y \Rightarrow u'_x = 3x^2 - 6xy;\ u'_y = -3x^2$

$u''_{xx} = 6x - 6y;\ u''_{yy} = 0 \Rightarrow u = x^3 - 3x^2y$ không là $n_0$ của phương trình Laplace.

**21)** Tìm đạo hàm của hàm số

a) $z(x,y) = x\ln y$ tại $P(-4,e)$ theo hướng $\vec{\ell} = \left(\dfrac{5}{13}, \dfrac{12}{13}\right)$

**Lời giải.**

Do $\left|\vec{\ell}\right| = 1 \Rightarrow \dfrac{\partial z(P)}{\partial \vec{\ell}} = \dfrac{5}{13}\ln y + \dfrac{x}{y}\times\dfrac{12}{13} = \dfrac{5e-48}{13e}$

b) $u = e^{-x}\cos y$ tại $P\left(0, \dfrac{\pi}{6}\right)$ theo hướng $\vec{\ell} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$

**Lời giải.**

$\vec{\ell} = 3\vec{i} - 4\vec{j} \Rightarrow \dfrac{\vec{\ell}}{\left|\vec{\ell}\right|} = \left(\dfrac{3}{5}, -\dfrac{4}{5}\right) \Rightarrow$

$$\frac{\partial u(0,\pi/6)}{\partial \vec{\ell}} = \left(-\frac{3}{5}e^{-x}\cos y + \frac{4}{5}e^{-x}\sin y\right)\Bigg|_{\left(0,\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{4-3\sqrt{3}}{10}$$

c) $u(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ tại $P(2,2,1)$ theo hướng $\overrightarrow{OP}$.

**Lời giải.**

$$\frac{\overrightarrow{OP}}{\left|\overrightarrow{OP}\right|} = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \Rightarrow \frac{\partial u(P)}{\partial \vec{\ell}} = \frac{\partial u(P)}{\partial x}\times\frac{2}{3} + \frac{\partial u(P)}{\partial y}\times\frac{2}{3} + \frac{\partial u(P)}{\partial z}\times\frac{1}{3}$$

$$\frac{\partial u(P)}{\partial \vec{\ell}} = \left(\frac{2x}{3\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{2y}{3\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{z}{3\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)\Bigg|_{(2,2,1)} = 1$$

**22)** Tìm tất cả các điểm tại đó chiều biến thiên nhanh nhất của hàm số $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 2x$ là $\vec{i} + \vec{j}$.

**Lời giải.**

Điểm tại đó chiều biến thiên nhanh nhất của hàm số $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 2x$ là đạo hàm của $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 2x$ theo hướng $\overrightarrow{\text{grad}}f$ ,nên véctơ $\vec{i} + \vec{j} = \vec{a}(1,1)$ và $\overrightarrow{\text{grad}}f$ cùng chiều ở đó $\overrightarrow{\text{grad}}f = (2x-2, 4y)$.Tập hợp điểm $(2x-2, 4y)$ nằm trên đường thẳng có véc tơ chỉ phương $\vec{a}(1,1)$ có phương trình $x - 2y - 1 = 0$

**23)** Tìm gradient của f rồi tìm tốc độ biến thiên của nó tại điểm P theo hướng của véc tơ $\vec{\ell}$

a) $f(x,y,z)=\dfrac{z}{x+y}$ ; $P(1,1,4)$ ; $\vec{\ell}=(1,2,3)$.

**Lời giải.**

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,f=\left(-\frac{z}{(x+y)^2},-\frac{z}{(x+y)^2},\frac{1}{x+y}\right) \text{ và } \frac{\vec{\ell}}{|\vec{\ell}|}=\left(\frac{1}{\sqrt{14}},\frac{2}{\sqrt{14}},\frac{3}{\sqrt{14}}\right)$$

$$\frac{\partial f(P)}{\partial\vec{\ell}}=\left[-\frac{z}{(x+y)^2\sqrt{14}}-\frac{2z}{(x+y)^2\sqrt{14}}+\frac{3}{(x+y)\sqrt{14}}\right]_{(1,1,4)}=-\frac{3}{\sqrt{14}}+\frac{3}{2\sqrt{14}}=-\frac{3}{2\sqrt{14}}$$

b) $f(x,y)=xy^2-4x^3y$ ; $P(1,2)$ ; $\vec{\ell}=\left(\dfrac{-4}{5},\dfrac{3}{5}\right)$.

**Lời giải.**

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,f=\left(y^2-12x^2y,2xy-4x^3\right)$$

$$|\vec{\ell}|=1\Rightarrow\frac{\partial f(P)}{\partial\vec{\ell}}=\left[-\frac{4}{5}(y^2-12x^2y)+\frac{3}{5}(2xy-4x^3)\right]_{(1,2)}=16$$

c) $f(u,v)=u^3e^v$ ; $P(2,0)$ ; $\vec{\ell}=(-1,2)$.

**Lời giải.**

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,f=\left(3u^2e^v,u^3e^v\right);\frac{\vec{\ell}}{|\vec{\ell}|}=\left(-\frac{1}{\sqrt5},\frac{2}{\sqrt5}\right)$$

$$\Rightarrow\frac{\partial f(P)}{\partial\vec{\ell}}=\left[\frac{-3u^2e^v+2u^3e^v}{\sqrt5}\right]_{(2,0)}=\frac{4\sqrt5}{5}$$

d) $f(x,y,z)=x\sin yz$ ; $P(1,3,0)$ ; $\vec{\ell}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$.

**Lời giải.**

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,f=\left(\sin yz,xz\cos yz,xy\cos yz\right);\frac{\vec{\ell}}{|\vec{\ell}|}=\left(\frac{1}{\sqrt6},\frac{2}{\sqrt6},\frac{-1}{\sqrt6}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f(P)}{\partial \vec{\ell}} = \left[\frac{\sin yz + 2xz\cos yz - xy\cos yz}{\sqrt{6}}\right]_{(1,3,0)} = \frac{-3}{\sqrt{6}}$$

**24)** Một quả núi có dạng paraboloid elliptic $z = 1000 - ax^2 - by^2$, trong đó a và b là những hằng số dương. Tại điểm (1,2) độ cao của núi tăng lên nhanh nhất theo chiều nào? Một viên bi đặt ở điểm này, đầu tiên bi sẽ lăn theo chiều nào?

**Lời giải.**

Tại điểm (1,2) độ cao của núi tăng lên nhanh nhất theo chiều $\overrightarrow{\text{grad}}\, z(1,2)$

và $\overrightarrow{\text{grad}}\, z(1,2) = 2(-ax,-by)\big|_{(1,2)} = -2(a,2b)$ độ cao của núi tăng lên nhanh nhất theo chiều của vec tơ có tọa độ $\pm(a,2b)$.Một viên bi đặt ở điểm (1,2) , đầu tiên bi sẽ lăn theo chiều là chiều của vec tơ có tọa độ $\pm(a,2b)$.

**25)** Tìm véc tơ đơn vị vuông góc với mặt $\cos(xy) = e^z - 2$ tại $(\pi,1,0)$.

**Lời giải.**

$$\Rightarrow z = \ln\left(2+\cos(xy)\right) \Rightarrow z'_x = -\frac{y\sin(xy)}{2+\cos(xy)};\ z'_y = -\frac{x\sin(xy)}{2+\cos(xy)}$$

véc tơ đơn vị vuông góc với mặt $\cos(xy) = e^z - 2$ tại $(\pi,1,0)$ là

$$\vec{n} = \left(\frac{-z'_x}{\sqrt{1+{z'_y}^2+{z'_x}^2}}, \frac{-z'_y}{\sqrt{1+{z'_y}^2+{z'_x}^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+{z'_y}^2+{z'_x}^2}}\right) \Rightarrow \vec{n} = (0,0,1)$$

**26)** Giả sử một chất điểm xuyên vào mặt $z^2 = x^2 + y^2 + 1$ tại điểm $A(1,1,\sqrt{3})$ theo chiều vuông góc với mặt. Chất điểm sẽ cắt mặt phẳng Oxy tại điểm nào?

**Lời giải.**

Đó là bài toán tìm giao điểm của đường thẳng qua điểm $A(1,1,\sqrt{3})$ vuông góc với mặt có phương trình $F = z^2 - x^2 - y^2 - 1 = 0$ và mặt phẳng xOy$\Rightarrow$điểm $A(1,1,\sqrt{3})$

thuộc mặt cong,Véc tơ chỉ phương của đường thẳng

$\vec{n} = \left(F'_x, F'_y, F'_z\right)_{(1,1,\sqrt{3})} = (-2,-2,2\sqrt{3})$ đường thẳng qua điểm $A(1,1,\sqrt{3})$ có phương trình:

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 + t \\ z = \sqrt{3} + t\sqrt{3} \end{cases}$$

Cắt xOy tại điểm (2,2,0)

**27)** Tìm phương trình mặt phẳng tiếp xúc với đồ thị của hàm số

a) $z(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{xy}$ tại điểm $P\left(2,1,\dfrac{5}{2}\right)$

**Lời giải.**

Khi đó vec tơ pháp tuyến đơn vị tại $P\left(2,1,\dfrac{5}{2}\right)$ của mặt cong $z(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{xy}$ được xác định

$$\vec{n} = \left(\frac{-z'_x}{\sqrt{1+z'^2_y+z'^2_x}}, \frac{-z'_y}{\sqrt{1+z'^2_y+z'^2_x}}, \frac{1}{\sqrt{1+z'^2_y+z'^2_x}}\right)_P = \left(\frac{-3}{\sqrt{61}}, \frac{6}{\sqrt{61}}, \frac{4}{\sqrt{61}}\right)$$

Vậy phương trình mặt phẳng

$$-3(x-2)+6(y-1)+4\left(z-\frac{5}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow 3x-6y-4z+10 = 0$$

b) $f(x,y) = x^2+3y^2$ tại điểm $P(2,3,31)$

**Lời giải.**

Tương tự

$$\vec{n} = \left(\frac{-z'_x}{\sqrt{1+z'^2_y+z'^2_x}}, \frac{-z'_y}{\sqrt{1+z'^2_y+z'^2_x}}, \frac{1}{\sqrt{1+z'^2_y+z'^2_x}}\right)_P \sim (4,18,-1)$$

phương trình mặt phẳng $4(x-2)+18(y-3)-(z-31)=0 \Leftrightarrow 4x+18y-z-31=0$

**28)** Tìm phương trình tiếp diện và pháp tuyến với mặt đã cho tại điểm chỉ ra

a) $x^2+2y^2+3z^2=21$ tại $P(4,1,-1)$

**Lời giải.**

pháp tuyến với mặt đã cho tại điểm

$P(4,1,-1): \vec{n}=\left(F'_x, F'_y, F'_z\right)_{(4,1,-1)}=(8,4,-6)\sim(4,2,-3)$

phương trình đường thẳng pháp tuyến $\dfrac{x-4}{4}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+1}{-3}$

phương trình tiếp diện $4(x-4)+2(y-1)-3(z+1)=0 \Leftrightarrow 4x+2y-3z-21=0$

b) $x=y^2+z^2-4$ tại $P(-3,1,0)$

**Lời giải.**

pháp tuyến với mặt đã cho tại điểm $P(-3,1,0)\Rightarrow \vec{n}=\left(F'_x, F'_y, F'_z\right)_{(4,1,-1)}=(-1,2,0)$

phương trình đường thẳng pháp tuyến $\begin{cases} x=-3-t \\ y=1+t \\ z=0 \end{cases}$

phương trình tiếp diện $-(x+3)+2(y-1)=0 \Leftrightarrow x-2y+5=0$

**29)** Dùng vi phân để tính xấp xỉ lượng thiếc trong một chiếc hộp mạ thiếc kín với đường kính 8 cm và chiều cao 12 cm nếu lớp mạ dày 0.01 cm.

**Lời giải.**

Thể tích của hộp có bán kính x và chiều cao y là $F=\pi x^2 y$, lượng thiếc mạ dày 0.01 cm xấp xỉ

$F(x_0+0.01, y_0+0.01)-F(x_0,y_0)\approx 0.01F'_x(x_0,y_0)+0.01F'_y(x_0,y_0)=1,12\pi$

**30)** Dùng xấp xỉ tuyến tính để tính $z(-0,95,0,02)$ trong đó $z=z(x,y)$ là hàm ẩn từ phương trình $xe^y+yz+e^z=0$

.......................................................................................

**Lời giải.**

Chọn $(x_0, y_0) = (-1,0); \Delta x = 0,05;\ \Delta y = 0,02\ \Rightarrow z(-1,0) = 0$

$z(-0,95,0,02) \approx z(x_0, y_0) + z'_x(x_0, y_0)\Delta x + z'_y(x_0, y_0)\Delta y$

ở đó $z'_x = -\dfrac{e^y}{z+e^z}$; $z'_y = -\dfrac{xe^y + z}{z+e^z} \Rightarrow z(-0,95,0,02) \approx -0,05 + 0,02 = -0,03$

**31)** Dùng xấp xỉ tuyến tính để tìm giá trị gần đúng của biểu thức,so sánh với giá trị tính bằng máy tính bỏ túi.

a) $(1,01)^2\left(\sqrt{1,98} - 1\right)$;

**Lời giải.**

Xét hàm $z(x, y) = x^2(\sqrt{y} - 1)$ chọn $(x_0, y_0) = (1,2); \Delta x = 0,01; \Delta y = -0,02$

$(1,01)^2\left(\sqrt{1,98} - 1\right) \cong z(x_0, y_0) + z'_x(x_0, y_0)\Delta x + z'_y(x_0, y_0)\Delta y$

$$= (\sqrt{2} - 1) + 0,02(\sqrt{2} - 1) - \frac{0,02}{2\sqrt{2}} = 1,02 \times 0,414 - \frac{0,01}{1,414}$$

b) $\tan\left(\dfrac{\pi + 0,01}{3,98}\right)$;

**Lời giải.**

Xét hàm $z(x, y) = \tan\left(\dfrac{\pi + x}{y}\right)$ chọn $(x_0, y_0) = (0,4); \Delta x = 0,01; \Delta y = -0,02$

$$\tan\left(\frac{\pi + 0,01}{3,98}\right) \cong \tan\frac{\pi}{4} + \left.\frac{1}{y\cos^2\dfrac{x+\pi}{y}}\right|_{(0,4)} \times 0,01 + \left.\frac{x+\pi}{y^2\cos^2\dfrac{x+\pi}{y}}\right|_{(0,4)} \times 0,02$$

$$= 1 + \frac{0,01}{2} + \frac{0,02\pi}{8} = 1,005 + 0,0025\pi$$

c) $\sqrt{(4,02)^2 + (3,99)^2 + (2,02)^2}$

........................................................................................................

**Lời giải.**

Xét hàm $u(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

chọn $(x_0,y_0,z_0)=(4,4,2);\Delta x=0,02;\Delta y=-0,01;\Delta z=0,02$

$$\sqrt{(4,02)^2+(3,99)^2+(2,02)^2}\approx\sqrt{36}+\frac{0,08-0,04+0,04}{6}=6+\frac{0,04}{3}$$

d) $\sqrt{(1,02)^2+(1,97)^3}$ ;

**Lời giải .**

Xét hàm $u(x,y)=\sqrt{x^2+y^3}$ chọn $(x_0,y_0)=(1,2);\Delta x=0,02;\Delta y=-0,03$

$$\sqrt{(1,02)^2+(1,97)^3}\approx 3+\frac{0,02}{3}-\frac{12\times 0,03}{6}=3-\frac{0,016}{3}$$

f) $\sqrt{5e^{0,06}+(2,03)^2}$

**Lời giải.**

Xét hàm $u(x,y)=\sqrt{5e^x+y^2}$ chọn $(x_0,y_0)=(0,2);\Delta x=0,06;\Delta y=0,03$

$$\sqrt{5e^{0,06}+(2,03)^2}\approx 3+\frac{0,3}{6}+\frac{0,06}{3}=3,07$$

g) $\sqrt{(1,02)^2+3e^{0,04}}$ .

**Lời giải.**

Xét hàm $u(x,y)=\sqrt{x^2+3e^y}$ chọn $(x_0,y_0)=(1,0);\Delta x=0,02;\Delta y=0,04$

$$\sqrt{(1,02)^2+3e^{0,04}}\approx 2+0,01+0,03=2,04$$

**32)** Tìm và phân lớp các điểm tới hạn của các hàm số sau:

a) $z=x^2-8xy-2y^2$

**Lời giải.**

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 8y = 0 \\ -8x - 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (0,0)$$

và $A = z''_{xx} = 2; C = z''_{yy} = -4; B = z''_{xy} = -8 \quad AC - B^2 = -72 < 0$

$\Rightarrow$ hàm không đạt cực trị.

b) $z = x\sin(\pi y)$

**Lời giải.**

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(\pi y) = 0 \\ \pi x\cos(\pi y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad (0,k) \quad k \in \mathbb{Z}$$

và $A = z''_{xx} = 0; C = z''_{yy} = 0; B = z''_{xy} = \pi(-1)^k; \quad AC - B^2 = -\pi^2 < 0$

$\Rightarrow$ hàm không đạt cực trị.

c) $z = 7 - 2x + 4y - x^2 - 4y^2$

**Lời giải.**

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x - 2 = 0 \\ 4 - 8y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left(-1, \frac{1}{2}\right)$$

và $A = z''_{xx} = -2; C = z''_{yy} = -8; B = z''_{xy} = 0 \quad AC - B^2 = 16 > 0 \Rightarrow z_{CT} = 0$.

d) $z = (1 + xy)(x + y)$

**Lời giải.**

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy + y^2 + 1 = 0 \\ 2xy + x^2 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (-1,1) \text{ hoặc } (1,-1)$$

và $A = z''_{xx} = 2x; C = z''_{yy} = 2y; B = z''_{xy} = 2x + 2y$

tại $(-1,1)$ và $(1,-1)$ thì $AC - B^2 = -4 < 0$ hàm không đạt cực trị.

e) $z = xy^3 - 8x + 12y^2$

**Lời giải.**

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^3 - 8 = 0 \\ 3xy^2 + 24y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (-4, 2)$$

$A = z''_{xx} = 0; C = z''_{yy} = 6xy + 24; B = z''_{xy} = 3y^2 \Rightarrow AC - B^2 = -144 < 0$

Do A = 0 nên chưa kết luận được,xong $d^2z(-4,2) = 24(k-h)h$ đổi dấu khi h, k thay đổi .trong đó : $\Delta x = k; \Delta y = h \Rightarrow$ hàm không đạt cực trị.

f) $z = e^{4x - x^2 - y^2}$

**Lời giải.**

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (4-2x)e^{4x-x^2-y^2} = 0 \\ -2ye^{4x-x^2-y^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (2,0)$$

$A = z''_{xx} = -2e^4; C = z''_{yy} = -2e^4; B = z''_{xy} = 0 \Rightarrow AC - B^2 = 4e^8 > 0$

$\Rightarrow$ hàm số đạt cực đại

g) $z = xy(x + y - 1)$

**Lời giải.**

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy + y^2 - y = 0 \\ 2xy + x^2 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (0,0);\ (1,0);\ (0,1);\ \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$A = z''_{xx} = 2y; C = z''_{yy} = 2x; B = z''_{xy} = 2x + 2y - 1$

Tại $(0,0);\ (0,1);\ (1,0);$ có $AC - B^2 = -1 < 0$

Tại $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ có $AC - B^2 = \frac{1}{3} > 0 \Rightarrow$ hàm số đạt cực tiểu

h) $z = (x^2 + y^2)e^{x^2 - y^2}$

**Lời giải.**

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x + 2x^3 + 2xy^2)e^{x^2-y^2} = 0 \\ (2y - 2x^2y - 2y^3)e^{x^2-y^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (0,0) \text{ hoặc } (0, \pm 1)$$

........................................................................................................

Tại $(0,0)$ $A = z''_{xx} = 2; C = z''_{yy} = 2; B = z''_{xy} = 0 \Rightarrow AC - B^2 = 4 > 0$

$\Rightarrow$ hàm số đạt cực tiểu

Tại $(0,\pm 1)$ có $A = z''_{xx} = 4e^{-1}; C = z''_{yy} = -4e^{-1}; B = z''_{xy} = 0 \Rightarrow AC - B^2 < 0$

$\Rightarrow$ hàm không đạt cực trị.

i) $z = 3x^2y - x^3 - y^4$

**Lời giải.**

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6xy - 3x^2 = 0 \\ 3x^2 - 4y^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad (0,0)\ ;\ (6,3)$$

Tại $(0,0)$ $A = z''_{xx} = 0; C = z''_{yy} = 0; B = z''_{xy} = 0 \Rightarrow AC - B^2 = 0$.Do $A = 0$ nên

chưa kết luận được,mặt khác $z''_{xx} = 6y - 6x; z''_{xy} = 6x;\ z''_{yy} = -12y^2 \Rightarrow d^2z(0,0) = 0$,

nhưng

$z'''_{x^3} = -6; z'''_{x^2y} = 6; z'''_{xy^2} = 0; z'''_{y^3} = -24y \Rightarrow d^3z(0,0) = -6h^3 + 18h^2k = -6h^2(h - 3k)$

đổi dấu khi h, k thay đổi .Trong đó : $\Delta x = h; \Delta y = k \Rightarrow$ hàm không đạt cực trị.

Tại $(6,3)$ $A = z''_{xx} = -18; C = z''_{yy} = -108; B = z''_{xy} = 36 \Rightarrow AC - B^2 > 0$

$\Rightarrow$ hàm đạt cực đại.

j) $z = e^{-x}(3y - y^3 - x)$

**Lời giải.**

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\left[1 + (3y - y^3 - x)\right]e^{-x} = 0 \\ (3 - 3y^2)e^{-x} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (3,1)\ ;\ (-1,-1)$$

Tại $(3,1)$ $A = z''_{xx} = e^{-3}; C = z''_{yy} = -6e^{-3}; B = z''_{xy} = 0 \Rightarrow AC - B^2 < 0$

$\Rightarrow$ hàm không đạt cực trị.

Tại $(-1,-1)$; $A = z''_{xx} = e; C = z''_{yy} = 6e; B = z''_{xy} = 0 \Rightarrow AC - B^2 > 0$

$\Rightarrow$ hàm số đạt cực tiểu

k) $z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$

**Lời giải.**

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x^2 - y^2 + 10x = 0 \\ 2y - 2xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (0,0);\ \left(-\frac{5}{3},0\right); (1,\pm 4)$$

Tại $(0,0)$ $A = z''_{xx} = 10; C = z''_{yy} = 2; B = z''_{xy} = 0 \Rightarrow AC - B^2 > 0$

$\Rightarrow$ hàm số đạt cực tiểu

Tại $\left(-\frac{5}{3},0\right)$ $A = z''_{xx} = -10; C = z''_{yy} = 2; B = z''_{xy} = 0 \Rightarrow AC - B^2 < 0$

$\Rightarrow$ hàm không đạt cực trị.

Tại $(1,4)$ $A = z''_{xx} = 22; C = z''_{yy} = -2; B = z''_{xy} = -8 \Rightarrow AC - B^2 < 0$

$\Rightarrow$ hàm số không đạt cực trị

Tại $(1,-4)$ $A = z''_{xx} = 22; C = z''_{yy} = 6; B = z''_{xy} = 8 \Rightarrow AC - B^2 < 0$

$\Rightarrow$ hàm số không đạt cực trị

l) $z = x^4 - 4x^2y + 5y^2 - 4y$.

**Lời giải.**

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 - 8xy = 0 \\ 10y - 4x^2 - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left(0,\frac{2}{5}\right); (\pm 2, 2)$$

Tại $\left(0,\frac{2}{5}\right)$ $A = z''_{xx} = -\frac{16}{5}; C = z''_{yy} = 10; B = z''_{xy} = 0 \Rightarrow AC - B^2 < 0$

$\Rightarrow$ hàm không đạt cực trị.

Tại $(\pm 2, 2)$ $A = z''_{xx} = 32; C = z''_{yy} = 10; B = z''_{xy} = \pm 16 \Rightarrow AC - B^2 > 0$

$\Rightarrow$ hàm số đạt cực tiểu

**33)** Điểm tới hạn nào là cực đại, cực tiểu địa phương hay không phải là cực trị?

a) $f(x,y) = x^2 - y^2$;

**Lời giải.**

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ -2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (0,0)$$

$A = z''_{xx} = 2; C = z''_{yy} = -2; B = z''_{xy} = 0 \Rightarrow AC - B^2 < 0$

$\Rightarrow$ hàm không đạt cực trị.

b) $f(x,y) = e^{-x^2 - 4y^2 + 2}$ ;

**Lời giải.**

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2xe^{-x^2 - 4y^2 + 2} = 0 \\ -8ye^{-x^2 - 4y^2 + 2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (0,0)$$

$A = z''_{xx} = -2e^2; C = z''_{yy} = -8e^2; B = z''_{xy} = 0 \Rightarrow AC - B^2 > 0 \Rightarrow$ hàm đạt cực đại.

c) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 4x + 6y + 10$;

**Lời giải.**

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 4 = 0 \\ 2y + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (2,-3)$$

$A = z''_{xx} = 2; C = z''_{yy} = 2; B = z''_{xy} = 0 \Rightarrow AC - B^2 > 0 \Rightarrow$ hàm số đạt cực tiểu

d) $f(x,y) = \ln(2x^2 + y^2 + 1)$;

**Lời giải.**

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{4x}{2x^2 + y^2 + 1} = 0 \\ \dfrac{2y}{2x^2 + y^2 + 1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (0,0)$$

$A = z''_{xx} = 4; C = z''_{yy} = 2; B = z''_{xy} = 0 \Rightarrow AC - B^2 > 0 \Rightarrow$ hàm số đạt cực tiểu

e) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x+y)^2$;

**Lời giải.**

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 - 4(x+y) = 0 \\ 4y^3 - 4(x+y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (0,0); (\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2})$$

Tại $(0,0)$ $A = z''_{xx} = -4; C = z''_{yy} = -4; B = z''_{xy} = -4 \Rightarrow AC - B^2 = 0$,

$\Rightarrow$ nên chưa kết luận được,

mặt khác $z''_{xx} = 12x^2 - 4; z''_{xy} = -4;\ z''_{yy} = 12y^2 - 4 \Rightarrow d^2z(0,0) = -4(h-k)^2 \le 0$

$\Rightarrow (0,0)$ là điểm yên ngựa.

Tại $(\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2})$ $A = z''_{xx} = 20; C = z''_{yy} = 20; B = z''_{xy} = -4 \Rightarrow AC - B^2 > 0$

$\Rightarrow$ hàm số đạt cực tiểu

f) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$;

**Lời giải.**

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \\ f'_z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2 = 0 \\ 2y + 4 = 0 \\ 2z - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (-1,-2,3) \Rightarrow f''_{xx} = f''_{yy} = f''_{zz} = 2; f''_{xy} = f''_{xz} = f''_{yz} = 0$$

Ta có: $d^2f = 2dx^2 + 2dy^2 + 2dz^2$ là dạng toàn phương xác định dương

$\Rightarrow$ hàm số đạt cực tiểu

g) $f(x,y) = \operatorname{arccotg} x^2 - y^2 + 2y$;

**Lời giải.**

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-2x}{1+x^4} = 0 \\ -2y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (0,1) \Rightarrow \begin{cases} z''_{xx} = \dfrac{-2 - 2x^4 + 8x^4}{\left(1+x^4\right)^2} \\ z''_{yy} = -2 \end{cases}$$

$A = z''_{xx} = -2; C = z''_{yy} = -2; B = z''_{xy} = 0 \Rightarrow AC - B^2 > 0 \Rightarrow$ hàm đạt cực đại.

h) $f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$;

**Lời giải.**

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 - 2x - 2y = 0 \\ 4y^3 - 2x - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (0,0);(\pm1,\pm1)$$

Tại $(0,0)$ $A = z''_{xx} = -2; C = z''_{yy} = -2; B = z''_{xy} = -2 \Rightarrow AC - B^2 = 0$, nên chưa kết luận được,mặt khác $z''_{xx} = 12x^2 - 2; z''_{xy} = -2;\ z''_{yy} = 12y^2 - 2$

$\Rightarrow d^2z(0,0) = -2(h-k)^2$

$\Rightarrow (0,0)$ là điểm yên ngựa.

Tại $(\pm1,\pm1)$ $A = z''_{xx} = 10; C = z''_{yy} = 10; B = z''_{xy} = -2 \Rightarrow AC - B^2 > 0$

$\Rightarrow$ hàm số đạt cực tiểu

i) $f(x,y) = x - y - \dfrac{1}{xy}$;

**Lời giải.**

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \dfrac{1}{yx^2} = 0 \\ -1 + \dfrac{1}{y^2x} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (1,-1)$$

$A = z''_{xx} = 2; C = z''_{yy} = 2; B = z''_{xy} = -1 \Rightarrow AC - B^2 > 0 \Rightarrow$ hàm số đạt cực tiểu

j) $f(x,y) = y^2 - (x-1)^2$;

**Lời giải.**

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2(x-1) = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (1,0)$$

$A = z''_{xx} = -2; C = z''_{yy} = 2; B = z''_{xy} = 0 \Rightarrow AC - B^2 < 0 \Rightarrow$ hàm không đạt cực trị.

k) $f(x,y) = x^4 - 2x^2y + y^2 - y^3$.

**Lời giải.**

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 - 4xy = 0 \\ -3y^2 - 2x^2 + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (0,0);\left(0,\frac{2}{3}\right)$$

Tại $(0,0)$ $A = z''_{xx} = 0; C = z''_{yy} = 2; B = z''_{xy} = 0 \Rightarrow AC - B^2 = 0$

nhưng $d^2z(0,0) = 2k^2 \Rightarrow (0,0)$ là điểm yên ngựa.

Tại $\left(0,\frac{2}{3}\right)$ $A = z''_{xx} = -\frac{8}{3}; C = z''_{yy} = -2; B = z''_{xy} = 0 \Rightarrow AC - B^2 > 0$

$\Rightarrow$ hàm đạt cực đại.

**34)** Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của các hàm

a) $f(x,y) = 4xy^2 - x^2y^2 - xy^3$ trong miền tam giác ABC

với $A(0,0); B(0,6); C(6,0)$.

**Lời giải.**

Cực trị địa phương của hàm trong miền tam giác ABC không kể biên:

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y^2 - 2xy^2 - y^3 = 0 \\ 8xy - 2x^2y - 3xy^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x,0);(0,4);(1,2)$$

chỉ có $(1,2)$ ở miền trong tam giác

Tại $(1,2)$ $A = f''_{xx} = -8; C = f''_{yy} = -6; B = f''_{xy} = -4 \Rightarrow AC - B^2 > 0 \Rightarrow$ hàm đạt

CĐ. $f(1,2) = 4$

Tìm cực trị của $f(x,y) = 4xy^2 - 4x^2y^2 - xy^3$ thỏa mãn $x + y = 6$

Do tại $y = 0; x = 0$ có $f(x,0) = f(0,y) = 0$

Lập hàm Lagrange: $g(x,y,\alpha) = 4xy^2 - 4x^2y^2 - xy^3 + \alpha(x + y - 6)$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} 4y^2 - 2xy^2 - y^3 + \alpha = 0 \\ 8xy - 2x^2y - 3xy^2 + \alpha = 0 \\ x + y = 6 \end{cases}$$

$\Rightarrow 8x - 2x^2 - 3xy = 4y - 2xy - y^2 \Rightarrow x = 2; y = 4 \Rightarrow f\left(2,4\right) = -64$

Vậy: $\max f\left(1,2\right) = 4$ ; $\min f\left(2,4\right) = -64$

b) $f(x,y) = (2x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$ trong miền $D = \left\{(x,y) : x^2 + y^2 \le 4\right\}$

**Lời giải.**

Cực trị địa phương của hàm trong miền $D = \left\{(x,y) : x^2 + y^2 < 25\right\}$

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[4x - 4x^3 - 2xy^2\right]e^{-(x^2+y^2)} = 0 \\ \left[2y - 2y^3 - 2yx^2\right]e^{-(x^2+y^2)} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (0,0); (\pm1,0); (0,\pm1); x^2 + y^2 = 1$$

Tại $(0,0)$ $A = f''_{xx} = 2; C = f''_{yy} = 2; B = f''_{xy} = 0 \Rightarrow AC - B^2 > 0$ và $f(0,0) = 0$

Còn $f(\pm1,0) = f(0,\pm1) = 2e^{-1} = f(x,y)$ với $x^2 + y^2 = 1$

Lập hàm Lagrange $g(x,y,\alpha) = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)} + \alpha(x^2 + y^2 - 25)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left[2x - 4x^3 - 2xy^2\right]e^{-(x^2+y^2)} + 2\alpha x = 0 \\ \left[2y - 2y^3 - 2yx^2\right]e^{-(x^2+y^2)} + 2\alpha y = 0 \Leftrightarrow (\pm5,0); (0,\pm5); \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

$\Rightarrow f(\pm5,0) = f(0,\pm5) = 25e^{-25} \Rightarrow \max f(x,y) = 2e^{-1}; \min f(x,y) = 0$

c) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 12x + 16y$ trong miền $D = \left\{(x,y) : x^2 + y^2 \le 25\right\}$

**Lời giải.**

Cực trị địa phương của hàm trong miền $\left\{(x,y) : x^2 + y^2 < 25\right\}$

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 12 = 0 \\ 2y + 16 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (6,-8) \notin \left\{(x,y): x^2 + y^2 < 25\right\}$$

Lập hàm Lagrange $g(x,y,\alpha) = x^2 + y^2 - 12x + 16y + \alpha(x^2 + y^2 - 25)$

và $$\begin{cases} 2x - 12 + 2x\alpha = 0 \\ 2y + 16 + 2y\alpha = 0 \Leftrightarrow (3,-4)\,;(-3,4) \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

$f(3,-4) = -75$ ; $f(-3,4) = 121 \Rightarrow$ min f = - 75 và max f = 125

d) $f(x,y) = x^2y + xy^2 - 3xy$ trong miền $D = \left\{(x,y): 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 2\right\}$

**Lời giải.**

Cực trị địa phương của hàm trong miền $\left\{(x,y): 0 < x < 2, 0 < y < 2\right\}$

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy + y^2 - 3y = 0 \\ 2xy + x^2 - 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (1,1)\,;(0,3)\,;(3,0)\,;(0,0)$$

chỉ có $(1,1) \in \left\{(x,y): 0 < x < 2, 0 < y < 2\right\}$

Tại $(1,1)$ $A = f''_{xx} = 2; C = f''_{yy} = 2; B = f''_{xy} = 1 \Rightarrow AC - B^2 > 0 \Rightarrow$ CT và $f(1,1) = -1$

do $f(x,0) = f(0,y) = 0$ nên chỉ xét với các điều kiện $y = 2; x = 2$

Lập hàm Lagrange $g(x,y,\alpha) = x^2y + xy^2 - 3xy + \alpha(x-2)$ và

$$\begin{cases} 2xy + y^2 - 3y + \alpha = 0 \\ 2xy + x^2 - 3x + \alpha = 0 \Leftrightarrow (2,1)\,;(2,2) \text{ và } f(2,1) = 0\,; f(2,2) = 4 \\ x = 2 \end{cases}$$

Lập hàm Lagrange $g(x,y,\alpha) = x^2y + xy^2 - 3xy + \alpha(y-2)$ và

$$\begin{cases} 2xy + y^2 - 3y + \varepsilon = 0 \\ 2xy + x^2 - 3x + \alpha = 0 \Leftrightarrow (1,2)\,;(2,2) \text{ và } f(1,2) = 0\,; f(2,2) = 4 \\ y = 2 \end{cases}$$

$\Rightarrow \max f = 4$ và $\min f = -1$

e) $f(x,y) = x^2 + y^2 - x - 2y$ trong miền

$D = \{(x,y) : x \ge 0, y \ge 0, x + y \le 2\}$

**Lời giải.**

Cực trị địa phương của hàm trong miền $\{(x,y) : x > 0, y > 0, x + y < 2\}$

$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 0 \\ 2y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ và $\left(\frac{1}{2}, 1\right) \in \{(x,y) : x > 0, y > 0, x + y < 2\}$

Tại $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ $A = f''_{xx} = 2; C = f''_{yy} = 2; B = f''_{xy} = 0 \Rightarrow AC - B^2 > 0$

$\Rightarrow$ CT và $f\left(\frac{1}{2}, 1\right) = -\frac{5}{4}$

+) Lập hàm Lagrange $g(x,y,\alpha) = x^2 + y^2 - x - 2y + \alpha x$ và

$\begin{cases} 2x - 1 + \alpha = 0 \\ 2y - 2 + \alpha = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left(0, \frac{1}{2}\right)$ và $f\left(0, \frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4}$

+) xét $g(x,y) = x^2 + y^2 - x - 2y + \alpha y$ và

$\begin{cases} 2x - 1 + \alpha = 0 \\ 2y - 2 + \alpha = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ không thuộc đoạn $[0,2]$ trên Ox

+) Lập hàm Lagrange $g(x,y,\alpha) = x^2 + y^2 - x - 2y + \alpha(x + y - 2)$ và

$\begin{cases} 2x - 1 + \alpha = 0 \\ 2y - 2 + \alpha = 0 \\ x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right)$ và $f\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right) = -\frac{9}{8}$

$\Rightarrow \max f\left(0, \frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4}$ và $\min f\left(\frac{1}{2}, 1\right) = -\frac{5}{4}$

f) $f(x,y) = 9x^2 - 4y^2$ trong miền $D = \left\{(x,y): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \le 1\right\}$.

**Lời giải.**

Cực trị địa phương của hàm trong miền $\left\{(x,y): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} < 1\right\}$

$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 18x = 0 \\ -8y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (0,0)$ nhưng $A = f''_{xx} = 18; C = f''_{yy} = -8; B = f''_{xy} = 0$

$\Rightarrow AC - B^2 < 0 \Rightarrow$ Tại $(0,0)$ hàm không đạt cực trị.

+) Lập hàm Lagrange $g(x,y,\alpha) = 9x^2 - 4y^2 + \alpha\left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1\right)$ và

$$\begin{cases} 18x + \dfrac{\alpha x}{2} = 0 \\ -8y + \dfrac{2\alpha y}{9} = 0 \\ \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow (0,\pm 3); (\pm 2,0) \text{ và } f(0,\pm 3) = -36; f(\pm 2,0) = 36$$

$\Rightarrow \max f(\pm 2,0) = 36$ và $\min f(0,\pm 3) = -36$

**35)** Tìm GTLN, GTNN của những hàm

a) $f(x,y) = 2x^2 + 3y^2$ trong miền $D = \{(x,y): x^2 + y^2 \le 1\}$.

**Lời giải.**

Cực trị địa phương của hàm trong miền $\{(x,y): x^2 + y^2 < 1\}$

$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 0 \\ 6y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (0,0) \Rightarrow A = f''_{xx} = 4; C = f''_{yy} = 6; B = f''_{xy} = 0 \Rightarrow AC - B^2 > 0$

$\Rightarrow$ tại $(0,0)$ hàm đạt cực tiểu và $f(0,0) = 0$

+) Lập hàm Lagrange $g(x,y,\alpha) = 2x^2 + 3y^2 + \alpha(x^2 + y^2 - 1)$

$$\begin{cases} 4x + 2\alpha x = 0 \\ 6y + 2\alpha y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow (0,\pm 1);(\pm 1,0) \text{ và } f(0,\pm 1) = 3;f(\pm 1,0) = 2$$

$\Rightarrow \max f(0,\pm 1) = 3$; $\min f(0,0) = 0$

b) $f(x,y) = 2x^2 - 5y^2 + 1$ trong miền $D = \left\{(x,y): x^2 + y^2 \le 1\right\}$.

**Lời giải.**

Cực trị địa phương của hàm trong miền $\left\{(x,y): x^2 + y^2 < 1\right\}$

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 0 \\ -10y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (0,0) \Rightarrow A = f''_{xx} = 4; C = f''_{yy} = -10; B = f''_{xy} = 0$$

$\Rightarrow AC - B^2 < 0$ và hàm không đạt cực trị tại $(0,0)$

+) Lập hàm Lagrange $g(x,y,\alpha) = 2x^2 - 5y^2 + 1 + \alpha(x^2 + y^2 - 1)$

$$\begin{cases} 4x + 2\alpha x = 0 \\ -10y + 2\alpha y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow (0,\pm 1);(\pm 1,0) \text{ và } f(0,\pm 1) = -4;f(\pm 1,0) = 3$$

$\Rightarrow \max f(\pm 1,0) = 3$ và $\min f(0,\pm 1) = -4$

c) $f(x,y) = x - 3xy + 4$ trong miền $D = \left\{(x,y): x^2 + y^2 \le 1\right\}$.

**Lời giải.**

Cực trị địa phương của hàm trong miền $\left\{(x,y): x^2 + y^2 < 1\right\}$

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 3y = 0 \\ -3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left(0,\frac{1}{3}\right) \Rightarrow A = f''_{xx} = 0; C = f''_{yy} = 0; B = f''_{xy} = -3$$

$\Rightarrow AC - B^2 < 0$ và hàm không đạt cực trị $\left(0,\frac{1}{3}\right)$

+) Lập hàm Lagrange $g(x,y,\alpha) = x - 3xy + 4 + \alpha(x^2 + y^2 - 1)$

$$\begin{cases} 1-3y+2\alpha x=0 \ (1) \\ -3x+2\alpha y=0 \quad (2) \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

Từ $(1),(2): 3y^2-y=3x^2 \Rightarrow 6y^2-y-3=0 \Rightarrow y=\dfrac{1\pm\sqrt{73}}{12}; x=\pm\dfrac{\sqrt{70\mp2\sqrt{73}}}{12}$

ta phải so sánh các giá trị sau để xác định GTLN,GTNN

$$f\left(\frac{\sqrt{70-2\sqrt{73}}}{12},\frac{1+\sqrt{73}}{12}\right); \qquad f\left(-\frac{\sqrt{70-2\sqrt{73}}}{12},\frac{1+\sqrt{73}}{12}\right)$$

$$f\left(-\frac{\sqrt{70+2\sqrt{73}}}{12},\frac{1-\sqrt{73}}{12}\right); \qquad f\left(\frac{\sqrt{70+2\sqrt{73}}}{12},\frac{1+\sqrt{73}}{12}\right)$$

**36)** Tìm cực trị có điều kiện của các hàm số

a) $f(x,y)=2x+3y$ với điều kiện $3x^2+2y^2\le 3$;

**Lời giải.**

Do hàm không đạt cực trị địa phương trong $3x^2+2y^2<3$ nên ta xét cực trị của $f(x,y)=2x+3y$ với điều kiện $3x^2+2y^2=3$

+) Lập hàm Lagrange $g(x,y,\lambda)=2x+3y+\lambda(3x^2+2y^2-3)$

$$\begin{cases} 2+6\lambda x=0 \\ 3+4\lambda y=0 \\ 3x^2+2y^2=3 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda=\pm\frac{\sqrt{70}}{12} \Rightarrow \left(-\frac{4}{\sqrt{70}},-\frac{9}{\sqrt{70}}\right);\left(\frac{4}{\sqrt{70}},\frac{9}{\sqrt{70}}\right)$$

$$\Rightarrow \min f(x)=f\left(-\frac{4}{\sqrt{70}},-\frac{9}{\sqrt{70}}\right)=-\frac{35}{\sqrt{70}}; \max f=f\left(\frac{4}{\sqrt{70}},\frac{9}{\sqrt{70}}\right)=\frac{35}{\sqrt{70}}$$

b) $f(x,y)=x-y$ với điều kiện $-x^2+y^2+2=0$;

**Lời giải.**

Lập hàm Lagrange $g(x,y,\lambda)=x-y+\lambda(-x^2+y^2+2)$

$$\begin{cases} 1-2\lambda x=0 \\ -1+2\lambda y=0 \\ -x^2+y^2+2=0 \end{cases}$$

Hệ vô nghiệm nên không có cực trị của $f(x,y)=x-y$ với điều kiện

$-x^2+y^2+2=0$.

c) $f(x,y)=xy$ với điều kiện $3x+2y\le 10, x\ge 0, y\ge 0$;

**Lời giải**.

Do điểm nghi ngờ $(0,0)\notin\{3x+2y<10, x>0, y>0\}$ nên không có cực trị địa phương của hàm trong miền tam giác $\{3x+2y<10, x>0, y>0\}$

Ta xét cực trị của $f(x,y)=xy$ với các điều kiện $3x+2y=10$ ; $x=0$ và $y=0$

+) Lập hàm Lagrange $g(x,y,\lambda)=xy+\lambda(3x+2y-10)$

$$\begin{cases} y+3\lambda=0 \\ x+2\lambda=0 \\ 3x+2y=10 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\frac{5}{3},\frac{5}{2}\right) \text{ thỏa mãn } x\ge 0, y\ge 0 \Rightarrow f\left(\frac{5}{3},\frac{5}{2}\right)=\frac{25}{6}$$

+) Lập hàm Lagrange $g(x,y,\lambda)=xy+\lambda x$

$$\begin{cases} y+\lambda=0 \\ x+\lambda=0 \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow (0,0)\Rightarrow f(0,0)=0$$

+) Lập hàm Lagrange $g(x,y,\lambda)=xy+\lambda y$

$$\begin{cases} y+\lambda=0 \\ x+\lambda=0 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow (0,0)\Rightarrow f(0,0)=0$$

$\Rightarrow \min f=f(0,0)=0$ và $\max f=f\left(\frac{5}{3},\frac{5}{2}\right)=\frac{25}{6}$

d) $f(x,y)=(x-4)^2+y^2$ với điều kiện $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}\le 1$;

**Lời giải.**

Cực trị địa phương của hàm trong miền $\left\{(x,y):\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}<1\right\}$

$$\begin{cases} f'_x=0 \\ f'_y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x-4)=0 \\ 2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow (4,0) \Rightarrow (4,0)\notin \left\{(x,y):\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}<1\right\}$$

+) Lập hàm Lagrange $g(x,y,\lambda)=(x-4)^2+y^2+\lambda\left(\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}-1\right)$

$$\begin{cases} 2(x-4)+\dfrac{2\lambda x}{9}=0 \\ 2y+\dfrac{\lambda y}{2}=0 \\ \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1 \end{cases} \Leftrightarrow (\pm 3,0) \Rightarrow f(3,0)=1;\, f(-3,0)=49$$

$\Rightarrow \min f=f(3,0)=1;\ \max f=f(-3,0)=49$

**37)** Tìm cực trị có điều kiện của các hàm số

a) $f(x,y)=xy^2$ với điều kiện $2x^2+y^2=6$;

**Lời giải**

+) Lập hàm Lagrange $g(x,y,\lambda)=xy^2+\lambda(2x^2+y^2-6)$

$$\begin{cases} y^2+4\lambda x=0 \\ 2xy+2\lambda y=0 \\ 2x^2+y^2=6 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda=\pm 1;\,(1,\pm 2);\,(-1,\pm 2);\,(\pm\sqrt{3},0)$$

$f(1,\pm 2)=4;\ f(-1,\pm 2)=-4;\ f(\pm\sqrt{3},0)=0 \Rightarrow \max f=f(1,\pm 2)=4$;

$\min f=f(-1,\pm 2)=-4$.

b) $f(x,y,z)=x^2y^2z^2-2$ với điều kiện $x^2+y^2+z^2=1$;

…………………………………………………………………………………………

**Lời giải.**

+) Lập hàm Lagrange $g(x,y,z,\lambda) = x^2y^2z^2 - 2 + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$

$$\begin{cases} 2xy^2z^2 + 2\lambda x = 0 \\ 2x^2yz^2 + 2\lambda y = 0 \\ 2x^2y^2z + 2\lambda z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow M_1(0,0,\pm1)\,;M_2(0,\pm1,0)\,;M_3(0,\pm1,0)\,;$$

$$N_1\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right);N_2\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3}\right);P_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0\right);P_2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},0\right);$$

$$P_3\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right);P_4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},0,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right);P_5\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right);P_6\left(0,-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

ta có $f(P_k) = -2\,;f(M_k) = -2\,;f(N_k) = -\frac{53}{27} \Rightarrow \min f = -2\,;\max f = -\frac{53}{27}$

c) $f(x,y,z) = xyz$ với điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 = 3;$

**Lời giải.**

+) Lập hàm Lagrange $g(x,y,z,\lambda) = xyz + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 3)$

$$\begin{cases} yz + 2\lambda x = 0 \\ xz + 2\lambda y = 0 \\ xy + 2\lambda z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (y-z)(2\lambda - x) = 0 \\ (x-z)(2\lambda - y) = 0 \\ (y-x)(2\lambda - z) = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow (-1,-1,-1)\,;(1,1,-1)\,;(1,1,1)\,;(1,-1,1)\,;(-1,1,1)\,;(-1,-1,1)\,;(-1,1,-1)\,;(1,-1,-1)$

$\Rightarrow \min f = -1\,;\max f = 1$

d) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ với điều kiện $x^2 + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{4} = 1;$

**Lời giải.**

+) Lập hàm Lagrange $g(x,y,z,\lambda) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(x^2 + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{4} - 1)$

$$\begin{cases} x + \lambda x = 0 \\ 2y + \lambda y = 0 \\ 4z + \lambda z = 0 \\ x^2 + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{4} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow (0,0,\pm 2)\,;(0,\pm\sqrt{2},0)\,;(\pm 1,0,0)$$

ta có $f(0,0,\pm 2) = 4\,; f(0,\pm\sqrt{2},0) = 2\,; f(\pm 1,0,0) = 1 \Rightarrow \min f = 1\,; \max f = 4$

e) $f(x,y,z) = x + y^2 + z$ với điều kiện $y - x = 1, z - xy = 1$;

**Lời giải.**

+) Lập hàm Lagrange $g(x,y,z,\lambda,\beta) = x + y^2 + z + \lambda(y - x - 1) + \beta(z - xy - 1)$

$$\begin{cases} 1 - \lambda - \beta y = 0 \\ 2y + \lambda - \beta x = 0 \\ 1 + \beta = 0 \\ y - x = 1 \\ z - xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow (-1,0,1) \quad \Rightarrow f(-1,0,1) = 0$$

f) $f(x,y,z) = 2x + 2y - z$ với điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 = 9$;

**Lời giải.**

+) Lập hàm Lagrange $g(x,y,z,\lambda) = 2x + 2y - z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 9)$

$$\begin{cases} 2 + 2\lambda x = 0 \\ 2 + 2\lambda y = 0 \\ -1 + 2\lambda z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow \lambda = \pm\frac{1}{2} \Rightarrow (2,2,-1)\,;(-2,-2,1)$$

$\Rightarrow \max f = f(2,2,-1) = 9\,; \min f = f(-2,-2,1) = -9$

**38)** Tìm GTLN, GTNN có điều kiện của các hàm số

a) $f(x,y) = xy - x^2$ với điều kiện $x^2 + y^2 = 1$;

.............................................................................................................

**Lời giải**

+) Lập hàm Lagrange $g(x,y,\lambda) = xy - x^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$

$$\begin{cases} y - 2x + 2\lambda x = 0 \\ x + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 + 2xy - y^2 = 0 \Rightarrow x = \left(-1 \pm \sqrt{2}\right) y$$

$$\Rightarrow y^2 = \frac{2 \mp \sqrt{2}}{4}; x^2 = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{4} \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2 \pm \sqrt{2}}}{2}; y = \pm\frac{\sqrt{2 \mp \sqrt{2}}}{2}$$

$$\Rightarrow M_1\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}, \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right); M_2\left(-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}, -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow f(M_1) = -\frac{1-\sqrt{2}}{2} = f(M_2)$$

$$M_3\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}, \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right); M_4\left(-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}, -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)$$

$$N_1\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}, -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right); N_2\left(-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}, \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow f(M_3) = f(M_4) = -\frac{1}{2} = f(N_1) = f(N_2)$$

$$N_3\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}, -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right); N_4\left(-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}, \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow f(N_3) = f(N_4) = -\frac{1+\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \max f = \frac{\sqrt{2}-1}{2}; \min f = -\frac{1+\sqrt{2}}{2}$$

b) $f(x,y) = \cos(y^2 - x^2)$ với điều kiện $x^2 + y^2 = 1$;

**Lời giải.**

+) Lập hàm Lagrange $g(x,y,z,\lambda)=\cos(y^2-x^2)+\lambda(x^2+y^2-1)$

$$\begin{cases} 2x\sin(y^2-x^2)+2\lambda x=0 \\ -2y\sin(y^2-x^2)+2\lambda y=0 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow (0,\pm 1);(\pm 1,0);\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$f(0,\pm 1)=f(\pm 1,0)=\cos 1=\min f\ ;f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=1=\max f$$

c) $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ với điều kiện $x^4+y^4+z^4=1$;

**Lời giải.**

+) Lập hàm Lagrange $g(x,y,z,\lambda)=x^2+y^2+z^2+\lambda(x^4+y^4+z^4-1)$

$$\begin{cases} x+2\lambda x^3=0 \\ y+2\lambda y^3=0 \\ z+2\lambda z^3=0 \\ x^4+y^4+z^4=1 \end{cases} \Leftrightarrow M_1(\pm 1,0,0);M_2(0,\pm 1,0);M_3(0,0,\pm 1)$$

$$\Rightarrow f(M_k)=1\Rightarrow \min f=1$$

$$N_1\left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}},\frac{1}{\sqrt[4]{3}},\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right);N_2\left(-\frac{1}{\sqrt[4]{3}},-\frac{1}{\sqrt[4]{3}},-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)\Rightarrow f(N_k)=\sqrt{3}\Rightarrow \max f=\sqrt{3}$$

$$P_1\left(0,\pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}},\pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right);P_2\left(\pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}},0,\pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right);P_3\left(\pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}},\pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}},0\right)\Rightarrow f(P_k)=\sqrt{2}$$

d) $f(x,y,z)=xe^{y-z}$ với điều kiện $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}+z^2=36; xy+xz=1$;

**Lời giải**

+) Lập hàm Lagrange

$$g(x,y,z,\lambda,\beta)=xe^{y-z}+\lambda\left(\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}+z^2-36\right)+\beta(xy+xz-1);$$

$$\begin{cases} e^{y-z} + \dfrac{2\lambda x}{9} + \beta(y+z) = 0 \\ xe^{y-z} + \dfrac{2\lambda y}{4} + \beta x = 0 \\ -xe^{y-z} + 2\lambda z + \beta x = 0 \\ \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} + z^2 = 36 \\ xy + xz = 1 \end{cases}$$

e) $f(x,y,z) = x + y + z$ với điều kiện $x^2 - y^2 - z = 0,\ x^2 + z^2 = 4$;

**Lời giải**

+) Lập hàm Lagrange $g(x,y,z,\lambda,\beta) = x + y + z + \lambda(x^2 - y^2 - z) + \beta(x^2 + z^2 - 4)$;

$$\begin{cases} 1 + 2\lambda x + 2\beta x = 0 \\ 1 - 2\lambda y = 0 \\ 1 - \lambda + 2\beta z = 0 \\ x^2 - y^2 - z = 0 \\ x^2 + z^2 = 4 \end{cases}$$

**39)** Tìm thể tích của hình hộp chữ nhật lớn nhất trong số các hình hộp chữ nhật với các cạnh song song với các trục toạ độ và nội tiếp trong ellipsoid

$\dfrac{x^2}{4} + y^2 + \dfrac{z^2}{9} = 1$.

**Lời giải.**

Gọi $(x,y,z)$ là kích thước hình hộp chữ nhật.Để tìm thể tích của hình hộp chữ nhật lớn nhất nội tiếp trong ellipsoid $\dfrac{x^2}{4} + y^2 + \dfrac{z^2}{9} = 1$,ta đi tìm GTLN của

$f(x,y,z) = xyz$ thỏa mãn điều kiện $\dfrac{x^2}{4} + y^2 + \dfrac{z^2}{9} = 1$

Xét hàm số Lagrange $g(x,y,z,\lambda)=xyz+\lambda(\frac{x^2}{4}+y^2+\frac{z^2}{9}-1)$

ta có

$$\begin{cases} yz+\frac{\lambda x}{2}=0 \\ xz+2\lambda y=0 \\ xy+\frac{2\lambda z}{9}=0 \\ \frac{x^2}{4}+y^2+\frac{z^2}{9}=1 \end{cases} \Leftrightarrow x^2=4y^2; z^2=9y^2 \Rightarrow \left(\pm\frac{2}{\sqrt{3}},\pm\frac{1}{\sqrt{3}},\sqrt{3}\right) \Rightarrow \max f=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

**40)** Tìm (các) điểm trên đường cong $x^6+y^6=64$ gần nhất và xa nhất với gốc toạ độ.

**Lời giải.**

Gọi $M(x,y)$ là điểm trên đường cong ,bài toán đi tìm GTLN,GTNN của

$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ thỏa mãn $x^6+y^6=64$

Xét hàm số Lagrange $g(x,y,\lambda)=\sqrt{x^2+y^2}+\lambda(x^6+y^6-64)$

$$\begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+6\lambda x^5=0 \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+6\lambda y^5=0 \\ x^6+y^6=64 \end{cases} \Leftrightarrow (0,\pm 2);(\pm 2,0);\left(\pm\sqrt[6]{32},\pm\sqrt[6]{32}\right)$$

Có $f(0,\pm 2)=f(\pm 2,0)=2$

$\Rightarrow (0,\pm 2);(\pm 2,0)$ điểm trên đường cong $x^6+y^6=64$ gần nhất với gốc toạ độ.

và $f\left(\pm\sqrt[6]{32},\pm\sqrt[6]{32}\right)=2\sqrt[3]{2}$

$\Rightarrow \left(\pm\sqrt[6]{32},\pm\sqrt[6]{32}\right)$ điểm trên đường cong $x^6+y^6=64$ xa nhất với gốc toạ độ

**41)** Tìm hình chữ nhật có chu vi lớn nhất nội tiếp trong elíp $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

**Lời giải.**

Gọi M(x,y) là tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật nội tiếp trong $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

khi đó các cạnh của hình chữ nhật phải song song với các trục tọa độ.Ta phải tìm

GTLN của hàm số $f(x,y)=4(x+y)$ thỏa mãn $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Xét hàm $g(x,y,\lambda)=4(x+y)+\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)$

$$\begin{cases} 4+\dfrac{2\lambda x}{a^2}=0 \\ 4+\dfrac{2\lambda y}{b^2}=0 \Leftrightarrow \lambda=\pm 2\sqrt{a^2+b^2} \Rightarrow x=\dfrac{\pm a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\,; y=\dfrac{\pm b^2}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \end{cases}$$

Vậy tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật nội tiếp trong $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$$\left(\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}},\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\right);\left(-\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}},\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\right);$$

$$\left(\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}},-\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\right);\left(-\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}},-\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

**42)** Tìm các điểm trên mặt cong $xy^2z^2=1$ gần gốc toạ độ nhất.

**Lời giải:**

Giả sử $M(x,y,z)$ là điểm trên mặt cong $xy^2z^2=1$.Bài toán đi tìm GTNN của hàm

số $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ thỏa mãn $xy^2z^2=1$

Xét hàm số $g(x,y,z,\lambda)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}+\lambda(xy^2z^2-1)$

$$\begin{cases}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+\lambda y^2z^2=0\\ \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+2\lambda xyz^2=0\\ \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+2\lambda xy^2z=0\\ xy^2z^2=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+\lambda y^2z^2=0\\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+2\lambda xz^2=0\\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+2\lambda xy^2=0\\ xy^2z^2=1\end{cases}$$

$\Rightarrow y^2=z^2=2x^2\Rightarrow x=\dfrac{1}{\sqrt[5]{4}}\Rightarrow\left(\dfrac{1}{\sqrt[5]{4}},\pm\sqrt[10]{8},\pm\sqrt[10]{8}\right)$ là các điểm trên mặt cong $xy^2z^2=1$.

**43)** Một hộp bìa các tông không nắp có thể tích $4\,dm^3$ . Tìm kích thước hộp sao cho lượng bìa sử dụng it nhất.

**Lời giải:**

Gọi x,y,z là kích thước hộp,diên tích xung quanh của hộp (không có một đáy) là $f(x,y,z)=2(x+y)z+yx$ .Bài toán tìm GTNN của $f(x,y,z)=2(x+y)z+yx$ thỏa mãn $xyz=4$

Xét hàm $g(x,y,z,\lambda)=2(x+y)z+yx+\lambda(xyz-4)$ với $x>0;y>0;z>0$

$$\begin{cases}2z+y+\lambda yz=0\\ 2z+x+\lambda xz=0\\ 2x+2y+\lambda xy=0\\ xyz=4\end{cases}\Rightarrow\frac{2z+y}{yz}=\frac{2z+x}{xz}=\frac{2x+2y}{xy}\Rightarrow x=y=2z\Rightarrow z=1\Rightarrow(2,2,1)$$ (đơn vị : dm)

**44)** Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm $f(x,y,z)=x+2y+3z$ trên đường cong là giao của mặt phẳng $x-y+z=1$ với mặt trụ $x^2+y^2=1$.

**Lời giải:**

Tức là tìm giá trị nhỏ nhất của hàm $f(x,y,z) = x + 2y + 3z$ thỏa mãn

$x - y + z = 1$ và $x^2 + y^2 = 1$

Xét $g(x,y,z,\lambda,\beta) = x + 2y + 3z + \lambda(x - y + z - 1) + \beta(x^2 + y^2 - 1)$

$$\begin{cases} 1 + \lambda + 2\beta x = 0 \\ 2 - \lambda + 2\beta y = 0 \\ 3 + \lambda = 0 \\ x - y + z = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -3 \\ x = \dfrac{1}{\beta} \\ y = -\dfrac{5}{2\beta} \end{cases} \Rightarrow \beta^2 = \frac{29}{4} \Rightarrow \beta = \pm\frac{\sqrt{29}}{2}; x = \pm\frac{2}{\sqrt{29}}; y = \mp\frac{5}{\sqrt{29}}$$

$$M_1\left(\frac{2\sqrt{29}}{29}, -\frac{5\sqrt{29}}{29}, \frac{29 - 7\sqrt{29}}{29}\right); M_2\left(-\frac{2\sqrt{29}}{29}, \frac{5\sqrt{29}}{29}, \frac{29 + 7\sqrt{29}}{29}\right)$$

$f(M_1) = 3 - \sqrt{29}$, $f(M_2) = 3 + \sqrt{29} \Rightarrow \min\ f = 3 - \sqrt{29}$.

**45)** Một hãng dùng sợi len và sợi bông để dệt vải. Lượng vải làm ra là $P(x,y) = K(y-1)(x-1)$, trong đó x là khối lượng len (theo pound) với giá p đô la một pound và y là khối lượng bông với giá q đô la một pound, $x; y > 1$, K là hằng số dương. Nếu hãng có thể chi ra S đô la cho nguyên liệu, nên lấy bao nhiêu bông và len để làm ra nhiều vải nhất?

**Lời giải:**

Tức là tìm giá trị lớn nhất của hàm $P(x,y) = K(y-1)(x-1)$ thỏa mãn $S = px + qy$

Xét $g(x,y,\lambda) = K(y-1)(x-1) + \lambda(px + qy)$

$$\begin{cases} K(x-1) + \lambda q = 0 \\ K(y-1) + \lambda p = 0 \\ px + qy = S \end{cases} \Rightarrow \lambda = \frac{K(p+q) - KS}{2pq} \Rightarrow x = \frac{1}{K} - \frac{p+q-S}{2p}; y = \frac{1}{K} - \frac{p+q-S}{2q}$$

**46)** Mật độ một mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ kim loại cho bởi

$\rho(x,y,z) = 2 + xz + y^2$.Tìm chỗ có mật độ cao nhất,thấp nhất.

**Lời giải:**

Bài toán quy về tìm GTLN,GTNN của $\rho(x,y,z) = 2 + xz + y^2$ thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 \le 4$.Xét trong hình cầu không kể biên

$$\begin{cases} \rho'_x = 0 \\ \rho'_y = 0 \\ \rho'_z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ 2y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

$\rho''_{xx} = \rho''_{zz} = 0; \rho''_{yy} = 2$ cùng các đạo hàm hỗn hợp triệt tiêu,nên không đủ điều kiện để xét cực trị địa phương tại $(0,0,0)$ nhưng $\rho(0,0,0) = 2$

Xét bài toán tìm GTLN,GTNN của $\rho(x,y,z) = 2 + xz + y^2$ thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

Lập hàm $g(x,y,z,\lambda) = 2 + xz + y^2 + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 4)$

$$\begin{cases} z + 2\lambda x = 0 \\ y + \lambda y = 0 \\ x + 2\lambda z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$$

Giải hệ trên ta được nghiệm

$M_1(\sqrt{2},0,\sqrt{2})$ ; $M_2(-\sqrt{2},0,-\sqrt{2})$ ; $M_3(-\sqrt{2},0,\sqrt{2})$ ; $M_4(\sqrt{2},0,-\sqrt{2})$ $M_5(0,\pm 2,0)$

và $\rho(M_1) = \rho(M_2) = 4$ ; $\rho(M_3) = 6$ ; $\rho(M_4) = \rho(M_3) = 0$

Điểm $M_4(\sqrt{2},0,-\sqrt{2})$ ; $M_3(-\sqrt{2},0,\sqrt{2})$ có mật độ thấp nhất.

Còn điểm $M_3(0,\pm 2,0)$ có mật độ cao nhất.

# TÍNH TÍCH PHÂN HÀM NHIỀU BIẾN

**1)** Tính tích phân kép

**a)** $I = \iint_D (6x^2y^3 - 5y^4)dxdy$ trong đó $D = \{(x,y): 0 \le x \le 3, 0 \le y \le 1\}$

**Lời giải:**

$$I = \iint_D (6x^2y^3 - 5y^4)dxdy = \int_0^3 dx \int_0^1 (6x^2y^3 - 5y^4)dy = \int_0^3 \left(\frac{3x^2}{2} - 1\right)dx = \left[\frac{x^3}{2} - x\right]_0^3 = \frac{21}{2}$$

**b)** $I = \iint_D \frac{xy^2}{x^2+1}dxdy$ trong đó $D = \{(x,y): 0 \le x \le 1, -3 \le y \le 3\}$

**Lời giải:**

$$I = \iint_D \frac{xy^2}{x^2+1}dxdy = \int_0^1 \frac{xdx}{x^2+1}\int_{-3}^3 y^2dy = 2\left[\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]_0^1 \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^3 = 9\ln 2$$

**c)** $I = \iint_D y^3\cos^2 x\,dxdy$ trong đó $D = \left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right] \times [1,2]$;

**Lời giải:**

$$I = \iint_D y^3\cos^2 x\,dxdy = \int_1^2 y^3dy \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^2 x\,dx = \left[\frac{y^4}{4}\right]_1^2 \left[\frac{2x - \sin 2x}{4}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{45\pi}{16}$$

**d)** $I = \iint_D (x^2 + 3xy - y\sqrt{x})dxdy$ trong đó $D = [0,2] \times [-2,2]$;

**Lời giải:**

$I = \iint_D (x^2 + 3xy - y\sqrt{x})dxdy = 4\int_0^2 x^2dx = \frac{32}{3}$ do hàm lẻ với biến y và miền lấy tích phân đối xứng qua Ox.

**e)** $I = \iint_D e^{|x-y|}dxdy$ trong đó $D = \{(x,y): 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$.

**Lời giải:**

$$I=\iint_D e^{|x-y|}dxdy=\iint_{\substack{0\le x\le 1\\ 0\le y\le x}} e^{x-y}dxdy+\iint_{\substack{0\le x\le 1\\ x\le y\le 1}} e^{y-x}dxdy$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^x e^{x-y}dy+\int_0^1 dx\int_x^1 e^{y-x}dy=\int_0^1\left(e^x-1\right)dx+\int_0^1\left(e^{1-x}-1\right)dx=2e-4$$

**2)** Tính tích phân kép

**a)** $I=\iint_D x^3y^2dxdy$ trong đó $D=\left\{(x,y):0\le x\le 2,-x\le y\le x\right\}$;

**Lời giải:**

$$I=\iint_D x^3y^2dxdy=2\int_0^2 x^3dx\int_0^x y^2dy=\frac{2}{3}\int_0^2 x^6dx=\frac{256}{21}$$

**b)** $I=\iint_D \frac{y}{x^2+1}dxdy$ trong đó $D=\left\{(x,y):0\le x\le 1,0\le y\le \sqrt{x}\right\}$;

**Lời giải:**

$$I=\iint_D \frac{y}{x^2+1}dxdy=\int_0^1\frac{dx}{x^2+1}\int_0^{\sqrt{x}} ydy=\frac{1}{4}\int_0^1\frac{2xdx}{x^2+1}=\frac{1}{4}\ln(x^2+1)\Big|_0^1=\frac{1}{4}\ln 2$$

**c)** $I=\iint_D x\sin(x+y)dxdy$ trong đó $D=\left\{(x,y):0\le x\le \pi/2,0\le y\le x\right\}$;

**Lời giải:**

$$I=\iint_D x\sin(x+y)dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}} xdx\int_0^x \sin(x+y)dy$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\cos x-\cos 2x)dx=\left[x\sin x+\cos x-\frac{x\sin 2x}{2}-\frac{\cos 2x}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi-1}{2}$$

**d)** $I=\iint_D\left((x^2-y^2)\text{tg}x+y^2\sin y+2\right)dxdy$ trong đó

$D=\left\{(x,y):x^2+y^2\le 2\right\}$;

**Lời giải:**

$I = \iint\limits_D \left( (x^2 - y^2)\text{tg}x + y^2 \sin y + 2 \right) dxdy = 2\iint\limits_D dxdy = 4\pi$ do hàm lẻ với biến x,y và miền
lấy tích phân đối xứng qua hai trục Ox,Oy.

**3)** Tính tích phân kép

**a)** $I = \iint\limits_{x^2+y^2 \le 9} (2x - 3y)dxdy$ ;

**Lời giải:**

$I = \iint\limits_{x^2+y^2 \le 9} (2x - 3y)dxdy = 0$ do hàm lẻ với biến x,y và miền lấy tích phân đối xứng qua
hai trục Ox,Oy.

**b)** $I = \iint\limits_{x^2+y^2 \le 4} \left(x^2 + y^2\right)^{3/2} dxdy$ .

**Lời giải:**

$I = \iint\limits_{x^2+y^2 \le 4} \left(x^2 + y^2\right)^{3/2} dxdy = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^2 r^4 dr = \frac{64\pi}{5}$ với $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ và $\begin{cases} 0 \le r \le 2 \\ 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ $, J = r$
do hàm chẵn với biến x,y và miền lấy tích phân đối xứng qua hai trục Ox,Oy.

**4)** Đổi thứ tự lấy tích phân rồi tính các tích phân

**a)** $I = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{3y}^3 e^{x^2} dx$ ;

**Lời giải:**

$$I = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{3y}^3 e^{x^2} dx = \int\limits_0^3 dx \int\limits_0^{x/3} e^{x^2} dy = \int\limits_0^3 \frac{xe^{x^2}}{3} dx = \frac{1}{6} e^{x^2} \Big|_0^3 = \frac{e^9 - 1}{6}$$

**b)** $I = \int\limits_0^3 dy \int\limits_{y^2}^9 y\cos x^2 dx$ ;

**Lời giải:**

$$I=\int_0^3 dy\int_{y^2}^9 y\cos x^2dx=\int_0^9 dx\int_0^{\sqrt{x}} y\cos x^2dy=\frac{1}{2}\int_0^9 x\cos x^2dx=\frac{1}{4}\sin x^2\Big|_0^9=\frac{\sin 81}{4}$$

**c)** $I=\int_0^1 dx\int_x^1 \cos y^2dy$;

**Lời giải:**

$$I=\int_0^1 dx\int_x^1 \cos y^2dy=\int_0^1 dy\int_0^y \cos y^2dx=\int_0^1 y\cos y^2dy=\frac{1}{2}\sin y^2\Big|_0^1=\frac{\sin 1}{2}$$

**d)** $I=\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^1 \frac{ye^{x^2}}{x^3}dx$;

**Lời giải:**

$$I=\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^1 \frac{ye^{x^2}}{x^3}dx=\int_0^1 dx\int_0^{x^2} \frac{ye^{x^2}}{x^3}dy=\frac{1}{2}\int_0^1 xe^{x^2}dx=\frac{1}{4}e^{x^2}\Big|_0^1=\frac{e-1}{4}$$

**e)** $I=\int_0^1 dx\int_x^1 xydy$.

**Lời giải:**

$$I=\int_0^1 dx\int_x^1 xydy=\int_0^1 ydy\int_0^y xdx=\frac{1}{2}\int_0^1 y^3dy=\frac{1}{8}$$

**5)** Dùng phép đổi biến thích hợp tính các tích phân:

**a)** $I=\iint_D (x^2-y^2)dxdy$ trong đó D là hình vuông với các đỉnh $(0,2),(1,1),(2,2),(1,3)$;

**Lời giải:**

các đỉnh của hình vuông nằm trên đường thẳng có phương trình

$y=x$; $y=x+2$; $y=-x+2$; $y=-x+4$.

Đặt $\begin{cases}x-y=u\\x+y=v\end{cases}$ với $\begin{cases}0\le u\le 2\\2\le v\le 4\end{cases}$ và $\begin{cases}x=\dfrac{u+v}{2}\\y=\dfrac{-u+v}{2}\end{cases}\Rightarrow J=\dfrac{1}{2}$

$$I=\iint_D (x^2-y^2)dxdy=\frac{1}{2}\int_{-2}^{0} udu\int_{2}^{4} vdv=\frac{1}{8}u^2\Big|_{-2}^{0}\,v^2\Big|_{2}^{4}=-6$$

**b)** $I=\iint_D xydxdy$ trong đó D là hình vuông với các đỉnh $(0,0),(1,1),(2,0),(1,-1)$;

**Lời giải**:

các đỉnh của hình vuông có phương trình

$y=x$ ; $y=x+2$ ; $y=-x+2$ ; $y=-x+2$ .

$I=\iint_D xydxdy=0$ do hàm lẻ với biến y và miền lấy tích phân đối xứng qua trục Ox

**c)** $I=\iint_D xydxdy$ trong đó

$D=\{(x,y): y=x,\ y=3x,\ xy=1,\ xy=3, x>0, y>0\}$;

**Lời giải:**

Đặt $\begin{cases}\dfrac{y}{x}=u\\ xy=v\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=\sqrt{uv}\\ x=\sqrt{\dfrac{v}{u}}\end{cases}\Rightarrow J=\begin{vmatrix}\dfrac{1}{2\sqrt{uv}} & -\dfrac{1}{2u}\sqrt{\dfrac{v}{u}}\\ \dfrac{u}{2\sqrt{uv}} & \dfrac{v}{2\sqrt{uv}}\end{vmatrix}=\dfrac{1}{2u}$ với $\begin{cases}1\le u\le 3\\ 1\le v\le 3\end{cases}$

$$I=\iint_D xydxdy=\int_1^3\frac{du}{2u}\int_1^3 vdv=2\ln 3$$

**d)** $I=\iint_D \dfrac{x-2y}{3x-y}dxdy$ trong đó

$D=\{(x,y): x-2y=0, x-2y=4, 3x-y=1, 3x-y=8\}$;

**Lời giải:**

Đặt $\begin{cases}x-2y=u\\ 3x-y=v\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{2v-u}{5}\\ y=\dfrac{v-3u}{5}\end{cases}$ và $J=\dfrac{1}{5}$ với $\begin{cases}0\le u\le 4\\ 1\le v\le 8\end{cases}$

$$I=\iint_D \frac{x-2y}{3x-y}dxdy=\frac{1}{5}\int_0^4 udu\int_1^8\frac{dv}{v}=\frac{24\ln 2}{5}$$

.....................................................................................................

**e)** $I = \iint\limits_D e^{x+y}dxdy$ trong đó D là miền giới hạn bởi $|x| + |y| \le 1$;

**Lời giải:**

miền giới hạn bởi $|x| + |y| \le 1$ là hình vuông với các đỉnh

$A(1,0); B(0,1); C(-1,0); D(0,-1)$

nằm tương ứng trên các đường thẳng $x + y = 1$; $x + y = -1$; $y - x = 1$; $y - x = -1$

Đặt $\begin{cases} y - x = u \\ x + y = v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 \le u \le 1 \\ -1 \le v \le 1 \end{cases}$ và $\begin{cases} x = \dfrac{v-u}{2} \\ y = \dfrac{u+v}{2} \end{cases}$; $J = \dfrac{1}{2}$

$$I = \iint\limits_D e^{x+y}dxdy = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} du \int_{-1}^{1} e^v dv = e - e^{-1}$$

**f)** $I = \iint\limits_D (x+y)^3(x-y)^2 dxdy$ với

$D = \{(x,y): y + x = 1, x + y = 3, x - y = -1, x - y = 1\}$;

**Lời giải:**

Đặt $\begin{cases} x - y = u \\ x + y = v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 \le u \le 1 \\ 1 \le v \le 3 \end{cases}$ và $\begin{cases} y = \dfrac{v-u}{2} \\ x = \dfrac{u+v}{2} \end{cases}$; $J = \dfrac{1}{2}$

$$I = \iint\limits_D (x+y)^3(x-y)^2 dxdy = \frac{1}{2}\int_{1}^{3} v^3 du \int_{-1}^{1} u^2 dv = \frac{20}{3}$$

**6)** Chứng minh rằng

**a)** $I = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} e^{y/(x+y)} dy = \dfrac{e-1}{2}$;

**Lời giải:**

$$I = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} e^{y/(x+y)} dy = \int_0^1 dy \int_0^{1-y} e^{y/(x+y)} dx$$

Đặt $f(y) = \int_0^{1-y} e^{y/(x+y)} dx$

$$\Rightarrow f'(y)=\int_0^{1-y}\frac{x}{(x+y)^2}e^{y/(x+y)}dx-e^y$$

$$=-\frac{1}{y}\int_0^{1-y}xd\left(e^{\frac{y}{x+y}}\right)-e^y=-\frac{1}{y}\left[xe^{\frac{y}{x+y}}\Bigg|_{x=0}^{x=1-y}-\int_0^{1-y}e^{\frac{y}{x+y}}dx\right]-e^y$$

$$=-\frac{1}{y}\left[(1-y)e^y-\int_0^{1-y}e^{\frac{y}{x+y}}dx\right]-e^y=-\frac{1}{y}e^y+\frac{1}{y}\int_0^{1-y}e^{\frac{y}{x+y}}dx=\frac{1}{y}f(y)-\frac{1}{y}e^y\Rightarrow$$

$$f(y)=yf'(y)+e^y=\int_0^{1-y}\frac{yx}{(x+y)^2}e^{y/(x+y)}dx-ye^y+e^y$$

$$\Rightarrow I=\int_0^1 dy\int_0^{1-y}\frac{yx}{(x+y)^2}e^{y/(x+y)}dx+\int_0^1(1-y)e^ydy=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}yd\left(e^{\frac{y}{x+y}}\right)+(2-y)e^y\Big|_0^1$$

$$=\int_0^1\left[\left(ye^{\frac{y}{x+y}}\right)\Bigg|_0^{1-x}-\int_0^{1-x}e^{\frac{y}{x+y}}dy\right]dx+e-2=\int_0^1(1-x)e^{1-x}dx-\int_0^1 dx\int_0^{1-x}e^{\frac{y}{x+y}}dy+e-2$$

$$\Rightarrow 2I=e\left(xe^{-x}\right)\Big|_0^1+e-2\Rightarrow\int_0^1 dx\int_0^{1-x}e^{\frac{y}{x+y}}dy=\frac{e-1}{2}\ \blacksquare$$

**b)** $I=\iint\limits_D\cos\frac{x-y}{x+y}dxdy=\frac{\sin 1}{2}$ trong đó D là miền giới hạn bởi $x+y=1, x=0, y=0$.

**Lời giải:**

$$I=\iint\limits_D\cos\frac{x-y}{x+y}dxdy=\int_0^1 dy\int_0^{1-y}\cos\frac{x-y}{x+y}dx=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\cos\frac{x-y}{x+y}dy$$

Đặt $f(y)=\int_0^{1-y}\cos\frac{x-y}{x+y}dx$

$$\Rightarrow f'(y)=\int_0^{1-y}\frac{2x}{(x+y)^2}\sin\frac{x-y}{x+y}dx-\cos(2y-1)=-\frac{1}{y}\int_0^{1-y}xd\left(\cos\frac{x-y}{x+y}\right)-\cos(2y-1)$$

$$=-\frac{1}{y}\left[\left(x\cos\frac{x-y}{x+y}\right)\Big|_0^{1-y}-\int_0^{1-y}\cos\frac{x-y}{x+y}dx\right]-\cos(2y-1)$$

$$=-\frac{1}{y}(1-y)\cos(2y-1)+\frac{1}{y}\int_0^{1-y}\cos\frac{x-y}{x+y}dx-\cos(2y-1)=-\frac{1}{y}\cos(2y-1)+\frac{1}{y}\int_0^{1-y}\cos\frac{x-y}{x+y}dx$$

$$\Rightarrow f(y)=yf'(y)+\cos(2y-1)=\int_0^{1-y}\frac{2xy}{(x+y)^2}\sin\frac{x-y}{x+y}dx-y\cos(2y-1)+\cos(2y-1)$$

$$I=\int_0^1(1-y)\cos(2y-1)dy-\int_0^1dy\int_0^{1-y}\frac{2xy}{(x+y)^2}\sin\frac{x-y}{x+y}dx$$

$$=\frac{1}{4}\left[2(1-y)\sin(2y-1)-\cos(2y-1)\right]_0^1+\int_0^1dy\int_0^{1-y}xd\left(\cos\frac{x-y}{x+y}\right)$$

$$=\frac{\sin 1}{2}+\int_0^1\left[x\cos\frac{x-y}{x+y}\Big|_0^{1-y}-\int_0^{1-x}\cos\frac{x-y}{x+y}dy\right]dx$$

$$=\frac{\sin 1}{2}+\int_0^1(1-y)\cos(2y-1)dy-\int_0^1dx\int_0^{1-x}\cos\frac{x-y}{x+y}dy\Rightarrow I=\frac{\sin 1}{2}\ \blacksquare$$

**7)** Tính các tích phân đã cho bằng cách đổi sang toạ độ cực:

**a)** $I=\iint\limits_D xydxdy$ trong đó $D=\left\{(x,y):x^2+y^2\le 9\right\}$;

**Lời giải:**

do hàm lẻ với từng biến x,y và miền lấy tích phân đối xứng qua hai trục Ox,Oy

$$I=\iint\limits_D xydxdy=0$$

**hoặc** đặt $\begin{cases}x=r\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi\end{cases}$ với $\begin{cases}0\le\varphi\le 2\pi\\ 0\le r\le 3\end{cases}$ và $J=r$

$$I=\iint\limits_D xydxdy=\int_0^3 r^3dr\int_0^{2\pi}\cos\varphi\sin\varphi d\varphi=0$$

**b)** $I=\iint\limits_D (x+y)dxdy$ trong đó $D=\left\{(x,y): x^2+y^2=1, x^2+y^2=4, x<0\right\}$;

**Lời giải:**

đặt $\begin{cases} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \end{cases}$ với $\begin{cases} 1\le r\le 2 \\ \dfrac{\pi}{2}\le\varphi\le\pi \end{cases}$ và $J=r$

$$I=\iint\limits_D (x+y)dxdy=2\int_1^2 r^2dr\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos\varphi d\varphi=\frac{14}{3}\sin\varphi\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=-\frac{14}{3}$$

**c)** $I=\iint\limits_D e^{-x^2-y^2}dxdy$ trong đó $D=\left\{(x,y): x^2+y^2\le 4, x\ge 0\right\}$;

**Lời giải:**

đặt $\begin{cases} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \end{cases}$ với $\begin{cases} 0\le r\le 2 \\ -\dfrac{\pi}{2}\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ và $J=r$

$$I=\iint\limits_D e^{-x^2-y^2}dxdy=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^2 re^{-r^2}dr=-\frac{\pi}{2}e^{-r^2}\Big|_0^2=\frac{\pi(1-e^{-4})}{2}\ \blacksquare$$

**d)** $I=\iint\limits_D \dfrac{dxdy}{x^2+y^2}$ trong đó

$D=\left\{(x,y): x^2+y^2\le 1, x^2+y^2\le 2, x\ge 0, y\ge 0\right\}$;

**Lời giải:**

đặt $\begin{cases} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \end{cases}$ với $\begin{cases} 1\le r\le \sqrt{2} \\ 0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ và $J=r$

$$I=\iint\limits_D \frac{dxdy}{x^2+y^2}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_1^{\sqrt{2}}\frac{dr}{r}dr=\frac{\pi\ln 2}{4}\ \blacksquare$$

**e)** $I=\iint\limits_D \dfrac{y}{x}dxdy$ trong đó $D=\left\{(x,y): (x-1)^2+y^2\le 1, x^2+y^2\ge 1, y\ge 0\right\}$;

**Lời giải:**

đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ với $\begin{cases} 0 \le r \le 2\cos\varphi \\ 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$ và $J = r$

$$I = \iint_D \frac{y}{x}dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{3}} tg\varphi d\varphi \int_1^{2\cos\varphi} rdr = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(4\cos^2\varphi - 1\right) tg\varphi d\varphi$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{d(\cos\varphi)}{\cos\varphi} = \frac{1}{2}\left(\ln\cos\varphi - \cos 2\varphi\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{3 - 2\ln 2}{4} \blacksquare$$

**f)** $I = \iint_D \dfrac{ydxdy}{\sqrt{4 + x^2 + y^2}}$ trong đó $D = \left\{(x, y) : x^2 + y^2 \le 4, x \ge 0, y \ge 0\right\}$;

**Lời giải:**

đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ với $\begin{cases} 0 \le r \le 2 \\ 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ và $J = r$

$$I = \iint_D \frac{ydxdy}{\sqrt{4 + x^2 + y^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi d\varphi \int_0^2 \frac{r^2 dr}{\sqrt{4 + r^2}} = \int_0^2 \frac{r^2 dr}{\sqrt{4 + r^2}} = \frac{r}{2}\sqrt{4 + r^2}\Big|_0^2 - 2\int_0^2 \frac{dr}{\sqrt{4 + r^2}}$$

$$= \left[\frac{r}{2}\sqrt{4 + r^2} - 2\ln\left(r + \sqrt{4 + r^2}\right)\right]\Bigg|_0^2 = 2\sqrt{2} - 2\ln(1 + \sqrt{2}) \blacksquare$$

**8)** Tính diện tích miền giới hạn bởi các đường

**a)** $r = \cos\theta$ và $r = \sin\theta$;

**Lời giải:**

$r = \cos\theta \Leftrightarrow x^2 + y^2 - x = 0$ và $r = \sin\theta \Leftrightarrow x^2 + y^2 - y = 0$

Ta cần tính $S = \iint_D dxdy$ trong đó $D = \left\{(x, y) : x^2 + y^2 \le x, x^2 + y^2 \le y\right\}$

Do tính đối xứng của miền D qua đường $y = x$ nên

không làm mất tính tổng quát ta xét với đường tròn $x^2 + y^2 = \dfrac{1}{4}$

$$S = 2\left(\iint_D dxdy - \iint_{D_1} dxdy\right) = 2\left(\frac{\pi}{16} - \frac{1}{8}\right) = \frac{\pi - 2}{8} \blacksquare$$

với D là ¼ hình tròn bán kính ½ ,còn $D_1$ là tam giác vuông cân cạnh ½.

**b)** $x^2 + y^2 = 2x$ và $x^2 + y^2 = 2\sqrt{3}y$

**Lời giải:**

Hai đường tròn $x^2 + y^2 = 2x$ và $x^2 + y^2 = 2\sqrt{3}y$ cắt nhau tại hai điểm thuộc đường thẳng

$x = y\sqrt{3}$ và đường thẳng tạo với chiều dương Ox góc $\frac{\pi}{6}$

diện tích hình viên phân của hình $x^2 + y^2 \le 2x$ bị cắt bởi đường $x = y\sqrt{3}$

(góc ở tâm là $\frac{2\pi}{3}$),không làm mất tính tổng quát ta xét với đường tròn $x^2 + y^2 = 1$

$$S_1 = \iint_{D_1} dxdy - A_1 = \int_0^{\frac{2\pi}{3}} d\varphi \int_0^1 rdr = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}$$ trong đó $D_1$ là quạt tròn góc ở tâm $\frac{2\pi}{3}$

và $A_1$ là diện tích tam giác cân cạnh 1 và góc ở đáy $\frac{\pi}{6}$

diện tích hình viên phân của hình $x^2 + y^2 \le 2y\sqrt{3}$ bị cắt bởi đường $x = y\sqrt{3}$

(góc ở tâm là $\frac{\pi}{3}$),không làm mất tính tổng quát ta xét với đường tròn $x^2 + y^2 = 3$

$$S_2 = \iint_{D_2} dxdy - A_2 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_0^{\sqrt{3}} rdr = \frac{\pi}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{4} = \frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{4}$$

trong đó $D_1$ là quạt tròn góc ở tâm $\frac{\pi}{3}$ và $A_2$ là diện tích tam giác đều cạnh $\sqrt{3}$

$$\Rightarrow S = S_1 + S_2 = \frac{5\pi - 6\sqrt{3}}{6}$$ ■

**c)** $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = xy \quad x \ge 0, y \ge 0$

**Lời giải:**

Đặt $\begin{cases} x = ar\cos\varphi \\ y = br\sin\varphi \end{cases}$ với $\begin{cases} 0 \le r \le \sqrt{ab\cos\varphi\sin\varphi} \\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$ và $J = rab$

$$S=\iint_D dxdy = ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\sqrt{ab\cos\varphi\sin\varphi}} rdr = \frac{a^2b^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\sin\varphi d\varphi = -\frac{a^2b^2}{4}\cos^2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^2b^2}{4} \blacksquare$$

**d)** $y^2 = ax,\ y^2 = bx,\ xy = 1,\ xy = 2\ (0 < a < b)$

**Lời giải:**

Đặt $\begin{cases}\dfrac{y^2}{x} = u\\ xy = v\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}1 \le v \le 2\\ a \le u \le b\end{cases}$ và $\begin{cases}x = \sqrt[3]{\dfrac{v^2}{u}}\\ y = \sqrt[3]{uv}\end{cases} \Rightarrow J = \dfrac{1}{3u}$

$$S=\iint_D dxdy = \frac{1}{3}\int_a^b \frac{du}{u}\int_1^2 dv = \frac{1}{3}\ln\frac{b}{a} \blacksquare$$

**e)** Miền trong của đường hình tim $r = a(1+\cos\theta)$ và miền ngoài đường tròn $r = a\cos\theta$;

**Lời giải:**

do tính đối xứng của miền tính diện tích,nên

Diện tích hình tim $S_1 = \dfrac{a^2}{2}\displaystyle\int_0^{2\pi}(1+\cos\theta)^2 d\theta = \dfrac{3\pi a^2}{2}$

$r = a\cos\theta \Leftrightarrow \left(x - \dfrac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \dfrac{a^2}{4} \Rightarrow$ Diện tích hình tròn bán kính $\dfrac{a}{2}$ là $S_2 = \dfrac{\pi a^2}{4}$

Diện tích cần tính $S = S_1 - S_2 = \dfrac{5\pi a^2}{4} \blacksquare$

**9)** Tính thể tích của các vật thể giới hạn bởi:

**a)** Dưới mặt $z = xy$ và phía trên hình $[0,6]\times[0,4]$;

**Lời giải:**

$$V=\iint_D z(x,y)dxdy = \iint_D xydxdy = \int_0^6 xdx\int_0^4 ydy = 144 \blacksquare$$

**b)** Dưới mặt pararaboloid elliptic $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}+z=1$ và phía trên hình $[-1,1]\times[-2,2]$;

**Lời giải:**

$$V=\iint_D\left(1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}\right)dxdy=4\int_0^1 dx\int_0^2\left(1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}\right)dy$$

$$=4\int_0^1\left(2-\frac{x^2}{2}-\frac{8}{27}\right)dx=4\left(2-\frac{1}{6}-\frac{8}{27}\right)=\frac{166}{27}\ \blacksquare$$

do hàm chẵn với từng biến x,y và miền lấy tích phân đối xứng qua hai trục Ox,Oy

**c)** mặt cong $z=1+e^x\sin y$ và các mặt phẳng $x=\pm1, y=0, y=\pi$;

**Lời giải:**

$$V=\iint_D z(x,y)dxdy \quad D=\{-1\le x\le 1, 0\le y\le\pi\}$$

$$V=\iint_D(1+e^x\sin y)dxdy=\int_{-1}^1 dx\int_0^\pi(1+e^x\sin y)dy=\int_{-1}^1(\pi+2e^x)dx=2\pi+2(e-e^{-1})\ \blacksquare$$

**d)** Mặt trụ $z=9-x^2$ và các mặt phẳng $x=2, y=4$ ở góc phần tám thứ nhất;

**Lời giải:**

$$V=\iint_D z(x,y)dxdy=\iint_D(9-x^2)dxdy \text{ với } D=\{0\le x\le 2, 0\le y\le 4\}$$

$$V=\iint_D(9-x^2)dxdy=\int_0^2 dx\int_0^4(9-x^2)dy=\int_0^2(36-4x^2)dx=72-\frac{32}{3}=\frac{184}{3}\ \blacksquare$$

**e)** Dưới mặt pararaboloid $z=x^2+y^2$ và phía trên hình tròn $x^2+y^2=9$;

**Lời giải:**

$$V=\iint_D z(x,y)dxdy=\iint_D(x^2+y^2)dxdy \text{ với } D=\{x^2+y^2\le 9\}$$

do hàm chẵn với từng biến x,y và miền lấy tích phân đối xứng qua hai trục Ox,Oy

$$V=\iint_D(x^2+y^2)dxdy=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^3 r^3dr=\frac{81\pi}{2} \quad \text{với } \begin{cases}x=r\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi\end{cases};\quad \begin{cases}0\le r\le 3\\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}\end{cases} \text{ và}$$

$J=r$

**f)** Trên mặt nón $z=\sqrt{x^2+y^2}$ và phía dưới mặt cầu $x^2+y^2+z^2=1$;

**Lời giải:**

$$V=\iint\limits_D z(x,y)dxdy=\iint\limits_D \sqrt{1-(x^2+y^2)}dxdy-\iint\limits_D \sqrt{(x^2+y^2)})dxdy \text{ với}$$

$$D=\left\{x^2+y^2\le\frac{1}{2}\right\}$$

do hàm chẵn với từng biến x,y và miền lấy tích phân đối xứng qua hai trục Ox,Oy

Đặt $\begin{cases}x=r\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi\end{cases}$ với $\begin{cases}0\le r\le\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ 0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$ và $J=r$

$$V=\iint\limits_D \sqrt{1-(x^2+y^2)}dxdy-\iint\limits_D \sqrt{(x^2+y^2)})dxdy=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\sqrt{2}/2}r\sqrt{1-r^2}dr-4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\sqrt{2}/2}r^2dr$$

$$=-\frac{2\pi}{3}\left(1-r^2\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^{\sqrt{2}/2}-\frac{\pi\sqrt{2}}{6}=\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi\sqrt{2}}{6}-\frac{\pi\sqrt{2}}{6}=\frac{(2-\sqrt{2})\pi}{3}\ ■$$

**g)** $0\le z\le 2-x-y,\ 0\le y\le 1,\ 1\le 2x+y,\ x+y\le 1$.

**Lời giải:**

$$V=\iint\limits_D z(x,y)dxdy=\iint\limits_D (2-x-y)dxdy \ \text{ với } D=\{0\le y\le 1,\ 1\le 2x+y,\ x+y\le 1\}$$

$$V=\iint\limits_D (2-x-y)dxdy=\int_0^1 dy\int_{\frac{1-y}{2}}^{1-y}(2-x-y)dx=\int_0^1\left[1-y-\frac{3(1-y)^2}{8}-\frac{y(1-y)}{2}\right]dy$$

$$=\frac{1}{8}\int_0^1\left(y^2-6y+5\right)dy=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{3}-2+5\right)=\frac{7}{24}\ ■$$

**10)** Tính thể tích của các vật thể giới hạn bởi:

**a)** Dưới mặt phẳng $x+2y-z=0$ và phía trên miền giới hạn bởi $y=x, y=x^4$;

**Lời giải:**

$$V=\iint\limits_D z(x,y)dxdy=\iint\limits_D (x+2y)dxdy \ \text{ với } D=\left\{0\le x\le 1,\ x^4\le y\le x\right\}$$

$$V=\iint_D (x+2y)dxdy=\int_0^1 dx\int_{x^4}^{x}(x+2y)dy=\int_0^1(2x^2-x^5-x^8)dx=\frac{2}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{9}=\frac{7}{18}\ \blacksquare$$

**b)** Dưới mặt phẳng $z=xy$ và phía trên tam giác với đỉnh $(1,1),(4,1),(1,2)$;

**Lời giải:**

$$V=\iint_D z(x,y)dxdy=\iint_D xydxdy \text{ với } D=\{1\le y\le 2, 1\le x\le 7-3y\}$$

$$V=\iint_D xydxdy=\int_1^2 ydy\int_1^{7-3y}xdx=\frac{1}{2}\int_1^2 y(9y^2-42y+48)dy$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{9y^4}{4}-14y^3+24y^2\right]_1^2=\frac{31}{8}\ \blacksquare$$

**c)** các mặt trụ $y=x^2; z=x^2$ và các mặt phẳng $z=0, y=4$;

**Lời giải:**

$$V=\iint_D z(x,y)dxdy=\iint_D x^2dxdy \text{ với } D=\left\{-2\le x\le 2,\ x^2\le y\le 4\right\}$$

$$V=\iint_D x^2dxdy=\int_{-2}^{2}dx\int_{x^2}^{4}x^2dy=2\int_0^2(4x^2-x^4)dx=2\left(\frac{4x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right)=\frac{128}{5}\ \blacksquare$$

**d)** mặt trụ $x^2+y^2=1$ và các mặt phẳng $x=0,\ y=z,\ z=0$ ở góc phần tám thứ nhất;

**Lời giải:**

$$V=\iint_D z(x,y)dxdy=\iint_D ydxdy \text{ với } D=\left\{x^2+y^2\le 1; x\ge 0, y\ge 0\right\}$$

$$V=\iint_D ydxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi d\varphi\int_0^1 r^2dr=\frac{1}{3}.$$ Đặt $\begin{cases}x=r\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi\end{cases}$ với $\begin{cases}0\le r\le 1\\ 0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$ và

$J=r$

**e)** $x^2+y^2+z^2=1$ và $x^2+y^2=\dfrac{1}{4}$;

**Lời giải:**

Do tính đối xứng của miền tính thể tích nên

$$V = 8\iint_D z(x,y)dxdy = 8\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy \text{ với } D = \left\{(x,y): x^2+y^2 \le \frac{1}{4}; x \ge 0, y \ge 0\right\}$$

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ với $\begin{cases} 0 \le r \le \dfrac{1}{2} \\ 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ và $J = r$

$$V = 8\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{1}{2}} r\sqrt{1-r^2}dr = -\frac{\pi}{6}(1-r^2)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{(8-3\sqrt{3})\pi}{6} \blacksquare$$

**f)** Các mặt pararaboloid $2z = x^2 + y^2$ và $z = 8 - x^2 - y^2$;

**Lời giải:**

Hai mặt cắt nhau theo đường $x^2 + y^2 = \frac{16}{3}$ trên mặt $z = \frac{8}{3}$

và miền lấy thể tích đối xứng qua hai mặt zOx,zOy

$$V = 4\iint_D (8 - x^2 - y^2)dxdy - 2\iint_D (x^2+y^2)dxdy = 32\iint_D dxdy - 6\iint_D (x^2+y^2)dxdy$$

với $D = \left\{x^2 + y^2 \le \frac{16}{3}; x \ge 0, y \ge 0\right\}$. Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ với $\begin{cases} 0 \le r \le \dfrac{4\sqrt{3}}{3} \\ 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ và $J = r$

$$V = 4\iint_D (8 - x^2 - y^2)dxdy - 2\iint_D (x^2+y^2)dxdy = 4\iint_D 8dxdy - 6\iint_D (x^2+y^2)dxdy$$

$$= \frac{128\pi}{3} - 6\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{4\sqrt{3}}{3}} r^3 dr = \frac{128\pi}{3} - \frac{3\pi}{4}\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^4 = \frac{64\pi}{3}$$

**g)** mặt pararaboloid $z = x^2 + y^2 + 1$ và mặt phẳng $z = 5$;

**Lời giải:**

Hai mặt cắt nhau theo đường $x^2 + y^2 = 4$ trên mặt $z = 5$

và miền lấy thể tích đối xứng qua hai mặt zOx,zOy

$$V = V_{\text{trô}} - 4\iint_D (x^2 + y^2 + 1)dxdy = 20\pi - 4\iint_D (x^2+y^2+1)dxdy$$

với $D = \left\{x^2 + y^2 \le 4; x \ge 0, y \ge 0\right\}$

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ với $\begin{cases} 0 \le r \le 2 \\ 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ và $J = r$

$$V = 20\pi - 4\iint_D (x^2 + y^2 + 1)dxdy = 20\pi - 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^2 (r^2 + 1)rdr = 8\pi \ \blacksquare$$

**h)** Các mặt trụ $x^2 + y^2 = a^2$ và $x^2 + z^2 = a^2$.

**Lời giải:**

Do tính đối xứng của miền tính thể tích qua các mặt phẳng tọa độ, đồng thời trong môt góc 1/8 khối đó lại đối xứng qua các mặt $x = y$ và $x = -y$ nên với mặt $z = \sqrt{a^2 - x^2}$ thì

$$V = 16\iint_D z(x, y)dxdy = 16\iint_D \sqrt{a^2 - x^2}dxdy \text{ với } D = \{0 \le x \le a, 0 \le y \le x\}$$

$$V = 16\iint_D \sqrt{a^2 - x^2}dxdy = 16\int_0^a dx \int_0^x \sqrt{a^2 - x^2}dy$$

$$= 16\int_0^a x\sqrt{a^2 - x^2}dx = -\frac{16}{3}\left(\sqrt{a^2 - x^2}\right)^3\Bigg|_0^a = \frac{16a^3}{3} \ \blacksquare$$

**11)** Tìm thể tích vật thể tạo thành bằng cách lấy giao của các mặt trụ paraboloid

$y = 1 - x^2$; $y = x^2 - 1$ và các mặt phẳng $x + y + z = 2$ ; $2x + 2y - z + 10 = 0$.

**Lời giải:**

Phần tính thể tích chiếu xuống xOy được miền $D = \left\{-1 \le x \le 1, x^2 - 1 \le y \le 1 - x^2\right\}$ nên

$$V = \iint_D (10 - 2x - 2y)dxdy - \iint_D (2 - x - y)dxdy \text{ với } D = \left\{-1 \le x \le 1, x^2 - 1 \le y \le 1 - x^2\right\}$$

Xong $D = \left\{-1 \le x \le 1, x^2 - 1 \le y \le 1 - x^2\right\}$ đối xứng qua các trục tọa độ và các hàm theo biến x,y là các hàm lẻ,nên:

$$V = \iint_D (10 - 2x - 2y)dxdy - \iint_D (2 - x - y)dxdy = 8\iint_D dxdy = 32\int_0^1 dx \int_0^{1-x^2} dy = \frac{64}{3} \ \blacksquare$$

**12)** Tìm V vật thể trong mặt $x^2+y^2+z^2=4$,trên mặt phẳng $xOy$ và dưới mặt nón $z=\sqrt{x^2+y^2}$

**Lời giải:**

mặt $x^2+y^2+z^2=4$ và mặt nón $z=\sqrt{x^2+y^2}$ cắt nhau theo đường $x^2+y^2=2$ nằm trên mặt $z=\sqrt{2}$

$$V=\frac{1}{2}V_{cÇu}-\left(V_1-V_2\right)$$

ở đó $V_1$ là thể tích vật thể trong mặt $x^2+y^2+z^2=4$ và trên hình tròn $x^2+y^2\le 2$

còn $V_2$ là thể tích vật thể dưới mặt $z=\sqrt{x^2+y^2}$ và trên hình tròn $x^2+y^2\le 2$

Ta có $\frac{1}{2}V_{cÇu}=\frac{16\pi}{3}$

với $D=\left\{x^2+y^2\le 2\right\}$ do tính đối xứng của miền tính thể tích qua các mặt phẳng tọa độ yOz,zOx.

Đặt $\begin{cases} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \end{cases}$ với $\begin{cases} 0\le r\le\sqrt{2} \\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2} \end{cases}$ và $J=r$

$$V_1=\iint\limits_{x^2+y^2\le 2}\sqrt{4-x^2+y^2}\,dxdy=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\sqrt{2}}r\sqrt{4-r^2}\,dr=-\frac{2\pi}{3}\left(\sqrt{4-r^2}\right)^3\Bigg|_0^{\sqrt{2}}=\frac{16\pi}{3}-\frac{4\pi\sqrt{2}}{3}$$

$$V_2=\iint\limits_{x^2+y^2\le 2}\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\sqrt{2}}r^2dr=\frac{4\pi\sqrt{2}}{3}\Rightarrow$$

$$V=\frac{1}{2}V_{cÇu}-\left(V_1-V_2\right)=\frac{8\pi\sqrt{2}}{3}\ \blacksquare$$

**13)** Tìm thể tích vật thể giới hạn bởi $x=0,\ z=0$ và các mặt cong

$x+4y^2=3$ ;

$z=x^3y$ ở góc phần tám thứ nhất.

**Lời giải:**

Phần tính thể tích chiếu xuống xOy được miền $D = \left\{0 \le y \le \frac{\sqrt{3}}{2}, 0 \le x \le 3 - 4y^2\right\}$

$$V = \iint_D x^3 y dxdy = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} ydy \int_0^{3-4y^2} x^3 dx = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} y(3-4y^2)^4 dy$$

$$= -\frac{1}{32}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} (3-4y^2)^4 d(3-4y^2) = -\frac{1}{160}(3-4y^2)^5\Big|_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{243}{160} \blacksquare$$

**14)** Tìm diện tích các mặt cong

**a)** Phần mặt trụ $z^2 + y^2 = 9$ nằm trên miền hình chữ nhật có đỉnh $(0,2),(0,0)$;
$(4,0),(4,2)$

**Lời giải:**

$$S = \iint_D \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}dxdy, \text{với } z = \sqrt{9-y^2} \Rightarrow z_y' = \frac{-y}{\sqrt{9-y^2}}$$

$$S = \iint_D \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}dxdy = 3\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{9-y^2}} \text{ với } D = \{0 \le y \le 2, 0 \le x \le 4\}$$

$$S = 3\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{9-y^2}} = 12\int_0^2 \frac{dy}{\sqrt{9-y^2}} = 12\arcsin\frac{y}{3}\Big|_0^2 = 12\arcsin\frac{2}{3} \blacksquare$$

**b)** Phần mặt cong $z = xy$ nằm mặt trụ $x^2 + y^2 = 1$ ;

**Lời giải:**

$$S = \iint_D \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}dxdy = \iint_D \sqrt{1 + y^2 + x^2}dxdy \text{ với } D = \{ x^2 + y^2 \le 1\}$$

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ với $\begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$ và $J = r$

$$S = \iint_D \sqrt{1 + y^2 + x^2}dxdy = 2\pi\int_0^1 r\sqrt{1+r^2}dr = \frac{2\pi}{3}\left(\sqrt{1+r^2}\right)^3\Big|_0^1 = \frac{2\pi(2\sqrt{2}-1)}{3} \blacksquare$$

**c)** Phần mặt pararaboloid $2x = z^2 + y^2$ nằm trên miền trong góc phần tám thứ nhất giới hạn bởi các mặt $x = y^2; x = 1$.

**Lời giải:**

Phần mặt pararaboloid $2x = z^2 + y^2$ tính diện tích chiếu xuống yOz được miền

$D = \left\{ y^2 + z^2 \le 2, 0 \le z \le y \right\}$. Đặt $\begin{cases} y = r\cos\varphi \\ z = r\sin\varphi \end{cases}$ với $\begin{cases} 0 \le r \le \sqrt{2} \\ 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$ và $J = r$

(Đó là 1/8 hình tròn $\left\{ y^2 + z^2 \le 2 \right\}$ khi chiếu $x = y^2$ xuống yOz được $y = z$)

$$S = \iint_D \sqrt{1 + y^2 + z^2}\,dzdy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} r\sqrt{1 + r^2}\,dr = \frac{\pi}{6}\left(\sqrt{1 + r^2}\right)^3 \Big|_0^{\sqrt{2}} = \frac{(3\sqrt{3} - 1)\pi}{12} \blacksquare$$

**d)** Phần mặt $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ trong mặt trụ $x^2 + y^2 = ax$.

**Lời giải:**

Do tính đối xứng của mặt $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ qua $z = 0$

$S = 2\iint_D \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}\,dxdy$ với $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ và $D = \left\{ x^2 + y^2 \le ax \right\}$

đối xứng qua trục Ox

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ với $\begin{cases} 0 \le r \le a\cos\varphi \\ 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ và $J = r$

$$S = 4a\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} = 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\cos\varphi} \frac{rdr}{\sqrt{a^2 - r^2}} = 4a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin\varphi)d\varphi = 2a^2(\pi - 2) \blacksquare$$

**15)** Tìm diện tích phần hữu hạn của mặt paraboloid $y = x^2 + z^2$ bị cắt đi bởi mặt phẳng $y = 25$.

**Lời giải:**

phần hữu hạn của mặt paraboloid $y = x^2 + z^2$ bị cắt đi bởi mặt phẳng $y = 25$.

chiếu xuống zOx được $\left\{ x^2 + z^2 \le 25 \right\}$

Do tính đối xứng của mặt nên $S = 4\iint_D \sqrt{1 + y_x'^2 + y_z'^2}\,dxdz$

.......................................................................................

với $D=\left\{x^2+z^2\le 25, x\ge 0, z\ge 0\right\}$

Đặt $\begin{cases} z=r\cos\varphi \\ x=r\sin\varphi \end{cases}$ với $\begin{cases} 0\le r\le 5 \\ 0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ và $J=r$

$$S=4\iint\limits_D\sqrt{1+4x^2+4z^2}\,dxdz=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^5 r\sqrt{1+4r^2}\,dr=\frac{\pi}{6}\left(\sqrt{1+4r^2}\right)^3\Big|_0^5=\frac{\pi(101\sqrt{101}-1)}{6}$$

■

**16)** Dùng toạ độ cực tính diện tích đồ thị của hàm $x^2-y^2$ phía trên hình tròn đơn vị.

**Lời giải**:

Do tính đối xứng của mặt $z=x^2-y^2$ nên $S=4\iint\limits_D\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dxdy$

với $D=\left\{x^2+y^2\le 1, x\ge 0, y\ge 0\right\}$

Đặt $\begin{cases} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \end{cases}$ với $\begin{cases} 0\le r\le 1 \\ 0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ và $J=r$

$$S=4\iint\limits_D\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dxdy=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^1 r\sqrt{1+4r^2}\,dr=\frac{\pi}{6}\left(\sqrt{1+4r^2}\right)^3\Big|_0^1=\frac{\pi(5\sqrt{5}-1)}{6}$$ ■

**17)** Mật độ tại mỗi điểm của một microchip hình vuông cạnh 1 cm là $(45+r^2)g/cm^2$ ,
trong đó r là khoảng cách theo cm từ điểm đó đến tâm của chip. Khối lượng của chip là bao nhiêu?

**Lời giải:**

không làm giảm tính tổng quát đặt tâm chip tại gốc tọa độ,nên tại điểm $M(x,y)$ thì ta có

$r=\sqrt{x^2+y^2}$ ,Vậy $m=\iint\limits_D\left(45+x^2+y^2\right)dxdy$ với $D=\left\{-\dfrac{1}{2}\le x,y\le\dfrac{1}{2}\right\}$

.......................................................................................................

$$m = \iint_D (45 + x^2 + y^2)dxdy = 4\int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_0^{\frac{1}{2}} (45 + x^2 + y^2)dy = 4\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{x^2}{2} + \frac{541}{24}\right)dx = \frac{271}{6} \blacksquare$$

**18)** Miếng vàng mỹ nghệ xác định bởi $0 \le x \le 2, 0 \le y \le 2\pi$ (theo cm) và có mật độ khối
lượng $\rho(x, y) = x^2 \sin^2 4y + 3$ $(g / cm^2)$.Nếu vàng được bán với giá 1 triệu VND/g, lượng vàng trong miếng vàng đó trị giá bao nhiêu?

**Lời giải:**

$$m = \iint_D \rho(x, y)dxdy \text{ với } D = \{0 \le x \le 2, 0 \le y \le 2\pi\}$$

$$m = \iint_D (x^2 \sin^2 4y + 3)dxdy = \int_0^2 dx \int_0^{2\pi} (x^2 \sin^2 4y + 3)dy = \pi\int_0^2 (x^2 + 6)dx = \frac{44\pi}{3}(tr) \blacksquare$$

**19)** Tính các tích phân

**a)** $I = \int_0^1 dx \int_1^2 dy \int_2^3 \cos[\pi(x + y + z)]dz$;

**Lời giải:**

$$I = \int_0^1 dx \int_1^2 dy \int_2^3 \cos[\pi(x + y + z)]dz = -\frac{1}{\pi}\int_0^1 dx \int_1^2 \sin[\pi(x + y)]dy - \frac{1}{\pi}\int_0^1 dx \int_1^2 \sin[\pi(x + y)]dy$$

$$= -\frac{2}{\pi}\int_0^1 dx \int_1^2 \sin[\pi(x + y)]dy = \frac{2}{\pi^2}\int_0^1 \cos[\pi x]dx + \frac{2}{\pi^2}\int_0^1 \cos[\pi x]dx = \frac{4}{\pi^2}\int_0^1 \cos[\pi x]dx = 0$$

**b)** $I = \iiint_V x^2 \cos z \, dxdydz$ trong đó

$V = \{(x, y, z) : z = 0, z = \pi, x = 0, y = 0, x + y = 1\}$;

**Lời giải:**

$$I = \iiint_V x^2 \cos z \, dxdydz = \int_0^1 x^2 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{\pi} \cos z \, dz = \int_0^1 x^2 dx \int_0^{1-x} \sin z\Big|_0^{\pi} dy = 0$$

**c)** $I = \iiint_V x^2 y^2 z dxdydz$ trong đó $V = \left\{(x, y, z) : \frac{x^2}{4} + y + \frac{z^2}{9} \le 1\right\}$.

**Lời giải:**

..............................................................................................

Do hàm lấy tích phân lẻ với biến z và $V=\left\{(x,y,z):\dfrac{x^2}{4}+y+\dfrac{z^2}{9}\le 1\right\}$

đối xứng qua mặt phẳng xOy $\Rightarrow I=\iiint\limits_V x^2y^2zdxdydz=0$ ■

**20)** Tính các tích phân

**a)** $I=\iiint\limits_V xydxdydz$ trong đó V là miền phía dưới mặt $x+y-z+1=0$ và trên miền ở
mặt xOy được giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x}, y=0, x=1$;

**Lời giải**:

$$I=\iiint\limits_V xydxdydz=\int_0^1 xdx\int_0^{\sqrt{x}} ydy\int_0^{x+y+1} dz=\int_0^1 xdx\int_0^{\sqrt{x}} y(x+y+1)dy$$

$$=\int_0^1 x\left(\frac{x^2+x}{2}+\frac{x\sqrt{x}}{3}\right)dx=\frac{1}{6}\int_0^1\left(3x^3+3x^2+2x^2\sqrt{x}\right)dx=\frac{1}{6}\left(\frac{3}{4}+1+\frac{4}{7}\right)=\frac{65}{168}$$ ■

**b)** $I=\iiint\limits_V xdxdydz$ trong đó $V=\left\{(x,y,z):4z^2+4y^2\le x, x=4\right\}$;

**Lời giải:**

Đặt $\begin{cases} z=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \\ x=x \end{cases}$ với $\begin{cases} 0\le r\le 1 \\ 0\le\varphi\le 2\pi \\ 4r^2\le x\le 4 \end{cases}$ và $J=r$

$$I=\iiint\limits_V xdxdydz=\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^1 rdr\int_{4r^2}^4 xdx=16\pi\int_0^1 r(1-r^4)dr=\frac{16\pi}{3}$$ ■

**c)** $I=\iiint\limits_V x^2dxdydz$ trong đó

$V=\left\{(x,y,z):\sqrt{9-x^2-y^2}\le z\le\sqrt{16-x^2-y^2}, z\ge 0\right\}$;

**Lời giải:**

.........................................................................................

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases}$ với $\begin{cases} 3 \le r \le 4 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ và $J = r^2\sin\theta$

$$I = \iiint\limits_V x^2 dxdydz = \int_0^{2\pi}\cos^2\varphi d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta d\theta\int_3^4 r^4 dr = \frac{2\pi}{3}\times\frac{781}{5} = \frac{1562\pi}{15} \blacksquare$$

**d)** $I = \iiint\limits_V zdxdydz$ trong đó $V = \left\{(x,y,z): x^2 + y^2 \le z \le 2y\right\}$;

**Lời giải:**

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$ với $\begin{cases} 0 \le r \le 2\sin\varphi \\ 0 \le \varphi \le \pi \\ r^2 \le z \le 2r\sin\varphi \end{cases}$ và $J = r$

$$I = \iiint\limits_V zdxdydz = \int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{2\sin\varphi} rdr\int_{r^2}^{2r\sin\varphi} zdz = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{2\sin\varphi} r\left(4r^2\sin^2\varphi - r^4\right)dr$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(r^4\sin^2\theta - \frac{r^6}{6}\right)\Bigg|_0^{2\sin\varphi} d\varphi = \frac{8}{3}\int_0^{\pi}\sin^6\varphi d\varphi$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{\pi}\left(1 - 3\cos 2\varphi + \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\cos^2 2\varphi + \cos^3\varphi\right)d\varphi = \frac{5\pi}{6}$$

**e)** $I = \iiint\limits_V zydxdydz$ trong đó $V = \left\{(x,y,z): x^2 + y^2 \le 4; 0 \le z \le y\right\}$;

**Lời giải:**

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$ với $\begin{cases} 0 \le r \le 2 \\ 0 \le \varphi \le \pi \\ 0 \le z \le r\sin\varphi \end{cases}$ và $J = r$

$$I = \iiint\limits_V yzdxdydz = \int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\int_0^2 r^2 dr\int_0^{r\sin\varphi} zdz = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin^3\varphi d\varphi\int_0^2 r^4 dr$$

.................................................................................................

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\cos^3\varphi}{3}-\cos\varphi\right]\Bigg|_0^{\pi}\times\frac{32}{5}=\frac{64}{15}\ \blacksquare$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(r^4\sin^2\theta-\frac{r^6}{6}\right)\Bigg|_0^{2\sin\varphi}d\varphi=\frac{8}{3}\int_0^{\pi}\sin^6\varphi d\varphi$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^{\pi}\left(1-3\cos 2\varphi+\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\cos^2 2\varphi+\cos^3\varphi\right)d\varphi=\frac{5\pi}{6}$$

**f)** $I=\iiint\limits_V\left[(x+y)^2-z\right]dxdydz$ trong đó

$$V=\left\{(x,y,z):(z-1)^2\le x^2+y^2, z=0\right\};$$

**Lời giải:**

Đặt $\begin{cases}x=r\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi\\ z=Z+1\end{cases}$ với $\begin{cases}0\le r\le 1\\ 0\le\varphi\le 2\pi\\ -1\le Z\le r\end{cases}$ và $J=r$

$$I=\iiint\limits_V\left[(x+y)^2-Z-1\right]dxdydZ=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1 rdr\int_{-1}^{r}\left[r^2+r^2\sin 2\varphi-Z-1\right]dZ$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1 r\left[r^3+r^2+r^2(r+1)\sin 2\varphi-\frac{r^2-1}{2}-r-1\right]dr=2\pi\left[\frac{1}{5}-\frac{1}{8}-\frac{1}{3}\right]=-\frac{31\pi}{60}$$

**21)** Dùng toạ độ trụ hãy tính các tích phân:

**a)** $I=\iiint\limits_V\sqrt{x^2+y^2}dxdydz$ trong đó

$$V=\left\{(x,y,z):x^2+y^2\le 16, z=-5,\ z=4\right\};$$

**Lời giải:**

Đặt $\begin{cases}x=r\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi\\ z=z\end{cases}$ với $\begin{cases}0\le r\le 4\\ 0\le\varphi\le 2\pi\\ -5\le z\le 4\end{cases}$ và $J=r$

$$I=\iiint\limits_V\sqrt{x^2+y^2}dxdydz=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^4 r^2dr\int_{-5}^{4}dz=384\pi$$

**b)** $I = \iiint\limits_V x^2 dxdydz$ trong đó

$$V = \left\{(x,y,z) : x^2 + y^2 \le 1,\ 4x^2 + 4y^2 \ge z^2,\ z \ge 0\right\};$$

**Lời giải:**

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$ với $\begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le z \le 2r \end{cases}$ và $J = r$

$$I = \iiint\limits_V x^2 dxdydz = \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi d\varphi \int_0^1 r^3 dr \int_0^{2r} dz = \frac{2\pi}{5}$$

**c)** $I = \iiint\limits_V ze^{x^2+y^2} dxdydz$ trong đó

$$V = \left\{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 \le 2,\ z \ge \sqrt{x^2+y^2}\right\};$$

**Lời giải**:

có $\sqrt{x^2+y^2} \le z \le \sqrt{2-(x^2+y^2)}$

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$ với $\begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ r \le z \le \sqrt{2-r^2} \end{cases}$ và $J = r$

$$I = \iiint\limits_V ze^{x^2+y^2} dxdydz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 re^{r^2} dr \int_r^{\sqrt{2-r^2}} zdz = 2\pi\int_0^1 (r - r^3)e^{r^2} dr$$

$$= \pi\int_0^1 e^{r^2} dr^2 - \pi\int_0^1 r^2 e^{r^2} dr^2 = \pi(e-1) - \pi\left(te^t - e^t\right)\Big|_0^1 = \pi(e-2)$$

**d)** $I = \iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2} dxdydz$ trong đó

$$V = \left\{(x,y,z) : x^2 + y^2 \le 2x, 0 \le z \le a\right\}.$$

**Lời giải:**

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$ với $\begin{cases} 0 \le r \le 2\cos\varphi \\ -\dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \le z \le a \end{cases}$ và $J = r$

$$I = \iiint\limits_V z\sqrt{x^2 + y^2}\,dxdydz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} r^2 dr \int_0^a zdz$$

$$= \frac{4a^2}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\varphi d\varphi = \frac{4a^2}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \sin^2\varphi\right) d\sin\varphi = \frac{16a^2}{9}$$

**22)** Tính các tích phân bằng cách đổi sang toạ độ cầu:

**a)** $I = \int_{-3}^{3} dx \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{9-x^2-y^2}} z\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,dz$;

$\Rightarrow V = \left\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \le 9, z \ge 0\right\}$

**Lời giải:**

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases}$ với $\begin{cases} 0 \le r \le 3 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ và $J = r^2\sin\theta$

$$I = \int_{-3}^{3} dx \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{9-x^2-y^2}} z\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\sin\theta \int_0^3 r^4 dr = \frac{243\pi}{5}$$

**b)** $I = \iiint\limits_V (x^2 + y^2)dxdydz$ trong đó

$V = \left\{(x, y, z) : r^2 \le x^2 + y^2 + z^2 \le R^2, z \ge 0\right\}$;

**Lời giải:**

.................................................................................................

Đặt $\begin{cases} x = h\cos\varphi\sin\theta \\ y = h\sin\varphi\sin\theta \\ z = h\cos\theta \end{cases}$ với $\begin{cases} r \le h \le R \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$ và $J = h^2\sin\theta$

$$I = \iiint\limits_V (x^2 + y^2)dxdydz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta d\theta \int_r^R h^4 dh = \frac{2\pi(R^5 - r^5)}{5} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2\theta - 1)d\cos\theta$$

$$= \frac{4\pi(R^5 - r^5)}{15}$$

**c)** $I = \iiint\limits_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dxdydz$ trong đó

$V = \left\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \le 2z\right\};$

**Lời giải:**

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases}$ với $\begin{cases} 0 \le r \le 2\cos\theta \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$ và $J = r^2\sin\theta$

$$I = \iiint\limits_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dxdydz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta \int_0^{2\cos\theta} r^3 dr = -8\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta d\cos\theta = \frac{8\pi}{5}$$

**d)** $I = \iiint\limits_V x^2y^2z^2\, dxdydz$ trong đó $V = \left\{(x, y, z) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1\right\};$

**Lời giải:**

.....................................................................................

Đặt $\begin{cases} x = ar\cos\varphi\sin\theta \\ y = br\sin\varphi\sin\theta \\ z = cr\cos\theta \end{cases}$ với $\begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le \theta \le \pi \end{cases}$ và $J = abcr^2\sin\theta$

$$I = \iiint_V x^2y^2z^2\, dxdydz = \frac{a^3b^3c^3}{4}\int_0^{2\pi} \sin^2 2\varphi d\varphi \int_0^{\pi} \cos^2\theta\sin^5\theta d\theta \int_0^1 r^8 dr$$

$$= -\frac{a^3b^3c^3\pi}{36}\int_0^{\pi} \cos^2\theta\sin^4\theta d\cos\theta = -\frac{a^3b^3c^3\pi}{36}\int_0^{\pi} \cos^2\theta\left(1-\cos^2\theta\right)^2 d\cos\theta = \frac{4a^3b^3c^3\pi}{945}$$

**e)** $I = \iiint_V \sqrt{x^2+4y^2+9z^2}\, dxdydz$

trong đó $V = \left\{(x,y,z) : x^2+4y^2+9z^2 \le 1, x, y, z \ge 0\right\}$.

**Lời giải:**

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = \frac{1}{2}r\sin\varphi\sin\theta \\ z = \frac{1}{3}r\cos\theta \end{cases}$ với $\begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$ và $J = \frac{1}{6}r^2\sin\theta$

$$I = \iiint_V \sqrt{x^2+4y^2+9z^2}\, dxdydz = \frac{1}{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta \int_0^1 r^3 dr = \frac{\pi}{48}$$

**23)** Tìm thể tích của vật thể V:

**a)** V được giới hạn bởi

$\left(x^2+y^2+z^2\right)^2 = az(x^2+y^2)$, $a > 0; x \ge 0; y \ge 0; z \ge 0$;

**Lời giải:**

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases}$ với $\begin{cases} 0 \le r \le a\cos\theta\sin^2\theta \\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$ và $J = r^2\sin\theta$

$$V=\iiint\limits_V dxdydz=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\theta\int_0^{a\cos\theta\sin^2\theta}r^2dr=\frac{\pi a^3}{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\sin^7\theta d\theta$$

$$=\frac{\pi a^3}{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\sin^2\theta\right)\sin^7\theta d\sin\theta=\frac{\pi a^3}{6}\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{10}\right)=\frac{\pi a^3}{240}$$

**b)** V được giới hạn bởi $z=6-x^2-y^2$ và mặt $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

**Lời giải:**

Phải tính $V=\iiint\limits_V dxdydz$ với $V=\left\{\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 6-x^2-y^2\right\}$

Hai mặt cắt nhau theo đường $x^2+y^2=4$ ở trên mặt phẳng $z=2$

Đặt $\begin{cases}x=r\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi\\ z=z\end{cases}$ với $\begin{cases}r\le z\le 6-r^2\\ 0\le\varphi\le 2\pi\\ 0\le r\le 2\end{cases}$ và $J=r$

$$V=\iiint\limits_V dxdydz=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2 rdr\int_r^{6-r^2}dz=2\pi\int_0^2 r\left(6-r^2-r\right)dr=2\pi\left[3r^2-\frac{r^4}{4}-\frac{r^3}{3}\right]\Bigg|_0^2=\frac{32\pi}{3}$$

**24)** Dùng toạ độ trụ hoặc toạ độ cầu tuỳ theo mức độ tiện lợi tìm thể tích và trọng tâm

của vật thể nằm trên mặt nón $z=\sqrt{x^2+y^2}$ và nằm dưới mặt cầu $x^2+y^2+z^2=1$.

**Lời giải:**

+) Phải tính $V=\iiint\limits_V dxdydz$ với $V=\left\{\sqrt{x^2+y^2}\le z\le\sqrt{1-x^2-y^2}\right\}$

Hai mặt cắt nhau theo đường $x^2+y^2=\frac{1}{2}$ ở trên mặt phẳng $z=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Đặt $\begin{cases}x=r\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi\\ z=z\end{cases}$ với $\begin{cases}r\le z\le\sqrt{1-r^2}\\ 0\le\varphi\le 2\pi\\ 0\le r\le\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$ và $J=r$

$$V=\iiint\limits_V dxdydz=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{\sqrt2}{2}}rdr\int_r^{\sqrt{1-r^2}}dz=2\pi\int_0^{\frac{\sqrt2}{2}}r\left(\sqrt{1-r^2}-r\right)dr$$

$$=-\frac{2\pi}{3}\left[\left(\sqrt{1-r^2}\right)^3+r^3\right]\Bigg|_0^{\frac{\sqrt2}{2}}=\frac{(2-\sqrt2)\pi}{3}$$

+) Có $X_G=\frac{1}{V}\iiint\limits_V xdxdydz;\quad Y_G=\frac{1}{V}\iiint\limits_V ydxdydz;\quad Z_G=\frac{1}{V}\iiint\limits_V zdxdydz$

$$\Rightarrow X_G=\iiint\limits_V xdxdydz=\int_0^{2\pi}\cos\varphi d\varphi\int_0^{\frac{\sqrt2}{2}}r^2dr\int_r^{\sqrt{1-r^2}}dz=0;$$

$$Y_G=\iiint\limits_V ydxdydz=\int_0^{2\pi}\sin\varphi d\varphi\int_0^{\frac{\sqrt2}{2}}r^2dr\int_r^{\sqrt{1-r^2}}dz=0$$

$$Z_G=\iiint\limits_V zdxdydz=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{\sqrt2}{2}}rdr\int_r^{\sqrt{1-r^2}}zdz=\pi\int_0^{\frac{\sqrt2}{2}}r\left(1-2r^2\right)dr=\frac{\pi}{8}$$

$$\Rightarrow (X_G,Y_G,Z_G)=\left(0,0,\frac{6+3\sqrt2}{16}\right)$$

**25)** Tìm thể tích của vật thể giới hạn bởi mặt đóng $\left(x^2+y^2+z^2\right)^2=x$.

**Lời giải:**

Đặt $\begin{cases}x=r\cos\varphi\sin\theta\\ y=r\sin\varphi\sin\theta\\ z=r\cos\theta\end{cases}$ với $\begin{cases}0\le r\le\sqrt[3]{\cos\varphi\sin\theta}\\ -\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}\\ 0\le\theta\le\pi\end{cases}$ và $J=r^2\sin\theta$

$$V=\iiint\limits_V dxdydz=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^{\sqrt[3]{\cos\varphi\sin\theta}}r^2dr=\frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi d\varphi\int_0^{\pi}\sin^2\theta d\theta=\frac{\pi}{3}$$

**26)** Tìm khối lượng và trọng tâm của hình lập phương cho bởi

..........................................................................................

$0 \le x \le 12,\ \ 0 \le x \le 12,\ 0 \le x \le 12$ và hàm mật độ $\rho(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$.

**Lời giải:**

**+)** $m = \iiint\limits_V \rho(x,y,z)dxdydz = \int\limits_0^{12} dx \int\limits_0^{12} dy \int\limits_0^{12} (x^2 + y^2 + z^2)dz$

$$= 12\int\limits_0^{12} dx \int\limits_0^{12} (x^2 + y^2 + 48)dy = 12^2 \int\limits_0^{12} (x^2 + 96)dx = 12^5$$

**+)** Có

$$X_G = \frac{1}{m}\iiint\limits_V x\rho(x,y,z)dxdydz;\ Y_G = \frac{1}{m}\iiint\limits_V y\rho(x,y,z)dxdydz; Z_G = \frac{1}{m}\iiint\limits_V z\rho(x,y,z)dxdydz$$

$$X_G = \iiint\limits_V x\rho(x,y,z)dxdydz = \int\limits_0^{12} dx \int\limits_0^{12} dy \int\limits_0^{12} x(x^2 + y^2 + z^2)dz$$

$$= 12\int\limits_0^{12} dx \int\limits_0^{12} x(x^2 + y^2 + 48)dy = 12^2 \int\limits_0^{12} x(x^2 + 96)dx = 7 \times 12^5$$

do vai trò x,y,z tương đương nhau nên : $\left(X_G, Y_G, Z_G\right) = \left(7,7,7\right)$

**27)** Tìm khối lượng và trọng tâm của vật thể:

**a)** nằm dưới mặt phẳng $z = x + y + 1$ và trên miền trong mặt phẳng Oxy giới hạn bởi

các đường cong $y = \sqrt{x}, y = 0, x = 1$ và với mật độ hằng số.

**Lời giải:**

$m = \rho\iiint\limits_V dxdydz = \rho V$ với $V = \left\{0 \le x \le 1, 0 \le y \le \sqrt{x}, 0 \le z \le x + y + 1\right\}$

$$V = \iiint\limits_V dxdydz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{x}} dy \int\limits_0^{x+y+1} dz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{x}} (x + y + 1)dy = \int\limits_0^1 (x\sqrt{x} + \frac{x}{2} + \sqrt{x})dx = \frac{79}{60}$$

$$X_G = \frac{1}{V}\iiint\limits_V xdxdydz;\ Y_G = \frac{1}{V}\iiint\limits_V ydxdydz; Z_G = \frac{1}{V}\iiint\limits_V zdxdydz$$

$$X_G = \iiint\limits_V xdxdydz = \int\limits_0^1 xdx \int\limits_0^{\sqrt{x}} dy \int\limits_0^{x+y+1} dz = \int\limits_0^1 xdx \int\limits_0^{\sqrt{x}} (x + y + 1)dy$$

$$= \int_0^1 x(x\sqrt{x} + \frac{x}{2} + \sqrt{x})dx = \frac{179}{210}$$

$$Y_G = \iiint_V ydxdydz = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x}} ydy \int_0^{x+y+1} dz = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x}} y(x+y+1)dy$$

$$= \int_0^1 \left( \frac{x\sqrt{x}}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} \right) dx = \frac{99}{180}$$

$$Z_G = \iiint_V zdxdydz = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x}} dy \int_0^{x+y+1} zdz = \frac{1}{2}\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x}} (x+y+1)^2 dy$$

$$= \frac{1}{6}\int_0^1 \left[ (x+\sqrt{x}+1)^3 - (x+1)^3 \right] dx$$

$$= \frac{1}{6}\int_0^1 \left[ 3(x+1)^2\sqrt{x} + 3x(x+1) + x\sqrt{x} \right] dx = \frac{571}{420}$$

$$\Rightarrow (X_G, Y_G, Z_G) = \left( \frac{358}{553}, \frac{33}{79}, \frac{571}{553} \right)$$

**b)** Trong góc phần tám thứ nhất giới hạn bởi mặt trụ $x^2 + y^2 = 1$ và các mặt phẳng
$y = z$, $x = 0$, $z = 0$ và với hàm mật độ $\rho(x, y, z) = x + y + z + 1$ .

**Lời giải:**

$m = \iiint_V \rho(x, y, z)dxdydz$ với $V = \left\{ x^2 + y^2 \le 1, 0 \le z \le y, x \ge 0 \right\}$

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$ với $\begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \\ 0 \le z \le r\sin\varphi \end{cases}$ và $J = r$

$$m = \iiint_V (x+y+z+1)dxdydz = \int_0^1 rdr \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{r\sin\varphi} (1 + r\cos\varphi + r\sin\varphi + z)dz$$

..................................................................................

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 r\,dr\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(2r\sin\varphi+r^2\sin 2\varphi+3r^2\sin^2\varphi\right)d\varphi$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 r\left(2r+r^2+\frac{3\pi r^2}{4}\right)dr=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{3\pi}{16}\right)=\frac{9\pi+44}{96}$$

$$X_G=\frac{1}{m}\iiint_V x\rho(x,y,z)dxdydz\,;\;\; Y_G=\frac{1}{m}\iiint_V y\rho(x,y,z)dxdydz\,;$$

$$Z_G=\frac{1}{m}\iiint_V z\rho(x,y,z)dxdydz\,;$$

$$X_G=\iiint_V x\rho(x,y,z)dxdydz=\iiint_V x(x+y+z+1)dxdydz$$

$$=\int_0^1 r^2dr\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi d\varphi\int_0^{r\sin\varphi}(1+r\cos\varphi+r\sin\varphi+z)dz$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 r^2dr\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(2r\sin\varphi+2r^2\sin\varphi\cos\varphi+3r^2\sin^2\varphi\right)\cos\varphi d\varphi$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 r^2\left(r+\frac{5r^2}{3}\right)dr=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}+\frac{5}{15}\right)=\frac{7}{24}$$

$$Y_G=\iiint_V y\rho(x,y,z)dxdydz=\iiint_V y(x+y+z+1)dxdydz$$

$$=\int_0^1 r^2dr\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi d\varphi\int_0^{r\sin\varphi}(1+r\cos\varphi+r\sin\varphi+z)dz$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 r^2dr\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(2r\sin\varphi+2r^2\sin\varphi\cos\varphi+3r^2\sin^2\varphi\right)\sin\varphi d\varphi$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 r^2dr\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi r}{2}+\frac{8r^2}{3}\right)d\varphi=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{8}+\frac{8}{15}\right)=\frac{15\pi+64}{240}$$

$$Z_G = \iiint\limits_V z\rho(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_V z\rho(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_V z(x+y+z+1)dxdydz$$

$$= \int_0^1 rdr\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{r\sin\varphi} z(1+r\cos\varphi + r\sin\varphi + z)dz$$

$$= \frac{1}{6}\int_0^1 rdr\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(3r^2\sin^2\varphi + 3r^3\cos\varphi\sin^2\varphi + 5r^3\sin^3\varphi\right)d\varphi$$

$$= \frac{1}{6}\int_0^1 r\left(\frac{3\pi r^2}{4} + \frac{13r^3}{3}\right)dr = \frac{1}{6}\left(\frac{3\pi}{16} + \frac{13}{15}\right) = \frac{45\pi + 208}{96\times 15}$$

$$\Rightarrow (X_G, Y_G, Z_G) = \left(\frac{28}{9\pi + 44}, \frac{2(15\pi + 64)}{5(9\pi + 44)}, \frac{45\pi + 208}{15(9\pi + 44)}\right)$$

**28)** Viết ra công thức mà không tính giá trị, tích phân biểu diễn khối lượng, trọng tâm

của nửa mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \ge 0$ với hàm mật độ $\rho(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

**Lời giải:**

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\theta\sin\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$ với $\begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ và $J = r^2\sin\varphi$

$$m = \iiint\limits_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}dxdydz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi d\varphi \int_0^1 r^3dr$$

$$X_G = \frac{1}{m}\iiint\limits_V x\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}dxdydz = 0;\ \ Y_G = \frac{1}{m}\iiint\limits_V y\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}dxdydz = 0;$$

do hàm lẻ với từng biến x,y và miền lấy tích phân đối xứng qua hai trục Ox,Oy;

$$Z_G = \frac{1}{m}\iiint_V z\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \sin\varphi d\varphi \int_0^1 r^4 dr$$

# TÍCH PHÂN ĐƯỜNG MẶT

**1)** Tính các tích phân

a) $I = \int_L \frac{y}{x} ds \; ; x = t^4 ; y = t^3 \;\; 0.5 \le t \le 1$

Giải.

$$I = \int_L \frac{y}{x} ds = \int_{0.5}^{1} \frac{\sqrt{16t^6+9t^4}}{t} dt = \frac{1}{32}\int_{0.5}^{1} \sqrt{16t^2+9}\, d(16t^2+9)$$

$$= \frac{1}{48}\left(16t^2+9\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_{0.5}^{1} = \frac{1}{48}\left(125 - 13\sqrt{13}\right)$$

b) $I = \int_L x^3 z ds \; ; x = 2\sin t ; y = t ; z = 2\cos t ; 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

Giải.

$$I = \int_L x^3 z ds = 16\sqrt{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t \cos t\, dr = 4\sqrt{5}\sin^4 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 4\sqrt{5}$$

c) $I = \int_L xy^4 ds$ ; Với L là nửa bên trái đường $x^2 + y^2 = 16$

Giải.

Đặt $x = 4\cos t \; ; y = 4\sin t$ với $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$

$$I = \int_L xy^4 ds = 4^6 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin^4 t dt = 2.4^6.\frac{1}{5}\sin^5 t\Big|_0^{\pi/2} = 2.4^6.\frac{1}{5}$$

d) $I = \int_L xe^{yz} ds$ Với L là đoạn thẳng nối (0;0;0) đến (1;2;3)

Phương trình đường thẳng $x = t; y = 2t; z = 3t \ (0 \le t \le 1)$

$$I = \int_L xe^{yz}ds = \sqrt{14}\int_0^1 te^{6t^2}dt = \frac{\sqrt{14}}{12}e^{6t^2}\Big|_0^1 = \frac{\sqrt{14}}{12}(e^6 - 1)$$

**2)** Tìm tọa độ trọng tâm của dây đinh ốc trụ
$x = 2\cos t,\ y = 2\sin t,\ x = 3t \quad 0 \le t \le 2\pi$ với mật độ $\rho = \text{cosnt}$.

Giải.

Từ $X_G = \frac{\rho}{m}\int_L xdS; Z_G = \frac{\rho}{m}\int_L zdS;\ Y_G = \frac{\rho}{m}\int_L ydS$ và $m = \rho\int_L dS$

Vì đinh ốc trụ nên $0 \le t \le 2\pi$

$$m = \rho\int_L dS = \rho\int_0^{2\pi}\sqrt{13}dt = 2\pi\rho\sqrt{13}$$

$$X_G = \frac{\rho}{m}\int_L xdS = \frac{1}{2\pi\sqrt{13}}.\sqrt{13}\int_0^{2\pi}2\cos tdt = 0 = Y_G; Z_G = \frac{\rho}{m}\int_L zdS = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}3tdt = 3\pi$$

Vậy tọa độ trọng tâm $\left(X_G, Y_G, Z_G\right) = (0,0,3\pi)$

**3)** Tìm tọa độ trọng tâm của và khối lượng của dây mảnh $x^2 + y^2 = 4$ với $x \ge 0$ với mật độ $\rho = \text{cosnt}$

Giải.

Đặt $x = 2\cos t; y = 2\sin t$ với $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$

$$m = \rho\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}2dt = 2\rho\pi;$$

$$X_G = \frac{\rho}{m}\int_L xdS = \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}4\cos tdt = \frac{2}{\pi}$$

$$Y_G = \frac{\rho}{m}\int_L ydS = \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}4\sin tdt = 0$$

Vậy tọa độ trọng tâm $\left(X_G, Y_G\right) = \left(\frac{2}{\pi}, 0\right)$

**4)** Cho trường vectơ $\vec{F} = (P;Q)$ có hướng là những đường tròn đồng tâm với tâm là
gốc tọa độ,xác định $I = \int\limits_L Pdx + Qdy$ mang dấu gì ? Khi L được xác định:

a) L là là đoạn thẳng thẳng từ $(-3,-3)$ đến $(3,3)$

b) L là là đoạn thẳng thẳng từ $(-3,-3)$ đến $(-3,3)$

c) C là vòng tròn đ/ hướng ngược kim đồng hồ với bán kính 3, tâm tại gố tọa độ.

Giải.

Từ $I = \int\limits_L Pdx + Qdy = \int\limits_L \vec{F}.\vec{v}ds$ và $\vec{F}.\vec{v} = |\vec{F}||\vec{v}|\cos\left(\vec{F}, \vec{v}\right)$ ở đó $\vec{v}$ là vec tơ chỉ phương của tiếp tuyến,nên

a) $I = \int\limits_L Pdx + Qdy = 0$ vì góc $\left(\widehat{\vec{F}, \vec{v}}\right) = \frac{\pi}{2}$

b) $I = \int\limits_L Pdx + Qdy \geq 0$ vì góc $\left(\widehat{\vec{F}, \vec{v}}\right)$ nhọn

c) $I = \int\limits_L Pdx + Qdy < 0$ vì góc $\left(\widehat{\vec{F}, \vec{v}}\right) = \pi$

**5)** Tính các tích phân

a) $I = \int\limits_L e^{x-1}dx + xydy\ ; x = t^2 ; y = t^3 \quad 0 \leq t \leq 1$

Giải.

$$I = \int\limits_L e^{x-1}dx + xydy = \int\limits_0^1 \left(2te^{t^2-1} + 3t^7\right)dt = \left(e^{t^2-1} + \frac{3t^8}{8}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{11 - 8e^{-1}}{8}$$

b) $I = \int\limits_L xydx + (x - y)dy$ với L là đường gấp khúc nối từ (0;0) đến (2;0) rồi đến (3;2).

Giải.

Phương trình đường từ (0;0) đến (2;0): $y = 0 \quad (0 \leq x \leq 2)$

Phương trình đường từ (2;0) đến (3;2): $y = 2x - 4 \ (2 \leq x \leq 3)$

$$I=\int_L xydx+(x-y)dy=\int_0^2 0dx+\int_2^3\left(2x^2-4x+8-2x\right)dx=\left.\left(\frac{2x^3}{3}-3x^2+8x\right)\right|_2^3$$

**6)** Hãy chứng tỏ $I=\int_L 2x\sin ydx+(x^2\cos y-3y^2)dy$ không phụ thuộc đường lấy tích phân,từ đó tính tích phân khi L là đường bất kỳ nối (-1;0) đến (5;1).
Giải.

Xét $\left(x^2\cos y-3y^2\right)'_x=\left(2x\sin y\right)'_y \Leftrightarrow 2x\cos y=2x\cos y\ \ \forall x,y$

Chọn đường nối (-1;0) đến (5;1)là đường đi từ (- 1,0) đến (5,0) sau đó đến (5,1).

$$I=\int_{-1}^5 0dx+\int_0^1(25\cos y-3y^2)dy=25\sin 1-1$$

**7)** Hãy chứng tỏ tích phân $I=\int_{\overset{\frown}{AB}}\frac{(1-x^2)dy+2xydx}{(1-x^2)^2+y^2}$ không phụ thuộc đường lấy tích phân ở trong miền đơn liên $D\subset\mathbb{R}^2-\{(\pm1;0)\}$,từ đó tính tích phân khi cung $\overset{\frown}{AB}$ là đường bất kỳ không cắt Ox nối A(0;0) đến B(1;1).
Giải.

$$\left[\frac{1-x^2}{(1-x^2)^2+y^2}\right]'_x=\left[\frac{2xy}{(1-x^2)^2+y^2}\right]'_y$$

$\Rightarrow -2x\left[(1-x^2)^2+y^2\right]+4x(1-x^2)^2=2x\left[(1-x^2)^2+y^2\right]-4xy^2$ luôn đúng

Chọn $\overset{\frown}{AB}$ là đường tròn $x^2+y^2=R^2$

Khi R < 1 thì $I=\int_{\overset{\frown}{AB}}\frac{(1-x^2)dy+2xydx}{(1-x^2)^2+y^2}=0$ vì theo Green.

Khi R > 2 thì

$$I=\oint_{C\cup C_1\cup C_{-1}}-\oint_{C_1}-\oint_{C_{-1}}$$

$$I=\int_{x^2+y^2=R^2}\frac{(1-x^2)dy+2xydx}{(1-x^2)^2+y^2}=\oint_{C_1}\frac{(1-x^2)dy+2xydx}{(1-x^2)^2+y^2}+\oint_{C_{-1}}\frac{(1-x^2)dy+2xydx}{(1-x^2)^2+y^2}$$

Trong đó $C_{\pm1}$ là đường kín đủ nhỏ bao $(\pm1,0)$ tương ứng

Ta có thể viết pt đường kín $\begin{cases} 1-x^2 = \varepsilon\cos t \\ y \quad = \varepsilon\sin t \end{cases}$

khi $0 \le t \le 2\pi$ và $\varepsilon$ đủ nhỏ

$$\oint_{C_1} \frac{(1-x^2)dy + 2xydx}{(1-x^2)^2 + y^2} = \oint_{C_{-1}} \frac{(1-x^2)dy + 2xydx}{(1-x^2)^2 + y^2} = \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon^2(\cos^2 t + \sin^2 t)}{\varepsilon^2} = 2\pi$$

$$I = \int_{\overset{\frown}{AB}} \frac{(1-x^2)dy + 2xydx}{(1-x^2)^2 + y^2} = 4\pi$$

**8)** Tìm giá trị $\alpha$ để tích phân $I = \int_L (1 + y + y^2 \sin 2x)dx + (x + \alpha y\cos^2 x)dy$

không phụ thuộc đường lấy tích phân.
Giải.

$$\left(1 + y + y^2 \sin 2x\right)'_y = \left(x + \alpha y\cos^2 x\right)'_x \quad \forall x, y$$

$$\Leftrightarrow 1 + 2y\sin 2x = 1 - \alpha y\sin 2x \Leftrightarrow \alpha = -2 \quad (\forall x, y)$$

**9)** Tính công do trường lực $\vec{F} = x\vec{i} + (y+2)\vec{j}$ dịch chuyển một vật dọc theo cung xycloit $x = t - \sin t; y = 1 - \cos t; 0 \le t \le 2\pi$

Giải.

Từ công thức tính công của trường $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}$ dọc theo L

$A = \int_L (P\cos\alpha + Q\sin\alpha)ds = \int_L Pdx + Qdy$ ở đó $(\cos\alpha, \sin\alpha) = \vec{n}$ là vec tơ tiếp tuyến tại (x,y) của đường L.

Nên $A = \int_L xdx + (y+2)dy = \int_0^{2\pi} \left[(t - \sin t)(1 - \cos t) + (3 - \cos t)\sin t\right]dt = 2\pi^2$

**10)** Tính công do trường lực $\vec{F} = (xz; yx; yz)$ dịch chuyển một vật dọc theo đường $x = t^2; y = -t^3; z = t^4 \quad 0 \le t \le 1$

Giải.

$$A = \int_L (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)ds = \oint_L Pdx + Qdy + Rdz$$

Trong đó $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \vec{n}$ là vec tơ tiếp tuyến tại (x,y,z) của đường L.

$$A=\int_L xzdx+yxdy+yzdz=\int_0^1\left(2t^7+3t^7-4t^{10}\right)dt=\frac{5}{8}-\frac{4}{11}=\frac{23}{88}$$

**11)** Tính công do trường lực $\vec{F}=(x^2y^3;y^2x^3)$ dịch chuyển một vật từ A(0;0) đến B(2;1).

Giải.

Chọn đường đi từ A(0;0) đến B(2;1) là đường $y=\frac{x}{2}$ với $(0\le x\le 2)$.

$$A=\int_L x^2y^3dx+y^2x^3dy=\int_0^2\frac{x^5}{4}dx=\frac{2^6}{24}=\frac{8}{3}$$

**12)** Một người nặng 160 lb (cân Anh) mang chiếc thùng sơn 25 lb đi lên trên theo một chiếc thang gác hình xoắn ốc bao quanh một chiếc tháp với bán kính 20ft. Giả sử tháp cao 90 ft và người đó leo đúng 3 vòng để lên tới đỉnh, công sản ra để thắng trọng lực là bao nhiêu?

Giải.

Thiết lập một trường véc tơ bài toán đưa về tính công của trường khi dịch chuyển một vật (tổng trọng lượng của người và thùng sơn)dọc theo đường xoắn ốc $x=20\cos t;y=20\sin t;z=3t\ (0\le t\le 2\pi)$ , công do $\vec{F}=(0,0,-185.g)$ ở đó g là gia tốc trọng trường và là trường thế nên công A được xác định:

**13)** Mô tả các tập mở liên thông

$\{(x;y):x>0,y>0\};\{(x;y):x\ne 1\};\left\{(x;y):1<x^2+y^2<9\right\}$

Giải.

$\{(x;y):x>0,y>0\}$ góc thứ nhất của mặt phẳng tọa độ không kể các trục.

$\left\{(x;y):1<x^2+y^2<9\right\}$ :miền vành khăn giữa 2 đường tròn $x^2+y^2=9$ và $x^2+y^2=1$ (không kể biên) $\{(x;y):x\ne 1\}=\mathbb{R}^2-\{x=1\}$

**14)** Tính các tích phân đường theo hai cách:+trực tiếp;+Green

a) $I=\oint_L xy^2dx+x^3dy$ với L là biên hình chữ nhật ABCD:A(0;0),B(2;0),C(2;3),D(0;3)

Giải.

Cách 1

$$I=\oint_L xy^2dx+x^3dy=\int_{AB}+\int_{BC}+\int_{CD}+\int_{DA}=\int_0^2 0dx+\int_0^3 8dy+\int_2^0 9xdx+\int_3^0 0dy=6$$

Cách 2

$$I=\oint_L xy^2dx+x^3dy=\iint_G\left(3x^2-2xy\right)dxdy=\int_0^2 dx\int_0^3\left(3x^2-2xy\right)dy=\int_0^2\left(9x^2-9x\right)dx=6$$

b) $I=\oint_L xydx+x^2y^3dy$ với L là biên của tam giác ABC:A(0;0).B(1;0),C(1;2)

Cách 1

$$I=\oint_L xydx+x^2y^3dy=\int_{AB}+\int_{BC}+\int_{CA}=\int_0^1 0dx+\int_0^2 y^3dy+\int_1^0(2x^2+16x^5)dx=4-\frac{10}{3}=\frac{2}{3}$$

Cách 2

$$I=\oint_L xydx+x^2y^3dy=\iint_G(2xy^3-x)dx=\int_0^1 xdx\int_0^{2x}(2y^3-1)dy=\int_0^1(8x^5-2x^2)dx=\frac{2}{3}$$

---

c) $I=\oint_{\overset{\frown}{AB}}(5x^4+4y)dx-(4y^3+3x)dy$ với là cung $x=\sqrt{a^2-y^2}$ từ -a đến a (a>0)

Cách 1 Đặt $x=a\cos\varphi;y=a\sin\varphi$ và $(-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2})$

$$I=\oint_{\overset{\frown}{AB}}(5x^4+4y)dx-(4y^3+3x)dy$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[-a\left(5a^4\cos^4t+4a\sin t\right)\sin t-a\left(4a^3\sin^3t+3a\cos t\right)\cos t\right]dt$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[-2a^2-\frac{3a^2}{2}\right]dt=-\frac{7a^2\pi}{2}$$

Cách 2 Bổ sung vào đường $x=0\quad -a\le y\le a$ theo chiều từ (0,a) đến (0.-a)

$$I=\oint\limits_{\overset{\frown}{AB}}(5x^4+4y)dx-(4y^3+3x)dy=-\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\le a^2\\ x\ge 0}}(3+4)dxdy-\int\limits_{-a}^{a}4y^3dy=-\frac{7\pi a^2}{2}$$

---

**15)** Tính các tích phân đường theo công thức Green theo hướng dương

a) $I=\oint\limits_L e^y dx+2xe^y dy$ với L là hình vuông có các cạnh $x=0; x=1; y=0; y=1$

Giải.

$$I=\oint\limits_L e^y dx+2xe^y dy=\iint\limits_G e^y dxdy=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^1 e^y dy=e-1$$

b) $I=\oint\limits_L y^3dx-x^3dy$ với L là đường tròn $x^2+y^2=4$

Giải.

$$I=\oint\limits_L y^3dx-x^3dy=-3\iint\limits_{x^2+y^2\le 4}(x^2+y^2)dxdy=-3\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^2 r^3dr=-24\pi$$

Với $x=r\cos\varphi; y=r\sin\varphi$ và $(0\le\varphi\le 2\pi; 0\le r\le 2)$

c) $I=\oint\limits_L y^3dx-x^3dy$ với L gồm đoạn từ (-2;0) đến (2;0) và nửa trên đường tròn $x^2+y^2=4$

Giải.

$$I=\oint\limits_L y^3dx-x^3dy=-3\iint\limits_{x^2+y^2\le 4}(x^2+y^2)dxdy=-3\int\limits_0^{\pi}d\varphi\int\limits_0^2 r^3dr=-12\pi$$

Với $x=r\cos\varphi; y=r\sin\varphi$ và $(0\le\varphi\le\pi; 0\le r\le 2)$

d) $I=\oint\limits_L (y+e^{\sqrt{x}})dx+(2x+\cos y^2)dy$ với L là biên của miền giới hạn bởi các parabol $y=x^2; x=y^2$

Giải.

$$I=\oint\limits_L (y+e^{\sqrt{x}})dx+(2x+\cos y^2)dy=\iint\limits_G dxdy=\int\limits_0^1 dx\int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}}dy=\int\limits_0^1\left(\sqrt{x}-x^2\right)dx=\frac{1}{3}$$

**16)** Dùng công thức Green để tính các tích phân sau theo chiều dương

......................................................................................................

a) $I=\oint\limits_{L} x^2ydx-y^2xdy$ với L là biên của miền giới hạn bởi $x^2+y^2=4$

Giải.

$$I=\oint\limits_{L} x^2ydx-y^2xdy=-\iint\limits_{x^2+y^2\le 4}(x^2+y^2)dxdy=-\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2 r^3dr=-8\pi$$

với $x=r\cos\varphi; y=r\sin\varphi$ và $(0\le\varphi\le 2\pi; 0\le r\le 2)$

b) $I=\oint\limits_{L} x^3ydx-xdy$ với L là biên của miền giới hạn bởi $x^2+y^2=1$

Giải.

$$I=\oint\limits_{L} x^3ydx-xdy=-\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}(1+x^3)dxdy=-\pi$$

(hàm lẻ với biến x,miền lấy tích phân đối xứng)

c) $I=\oint\limits_{L}(ye^{xy}+2x\cos y-x^2y)dx+(xe^{xy}-x^2\sin y+xy^2+xy)dy$

với L là biên của miền giới hạn bởi $x^2+y^2-2x=0$

Giải.

$$I=\oint\limits_{L}(ye^{xy}+2x\cos y-x^2y)dx+(xe^{xy}-x^2\sin y+xy^2+xy)dy$$

$$=\iint\limits_{(x-1)^2+y^2\le 1}\left(y+y^2-2x\sin y+xye^{xy}+e^{xy}-xye^{xy}-e^{xy}+2x\sin y+x^2\right)dxdy$$

$$=\iint\limits_{(x-1)^2+y^2\le 1}\left(y^2+x^2\right)dxdy=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\left(r^2+2r\cos\varphi+1\right)rdr=2\pi\int_0^1\left(r^2+1\right)rdr=\frac{3\pi}{2}$$

Với $x=1+r\cos\varphi; y=r\sin\varphi$ và $(0\le\varphi\le 2\pi; 0\le r\le 1)$

d) $I=\oint\limits_{\overset{\frown}{OA}}(-x^2y-2x+y)dx+(xy^2+x-2y)dy$ với $\overset{\frown}{OA}$ là cung từ O(0;0) đến A(0;2) của đường $x^2+y^2-2y=0\,(x\ge 0)$

Giải.

Bổ sung vào đường $x=0\ (0\le y\le 2)$ theo chiều từ A(0;2) đến O(0;0)

$$I=\oint_{\overset{\frown}{OA}}(-x^2y-2x+y)dx+(xy^2+x-2y)dy=\iint_{\substack{x^2+(y-1)^2\le 1\\ x\ge 0}}(y^2+x^2)dxdy-\int_0^2 2ydy$$

$$=\iint_{\substack{x^2+(y-1)^2\le 1\\ x\ge 0}}\left(y^2+x^2\right)dxdy-\int_0^2 2ydy=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^1\left(r^2+2r\sin\varphi+1\right)rdr-4$$

$$=\pi\int_0^1\left(r^2+1\right)rdr-4=\frac{3\pi-16}{4}$$

Với $x=r\cos\varphi; y=1+r\sin\varphi$ và $(-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}; 0\le r\le 1)$

**17)** Kiểm tra các trường véc tơ sau đây là trường thế. Tìm hàm f sao cho $\vec{F}=\overrightarrow{\text{grad}f}$

a) $\vec{F}=(yz;zx;yx)$

Giải.

$\vec{F}=(P;Q;R)$ là trường thế khi và chỉ khi

$$\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z},\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)=\overrightarrow{\text{rot}}\vec{F}=\vec{0}\Leftrightarrow\left(x-x,y-y,z-z\right)=\vec{0}$$

Hàm thế vị f(x.y.z) được xác định

$$f(x,y,z)=\int_{AB}yzdx+zxdy+yxdz+C \text{ chọn } A(0,0,0);B(x,y,z)$$

$$f(x,y,z)=\int_{AB}yzdx+zxdy+yxdz+C=\int_0^x 0dx+\int_0^y 0dy+\int_0^z xydz+C=xyz+C$$

b) $\vec{F}=(2xy;x+2zy;y^2)$

Giải.

$$\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z},\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)=\overrightarrow{\text{rot}}\vec{F}=\vec{0}\Leftrightarrow\left(2y-2y,0,1+2y-2x\right)\ne\vec{0}$$

$\vec{F}=(2xy;x+2zy;y^2)$ không là trường thế.

**18)** Tính các tích phân mặt

a) $I=\iint_S x^2yzdS$ với S là phần mặt phẳng $z=1+2x+3y$ xác định trong

$\{[0,3]\times[0,2]\}$

Giải.

$$I=\iint_S x^2yzdS=\sqrt{14}\iint_{\substack{0\le x\le 3\\0\le y\le 2}} x^2y(1+2x+3y)dxdy$$

$$=\sqrt{14}\int_0^3 dx\int_0^2 (x^2y+2x^3y+3x^2y^2)dy=\sqrt{14}\int_0^3(2x^2+4x^3+8x^2)dx=171\sqrt{14}$$

b) $I=\iint_S xdS$ với S là phần mặt cong $y=x^2+4z$ và $0\le x\le 2, 0\le z\le 2$

Giải.

$$I=\iint_S xdS=\iint_{\substack{0\le x\le 2\\0\le z\le 2}} x\sqrt{4x^2+17}dxdz=\frac{1}{8}\int_0^2 dz\int_0^2\sqrt{17+4x^2}d(17+4x^2)$$

$$=\frac{1}{12}\int_0^2\left(17+4x^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_{x=0}^{x=2}dz=\frac{1}{12}\int_0^2\left(33\sqrt{33}-17\sqrt{17}\right)dz=\frac{33\sqrt{33}-17\sqrt{17}}{6}$$

c) $I=\iint_S (x^2y+z^2)dS$ với S là phần mặt trụ $x^2+y^2=9$ nằm giữa $z=0; z=2$

Giải.

Chiếu phần mặt $\left\{y=\pm\sqrt{9-x^2}; 0\le z\le 2\right\}$ xuống mặt y0z được hình chiếu là miền

$G=\{-3\le x\le 3 ; 0\le z\le 2\}$

$$I=\iint_S (x^2y+z^2)dS$$

$$=\iint_S (x^2\sqrt{9-x^2}+z^2)\sqrt{1+\frac{x}{9-x^2}}dxdz+\iint_S(-x^2\sqrt{9-x^2}+z^2)\sqrt{1+\frac{x}{9-x^2}}dxdz$$

$$=6\iint_G\frac{z^2}{\sqrt{9-x^2}}dxdz$$

$$=6\int_0^2 z^2dz\int_{-3}^3\frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}=32\arcsin\frac{y}{3}\Big|_0^3=16\pi$$

d) $I=\iint\limits_S zdS$ với S là phần mặt paraboloit $z=x^2+y^2$ nằm dưới mặt $z=4$

Giải.

chiếu xuống mặt x0y được $x^2+y^2\le 4$

$$I=\iint\limits_{x^2+y^2\le 4}(x^2+y^2)\sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2 r^3\sqrt{1+4r^2}dr$$

$$=\frac{\pi}{16}\int_0^2\left[\left(1+4r^2\right)-1\right]\sqrt{1+4r^2}d\left(1+4r^2\right)=\frac{\pi}{16}\left[\frac{2}{5}\left(1+4r^2\right)^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}\left(1+4r^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^2$$

$$=\frac{\pi}{16}\left[\frac{578\sqrt{17}-2}{5}-\frac{34\sqrt{17}-2}{3}\right]=\frac{\pi}{16}.\frac{1564\sqrt{17}+4}{15}=\frac{(391\sqrt{17}+1)\pi}{60}$$

với $x=r\cos\varphi; y=r\sin\varphi$ và $(0\le\varphi\le 2\pi; 0\le r\le 2)$

**19)** Tính thông lượng của các trường vec tơ qua các mặt định hướng dương tương ứng:

a) $\vec{F}=(x,y,z)$ với S là mặt ngoài của mặt $x^2+y^2+z^2=9$

Giải.

$$I=\iint\limits_S xdydz+ydzdx+zdxdy=3\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le 9}dxdydz=81\pi$$

b) $\vec{F}=(0,y,-z)$ với S là phần mặt paraboloit $y=x^2+z^2$ với $0\le y\le 1$

và hình tròn $x^2+z^2\le 1; y=1$.

Giải.

$$I=\iint\limits_S ydzdx-zdxdy=\iiint\limits_V(1-1)dxdydz=0 \text{ với } V=\left\{y\ge x^2+z^2; x^2+z^2\le 1, y=1\right\}$$

c) $\vec{F}=(xy,yz,zx)$ với S là phần mặt paraboloit $z=4-x^2-y^2$ nằm phía trên hình vuông $0\le x\le 1; 0\le y\le 1$ và hướng lên trên.

Giải.

$$I=\iint\limits_S xydzdy+yzdzdx+zxdxdy=\iint\limits_S(yx\cos\alpha+yz\cos\beta+xz\cos\gamma)dS$$

$$I=\iint\limits_{x^2+y^2\le 4}\left(-yxz'_x-yzz'_y+xz\right)dxdy=\iint\limits_{x^2+y^2\le 4}\left(2yx^2+2y^2z+xz\right)dxdy$$

$$= \iint\limits_{x^2+y^2\le 4} \left[2yx^2 + 2y^2(4-x^2-y^2) + x(4-x^2-y^2)\right]dxdy$$

Vì hàm trong tích phâm lẻ theo biến x;y và miền lấy tích phân đối xứng qua các trục tương ứng $\Rightarrow I = \iint\limits_{x^2+y^2\le 4} 2y^2(4-x^2-y^2)dxdy = 2\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi d\varphi\int_0^2(4-r^2)r^3dr$

$$= 2\pi\left(16-\frac{64}{6}\right) = \frac{32\pi}{3}$$

với $x = r\cos\varphi; y = r\sin\varphi$ và $(0\le\varphi\le 2\pi; 0\le r\le 2)$

d) $\vec{F} = (xy, -2y, 3x)$ với S là phần mặt $x^2+y^2+z^2 = 4$

Giải.

$$I = \iint\limits_S xydzdy - 2ydzdx + 3xdxdy = \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le 4}(y-2)dxdydz$$

$$= \int_0^{2\pi}\sin\varphi d\varphi\int_0^{\pi}\sin^2\theta d\theta\int_0^2 r^3dr - \frac{64\pi}{3} = -\frac{64\pi}{3}$$

Với

$x = r\cos\varphi\sin\theta; y = r\sin\varphi\sin\theta; z = r\cos\theta\quad (0\le\varphi\le 2\pi; 0\le\theta\le\pi; 0\le r\le 2)\ J = r^2\sin\theta$

**20)** Chất lỏng với mặt độ 1200 chảy với vận tốc $\vec{v} = (y,1,z)$. Tìm tốc độ chảy qua mặt $z = 9 - \frac{1}{4}\left(x^2+y^2\right)$ với $x^2+y^2\le 36$.

Giải.

Tốc độ chảy của chất lỏng qua mặt $z = 9 - \frac{1}{4}\left(x^2+y^2\right)$ với $x^2+y^2\le 36$ chính là thông lượng của trường $\vec{F} = 1200\vec{v} = 1200(y,1,z)$ qua mặt đó

$$I = 1200\iint\limits_S ydydz + dxdz + zdxdy = 1200\iint\limits_S(y\cos\alpha + \cos\beta + z\cos\gamma)dS$$

$$= 1200\iint\limits_{x^2+y^2\le 36}(-yz'_x - z'_y + z)dxdy = 300\iint\limits_{x^2+y^2\le 36}(2yx + 2y + 36 - x^2 - y^2)dxdy$$

$$= 300\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^6(r^2\sin 2\varphi + 2r\sin\varphi + 36 - r^2)rdr = 600\pi\int_0^6(36r - r^3)dr = 194400\pi$$

**21)** Nhiệt độ tại điểm (x,y,z) trong một chất với hệ số dẫn nhiệt K = 6,5 là $U = 2y^2 + 2z^2$ .

Tìm vận tốc truyền nhiệt vào bên trong qua mặt trụ $y^2 + z^2 = 6$ khi $0 \le x \le 4$.

Giải.

Dòng nhiệt tại $(x, y, z)$ tạo thành trường vec tơ

$\vec{F} = -6,5\overrightarrow{grad}U(x, y, z) = -6,5(4x, 0, 4z)$

Vậy vận tốc truyền nhiệt vào bên trong chính là thông lượng của trường

$\vec{F} = -6,5\overrightarrow{grad}U(x, y, z) = -6,5(0, 4y, 4z)$ qua mặt đó $V = -6,5\iint\limits_S 4xdydz + 4zdxdy$ với

S là mặt trụ $y^2 + z^2 = 6$ khi $0 \le x \le 4$ và phân lấy phía trong mặt S.

Bổ sung vào S hai mặt

$S_1 = \left\{x = 0; y^2 + z^2 \le 6\right\}$ theo hướng cùng với chiều dương của trục 0x và

$S_2 = \left\{x = 4; y^2 + z^2 \le 6\right\}$ theo hướng cùng với chiều âm của trục 0x

$$V = -6,5\iint\limits_S 4xdydz + 4zdxdy$$

$$= -6,5\iint\limits_{S \cup S_1 \cup S_2} 4ydxdz + 4zdxdy + 6,5\iint\limits_{S_1} 4ydxdz + 4zdxdy + 6,5\iint\limits_{S_2} 4ydxdz + 4zdxdy$$

$$= 6,5\iiint\limits_{\substack{y^2+z^2\le 6\\ 0\le x\le 4}} 8dxdydz$$

$$= 6,5 \times 192\pi = 1248\pi$$

**22)** Dùng Công thức Stoke để tính tích phân,trong đó L được định hướng ngược chiều kim đồng hồ nếu nhìn từ trên xuống.Tức là tính $I = \oint\limits_L Pdx + Qdy + Rdz$ với

$\vec{F} = (P, Q, R)$

a) $\vec{F} = (x + y^2, y + z^2, z + x^2)$ với L là tam giác ABC : $A(1,0,0), B(0,1,0), C(0,0,1)$.

Giải.

$$I = \oint\limits_L (x + y^2)dx + (y + z^2)dy + (z + x^2)dz = -2\iint\limits_{S_{ABC}} zdydz + xdzdx + ydxdy$$

Do vai trò x,y,z tương đương hoán vị vòng quanh ta có

$$I=-6\iint\limits_{\substack{0\le x\le 1\\0\le y\le 1-x}} ydxdy=-6\int_0^1 dx\int_0^{1-x} ydy=-3\int_0^1(1-x)^2dx=(1-x)^3\Big|_0^1=-1$$

b) $\vec{F}=(2z,4x,5y)$ với L là giao của mặt trụ $x^2+y^2=4$ và mặt phẳng $z=x+4$.

Giải.

$$I=\oint\limits_L 2zdx+4xdy+5ydz=\iint\limits_S 5dydz+2dzdx+4dxdy$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\le 4}(5\cos\alpha+2\cos\beta+4\cos\gamma)dS=\iint\limits_{x^2+y^2\le 4}(-5+4)dxdy=-4\pi$$

c) $\vec{F}=(x^2z,y^2x,z^2)$ với L là giao của mặt trụ $x^2+y^2=9$ và mặt phẳng $y+x+z=1$.

$$I=\oint\limits_L x^2zdx+y^2xdy+z^2dz=\iint\limits_S x^2dzdx+y^2dxdy=\iint\limits_S(x^2\cos\beta+y^2\cos\gamma)dS$$

$$=\iint\limits_{x\ \ +y^2\le 9}(x^2+y^2)dxdy=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^3 r^3dr=\frac{81\pi}{2}$$

(với $x=r\cos\varphi; y=r\sin\varphi; 0\le\varphi\le 2\pi; 0\le r\le 3$)

d) $\vec{F}=(y-z,z-x,x-y)$ với L là giao mặt $x^2+y^2=a^2$ và mp $\frac{x}{a}+\frac{z}{h}=1; a>0, h>0$.

Giải.

$$I=\oint\limits_L(y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz=-2\iint\limits_S dydz+dzdx+dxdy$$

$$=-2\iint\limits_S(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)dS=-2\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}\left(\frac{h}{a}+1\right)dxdy=-2\pi a(h+a)$$

e) $\vec{F}=(x^2y^3,1,-z)$ với L là giao của mặt trụ $x^2+y^2=1$ và mặt phẳng $z=0$.

$$I=\oint\limits_L x^2y^3dx+dy-zdz=-3\iint\limits_S x^2y^2dxdy$$

$$=-3\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}x^2y^2dxdy=-\frac{3}{4}\int_0^{2\pi}\sin^2 2\varphi d\varphi\int_0^1 r^5dr=-\frac{\pi}{8}$$

(với $x = r\cos\varphi\,; y = r\sin\varphi; 0 \le \varphi \le 2\pi; 0 \le r \le 1$)

**23)** Tính công do trường lực $\vec{F} = (x^x + z^2, y^y + x^2, z^z + y^2)$ sinh ra khi một chất điểm chuyển động dưới ảnh hưởng của nó dọc theo biên của phần mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ nằm ở góc phần tám thứ nhất, theo chiều ngược kim đồng hồ khi nhìn từ bên trên.

Giải.

Đó chính là lưu số của trường $\vec{F} = (x^x + z^2, y^y + x^2, z^z + y^2)$ dọc theo biên của tam giác cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ đỉnh $A(2,0,0), B(0,2,0), C(0,0,2)$ theo chiều ngược kim đồng hồ khi nhìn từ bên trên. Áp dụng Stoke rồi sau đó tiến hành bổ sung vào mặt S các mặt

$S_1 = \left\{z = 0; x^2 + y^2 \le 4; x \ge 0\,; y \ge 0\right\}$ theo hướng chiều âm 0z

$S_2 = \left\{x = 0; z^2 + y^2 \le 4; z \ge 0\,; y \ge 0\right\}$ theo hướng chiều âm 0x

$S_3 = \left\{y = 0; z^2 + x^2 \le 4; x \ge 0\,; z \ge 0\right\}$ theo hướng chiều âm 0y

$$W = \oint\limits_{ABC} (x^x + z^2)dx + (y^y + x^2)dy + (z^z + y^2)dz$$

$$= 2\iint\limits_S ydydz + zdxdz + xdxdy = 2\left(\iint\limits_{S\cup S_1\cup S_2\cup S_3} - \iint\limits_{S_1} - \iint\limits_{S_2} - \iint\limits_{S_3}\right)$$

$$= 2\iiint\limits_V 0dxdydz + 2\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\le 4\\ x\ge 0; y\ge 0}} xdxdy + 2\iint\limits_{\substack{z^2+y^2\le 4\\ z\ge 0; y\ge 0}} ydydz + 2\iint\limits_{\substack{z^2+x^2\le 4\\ x\ge 0; y\ge 0}} zdzdx$$

$$= 6\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\le 4\\ x\ge 0; y\ge 0}} xdxdy = 6\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi d\varphi \int\limits_0^2 r^2 dr = 16$$

**24)** Dùng Định lý Divergence (Công thức Ostrogragski-Gauss) để tính tích phân mặt

$I = \iint\limits_S Pdydz + Qdzdx + Pdxdy$, nghĩa là tính thông lượng của $\vec{F} = (P, Q, R)$ qua mặt S.

a) $\vec{F} = (x^3, y^3, z^3)$ với S là mặt ngoài $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Giải.

$$I=\iint\limits_S x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy=3\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le 1}(x^2+y^2+z^2)dxdydz$$

$$=3\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^1 r^4dr=\frac{12\pi}{5}$$

Với

$x=r\cos\varphi\sin\theta; y=r\sin\varphi\sin\theta; z=r\cos\theta \quad (0\le\varphi\le 2\pi; 0\le\theta\le\pi; 0\le r\le 2)$ $J=r^2\sin\theta$

b) $\vec{F}=(e^x\sin y, e^x\cos y, yz^2)$ với S là mặt ngoài hình hộp

$x=0, x=1, y=0, y=1, z=0, z=2$.

Giải.

$$I=\iint\limits_S e^x\sin ydydz+e^x\cos ydzdx+yz^2dxdy=\iiint\limits_V(e^x\sin y-e^x\sin y+2yz)dxdydz$$

$$=2\int_0^1 dx\int_0^1 ydy\int_0^2 zdz=2$$

c) $\vec{F}=(x^2,y^2,z^2)$ với S là mặt ngoài $x^2+y^2+z^2=1$.

Giải.

$$I=\iint\limits_S x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy=2\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le 1}(x+y+z)dxdydz=0$$

Vì hàm trong tích phâm lẻ theo (x,y,z) và miền lấy tích phân đối xứng qua các trục tương ứng.

d) $\vec{F}=(x, yz, z^2)$ với S là mặt ngoài $x^2+y^2+z^2=a^2$ $(a>0)$

Giải.

$$I=\iint\limits_S xdydz+yzdzdx+z^2dxdy=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le 1}(1+3z)dxdydz=\frac{4\pi a^3}{3}$$

Do hàm trong tích phân lẻ theo biến z và miền lấy tích phân đối xứng qua mặt xOy nên

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le 1}zdxdydz=0$$

e) $\vec{F}=(y-z, z-x, x-y)$ với S là mặt ngoài nón $x^2+y^2=z^2$ $(0\le z\le h)$ không kể 2 đáy.

..........................................................................................

Giải.

Bổ sung vào S mặt $z = h; x^2 + y^2 \le h^2$ hướng lên trên,sau đó áp dụng O - G

$$I = \iint_S (y-z)dydz + (z-x)dzdx + (x-y)dxdy = -\iint_{x^2+y^2\le h^2} (x-y)dxdy = 0$$

Do hàm trong tích phân lẻ theo biến x,y và miền lấy tích phân đối xứng nên

f) $\vec{F} = (3xy^2, xe^z, z^3)$ với S là mặt ngoài giới hạn bởi $y^2 + z^2 = 1, x = -1; x = 2$.

$$I = \iint_S 3xy^2dydz + xe^z dzdx + z^3dxdy = \iiint_{\substack{y^2+z^2\le 1\\ -1\le x\le 2}} \left(3y^2 + 3z^2\right)dxdydz$$

$$= 3\int_0^{2\pi} dt \int_{-1}^{2} dx \int_0^1 r^3 dr = \frac{9\pi}{2}$$

Với $y = r\cos t; z = r\sin t; x = x \;\; 0 \le t \le 2\pi \;\; 0 \le r \le 1; \; -1 \le x \le 2$

g) $\vec{F} = (x, y, z)$ với S là mặt ngoài trụ $x^2 + y^2 = a^2 \; (-a \le z \le a)$ không kể 2 đáy.

Giải.

Bổ sung vào S : $z = a; x^2 + y^2 \le a^2$ hướng lên trên và mặt $z = -a; x^2 + y^2 \le a^2$ hướng xuống dưới,sau đó áp dụng O - G

$$I = \iint_S xdydz + ydzdx + zdxdy$$

$$= 3\iiint_{\substack{x^2+y^2\le a^2\\ -a\le z\le a}} dxdydz - 2a\iint_{x^2+y^2\le a^2} dxdy = 6\pi a^3 - 2\pi a^3 = 4\pi a^3$$

h) $\vec{F} = (x, y^2, 1)$ với S là mặt ngoài trụ $x^2 + y^2 = -2ax \; (a > 0; 0 \le z \le a)$ không kể 2 đáy.

Giải.

Bổ sung vào S : $S_1 = \left\{z = a; x^2 + y^2 \le -2ax\right\}$ hướng lên trên và mặt

$S_2 = \left\{z = 0; x^2 + y^2 \le -2ax\right\}$ hướng xuống dưới,sau đó áp dụng O - G

$$I = \iint_S xdydz + y^2dzdx + dxdy$$

$$= \iiint\limits_{\substack{x^2+y^2\le -2ax\\ 0\le z\le a}} (1+2y)dxdydz - \iint\limits_{S_1} dxdy + \iint\limits_{S_2} dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a rdr \int_o^a (1+2r\sin\varphi)dz = \pi a^3$$

**25)** Tính

$I = \iint\limits_S x^3\sqrt{y^2+z^2}dydz$ với S là mặt ngoài giới hạn bởi $z^2+y^2 \le x^2$ $(0 \le x \le 1)$.

Giải.

Bổ sung vào mặt $y^2+z^2 \le 1; x=1$ theo hướng về chiều dương 0x

$$I = \iint\limits_S x^3\sqrt{y^2+z^2}dydz = 3\iiint\limits_V x^2\sqrt{y^2+z^2}dxdydz = 3\int_0^{2\pi} dt \int_0^1 dx \int_0^x r^4 dr = \frac{\pi}{5}$$

$y = r\cos t; z = r\sin t; x = x \quad 0 \le t \le 2\pi \quad 0 \le r \le x \quad 0 \le x \le 1$

**26)** Tìm trường véc tơ gradient của các hàm số:

a) $f(x,y) = \ln(x+2y)$

Giải.

$$\overrightarrow{\text{grad}}f(x,y) = \left(\frac{1}{x+2y}, \frac{2}{x+2y}\right)$$

b) $f(x,y) = x^2y - 3x$

Giải.

$$\overrightarrow{\text{grad}}f(x,y) = (2xy-3, x^2)$$

c) $$\overrightarrow{\text{grad}}f(x,y,z) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$$

**27)** Tìm curl hay $\overrightarrow{\text{rot}}$ và div của trường véc tơ:

a) $\vec{F} = (xy, yz, zx)$ $\quad \overrightarrow{\text{rot}}\vec{F} = (-y,-z,-x)$ ; $\text{div}\vec{F} = x+y+z$

b) $\vec{F} = (e^x\sin y, e^x\cos y, z)$

$\text{div}\vec{F} = 1$ ; $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{F} = (0,0,0)$

**28)** Chứng tỏ rằng trường $\vec{F} = (4x^3y^2 - 2xy^3, 2x^4y - 3x^2y^2 + 4y^3)$ là trường thế và dùng điều này để tính tích phân $\int\limits_L (4x^3y^2 - 2xy^3)dx + (2x^4y - 3x^2y^2 + 4y^3)dy$ dọc theo đường $L: x = t + \sin\pi t; y = 2t + \cos\pi t$ $(0 \le t \le 1)$.

Giải.

$\vec{F} = (4x^3y^2 - 2xy^3, 2x^4y - 3x^2y^2 + 4y^3)$ là trường thế khi và chỉ khi $\overrightarrow{rot}\vec{F} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \left(2x^4y - 3x^2y^2 + 4y^3\right)'_x = \left(4x^3y^2 - 2xy^3\right)'_y \Leftrightarrow 8x^3y - 6xy^2 = 8x^3y - 6xy^2$$

Nên tích phân không phụ thuộc đường lấy tích phân,do vậy ta sẽ lấy tích phân trên AB với A(0,1) và B(1,1)

$$I = \int_L (4x^3y^2 - 2xy^3)dx + (2x^4y - 3x^2y^2 + 4y^3)dy$$

$$= \int_{AB} (4x^3y^2 - 2xy^3)dx + (2x^4y - 3x^2y^2 + 4y^3)dy$$

$$= \int_0^1 (4x^3 - 2x)dx = 0$$

**29)** Xét xem trường véc tơ có là trường thế hay không. Nếu đúng, hãy tìm hàm thế f ứng với các trường véc tơ

a) $\vec{F} = (2x\cos y - y\cos x)\vec{i} + (-x^2\sin y - \sin x)\vec{j}$

Giải.

$\vec{F} = (2x\cos y - y\cos x)\vec{i} + (-x^2\sin y - \sin x)\vec{j}$ là trường thế khi và chỉ khi $\overrightarrow{rot}\vec{F} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow (2x\cos y - y\cos x)'_y = (-x^2\sin y - \sin x)'_x$ luôn đúng $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

Hàm thế vị được xác định (tích phân lấy theo đường gấp khúc)

$$f(x, y) = \int_{AB} (2x\cos y - y\cos x)dx + (-x^2\sin y - \sin x)dy$$

$$= \int_0^x 2x dx + \int_0^y (-x^2\sin y - \sin x)dy = x^2\cos y + \cos y + C$$

Với $A(0,0); B(x, y)$ và $C = \text{const}$

b) $\vec{F} = xe^y\vec{i} + ye^x\vec{j}$

Giải.

Do $\left(xe^y\right)'_y \neq \left(ye^x\right)'_x$ nên trường véc tơ $\vec{F} = xe^y\vec{i} + ye^x\vec{j}$ không là trường thế .

**30)** Cho $\vec{F} = (ax^3 - 3xz^2, x^2y + by^3, cz^3)$ Tìm các giá trị a, b, c để tích phân $I = \iint_S (ax^3 - 3xz^2)dydz + (x^2y + by^3)dzdx + cz^3dxdy$ không phụ thuộc vào việc chọn mặt S mà biên của nó là giao của mặt paraboloid hyperbolic $z = y^2 - x^2$ và mặt trụ $x^2 + y^2 = 1$ định hướng ngược kim đồng hồ khi nhìn từ bên trên.

Giải.

Ta có $U(x,y,z)$ thỏa mãn $\overrightarrow{\text{grad}}U(x,y,z) = \vec{F}$.Đồng thời khi $U(x,y,z)$ là hàm điều hòa tức là

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$$

thì với mọi mặt S kín giao với mặt trụ $x^2 + y^2 = 1$ ta luôn có

$$\iint_S \left( \frac{\partial U}{\partial x} dydz + \frac{\partial U}{\partial y} dzdx + \frac{\partial U}{\partial z} dxdy \right) = \iint_S \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) dxdydz = 0$$

Để $I = \iint_S (ax^3 - 3xz^2)dydz + (x^2y + by^3)dzdx + cz^3dxdy$ không phụ thuộc vào việc chọn mặt S.Thì trường $\vec{F} = (ax^3 - 3xz^2, x^2y + by^3, cz^3)$ phải là trường thế của hàm điều hòa $U(x,y,z)$ tức là

$$\text{div}\vec{F} = 0\ \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow 3ax^2 - 3z^2 + x^2 + 3by^2 + 3cz^2 = 0 \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

$$\Leftrightarrow (3a+1)x^2 + 3by^2 + 3(c-1)z^2 = 0\ \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{3}; b = 0; c = 1$$

# PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

**1)** Kiểm tra rằng $y = \cos x(\sin x - 1)$ là nghiệm của bài toán $y' + y\tan x = \cos^2 x$ giá trị ban đầu

$y(0) = -1$ trên khoảng $\left( -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$

**Lời giải:**

$y' = -\sin x(\sin x - 1) + \cos^2 x \Rightarrow$

$y' + y\tan x = -\sin x(\sin x - 1) + \cos^2 x + \sin x(\sin x - 1) = \cos^2 x$

**2)** Giải các phương trình tách biến

**a.** $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xe^x}{y\sqrt{1+y^2}}$

**Lời giải:**

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xe^x}{y\sqrt{1+y^2}} \Leftrightarrow y\sqrt{1+y^2}dy = xe^x dx$$

$$\Rightarrow \int y\sqrt{1+y^2}dy = \int xe^x dx + C_1 \Leftrightarrow (1+y^2)\sqrt{1+y^2} = 3(x-1)e^x + C$$

**b.** $\frac{du}{dt} = 2 + 2u + t + tu$

**Lời giải:**

$$\frac{du}{dt} = 2 + 2u + t + tu \Leftrightarrow \frac{du}{dt} = (1+u)(2+t) \Rightarrow \frac{du}{(1+u)} = (2+t)dt$$

$$\Rightarrow 2\ln|1+u| = 4t + t^2 + C$$

**3)** Tìm nghiệm của PTVP thoả mãn điều kiện ban đầu

a. $\frac{dy}{dx} = 1 + y^2,\ y(1) = 0;$

**Lời giải:**

$$\frac{dy}{dx} = 1 + y^2 \Leftrightarrow \frac{dy}{1+y^2} = dx \Rightarrow \arctan y = x + C \quad \text{với} \quad y(1) = 0 \quad \text{thì} \quad C = -1$$

nghiệm của phương trình : $\arctan y = x - 1$

b. $y' = e^{x+y} + e^{x-y}, y(0) = 1;$

**Lời giải:**

$$y' = e^{x+y} + e^{x-y} \Leftrightarrow e^y y' = (e^{2y} + 1)e^x \Leftrightarrow \frac{e^y dy}{(e^{2y} + 1)} = e^x dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{e^y dy}{(e^{2y} + 1)} = \int e^x dx + C \Rightarrow \arctan e^y = e^x + C$$

với $y(0) = 1$ thì $C = \arctan e - 1$ nghiệm của phương trình :

$\arctan e^y = e^x + \arctan e - 1$

c. $\frac{du}{dt} = \frac{2t + \sec^2 t}{2u}, u(0) = -5.$

**Lời giải:**

$$\frac{du}{dt} = \frac{2t + \sec^2 t}{2u} \Rightarrow 2udu = (2t + \sec^2 t)dt \Leftrightarrow \int\left(2t + \frac{1}{\cos^2 t}\right)dt = u^2 + C$$

$$\Leftrightarrow t^2 + \tan t = u^2 + C$$

với $u(0)=-5$ thì $C=-25$ nghiệm của phương trình $t^2+\tan t=u^2-25$

**4)** Tìm phương trình đường cong thoả mãn $y'=4x^3y$ và cắt trục Oy tại 7.

**Lời giải:**

$y'=4x^3y \Leftrightarrow \dfrac{dy}{y}=4x^3dx \Rightarrow y=Ce^{x^4}$ ,từ giả thiết thì $y(0)=7$ nên $C=7$

Đó là đường cong có phương trình $y=7e^{x^4}$

**5)** Dung dịch glucose được truyền theo đường tĩnh mạch vào máu với vận tốc không đổi r. Khi
glucose được đưa vào, nó chuyển thành các chất khác và bị đẩy khỏi máu với vận tốc tỷ lệ thuận với nồng độ tại thời điểm đó. Như vậy, mô hình biểu diễn nồng độ $C=C(t)$ của dung dịch glucose trong máu là $\dfrac{dC}{dt}=r-kC$, trong đó k là hằng số dương.

**a.** Giả sử nồng độ tại thời điểm $t=0$ là $C_0$. Xác định nồng độ tại thời điểm tuỳ ý bằng cách giải PTVP nói trên.

**Lời giải:**

$$\frac{dC}{dt}=r-kC \Rightarrow \frac{dC}{dt}+kC=r \Rightarrow C(t)=e^{-\int kdt}\left(A+r\int e^{\int kdt}dt\right)$$

$$\Rightarrow C(t)=e^{-kt}\left(A+r\int e^{kt}dt\right)=e^{-kt}\left(A+\frac{re^{kt}}{k}\right)=\frac{r}{k}+Ae^{-kt}$$

Tại $t=0 \Rightarrow A=C_0-\dfrac{r}{k}$.Vậy $C(t)=\dfrac{r}{k}+\left(C_0-\dfrac{r}{k}\right)e^{-kt}$

**b.** Giả sử rằng $C_0<\dfrac{r}{k}$, tìm giới hạn $\lim\limits_{t\to\infty}C(t)$ và diễn giải đáp án của bạn.

**Lời giải:**

Hiển nhiên $\lim\limits_{t\to\infty}C(t)=\dfrac{r}{k}+\lim\limits_{t\to\infty}\left(C_0-\dfrac{r}{k}\right)e^{-kt}=\dfrac{r}{k}$

Khi dung dịch glucose được truyền theo đường tĩnh mạch vào máu với vận tốc không đổi,và thời gian truyền vô hạn thì nồng độ glucose của dung dịch glucose trong máu coi như không đổi.

**6)** Khi hạt mưa rơi xuống, kích thước của nó tăng lên, vì thế khối lượng tại thời điểm t là hàm của t, m(t). Tốc độ tăng của khối lượng là km(t) với một hằng số dương k nào đó. Khi áp dụng định luật Newton về chuyển động cho hạt mưa ta nhận được $(mv)' = gm$, trong đó v là vận tốc của hạt mưa (chiều hướng xuống dưới) và g là gia tốc trọng trường. Vận tốc tới hạn của hạt mưa là $\lim_{t\to\infty} v(t)$.Tìm biểu thức cho vận tốc tới hạn thông qua g và k.

**Lời giải:**

$(mv)' = gm \Rightarrow m'v + mv' = gm \Rightarrow$

**7)** Chu kỳ bán rã của cesi-137 là 30 năm. Giả sử chúng ta có một mẫu 100 mg.

a. Tìm khối lượng còn lại sau t năm.

b. Mẫu sẽ còn lại bao nhiêu sau 100 năm?

c. Sau bao lâu sẽ chỉ còn lại 1 mg?

**Lời giải:**

Gọi $f(t)$ là hàm thể hiện khối lượng của chất cesi-137 theo biến thời gian t.Từ giả thiết bài toán ta có $f(t+30x) = \frac{1}{2^x} f(t) \Rightarrow f(t) = 2^x f(t+30x)$,ở đó x tính theo năm.Điều đó chứng tỏ sau 30 năm khối lượng cesi-137 giảm đi một nửa so với ban đầu.Mặt khác ta có lượng cá bơn halibut Thái bình dương được mô hình hoá bởi PTVP $\frac{dy}{dt} = ky\left(1 - \frac{y}{K}\right)$,trong đó

y(t) là sinh khối (khối lượng tổng cộng của các cá thể trong quần thể) theo kilogram tại thời điểm t (đo theo năm), dung lượng cực đại được ước lượng bởi $K = 8\times10^7$ kg và $k = 0,71$ theo năm.

d. Nếu $y(0) = 2\times10^7$ kg, tìm sinh khối một năm sau.

e. Bao lâu nữa sinh khối đạt được $4\times10^7$ kg?

**Lời giải:**

Từ $\frac{dy}{dt} = ky\left(1-\frac{y}{K}\right) \Rightarrow y' - ky = -\frac{ky^2}{K} \Leftrightarrow y'y^{-2} - ky^{-1} = -\frac{k}{K} \Leftrightarrow \left(y^{-1}\right)' + ky^{-1} = \frac{k}{K}$

$\Rightarrow z' + kz = \frac{k}{K}$

$z = e^{-\int k dt}\left(C + \frac{k}{K}\int e^{\int k dt} dt\right) = e^{-kt}\left(C + \frac{e^{kt}}{K}\right) \Rightarrow ye^{-kt}\left(C + \frac{e^{kt}}{K}\right) = 1$ với $z = y^{-1}$

$\Rightarrow \; y = \frac{Ke^{kt}}{KC + e^{kt}}$

Khi $y(0)=2\times 10^7\text{kg}$ thì $2\times 10^7=\dfrac{8\times 10^7}{8\times 10^7 C+1}\Rightarrow 8\times 10^7 C+1=4\Rightarrow C=\dfrac{3\times 10^{-7}}{8}$

$$\Rightarrow\ y=\frac{8\times 10^7 e^{kt}}{3+e^{kt}}$$

**a)** Sinh khối một năm sau được xác định: $y=\dfrac{8\times 10^7 e^{0,71}}{3+e^{0,71}}\approx 3,23\times 10^7$

**b)** Ta cần tìm t sao cho $\dfrac{8\times 10^7 e^{kt}}{3+e^{kt}}=4\times 10^7\Rightarrow e^{kt}=3\Rightarrow t=\dfrac{\ln 3}{0,71}$.

Vậy sau $t=\dfrac{\ln 3}{0,71}\approx 1,547$ năm sinh khối đạt được $4\times 10^7\text{kg}$.

**8)** Trong mô hình sinh trưởng theo mùa, một hàm tuần hoàn theo thời gian được đề nghị để tính đến những biến đổi có tính mùa vụ liên quan đến vận tốc sinh trưởng. Những biến đổi ấy có thể, chẳng hạn, gây ra do những thay đổi có tính chất mùa vụ về nguồn thức ăn.

Tìm nghiệm của mô hình sinh trưởng theo mùa $\dfrac{dP}{dt}=kP\cos(rt-\varphi)\qquad P(0)=P_0$,

trong đó k, r và φ là những hằng số dương.

**Lời giải:**

$\dfrac{dP}{dt}=kP\cos(rt-\varphi)\Rightarrow \ln P=\dfrac{k}{r}\sin(rt-\varphi)+C$ với $P(0)=P_0\Rightarrow \ln P_0=-\dfrac{k}{r}\sin\varphi+C$

$$\Rightarrow\ C=\frac{k\sin\varphi+r\ln P_0}{r}\ \Rightarrow \ln P=\frac{k}{r}\sin(rt-\varphi)+\frac{k\sin\varphi+r\ln P_0}{r}$$

$$\Rightarrow \ln\frac{P}{P_0}=\frac{k}{r}\left[\sin(rt-\varphi)+\sin\varphi\right]\Rightarrow P(t)=P_0\exp\left(\frac{k}{r}\left[\sin(rt-\varphi)+\sin\varphi\right]\right)$$

**9)** Giải PTVP thuần nhất hoặc bài toán ban đầu:

a. $(x^2-3y^2)dx+2xydy=0$;

**Lời giải:**

$(x^2-3y^2)dx+2xydy=0\Leftrightarrow \dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x^2-3y^2}{2xy}=-\dfrac{x}{2y}+\dfrac{3y}{2x}$ khi $xy\neq 0$

Đặt $y=xu\Rightarrow y'=u+xu'\Rightarrow 2u+2xu'=3u-\dfrac{1}{u}\Rightarrow \dfrac{2udu}{u^2-1}=\dfrac{dx}{x}$

$$\Rightarrow u^2-1=Cx\Rightarrow y^2=(1+Cx)x^2;\forall x,y$$

b. $xy' + x\tan\frac{y}{x} - y = 0 \quad y(1) = \frac{\pi}{2};$

**Lời giải:**

$xy' + x\tan\frac{y}{x} - y = 0 \Leftrightarrow y' + \tan\frac{y}{x} - \frac{y}{x} = 0$

Đặt $y = xu \Rightarrow y' = u + xu' \Rightarrow u + xu' + \tan u - u = 0 \Rightarrow \frac{\cos u}{\sin u}du = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \sin u = \frac{C}{x}$

ta có $\sin\frac{y}{x} = \frac{C}{x}$ với $y(1) = \frac{\pi}{2}$ thì $C = 1 \Rightarrow$ nghiệm của phương trình $x\sin\frac{y}{x} = 1$

c. $y'\left(x\sin\frac{y}{x}\right) + x = y\sin\frac{y}{x};$

**Lời giải:**

$y'\left(x\sin\frac{y}{x}\right) + x = y\sin\frac{y}{x} \Leftrightarrow y'\left(\sin\frac{y}{x}\right) + 1 = \frac{y}{x}\sin\frac{y}{x}$

Đặt $y = xu \Rightarrow y' = u + xu' \Rightarrow (u + xu')\sin u + 1 = u\sin u \Rightarrow xu'\sin u + 1 = 0$

$\Rightarrow -\sin u du = \frac{dx}{x} \Rightarrow \cos u = \ln|Cx| \Rightarrow Cx = e^{\cos\frac{y}{x}}$

d. $y' = \frac{y}{x} + \sin\frac{y}{x} \qquad y(1) = \frac{\pi}{2};$

**Lời giải:**

Đặt $y = xu \Rightarrow y' = u + xu' \Rightarrow u + xu' = u + \sin u \Rightarrow xu' = \sin u$

$\Rightarrow \frac{du}{\sin u} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|Cx| = \int\frac{d\left(\tan\frac{u}{2}\right)}{\tan\frac{u}{2}} = \ln\left|\tan\frac{u}{2}\right|$

$\Rightarrow \ln|Cx| = \ln\left|\tan\frac{u}{2}\right| \Rightarrow Cx = \tan\frac{y}{2x}$ với $y(1) = \frac{\pi}{2}$ thì $C = 1 \Rightarrow x = \tan\frac{y}{2x}$

e. $(x - y)ydx - x^2dy = 0$

**Lời giải:**

với $xy \neq 0$ ta có $(x - y)ydx - x^2dy = 0 \Rightarrow 1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2 = \left(\frac{x}{y}\right)y'$

Đặt $y = xu \Rightarrow y' = u + xu' \Rightarrow u + xu' = u - u^2 \Rightarrow -\frac{du}{u^2} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{C}{u} = \ln|x|$

..............................................................................................

$\Rightarrow$ nghiệm của phương trình $Cx = y\ln|x|$, ngoài ra $x=0; y=0$ thỏa mãn phương trình nên $x=0;\ y=0$ là nghiệm kì dị của phương trình

**10)** Xét xem phải chăng phương trình là tuyến tính:

a. $y' + ye^x = x^2y^5$

**Lời giải:**

Từ

$$y' + ye^x = x^2y^5 \Rightarrow y'y^{-5} + y^{-4}e^x = x^2 \Leftrightarrow \left(y^{-4}\right)' - 4y^{-4}e^x = -4x^2 \Rightarrow u' - 4ue^x = -4x^2$$

Giả sử $y_1(x)$ và $y_2(x)$ là hai nghiệm của phương trình,tức là

$y_1' + y_1e^x = x^2y_1^5 \quad y_2' + y_2e^x = x^2y_2^5$ nhưng

$$(ay_1+by_2)' + (ay_1+by_2)e^x = a\left(y_1' + y_1e^x\right) + b\left(y_2' + y_2e^x\right) = ax^2y_2^5 + bx^2y_1^5 \neq x^2(ay_1+by_2)^5$$

đó không phải là phương trình vi phân tuyến tính .Xong đó là phương trình Becnuli nên có thể đưa phương trình về phương trình vi phân tuyến tính bằng cách đặt $u = y^{-4}$.

b. $xy' + \ln x - x^2y = 0$

**Lời giải:**

Từ $xy' + \ln x - x^2y = 0 \Rightarrow y' + xy = \dfrac{\ln x}{x}$ đó là phương trình vi phân tuyến tính cấp một.

c. $x^4y' = y + \sin x$

**Lời giải:**

Từ $x^4y' = y + \sin x \Rightarrow y' - \dfrac{y}{x^4} = \dfrac{\sin x}{x^4}$ đó là phương trình vi phân tuyến tính cấp một.

d. $xy' - y = x^2\sin x$

**Lời giải:**

Từ $xy' - y = x^2\sin x \Rightarrow y' - \dfrac{y}{x} = x\sin x$ đó là phương trình vi phân tuyến tính cấp một.

**11)** Giải các PTVP:

a. $y' + 2y = 2e^x$;

**Lời giải:**

phương trình đã cho là phương trình vi phân tuyến tính cấp một,nên nghiệm được xác định

$$y = e^{-\int 2dx}\left(C_1 + 2\int e^x e^{\int 2dx}dx\right) = \frac{C + 2e^{3x}}{3e^{2x}} \Rightarrow 3ye^{2x} = C + 2e^{3x}$$ là nghiệm phương trình

b. $xy' + y = \sqrt{x}$;

**Lời giải:**

$$xy' + y = \sqrt{x} \Rightarrow y' + \frac{y}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

đó là phương trình vi phân tuyến tính cấp một,nên nghiệm được xác định

$$y = e^{-\int \frac{dx}{x}}\left(C_1 + \int \frac{1}{\sqrt{x}} e^{\int \frac{dx}{x}} dx\right) \Leftrightarrow y = \frac{1}{x}\left(C_1 + \int \sqrt{x}\, dx\right) \Rightarrow 3yx = C + 2x\sqrt{x}$$ là nghiệm phương trình.

c. $\dfrac{dy}{dx} + 2xy = x^2$;

**Lời giải:**

$\dfrac{dy}{dx} + 2xy = x^2 \Rightarrow y' + 2xy = x^2$ đó là phương trình vi phân tuyến tính cấp một,nên nghiệm được xác định $y = e^{-\int 2xdx}\left(C + \int x^2 e^{\int 2xdx}dx\right) \Leftrightarrow y = e^{-x^2}\left(C + \int x^2 e^{x^2} dx\right)$

d. $y' + 3x^2 y = 6x^2$;

**Lời giải:**

$y' + 3x^2 y = 6x^2$ đó là phương trình vi phân tuyến tính cấp một,nên nghiệm được xác định

$$y = e^{-\int 3x^2dx}\left(C + \int 6x^2 e^{\int 3x^2dx}dx\right) \Leftrightarrow y = e^{-x^3}\left(C + 2\int e^{x^3} dx^3\right)$$

$$\Rightarrow\ y = e^{-x^3}\left(C + 2e^{x^3}\right) \Rightarrow y = Ce^{-x^3} + 2$$

e. $y = xy' + y'\ln y$;

**Lời giải:**

coi $x = x(y) \Rightarrow y\dfrac{dx}{dy} = x + \ln y \Rightarrow \dfrac{dx}{dy} - \dfrac{x}{y} = \dfrac{\ln y}{y}$ đó là phương trình vi phân tuyến tính cấp một,nên nghiệm được xác định

$$x = e^{\int \frac{dy}{y}}\left(C + \int \frac{\ln y}{y} e^{-\int \frac{dy}{y}} dy\right) \Leftrightarrow x = y\left(C + \int \frac{\ln y}{y^2} dy\right) \Rightarrow x = y\left(C - \int \ln y d\left(\frac{1}{y}\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow x = y\left(C - \frac{\ln y}{y} - \frac{1}{y}\right) \Leftrightarrow 1 + x + \ln y = Cy$$

f. $y' + \frac{1}{x+1} y = x^2$;

**Lời giải:**

đó là phương trình vi phân tuyến tính cấp một,nên nghiệm được xác định

$$y = e^{-\int \frac{dx}{x+1}}\left(C_1 + \int x^2 e^{\int \frac{dx}{x+1}} dx\right) \Leftrightarrow y = \frac{1}{x+1}\left(C_1 + \int x^2 (x+1) dx\right) \Rightarrow$$

$$y = \frac{C + 3x^4 + 4x^3}{12(x+1)}$$

g. $y' + y \tan x = \sin^2 x$.

**Lời giải:**

đó là phương trình vi phân tuyến tính cấp một,nên nghiệm được xác định

$$y = e^{-\int \tan x dx}\left(C_1 + \int \sin^2 x e^{\int \tan x dx} dx\right) \Leftrightarrow y = \cos x\left(C_1 + \int \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx\right)$$

$$\Leftrightarrow y = \cos x\left(C_1 + \int \frac{dx}{\cos x} - \int \cos x dx\right) \Rightarrow y = C\cos x - \frac{1}{2}\sin 2x + \cos x \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|$$

**12)** Giải bài toán giá trị ban đầu:

a. $\frac{dv}{dt} - 2tv = 3t^2 e^{t^2} \qquad v(0) = 5$;

**Lời giải:**

đó là phương trình vi phân tuyến tính cấp một,nên nghiệm được xác định

$$v = e^{\int 2t dt}\left(C + \int 3t^2 e^{t^2} e^{-\int 2t dt} dt\right) \Leftrightarrow v = e^{t^2}\left(C + \int 3t^2 dt\right) \Rightarrow v = e^{t^2}\left(C + t^3\right) \quad \text{với}$$

$$v(0) = 5 \Rightarrow C = 5$$

$$\Rightarrow \quad v = e^{t^2}\left(5 + t^3\right)$$

b. $xy' = y + x^2 \sin x \qquad y(\pi) = 0$.

**Lời giải:**

$xy' = y + x^2 \sin x \Rightarrow y' - \frac{y}{x} = x\sin x$ đó là phương trình vi phân tuyến tính cấp một,nên nghiệm được xác định

$$y = e^{\int \frac{dx}{x}}\left(C + \int x\sin x e^{-\int \frac{dx}{x}} dx\right) \Leftrightarrow y = x\left(C + \int \sin x dx\right) \Rightarrow y = x(C - \cos x)$$ với

$y(\pi) = 0 \Rightarrow C = -1 \Rightarrow y = -x(1 + \cos x)$

**13)** Những nhà tâm lý quan tâm đến lý luận học tập khảo sát đường cong học.Đường cong học là đồ thị của hàm số P(t), hiệu quả của một ai đó học một kỹ năng được coi là hàm của thời gian huấn luyện t. Đạo hàm $\frac{dP}{dt}$ thể hiện vận tốc mà tại đó hiệu suất học được nâng lên.

a. Bạn nghĩ P tăng lên nhanh nhất khi nào? Điều gì xảy ra với $\frac{dP}{dt}$ khi t tăng lên? Giải thích.

**Lời giải:**

P tăng lên nhanh nhất khi thời gian huấn luyện ít nhất

Khi t tăng, tức là thời gian huấn luyện tăng lên dẫn đến $\frac{dP}{dt}$ giảm đi

b. Nếu M là mức cực đại của hiệu quả mà người học có khả năng đạt được,giải thích tại sao PTVP $\frac{dP}{dt} = k(M - P)$, k là hằng số dương là mô hình hợp lý cho việc học.

**Lời giải:**

Khi $P_{max} = M$ thì $\frac{dP}{dt} = 0$

c. Giải PTVP để tìm ra một biểu thức của P(t).Dùng lời giải của bạn để vẽ đồ thị đường cong học.Giới hạn của biểu thức này là gì?

**Lời giải:**

Từ $\frac{dP}{dt} = k(M - P) \Rightarrow \frac{dP}{dt} + kP = kM \Rightarrow P = e^{-kt}\left(C + kM\int e^{kt}dt\right) \Rightarrow P = M + Ce^{-kt}$

Từ giả thiết của bài toán ta có $P(0) = 0 \Rightarrow C = -M \Rightarrow P = M - Me^{-kt}$

$$\lim_{t\to\infty} P = \lim_{t\to\infty}(M + Ce^{-kt}) = M$$

**14)** Giải PTVP Bernoulli:

a. $y' + \frac{2}{x}y = \frac{y^3}{x^2}$;

**Lời giải:**

$y' + \frac{2}{x}y = \frac{y^3}{x^2} \Rightarrow y'y^{-3} + \frac{2}{x}y^{-2} = \frac{1}{x^2}$,đặt $z = y^{-2} \Rightarrow$ $z' - \frac{4z}{x} = -\frac{2}{x^2}$ đó là phương trình vi phân tuyến tính cấp một,nên nghiệm được xác định

$$z = e^{\int \frac{4dx}{x}}\left(C_1 - \int \frac{2}{x^2}e^{-\int \frac{4dx}{x}}dx\right) \Leftrightarrow z = x^4\left(C_1 - \int \frac{2}{x^6}dx\right) \Rightarrow z = x^4\left(C_1 + \frac{2}{5x^5}\right)$$

$$\Rightarrow 5x = (Cx^5 + 2)y^2$$

b. $xy' + y = -xy^2$;

**Lời giải:**

đặt $z = y^{-1}$ ta được $z' - \frac{z}{x} = 1$ đó là phương trình vi phân tuyến tính cấp một,nên nghiệm được xác định

$$z = e^{\int \frac{dx}{x}}\left(C + \int e^{-\int \frac{dx}{x}}dx\right) \Leftrightarrow z = x\left(C + \int \frac{dx}{x}\right) \Rightarrow z = x\left(C + \ln|x|\right) \Rightarrow 1 = xy\left(C + \ln|x|\right)$$

c. $(2xy^2 - y)dx + xdy = 0$;

**Lời giải:**

$$(2xy^2 - y)dx + xdy = 0 \Rightarrow y' - \frac{y}{x} = -2y^2$$

.........................................................................................

đặt $z = y^{-1}$ ta được $z' + \frac{z}{x} = 2$ đó là phương trình vi phân tuyến tính cấp một,nên nghiệm được xác định

$$z = e^{-\int \frac{dx}{x}}\left(C_1 + \int e^{\int \frac{dx}{x}}dx\right) \Leftrightarrow z = \frac{1}{x}\left(C_1 + \int xdx\right) \Rightarrow z = \frac{1}{x}\left(C_1 + \frac{x^2}{2}\right) \Rightarrow x = y(C + x^2)$$

d. $2xyy' - y^2 + x = 0$;

**Lời giải:**

$2xyy' - y^2 + x = 0 \Rightarrow \left(y^2\right)' + x - y^2 = 0$ đặt $z = y^2 \Rightarrow z' - \frac{z}{x} = -1$ đó là phương trình vi phân tuyến tính cấp một,nên nghiệm được xác định

$$z = e^{\int \frac{dx}{x}}\left(C + \int e^{-\int \frac{dx}{x}}dx\right) \Leftrightarrow z = x\left(C + \int \frac{dx}{x}\right) \Rightarrow z = x\left(C + \ln|x|\right) \Rightarrow y^2 = x\left(C + \ln|x|\right)$$

e. $y' = \frac{2x}{x^2 \cos y + 4\sin 2y}$;

**Lời giải:**

coi $x = x(y) \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{x^2 \cos y + 4\sin 2y}{2x} \Rightarrow \left(x^2\right)' - x^2 \cos y = 4\sin 2y$

đặt $z = x^2 \Rightarrow z' - z\cos y = 4\sin 2y$ đó là phương trình vi phân tuyến tính cấp một,nên nghiệm được xác định

$$z = e^{\int \cos ydy}\left(C + \int 4\sin 2ye^{-\int \cos ydy}dy\right) \Leftrightarrow z = e^{\sin y}\left(C - 8\int \sin ye^{-\sin y}d(-\sin y)\right)$$

$$\Rightarrow z = e^{\sin y}\left(C - 8(1 + \sin y)e^{-\sin y}\right) \Rightarrow z = Ce^{\sin y} - 8(1 + \sin y)$$

$$\Rightarrow x^2 = Ce^{\sin y} - 8(1 + \sin y)$$

f. $xy' + y = y^2 \ln x$;

**Lời giải:**

$$xy' + y = y^2 \ln x \Leftrightarrow y'y^{-2} + \frac{y^{-1}}{x} = \frac{\ln x}{x}$$ đặt $z = y^{-1} \Rightarrow \Rightarrow z' - \frac{z}{x} = -\frac{\ln x}{x}$ đó là phương trình vi phân tuyến tính cấp một,nên nghiệm được xác định

$$z = e^{\int \frac{dx}{x}}\left(C - \int \frac{\ln x}{x} e^{-\int \frac{dx}{x}} dx\right) \Leftrightarrow z = x\left(C - \int \frac{\ln x}{x^2} dx\right) \Rightarrow z = x\left(C + \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x}\right)$$

$$\Rightarrow y(Cx + \ln x + 1) = 1$$

g. $xy' + 2xy^2 \ln x + y = 0$.

**Lời giải:**

$$xy' + 2xy^2 \ln x + y = 0 \Leftrightarrow y' + \frac{y}{x} = -2y^2 \ln x \Leftrightarrow \left(y^{-1}\right)' - \frac{y^{-1}}{x} = 2\ln x$$ đặt $z = y^{-1} \Rightarrow$

$$z' - \frac{z}{x} = 2\ln x$$

đó là phương trình vi phân tuyến tính cấp một,nên nghiệm được xác định

$$z = e^{\int \frac{dx}{x}}\left(C + \int 2\ln x e^{-\int \frac{dx}{x}} dx\right) \Leftrightarrow z = x\left(C + 2\int \frac{\ln x}{x} dx\right) \Rightarrow z = x\left(C + 2\int \ln x d(\ln x)\right)$$

$$\Rightarrow z = x\left(C + \ln^2 x\right) \Rightarrow y = \frac{1}{x\left(C + \ln^2 x\right)}$$

**15)** Một vật khối lượng m rơi xuống từ trạng thái nghỉ và chúng ta giả sử rằng sức cản không khí tỷ lệ thuận với vận tốc của vật. Nếu S(t) là khoảng cách rơi được sau t giây thì vận tốc là $v = S'(t)$ và gia tốc là $a = v'(t)$. Nếu g là gia tốc trọng trường thì lực hướng xuống dưới tác động lên vật là $mg - cv$, trong đó c là hằng số dương, Định luật Newton thứ hai dẫn đến $m\frac{dv}{dt} = mg - cv$.

a. Giải PT này khi coi nó là PT tuyến tính để chỉ ra rằng $v = \frac{mg}{c}\left(1 - e^{-\frac{ct}{m}}\right)$.

**Lời giải:**

$$m\frac{dv}{dt} = mg - cv \Rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{c}{m}v = g \Rightarrow v = e^{-\int \frac{c}{m}dt}\left(A + g\int e^{\int \frac{c}{m}dt} dt\right) \Leftrightarrow v = e^{-\frac{ct}{m}}\left(A + \frac{mg}{c}e^{\frac{ct}{m}}\right)$$

Khi vật không rơi tức $v(0)=0$,từ $v=e^{-\frac{ct}{m}}\left(A+\frac{mg}{c}e^{\frac{ct}{m}}\right)$ ta có

$A=-\frac{mg}{c}\Rightarrow v=\frac{mg}{c}\left(1-e^{-\frac{ct}{m}}\right)$

b. Vận tốc giới hạn là bao nhiêu?

**Lời giải:**

$$\lim_{t\to\infty} v=\frac{mg}{c}\lim_{t\to\infty}\left(1-e^{-\frac{ct}{m}}\right)=\frac{mg}{c}$$

c. Tính quãng đường vật rơi được sau t giây.

**Lời giải:**

$\Rightarrow S(t)=\frac{mg}{c}\int\left(1-e^{-\frac{ct}{m}}\right)dt=\frac{mg}{c}\left[t+\frac{m}{c}e^{-\frac{ct}{m}}\right]+A$ từ $S(0)=0\Rightarrow A=-\frac{m^2g}{c^2}$

$\Rightarrow S(t)=\frac{mg}{c}\left[t+\frac{m}{c}e^{-\frac{ct}{m}}\right]-\frac{m^2g}{c^2}$

**16)** Tìm các quỹ đạo trực giao của họ các đường cong $y=(x+k)^{-1}$. Vẽ một vài đường của mỗi họ trên cùng một hệ trục.

**Lời giải:**

Quỹ đạo trực giao của họ các đường cong $y=(x+k)^{-1}$ là quỹ tích của tọa độ khúc tâm của chính đường cong đó,và tọa độ đó được xác định

$X=x-\frac{(1+y'^2)y'}{y''};Y=y+\frac{1+y'^2}{y''}$

Từ $y=(x+k)^{-1}\Rightarrow y'=-y^2=-\frac{1}{(x+k)^2};y''=2y^3=\frac{2}{(x+k)^3}\Rightarrow$

$X=x-\frac{y'(1+y'^2)}{y''}=x+\frac{y^2(1+y^4)}{2y^3}\Rightarrow X+k=\frac{1}{y}+\frac{1+y^4}{2y}\Rightarrow X+k=\frac{3+y^4}{2y}$ ;

$Y=y+\frac{1+y^4}{2y^3}=\frac{1+3y^4}{2y^3}=\frac{3}{y^2}\frac{(3+y^4)}{2y}-\frac{4}{y^3}=\frac{3(X+k)}{y^2}-\frac{4}{y^3}$

$$\Rightarrow Y = \frac{3(X+k)}{y^2} - \frac{4}{y^3} \text{ và } X + k = \frac{3+y^4}{2y}$$

**17)** Giải các PTVP toàn phần:

a. $\dfrac{(x+y^2)dx - 2xydy}{x^2} = 0$;

**Lời giải:**

Nhận thấy $\dfrac{(x+y^2)dx - 2xydy}{x^2} = 0$ là PTVP toàn phần vì

$$\left(\frac{x+y^2}{x^2}\right)'_y = \left(\frac{-2xy}{x^2}\right)'_x = \frac{2y}{x^2}$$

nên $\displaystyle\int_{AB} \frac{(x+y^2)dx - 2xydy}{x^2}$ không phụ thuộc đường lấy tích phân

Do vậy ta chọn $A(1,0)$ ; $B(x,y)$,khi đó nghiệm của phương trình được xác định

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} \frac{(x+y^2)dx - 2xydy}{x^2} = \int_1^x \frac{dx}{x} - \int_0^y \frac{2ydy}{x} = C \Rightarrow \ln|x| - \frac{y^2}{x} = C$$

b. $(2x - y + 1)dx + (2y - x - 1)dy = 0$;

**Lời giải:**

Nhận thấy $(2x - y + 1)dx + (2y - x - 1)dy = 0$ là PTVP toàn phần vì

$(2x - y + 1)'_y = (2y - x - 1)'_x = -1$

nên $\displaystyle\int_{\overset{\frown}{AB}} (2x - y + 1)dx + (2y - x - 1)dy$ không phụ thuộc đường lấy tích phân

Do vậy ta chọn $A(0,0)$ ; $B(x,y)$ ,khi đó nghiệm của phương trình được xác định

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} (2x - y + 1)dx + (2y - x - 1)dy = \int_0^x (2x+1)dx + \int_0^y (2y - x - 1)dy = C$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x + y^2 - xy - y = C$$

c. $\left(1 + x\sqrt{x^2+y^2}\right)dx + \left(\sqrt{x^2+y^2} - 1\right)ydy = 0$;

**Lời giải:**

.........................................................................................................

Nhận thấy $\left(1+x\sqrt{x^2+y^2}\right)dx+\left(\sqrt{x^2+y^2}-1\right)ydy=0$ là PTVP toàn phần vì

$$\left(1+x\sqrt{x^2+y^2}\right)'_y=y\left(\sqrt{x^2+y^2}-1\right)'_x=\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

nên $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}}\left(1+x\sqrt{x^2+y^2}\right)dx+\left(\sqrt{x^2+y^2}-1\right)ydy$ không phụ thuộc đường lấy tích phân

Do vậy ta chọn $A(0,0)$ ; $B(x,y)$ ,khi đó nghiệm của phương trình được xác định

$$\int_0^x\left(1+x^2\right)dx+\int_0^y\left(\sqrt{x^2+y^2}-1\right)ydy=C\Leftrightarrow x+\frac{x^3}{3}-\frac{y^2}{2}+\frac{1}{3}\left(\left(x^2+y^2\right)\sqrt{x^2+y^2}\right)\Big|_{y=0}^{y}=C$$

$$\Rightarrow x-\frac{y^2}{2}+\frac{1}{3}\left(x^2+y^2\right)\sqrt{x^2+y^2}=C$$

d. $(x+y)dx+\left(x+\frac{1}{y}\right)dy=0$.

**Lời giải:**

Nhận thấy $(x+y)dx+\left(x+\frac{1}{y}\right)dy=0$ là PTVP toàn phần vì

$$(x+y)'_y=\left(x+\frac{1}{y}\right)'_x=1$$

nên $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}}(x+y)dx+\left(x+\frac{1}{y}\right)dy$ không phụ thuộc đường lấy tích phân

Do vậy ta chọn $A(0,1)$ ; $B(x,y)$ ,khi đó nghiệm của phương trình được xác định

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}}(x+y)dx+\left(x+\frac{1}{y}\right)dy=\int_0^x(x+1)dx+\int_1^y\left(x+\frac{1}{y}\right)dy=C\Leftrightarrow\frac{x^2}{2}+x+\left(xy+\ln|y|\right)\Big|_{y=1}^{y}=C$$

$$\Rightarrow\frac{x^2}{2}+xy+\ln|y|=C$$

**18)** Giải các PTVP dùng thừa số tích phân:

a. $\left(1+\frac{x}{y}\right)dx+\left(\frac{x}{y}-1\right)dy=0$;

..............................................................................................

**Lời giải:**

Nhận thấy $y\left(1+\frac{x}{y}\right)dx+y\left(\frac{x}{y}-1\right)dy=0$ là PTVP toàn phần

nên $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} y\left(1+\frac{x}{y}\right)dx+y\left(\frac{x}{y}-1\right)dy$ không phụ thuộc đường lấy tích phân

Do vậy ta chọn $A(0,1)$ ; $B(x,y)$,khi đó nghiệm của phương trình được xác định

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} y\left(1+\frac{x}{y}\right)dx+y\left(\frac{x}{y}-1\right)dy=\int_0^x (x+1)dx+\int_1^y (x-y)dy=C_1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{2}+x-\frac{y^2}{2}+xy-x+\frac{1}{2}=C_1$$

$$\Rightarrow\ x^2-y^2+2xy=C$$

b. $(1-x^2y)dx+x^2(y-x)dy=0$;

**Lời giải:**

$P'_y-Q'_x=2x^2-2xy=-2x(y-x)\Rightarrow \frac{P'_y-Q'_x}{Q}=-\frac{2}{x}$ khi đó thừa số tích phân

$\mu(x)=\frac{1}{x^2}$

Ta được $\frac{(1-x^2y)dx}{x^2}+(y-x)dy=0$ là PTVP toàn phần

nên $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \frac{(1-x^2y)dx}{x^2}+(y-x)dy$ không phụ thuộc đường lấy tích phân

Do vậy ta chọn $A(1,0)$ ; $B(x,y)$,khi đó nghiệm của phương trình được xác định

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \frac{(1-x^2y)dx}{x^2}+(y-x)dy=\int_1^x \frac{dx}{x^2}+\int_0^y (y-x)dy=C_1 \Leftrightarrow -\frac{1}{x}+1-xy+\frac{y^2}{2}=C_1$$

$$\Rightarrow y^2x-2x^2y-2=Cx$$

c. $y(1+x^2y)dx+x(2+yx^2)dy=0$;

**Lời giải:**

$P'_y-Q'_x=-1-x^2y\Rightarrow -\frac{P'_y-Q'_x}{P}=\frac{1}{y}$ khi đó thừa số tích phân $\mu(y)=y$

Ta được $y^2(1+x^2y)dx+xy(2+yx^2)dy=0$ là PTVP toàn phần nên $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} y^2(1+x^2y)dx + xy(2+yx^2)dy$ không phụ thuộc đường lấy tích phân

Do vậy ta chọn $A(0,0)$ ; $B(x,y)$ ,khi đó nghiệm của phương trình được xác định

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} y^2(1+x^2y)dx + xy(2+yx^2)dy = \int_0^x 0dx + \int_0^y xy(2+yx^2)dy = C_1 \Leftrightarrow xy^2 + \frac{x^3y^3}{3} = C_1$$

$\Rightarrow 3xy^2 + x^3y^3 = C$

d. $(\sin^2 y - x^2)dx - x\sin 2y dy = 0$;

**Lời giải:**

$P'_y - Q'_x = 2\sin 2y \Rightarrow \dfrac{P'_y - Q'}{Q} = -\dfrac{2}{x}$ khi đó thừa số tích phân $\mu(x) = \dfrac{1}{x^2}$

Ta được $\dfrac{(\sin^2 y - x^2)dx}{x^2} - \dfrac{\sin 2y dy}{x} = 0$ là PTVP toàn phần

nên $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \dfrac{(\sin^2 y - x^2)dx}{x^2} - \dfrac{\sin 2y dy}{x}$ không phụ thuộc đường lấy tích phân.Do vậy ta chọn $A(1,0)$ ; $B(x,y)$ ,khi đó nghiệm của phương trình được xác định

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \frac{(\sin^2 y - x^2)dx}{x^2} - \frac{\sin 2y dy}{x} = -\int_1^x dx - \int_0^y \frac{\sin 2y dy}{x} = C_1 \Leftrightarrow 1 - x + \frac{\cos 2y}{2x} = C_1$$

$\Rightarrow 2x^2 + Cx = \cos 2y$

e. $(2xy^2 - y)dx + xdy = 0$.

**Lời giải:**

$P'_y - Q'_x = 4xy - 2 \Rightarrow -\dfrac{P'_y - Q'_x}{P} = -\dfrac{2}{y}$ khi đó thừa số tích phân $\mu(y) = \dfrac{1}{y^2}$

Ta được $\dfrac{(2xy-1)dx}{y} + \dfrac{xdy}{y^2} = 0$ là PTVP toàn phần

nên $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \dfrac{(2xy-1)dx}{y} + \dfrac{xdy}{y^2}$ không phụ thuộc đường lấy tích phâ

Do vậy ta chọn $A(0,1)$ ; $B(x,y)$ ,khi đó nghiệm của phương trình được xác định

........................................................................................................

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \frac{(2xy-1)dx}{y} + \frac{xdy}{y^2} = \int_0^x (2x-1)dx + \int_1^y \frac{xdy}{y^2} = C \Leftrightarrow x^2 - \frac{x}{y} = C \;\Rightarrow\; yx^2 - x = Cy$$

**19)** Giải các PTVP

a. $xy'' = \sqrt{1+y'^2}$;

**Lời giải:**

Đặt

$$z = y' \Rightarrow xz' = \sqrt{1+z^2} \Rightarrow \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \frac{dx}{x} \Rightarrow z + \sqrt{1+z^2} = Cx \Rightarrow 1+z^2 = z^2 - 2zxC + C^2x^2$$

$$\Rightarrow z = \frac{C^2x^2-1}{2xC} \Rightarrow y = \int \frac{C^2x^2-1}{2xC}dx + D \Rightarrow y = \frac{Cx^2}{4} - \frac{\ln|x|}{2C} + D$$

b. $(1+x^2)y'' + 1 + y'^2 = 0$.

**Lời giải:**

Đặt

$$z = y' \Rightarrow (1+x^2)z' + 1 + z^2 = 0 \Rightarrow \frac{dz}{1+z^2} = -\frac{dx}{1+x^2} \Rightarrow \arctan z = C_1 - \arctan x \Rightarrow$$

$$z = \frac{C-x}{1+xC}$$

$$\Rightarrow y = \int \frac{C-x}{1+xC}dx + D_1 = \ln|1+xC| - \frac{x}{C} + \frac{1}{C^2}\ln|1+xC| + D_1 \Leftrightarrow$$

$$y = \left(1+\frac{1}{C^2}\right)\ln|1+xC| - \frac{x}{C} + D_1$$

$$\Rightarrow Cy = (1+C^2)\ln|1+xC| - Cx + D$$

**20)** Giải các PTVP

a. $4y'' + y' = 0$;

**Lời giải:**

Phương trình đặc trưng $4k^2 + k = 0$ $\Rightarrow$ nghiệm tổng quát của phương trình

$$y = C_1 + C_2e^{-\frac{x}{4}}$$

b. $y'' - 2y' - y = 0$;

**Lời giải:**

Phương trình đặc trưng $k^2 - 2k - 1 = 0 \to k_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$ $\Rightarrow$ nghiệm tổng quát của phương trình

$y = C_1 e^{(1+\sqrt{2})x} + C_2 e^{(1-\sqrt{2})x}$

c. $y'' + 8y' + 41y = 0$;

**Lời giải:**

Phương trình đặc trưng $k^2 + 8k + 41 = 0 \to k_{1,2} = -4 \pm 5i$

$\Rightarrow$ nghiệm tổng quát của phương trình $y = e^{-4x}\left(C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x\right)$

d. $y'' + y' + y = 0$.

**Lời giải:**

Phương trình đặc trưng $k^2 + k + 1 = 0 \to k_{1,2} = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow$ nghiệm tổng quát của phương trình $y = e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1 \cos\dfrac{x\sqrt{3}}{2} + C_2 \sin\dfrac{x\sqrt{3}}{2}\right)$

**21)** Giải bài toán giá trị ban đầu:

a. $2y'' + 5y' + 3y = 0 \quad y(0) = 3, y'(0) = -4$;

**Lời giải:**

Phương trình đặc trưng $2k^2 + 5k + 3 = 0 \to k_1 = -1; k_2 = -\dfrac{3}{2}$ $\Rightarrow$ nghiệm tổng quát của phương trình $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-\frac{3x}{2}}$. Từ điều kiện $y'(0) = -4, y(0) = 3$ ta có

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 3 \\ C_1 + \dfrac{3}{2}C_2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow C_2 = 2; C_1 = 1$$

$\Rightarrow$ nghiệm riêng của phương trình thỏa mãn điều kiện đầu: $y = e^{-x} + 2e^{-\frac{3x}{2}}$

b. $4y'' - 4y' + y = 0 \quad y'(0) = -1,5; \quad y(0) = 1$;

**Lời giải:**

Phương trình đặc trưng $4k^2 - 4k + 1 = 0 \to k_{1,2} = \dfrac{1}{2}$ $\Rightarrow$ nghiệm tổng quát của phương trình

$y = (C_1 + C_2 x)e^{\frac{x}{2}}$. Từ điều kiện $y'(0) = -1,5; \quad y(0) = 1$ ta có

$$\begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 + \frac{1}{2}C_1 = -\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow C_2 = -2; C_1 = 1$$

$\Rightarrow$ nghiệm riêng của phương trình thỏa mãn điều kiện đầu: $y = (1-2x)e^{\frac{x}{2}}$

**22)** Giải các PTVP

a. $4y'' + y = 0 \quad y(0) = 3, \quad y'(\pi) = -4,$ ;

**Lời giải:**

Phương trình đặc trưng $4k^2 + 1 = 0 \to k_{1,2} = \pm\frac{i}{2}$ $\Rightarrow$ nghiệm tổng quát của phương trình

$y = \left(C_1 \cos\frac{x}{2} + C_2 \sin\frac{x}{2}\right)$.Từ điều kiện $y(0) = 3, \quad y'(\pi) = -4,$ ta có

**(xem lại điều kiện)**

b. $y'' - 6y' + 25y = 0 \quad y'(\pi) = 2, \quad y(0) = 1$;

**Lời giải:**

Phương trình đặc trưng $k^2 - 6k + 25 = 0 \to k_{1,2} = 3 \pm 4i$ $\Rightarrow$ nghiệm tổng quát của phương trình

$y = e^{3x}\left(C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x\right)$.Từ điều kiện $y'(\pi) = 2, \quad y(0) = 1$ ta có

$$\begin{cases} C_1 = 1 \\ (4C_2 + 3C_1)e^{3\pi} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow C_1 = 1; C_2 = \frac{e^{-3\pi}}{2} - \frac{3}{4}$$

$\Rightarrow$ nghiệm riêng của phương trình thỏa mãn điều kiện đầu:

$$y = e^{3x}\left(C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x\right) \text{ với } C_1 = 1; C_2 = \frac{e^{-3\pi}}{2} - \frac{3}{4}$$

**23)** Giải các PTVP

a. $y'' + 3y' + 2y = x^2$;

**Lời giải:**

Phương trình đặc trưng $k^2 + 3k + 2 = 0 \to k_1 = -1; k_2 = -2$ $\Rightarrow$ nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x}$

nghiệm riêng của phương trình $y'' + 3y' + 2y = x^2$ có dạng $y^* = ax^2 + bx + c$, thay vào phương trình ta được

$$2a + 3(2ax + b) + 2(ax^2 + bx + c) = x^2 \Rightarrow \begin{cases} 2a = 1 \\ 3a + b = 0 \\ 2a + 3b + 2c = 0 \end{cases} \Rightarrow (a, b, c) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right)$$

nghiệm tổng quát của phương trình đã cho $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + \frac{1}{4}(2x^2 - 6x + 7)$

b. $y'' - 4y' + 5y = e^{-x}$;

**Lời giải:**

Phương trình đặc trưng $k^2 - 4k + 5 = 0 \to k_{1,2} = 2 \pm i \Rightarrow$ nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất $y = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$

nghiệm riêng của phương trình $y'' - 4y' + 5y = e^{-x}$ có dạng $y^* = ae^{-x}$, thay vào phương trình ta được $a = \frac{1}{10} \Rightarrow$ nghiệm tổng quát của phương trình đã cho

$$y = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + \frac{e^{-x}}{10}$$

c. $y'' - y' = xe^x \quad y'(0) = 1, \quad y(0) = 2$;

**Lời giải:**

Phương trình đặc trưng $k^2 - k = 0$

$\Rightarrow$ nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất $y = C_1 + C_2 e^x$

nghiệm riêng của phương trình $y'' - y' = xe^x$ có dạng $y^* = x(ax + b)e^x$, thay vào phương trình ta được $2ax + 2a + b = x \Rightarrow a = \frac{1}{2}; b = -1 \Rightarrow$ nghiệm tổng quát của phương trình đã cho

$y = C_1 + C_2 e^x + \frac{1}{2}x(x - 2)e^x$. Từ điều kiện $y'(0) = 1, \ y(0) = 2$ ta có

$\begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$ nghiệm riêng thỏa mãn điều kiện đầu: $y = 2e^x + \frac{1}{2}x(x - 2)e^x$

d. $y'' - 2y' = \sin 4x$;

**Lời giải:**

..................................................................................................

Phương trình đặc trưng $k^2 - 2k = 0$

$\Rightarrow$ nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất $y = C_1 + C_2e^{2x}$

nghiệm riêng của phương trình $y'' - 2y' = \sin 4x$ có dạng

$y^* = a\cos 4x + b\sin 4x$ ,thay vào phương trình và rút gọn ta được

$\begin{cases} -b - 2a = 0 \\ 8a - 16b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = \dfrac{1}{40}; b = -\dfrac{1}{20} \Rightarrow$ nghiệm tổng quát của phương trình đã cho

$y = C_1 + C_2e^{2x} + \dfrac{1}{40}\cos 4x - \dfrac{1}{20}\sin 4x$

e. $y'' - 3y' + 2y = (-12x + 4)e^x$

**Lời giải:**

Phương trình đặc trưng $k^2 - 3k + 2 = 0$

$\Rightarrow$ nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất $y = C_1e^x + C_2e^{2x}$

nghiệm riêng của phương trình $y'' - 3y' + 2y = (-12x + 4)e^x$ có dạng

$y^* = x(ax + b)e^x$ ,thay vào phương trình và rút gọn ta được

$-2ax + 2a - b = -12x + 4 \Leftrightarrow a = 6; b = 8 \Rightarrow$ nghiệm tổng quát của phương trình đã cho

$y = C_1e^x + C_2e^{2x} + x(6x + 8)e^x$

f. $y'' + y = (x + 2)\cos x$ ;

**Lời giải:**

Phương trình đặc trưng $k^2 + 1 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = \pm i$

$\Rightarrow$ nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất $y = C_1\cos x + C_2\sin x$ nghiệm riêng của phương trình $y'' + y = (x + 2)\cos x$

có dạng $y^* = \left[x(ax + b)\cos x + x(cx + d)\sin x\right]$,thay vào phương trình và rút gọn ta được

$\left[4cx + 2a + 2d\right]\cos x + \left[-4ax + 2c - 2b\right]\sin x = (x + 2)\cos x \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 4cx + 2a + 2d = x + 2 \\ -4ax + 2c - 2b = 0 \end{cases}$

$a = 0; b = c = \dfrac{1}{4}; d = 1 \Leftrightarrow a = 0; b = c = \dfrac{1}{4}; d = 1 \Rightarrow$ nghiệm tổng quát của phương trình đã cho

$$y=\left(C_1+\frac{x}{4}\right)\cos x+\left(C_2+\frac{x^2+4x}{4}\right)\sin x$$

g. $y'''+6y''+12y'+8y=3e^{-2x}$.

**Lời giải:**

Phương trình đặc trưng $k^3+6k^2+12k+8=0\Rightarrow k_{1,2,3}=-2$

$\Rightarrow$ nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất $y=(C_1+C_2x+C_3x^2)e^{-2x}$

Nghiệm riêng của phương trình $y'''+6y''+12y'+8y=3e^{-2x}$ có dạng

$y^*=ax^3e^{-2x}$ thay vào phương trình và rút gọn ta được $6a=3\Rightarrow a=\dfrac{1}{2}\Rightarrow$ nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là $y=(C_1+C_2x+C_3x^2)e^{-2x}+\dfrac{1}{2}x^3e^{-2x}$

**24)** Tìm nghiệm riêng của PTVP

a. $y''-3y=e^x\cos x \quad y(0)=1=y'(\pi)$;

**Lời giải:**

Phương trình đặc trưng $k^2-3=0\Rightarrow k_{1,2}=\pm\sqrt{3}$ $\Rightarrow$ nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất $y=C_1e^{x\sqrt{3}}+C_2e^{-x\sqrt{3}}$

Nghiệm riêng của phương trình $y''-3y=e^x\cos x$ có dạng $y^*=(a\cos x+b\sin x)e^x$ thay vào phương trình và rút gọn ta được $(2b-3a)\cos x-(2a+3b)\sin x=\cos x$

$\Rightarrow\begin{cases}2b-3a=1\\2a+3b=0\end{cases}\Rightarrow a=-\dfrac{3}{13};b=\dfrac{2}{13}\Rightarrow$ Nghiệm riêng của phương trình

$y=\dfrac{1}{13}(-3\cos x+2\sin x)e^x$

$\Rightarrow$ nghiệm tổng quát của phương trình đã cho

là $y=C_1e^{x\sqrt{3}}+C_2e^{-x\sqrt{3}}+\dfrac{1}{13}(-3\cos x+2\sin x)e^x$

Từ điều kiện $y(0)=1=y'(\pi)$ ta có $\begin{cases} C_1+C_2-\dfrac{3}{13}=1 \\ C_1\sqrt{3}-\sqrt{3}C_2-\dfrac{1}{13}=1 \end{cases} \Rightarrow$

$C_1=\dfrac{8\sqrt{3}+7}{13\sqrt{3}};C_2=\dfrac{8\sqrt{3}-7}{13\sqrt{3}}$

Nghiệm riêng của phương trình thỏa mãn điều kiện $y(0)=1=y'(\pi)$ là

$$y=\frac{8\sqrt{3}+7}{13\sqrt{3}}e^{x\sqrt{3}}+\frac{8\sqrt{3}-7}{13\sqrt{3}}e^{-x\sqrt{3}}+\frac{1}{13}(-3\cos x+2\sin x)e^{x}$$

b. $y''-4y'+3y=0 \quad y(0)=0;y'(0)=1;$

**Lời giải:**

Phương trình đặc trưng $k^2-4k+3=0 \Rightarrow k_{1,2}=1;3$

Nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là $y=C_1e^x+C_2e^{3x}$

Từ điều kiện $y(0)=0;y'(0)=1$ ta có $\begin{cases} C_1+C_2=0 \\ C_1+3C_2=1 \end{cases} \Rightarrow C_1=-\dfrac{1}{2};C_2=\dfrac{1}{2}$

Nghiệm riêng của phương trình thỏa mãn điều kiện $y(0)=0;y'(0)=1$ là

$y=\dfrac{1}{2}\left(e^{3x}-e^{x}\right)$

**25)** Viết ra dạng nghiệm riêng đối với phương pháp hệ số bất định, không xác định các hệ số này.

a. $y''+9y=x^2\sin x$;

**Lời giải:**

Phương trình đặc trưng $k^2+9=0 \Rightarrow k_{1,2}=\pm 3i$

Nghiệm riêng của phương trình có dạng

$y^*=\left(ax^2+bx+c\right)\cos x+\left(a_1x^2+b_1x+c_1\right)\sin x$

b. $y''+3y'-4y=(x^3+x+1)e^x$;

**Lời giải:**

Phương trình đặc trưng $k^2+3k-4=0 \Rightarrow k_1=1;k_2=-4$

Nghiệm riêng của phương trình có dạng $y^*=x(ax^3+bx^2+cx+d)e^x$

c. $y''+2y'+10y=x^2e^{-x}\cos 3x$;

**Lời giải:**

Phương trình đặc trưng $k^2+2k+10=0 \Rightarrow k_{1,2}=-1\pm 3i$

Nghiệm riêng của phương trình có dạng

$$y^*=x\left[\left(ax^2+bx+c\right)\cos 3x+\left(a_1x^2+b_1x+c_1\right)\sin 3x\right]e^{-x}$$

d. $y''-2y'+2y=xe^x\sin x$;

**Lời giải:**

Phương trình đặc trưng $k^2-2k+2=0 \Rightarrow k_{1,2}=1\pm i$

Nghiệm riêng của phương trình có dạng $y^*=x\left[\left(ax+b\right)\cos x+\left(a_1x+b_1\right)\sin x\right]e^x$

e. $y''+y=2\cos x$

**Lời giải:**

Phương trình đặc trưng $k^2+1=0 \Rightarrow k_{1,2}=\pm i$

Nghiệm riêng của phương trình có dạng $y^*=x(a\cos x+b\sin x)$

f. $y'''-3y''+3y'-y=(1+x^4)e^x$;

**Lời giải:**

Phương trình đặc trưng $k^3-3k^2+3k-1=0 \Rightarrow k_{1,2,3}=1$

Nghiệm riêng của phương trình có dạng $y^*=x(a_1x^4+a_2x^3+a_3x^2+a_4x+a_5)e^x$

g. $y''+y=x\sin x$.

**Lời giải:**

Phương trình đặc trưng $k^2+1=0 \Rightarrow k_{1,2}=\pm i$

Nghiệm riêng của phương trình có dạng $y^*=x\left[\left(ax+b\right)\cos x+\left(a_1x+b_1\right)\sin x\right]$

**26)** Giải PTVP (i) dùng phương pháp hệ số bất định và (ii) dùng phương pháp biến thiên hằng số.

a. $y''+4y=x$;

**Lời giải:**

Phương trình đặc trưng $k^2+4=0 \Rightarrow k_{1,2}=\pm 2i$

$\Rightarrow$ nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$

<u>Cách 1</u>

Nghiệm riêng của phương trình có dạng $y^*=ax+b$

thay vào phương trình và rút gọn ta được $a = \frac{1}{4}; b = 0 \Rightarrow$ nghiệm tổng quát của

phương trình đã cho $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{x}{4}$

Cách 2:

Coi $C_1 = C_1(x); C_2 = C_2(x)$ bằng phương pháp biến thiên hằng số thì

$C_1 = C_1(x); C_2 = C_2(x)$ được xác định bởi hệ phương trình

$$\begin{cases} C_1' \cos 2x + C_2' \sin 2x = 0 \\ -2C_1' \sin 2x + 2C_2' \cos 2x = x \end{cases}$$

$$\Rightarrow C_1' = -\frac{x \sin 2x}{2} \Rightarrow C_1 = -\int \frac{x \sin 2x}{2} dx = \frac{1}{4} x \cos 2x - \frac{1}{8} \sin 2x$$

và $C_2' = \frac{x \cos 2x}{2} \Rightarrow C_2 = \frac{1}{4} x \sin 2x + \frac{1}{8} \cos 2x$

$$y^* = \left(\frac{1}{4} x \cos 2x - \frac{1}{8} \sin 2x\right) \cos 2x + \left(\frac{1}{4} x \sin 2x + \frac{1}{8} \cos 2x\right) \sin 2x = \frac{x}{4}$$

$$\Rightarrow y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{4} x$$

b. $y'' - 2y' + y = e^{2x}$;

**Lời giải:**

Phương trình đặc trưng $k^2 - 2k + 1 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = 1$

$\Rightarrow$ nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất $y = (C_1 + xC_2)e^x$

Cách 1

Nghiệm riêng của phương trình có dạng $y^* = ae^{2x}$

thay vào phương trình và rút gọn ta được $a = 1 \Rightarrow$ nghiệm tổng quát của phương trình đã cho

$$y = (C_1 + xC_2)e^x + e^{2x}$$

Cách 2:

Coi $C_1 = C_1(x); C_2 = C_2(x)$ bằng phương pháp biến thiên hằng số thì

$C_1 = C_1(x); C_2 = C_2(x)$ được xác định bởi hệ phương trình

$$\begin{cases} C_1' + xC_2' = 0 \\ C_1' e^x + C_2'(1+x)e^x = e^{2x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1' + xC_2' = 0 \\ C_1' + C_2'(1+x) = e^x \end{cases}$$

$C_2' = e^x \Rightarrow C_2 = e^x; C_1 = (1-x)e^x \Rightarrow y^* = \left[(1-x)e^x + xe^x\right]e^x = e^{2x}$

$\Rightarrow y = (C_1 + xC_2)e^x + e^{2x}$

c. $y'' - 5y' + 6y = (x+1)e^{2x}$;

**Lời giải:**

Phương trình đặc trưng $k^2 - 5k + 6 = 0 \Rightarrow k_1 = 2; k_2 = 3$

$\Rightarrow$ nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất: $y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$

<u>Cách 1</u>

Nghiệm riêng của phương trình có dạng $y^* = x(ax+b)e^{2x}$

thay vào phương trình và rút gọn ta được $-2ax + 2a - b = x + 1 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}; b = -2$

$\Rightarrow$ nghiệm tổng quát của phương trình đã cho: $y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x} - \frac{(x^2+4x)e^{2x}}{2}$

<u>Cách 2:</u>

Coi $C_1 = C_1(x); C_2 = C_2(x)$ bằng phương pháp biến thiên hằng số thì $C_1 = C_1(x); C_2 = C_2(x)$ được xác định bởi hệ phương trình

$$\begin{cases} C_1'e^{2x} + C_2'e^{3x} = 0 \\ 2C_1'e^{2x} + 3C_2'e^{3x} = (x+1)e^{2x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1' + C_2'e^{x} = 0 \\ 2C_1' + 3C_2'e^{x} = x+1 \end{cases}$$

$C_2' = (x+1)e^{-x} \Rightarrow C_2 = -(x+2)e^{-x}$ và $C_1' = -(x+1) \Rightarrow C_1 = -\frac{x^2+2x}{2}$

$\Rightarrow y = -\frac{x^2+2x}{2}e^{2x} - (x+2)e^{-x}e^{3x} = -\frac{x^2+4x+4}{2}e^{2x}$

d. $y'' + y' = xe^{-x}$;

**Lời giải:**

Phương trình đặc trưng $k^2 + k = 0 \Rightarrow k_1 = 0; k_2 = -1$

$\Rightarrow$ nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất: $y = C_1 + C_2e^{-x}$

<u>Cách 1</u>

Nghiệm riêng của phương trình có dạng $y^* = x(ax+b)e^{-x}$

thay vào phương trình và rút gọn ta được $-2ax + 2a - b = x \Rightarrow a = -\frac{1}{2}; b = -1$

$\Rightarrow$ nghiệm tổng quát của phương trình đã cho: $y = C_1 + C_2e^{-x} - \frac{x^2 + 2x}{2}e^{-x}$

Cách 2:

Coi $C_1 = C_1(x); C_2 = C_2(x)$ bằng phương pháp biến thiên hằng số thì $C_1 = C_1(x); C_2 = C_2(x)$ được xác định bởi hệ phương trình

$$\begin{cases} C_1' + C_2'e^{-x} = 0 \\ -C_2'e^{-x} = xe^{-x} \end{cases} \Leftrightarrow C_2 = -\frac{x^2}{2}; C_1 = -(x+1)e^{-x} \Rightarrow$$

$$y = C_1 + C_2e^{-x} - \frac{x^2 + 2x + 2}{2}e^{-x}$$

e. $y'' - 3y' + 2y = xe^{3x}$

**Lời giải:**

Phương trình đặc trưng $k^2 - 3k + 2 = 0 \Rightarrow k_1 = 2; k_2 = 1$

$\Rightarrow$ nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất: $y = C_1e^x + C_2e^{2x}$

Cách 1

Nghiệm riêng của phương trình có dạng $y^* = (ax + b)e^{3x}$

thay vào phương trình và rút gọn ta được $2ax + 3a + 2b = x \Rightarrow a = \frac{1}{2}; b = -\frac{3}{4}$

$\Rightarrow$ nghiệm tổng quát của phương trình đã cho: $y = C_1e^x + C_2e^{2x} + \frac{(2x-3)e^{3x}}{4}$

Cách 2:

Coi $C_1 = C_1(x); C_2 = C_2(x)$ bằng phương pháp biến thiên hằng số thì $C_1 = C_1(x); C_2 = C_2(x)$ được xác định bởi hệ phương trình:

$$\begin{cases} C_1'e^x + C_2'e^{2x} = 0 \\ C_1'e^x + 2C_2'e^{2x} = xe^{3x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1' + C_2'e^x = 0 \\ C_1' + 2C_2'e^x = xe^{2x} \end{cases}$$

$$C_1' = -xe^{2x} \Rightarrow C_1 = -\frac{xe^{2x}}{2} + \frac{e^{2x}}{4} \text{ và } C_2' = xe^x \Rightarrow C_2 = (x-1)e^x$$

$$y^* = \left(-\frac{xe^{2x}}{2} + \frac{e^{2x}}{4}\right)e^x + (x-1)e^xe^{2x} \Rightarrow y^* = \frac{2x-3}{4}e^{3x}$$

$$\Rightarrow y = C_1e^x + C_2e^{2x} + \frac{2x-3}{4}e^{3x}$$

f. $y'' - 4y' + 8y = \sin 2x$ .

**Lời giải:**

Phương trình đặc trưng $k^2 - 4k + 8 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = 2 \pm 2i$

$\Rightarrow$ nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất $y = e^{2x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$

<u>Cách 1</u>

Nghiệm riêng của phương trình có dạng $y^* = a\cos 2x + b\sin 2x$ thay vào phương trình

và rút gọn ta được $(4a - 8b)\cos 2x + (8a + 4b)\sin 2x = \sin 2x \Rightarrow a = \dfrac{1}{10}; b = \dfrac{1}{20}$

$\Rightarrow$ nghiệm tổng quát của phương trình đã cho

$$y = e^{2x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + \frac{1}{10}\cos 2x + \frac{1}{20}\sin 2x$$

<u>Cách 2:</u>

Coi $C_1 = C_1(x); C_2 = C_2(x)$ bằng phương pháp biến thiên hằng số thì

$C_1 = C_1(x); C_2 = C_2(x)$ được xác định bởi hệ phương trình

$$\begin{cases} C_1' e^{2x} \cos 2x + C_2' e^{2x} \sin 2x = 0 \\ -2C_1' \sin 2x + 2C_1' \cos 2x + 2C_2' \cos 2x + 2C_2' \sin 2x = e^{-2x} \sin 2x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_1' \cos 2x + C_2' \sin 2x = 0 \\ -2C_1' \sin 2x + 2C_2' \cos 2x = e^{-2x} \sin 2x \end{cases}$$

$$\Rightarrow C_2' = \frac{e^{-2x} \sin 4x}{4}$$

$$C_2 = \frac{1}{4}\int e^{-2x} \sin 4x dx = -\frac{e^{-2x} \cos 4x}{16} - \frac{1}{32}\int e^{-2x} d(\sin 4x)$$

$$= -\frac{e^{-2x} \cos 4x}{16} - \frac{e^{-2x} \sin 4x}{32} - \frac{1}{16}\int e^{-2x} \sin 4x dx \Rightarrow$$

$$C_2 = -\frac{1}{10}\left(2\cos 4x + \sin 4x\right)e^{-2x}$$

$$\Rightarrow C_1' = -\frac{e^{-2x} \sin^2 2x}{2}$$

$$\Rightarrow C_1 = \frac{e^{-2x}}{8} + \frac{1}{4}\int e^{-2x} \cos 4x dx = \frac{e^{-2x}}{8} + \frac{e^{-2x} \sin 4x}{16} + \frac{1}{8}\int e^{-2x} \sin 4x dx$$

$$=\frac{e^{-2x}}{8}-\frac{1}{80}\left(3\sin 4x-\cos 4x\right)e^{-2x}$$

**27)** Tìm nghiệm của PTVP

a. $y''-2y'+y=x\cos x$;

**Lời giải:**

Phương trình đặc trưng $k^2-2k+1=0\Rightarrow k_{1,2}=1$

$\Rightarrow$ nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất: $y=(C_1+xC_2)e^x$

Nghiệm riêng của phương trình có dạng $y^*=(ax+b)\cos x+(cx+d)\sin x$

thay vào phương trình và rút gọn ta được

$(2ax+2b-2a-2c)\sin x+(-2cx-2d-2a+2c)\cos x=x\cos x$

$$\Rightarrow\begin{cases}-2cx-2d-2a+2c=x\\2ax+2b-2a-2c=0\end{cases}\quad\Rightarrow\quad b=c=d=-\frac{1}{2};a=0$$

$\Rightarrow$ nghiệm tổng quát của phương trình đã cho:

$$y=(C_1+xC_2)e^x-\frac{\cos x+(x+1)\sin x}{2}$$

b. $y''-y'-6y=1+e^{-2x}$;

**Lời giải:**

Phương trình đặc trưng $k^2-k-6=0\Rightarrow k_1=3;k_2=-2$

$\Rightarrow$ nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất: $y=C_1e^{3x}+C_2e^{-2x}$

phương trình $y''-y'-6y=1$ có nghiệm riêng $y_1^*=-\frac{1}{6}$

phương trình $y''-y'-6y=e^{-2x}$ có nghiệm riêng dạng $y_2^*=axe^{-2x}$,thay vào phương trình $y''-y'-6y=e^{-2x}$ và rút gọn ta được $a=-\frac{1}{5}$

$\Rightarrow$ nghiệm tổng quát của phương trình : $y=C_1e^{3x}+C_2e^{-2x}-\frac{xe^{-2x}}{5}-\frac{1}{6}$

c. $9y''+y=3x+e^{-x}\quad y(0)=1,\quad y'(0)=2$;

**Lời giải:**

Phương trình đặc trưng $9k^2+1=0\Rightarrow k_{1,2}=\pm\frac{i}{3}$

$\Rightarrow$ nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất: $y = C_1\cos\frac{x}{3} + C_2\sin\frac{x}{3}$

phương trình $9y'' + y = 3x$ có nghiệm riêng $y_1^* = 3x$

phương trình $9y'' + y = e^{-x}$ có nghiệm riêng dạng $y_2^* = ae^{-x}$ ,thay vào phương trình $9y'' + y = e^{-x}$ và rút gọn ta được $a = \frac{1}{10}$

$\Rightarrow$ nghiệm tổng quát của phương trình : $y = C_1\cos\frac{x}{3} + C_2\sin\frac{x}{3} + \frac{e^{-x}}{10} + 3x$

Với điều kiện $y(0) = 1; y'(0) = 2$ ta có được $C_1 = \frac{9}{10};\ \ C_2 = -\frac{27}{10}$. Khi đó nghiệm riêng tương ứng của phương trình : $y = \frac{9}{10}\cos\frac{x}{3} - \frac{27}{10}\sin\frac{x}{3} + \frac{e^{-x}}{10} + 3x$

d. $y'' + 9y = 6\cos 3x$ ;

**Lời giải:**

Phương trình đặc trưng $k^2 + 9 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = \pm 3i$

$\Rightarrow$ nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất: $y = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x$

Nghiệm riêng của phương trình có dạng $y^* = Ax\cos 3x + Bx\sin 3x$ thay vào phương trình và rút gọn ta được $6B\cos 3x - 6A\sin 3x = 6\cos 3x \Rightarrow A = 0; B = 1$

$\Rightarrow$ nghiệm tổng quát của phương trình $y = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x + x\sin 3x$

e. $y'' + y = 3\sin x$

**Lời giải:**

Phương trình đặc trưng $k^2 + 1 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = \pm i$

$\Rightarrow$ nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất: $y = C_1\cos x + C_2\sin x$

Nghiệm riêng của phương trình có dạng $y^* = Ax\cos x + Bx\sin x$ thay vào phương trình và rút gọn ta được $2B\cos x - 2A\sin 3x = 3\sin x \Rightarrow B = 0; A = -\frac{3}{2}$

$\Rightarrow$ nghiệm tổng quát của phương trình $y = C_1\cos x + C_2\sin x - \frac{3}{2}x\cos x$

f. $y'' + y' = e^x + 2\cos x$ ;

**Lời giải:**

Phương trình đặc trưng $k^2 + k = 0 \Rightarrow k_1 = 0; k_2 = -1$

$\Rightarrow$ nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất: $y = C_1 + C_2 e^{-x}$

Nghiệm riêng của phương trình $y'' + y' = 2\cos x$ có dạng $y_1^* = A\cos x + B\sin x$ thay vào phương trình $y'' + y' = 2\cos x$ và rút gọn

$(B - A)\cos x - (A + B)\sin x = 2\cos x \Rightarrow A = -1; B = 1$

$\Rightarrow y_1^* = -\cos x + \sin x$

Nghiệm riêng của phương trình $y'' + y' = e^x$ có nghiệm riêng $y_2^* = \dfrac{e^x}{2}$

$\Rightarrow$ nghiệm tổng quát của phương trình $y = C_1 + C_2 e^{-x} + \dfrac{e^x}{2} - \cos x + \sin x$

g. $y'' + y = -2\sin x$ $\quad y'(0) = 1, \quad y(\pi/2) = 1$.

**Lời giải:**

Phương trình đặc trưng $k^2 + 1 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = \pm i$

$\Rightarrow$ nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất: $y = C_1\cos x + C_2\sin x$

Nghiệm riêng của phương trình có dạng $y^* = Ax\cos x + Bx\sin x$ thay vào phương trình và rút gọn $(B - A)\cos x - (A + B)\sin x = -2\sin x \Rightarrow A = B = 1$

$\Rightarrow$ nghiệm tổng quát của phương trình $y = C_1\cos x + C_2\sin x + x\cos x + x\sin x$

Với điều kiện $y(0) = 1,\ y'(\pi/2) = 1$ ta có được (**XEM LẠI Đ/K**)

**28)** Tìm nghiệm tổng quát của PT $y^{(4)} + y = 0$

**Lời giải:**

Phương trình đặc trưng $k^4 + 1 = 0$ có các nghiệm

$$k_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i); k_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i); k_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i); k_4 = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$$

Từ $k_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i); k_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$ ta có hai nghiệm riêng

$$y_1 = e^{\frac{x\sqrt{2}}{2}}\cos\frac{x\sqrt{2}}{2} \quad \text{và} \quad y_2 = e^{\frac{x\sqrt{2}}{2}}\sin\frac{x\sqrt{2}}{2}$$

Từ $k_3 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i); k_4 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$ ta có hai nghiệm riêng

$$y_3 = e^{-\frac{x\sqrt{2}}{2}}\cos\frac{x\sqrt{2}}{2} \quad \text{và} \quad y_4 = e^{-\frac{x\sqrt{2}}{2}}\sin\frac{x\sqrt{2}}{2}$$

Nghiệm tổng quát của PT $y^{(4)}+y=0$ là

$$y=e^{\frac{x\sqrt{2}}{2}}\left(C_1\cos\frac{x\sqrt{2}}{2}+C_2\,in\frac{x\sqrt{2}}{2}\right)+e^{-\frac{x\sqrt{2}}{2}}\left(C_3\cos\frac{x\sqrt{2}}{2}+C_4\sin\frac{x\sqrt{2}}{2}\right)$$

**29)** Dùng phương pháp biến thiên tham số hãy giải PTVP:

a. $y''+y=\sec x \qquad 0<x<\pi/2;$

**Lời giải:**

Phương trình đặc trưng $k^2+1=0\Rightarrow k_{1,2}=\pm i$

$\Rightarrow$ nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất: $y=C_1\cos x+C_2\sin x$

Coi $C_1=C_1(x);C_2=C_2(x)$ bằng phương pháp biến thiên hằng số thì

$C_1=C_1(x);C_2=C_2(x)$ được xác định bởi hệ phương trình

$$\begin{cases}C_1'\cos x+C_2'\sin x=0\\ -C_1'\sin x+C_2'\cos x=\dfrac{1}{\cos x}\end{cases}\Leftrightarrow C_1'=-\frac{\sin x}{\cos x}\Rightarrow C_1=\ln\cos x \text{ và } C_2'=1\Rightarrow C_2=x$$

$\Rightarrow$ nghiệm tổng quát của phương trình :

$y=C_1\cos x+C_2\sin x+\cos x\ln\cos x+x\sin x$

b. $y''-3y'+2y=\dfrac{1}{1+e^{-x}};$

**Lời giải:**

Phương trình đặc trưng $k^2-3k+2=0\Rightarrow k_1=1;\,k_2=2$

$\Rightarrow$ nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất: $y=C_1e^x+C_2e^{2x}$

Coi $C_1=C_1(x);C_2=C_2(x)$ bằng phương pháp biến thiên hằng số thì

$C_1=C_1(x);C_2=C_2(x)$ được xác định bởi hệ phương trình

$$\begin{cases}C_1'+C_2'e^x=0\\ C_1'+2C_2'e^x=\dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\end{cases}$$

$$C_1'=-\frac{1}{1+e^x}\Rightarrow C_1=-\int\left(\frac{1}{e^x}-\frac{1}{1+e^x}\right)de^x=\ln(1+e^x)-x$$

$$\text{và } C_2'=\frac{e^{-x}}{1+e^x}\Rightarrow C_2=\int\left(\frac{1}{e^x}-\frac{1}{1+e^x}\right)dx=-e^{-x}-\int\left(\frac{1}{e^x}-\frac{1}{1+e^x}\right)de^x$$

$\Rightarrow C_2=-e^{-x}-x+\ln(1+e^x)$

$\Rightarrow$

$$y^* = e^x\ln(1+e^x) - xe^x - e^x - xe^{2x} + e^{2x}\ln(1+e^x) = e^x(1+e^x)\left[\ln(1+e^x) - x\right] - e^x$$

$\Rightarrow$ nghiệm tổng quát của phương trình :

$$y = C_1e^x + C_2e^{2x} + e^x(1+e^x)\left[\ln(1+e^x) - x\right] - e^x$$

c. $y'' - y = \dfrac{1}{x}$;

**Lời giải:**

Phương trình đặc trưng $k^2 - 1 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = \pm 1$

$\Rightarrow$ nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất: $y = C_1e^x + C_2e^{-x}$

Coi $C_1 = C_1(x); C_2 = C_2(x)$ bằng phương pháp biến thiên hằng số thì $C_1 = C_1(x); C_2 = C_2(x)$ được xác định bởi hệ phương trình

$$\begin{cases} C_1'e^x + C_2'e^{-x} = 0 \\ C_1'e^x - C_2'e^{-x} = \dfrac{1}{x} \end{cases} \Leftrightarrow C_1' = \frac{e^{-x}}{2x} \text{ và } C_2' = -\frac{e^x}{2x}$$

$\Rightarrow$ nghiệm tổng quát của phương trình : $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + \dfrac{e^x}{2}\displaystyle\int\frac{e^{-x}dx}{x} - \frac{e^{-x}}{2}\int\frac{e^x dx}{x}$

d. $y'' - 4y' + 5y = \dfrac{e^{2x}}{\cos x}$;

**Lời giải:**

Phương trình đặc trưng $k^2 - 4k + 5 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = 2 \pm i$

$\Rightarrow$ nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất: $y = e^{2x}(C_1\cos x + C_2\sin x)$

Coi $C_1 = C_1(x); C_2 = C_2(x)$ bằng phương pháp biến thiên hằng số thì $C_1 = C_1(x); C_2 = C_2(x)$ được xác định bởi hệ phương trình

$$\begin{cases} C_1'\cos x + C_2'\sin x = 0 \\ -C_1'\sin x + C_2'\cos x = \dfrac{1}{\cos x} \end{cases} \Leftrightarrow C_1' = -\frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow C_1 = \ln|\cos x| \text{ và } C_2' = 1 \Rightarrow C_2 = x$$

$\Rightarrow$ nghiệm tổng quát của phương trình

$$y = e^{2x}\left(C_1 + \ln|\cos x|\right)\cos x + e^{2x}(x + C_2)\sin x$$

e. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{1+x^2}$;

**Lời giải:**

Phương trình đặc trưng $k^2 - 2k + 1 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = 1$

$\Rightarrow$ nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất: $y = (C_1 + xC_2)e^x$

Coi $C_1 = C_1(x); C_2 = C_2(x)$ bằng phương pháp biến thiên hằng số thì

$C_1 = C_1(x); C_2 = C_2(x)$ được xác định bởi hệ phương trình

$$\begin{cases} C_1' e^x + C_2' x e^x = 0 \\ C_1' e^x + C_2' x e^x + C_2' e^x = \dfrac{e^x}{1+x^2} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ $C_2' = \dfrac{1}{1+x^2} \Rightarrow C_2 = \arctan x$ và $C_1' = -\dfrac{x}{1+x^2} \Rightarrow C_1 = -\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$

$\Rightarrow$ nghiệm tổng quát của phương trình

$$\Rightarrow y = \left(-\frac{1}{2}\ln(1+x^2) + x\arctan x\right)e^x$$

$$y = (C_1 + xC_2)e^x + \left[x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]e^x$$

f. $y'' - y' = \dfrac{1}{1+e^x}$;

**Lời giải:**

Phương trình đặc trưng $k^2 - k = 0 \Rightarrow k_2 = 1; k_1 = 0$

$\Rightarrow$ nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất: $y = C_1 + C_2 e^x$

Coi $C_1 = C_1(x); C_2 = C_2(x)$ bằng phương pháp biến thiên hằng số thì

$C_1 = C_1(x); C_2 = C_2(x)$ được xác định bởi hệ phương trình

$$\begin{cases} C_1' + C_2' e^x = 0 \\ C_2' e^x = \dfrac{1}{1+e^x} \end{cases}$$

$$C_2' = \frac{1}{(1+e^x)e^x} \Rightarrow C_2 = \int\left(\frac{1}{e^x} - \frac{1}{1+e^x}\right)dx = -e^{-x} - \int\left(\frac{1}{e^x} - \frac{1}{1+e^x}\right)de^x = \ln(1+e^x) - x - e^{-x}$$

$C_1' = -\dfrac{1}{(1+e^x)} \Rightarrow C_1 = \ln(1+e^x) - x$

$\Rightarrow y = \ln(1+e^x) - x + e^x \ln(1+e^x) - xe^x - 1 = (1+e^x)\left[\ln(1+e^x) - x\right] - 1$

$\Rightarrow$ nghiệm tổng quát của phương trình

$y = C_1 + C_2 e^x + (1+e^x)\left[\ln(1+e^x) - x\right] - 1$

**30)** Dùng phép đổi biến $x = e^t$ giải phương trình Euler:

a. $x^2 y'' + 5xy' + 13y = 0$;

**Lời giải:**

Đặt $x = e^t$ thì $x^2 = e^{2t}$ ; $y_t' = y'e^t \Rightarrow e^{-t} y_t' = y'$ và

$y_{tt}'' = y''e^{2t} + y'e^t \Rightarrow y'' = y_{tt}''e^{-2t} - y_t'e^{-2t}$

thay vào phương trình và rút gọn $y'' + 4y' + 13y = 0$.Phương trình có nghiệm

$y(t) = e^{-2t}(C_1\cos 3t + C_2 \sin 3t) \Rightarrow y = \dfrac{C_1\cos(3\ln x) + C_2\sin(3\ln x)}{x^2}$

b. $x^2 y'' + xy' + y = 2\sin(\ln x)$

**Lời giải:**

Đặt $x = e^t$ thì $x^2 = e^{2t}$ ; $y_t' = y'e^t \Rightarrow e^{-t} y_t' = y'$ và

$y_{tt}'' = y''e^{2t} + y'e^t \Rightarrow y'' = y_{tt}''e^{-2t} - y_t'e^{-2t}$

thay vào phương trình và rút gọn $y'' + y = 2\sin t$.

Phương trình thuần nhất có nghiệm tổng quát $y(t) = C_1\cos t + C_2 \sin t$

và nghiệm riêng của phương trình $y'' + y = 2\sin t$ là $y^* = -t\cos t$

Phương trình $y'' + y = 2\sin t$ có nghiệm tổng quát $y(t) = C_1\cos t + C_2\sin t - t\cos t$

$\Rightarrow y(x) = C_1\cos(\ln x) + C_2\sin(\ln x) - \ln x.\cos(\ln x)$

c. $x^2 y'' + xy' + y = x$

**Lời giải:**

Đặt $x = e^t$ thì $x^2 = e^{2t}$ ; $y_t' = y'e^t \Rightarrow e^{-t} y_t' = y'$ và

$y_{tt}'' = y''e^{2t} + y'e^t \Rightarrow y'' = y_{tt}''e^{-2t} - y_t'e^{-2t}$

thay vào phương trình và rút gọn $y'' + y = e^t$.

Phương trình thuần nhất có nghiệm tổng quát $y(t) = C_1\cos t + C_2 \sin t$

và nghiệm riêng của phương trình $y'' + y = e^t$ là $y^* = \frac{1}{2}e^t$

Phương trình $y'' + y = e^t$ có nghiệm tổng quát $y(t) = C_1\cos t + C_2\sin t + \frac{e^t}{2}$

$\Rightarrow y(x) = C_1\cos(\ln x) + C_2\sin(\ln x) + \frac{x}{2}$

d. $x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 0$;

**Lời giải:**

Đặt $x = e^t$ thì $x^2 = e^{2t}$ ; $y'_t = y'e^t \Rightarrow y' = y'_te^{-t}$ và

$y''_{tt} = y''e^{2t} + y'e^t \Rightarrow y'' = y''_{tt}e^{-2t} - y'_te^{-2t}$

$y''_{tt} = y''e^{2t} + y'e^t \Rightarrow y'''_{t^3} = y'''e^{3t} + 3y''e^{2t} + y'e^t \Rightarrow y''' = e^{-3t}y'''_{t^3} - 3(y''_{tt} - y'_t)e^{-3t} - y'_te^{-3t}$

thay vào phương trình và rút gọn .

$$y'''_{t^3} - 3(y''_{tt} - y'_t) - y'_t - 3(y''_{tt} - y'_t) + 6y'_t - 6y = 0 \Leftrightarrow y'''_{t^3} - 6y''_{tt} + 11y'_t - 6y = 0$$

Phương trình đặc trưng $k^3 - 6k^2 + 11k - 6 = 0 \Rightarrow k_1 = 1; k_2 = 2; k_3 = 3$

$\Rightarrow$ nghiệm tổng quát của phương trình theo t : $y(t) = C_1e^t + C_2e^{2t} + C_3e^{3t}$

$\Rightarrow \quad y(x) = C_1x + C_2x^2 + C_3x^3$

e. $x^2y'' - xy' + y = \cos(\ln x)$

**Lời giải:**

Đặt $x = e^t$ thì $x^2 = e^{2t}$ ; $y'_t = y'e^t \Rightarrow e^{-t}y'_t = y'$ và

$y''_{tt} = y''e^{2t} + y'e^t \Rightarrow y'' = y''_{tt}e^{-2t} - y'_te^{-2t}$

thay vào phương trình và rút gọn $\quad y'' - 2y' + y = \cos t$.

Phương trình thuần nhất có nghiệm tổng quát $y(t) = (C_1 + tC_2)e^t$

và nghiệm riêng của phương trình $y'' - 2y' + y = \cos t$ là $y^* = -\frac{1}{2}\sin t$

$\Rightarrow$ nghiệm tổng quát của phương trình theo t : $y(t) = (C_1 + tC_2)e^t - \frac{1}{2}\sin t$

$\Rightarrow \quad y(x) = \left(C_1 + C_2\ln x\right)x - \frac{1}{2}\sin(\ln x)$

**31)** Dùng phép đổi biến $z = xy$ giải phương trình: $xy'' + 2y' - xy = e^x$.

**Lời giải:**

Đặt $z = xy$ khi đó $z' = y + xy'$ và $z'' = 2y' + xy''$ thay vào phương trình và rút gọn

$z'' - z = e^x$

Phương trình thuần nhất có nghiệm tổng quát $z = C_1e^x + C_2e^{-x}$

và nghiệm riêng của phương trình $z'' - z = e^x$ là $y^* = \dfrac{xe^x}{2}$

$\Rightarrow$ nghiệm tổng quát của phương trình $z'' - z = e^x$ : $z = C_1e^x + C_2e^{-x} + \dfrac{xe^x}{2}$

$$\Rightarrow \quad xy = C_1e^x + C_2e^{-x} + \frac{xe^x}{2}$$

**32)** Giải các hệ phương trình:

a. $\begin{cases} x' = 5x + 3y \\ y' = -3x - y \end{cases}$;

**Lời giải:**

$\begin{cases} x' = 5x + 3y \\ y' = -3x - y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'' = 5x' + 3y' \\ y' = -3x - y \end{cases}$

$\Rightarrow x'' = 5x' - 9x + 5x - x' \Rightarrow x'' - 4x' + 4x = 0 \Rightarrow x = (C_1 + tC_2)e^{2t} \Rightarrow$

$y = \frac{1}{3}\left(C_2 - 3C_1 - 3tC_2\right)e^{2t}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = (C_1 + tC_2)e^{2t} \\ y = \frac{1}{3}\left(C_2 - 3C_1 - 3tC_2\right)e^{2t} \end{cases}$$

b. $\begin{cases} x' = 3x - y \\ y' = 4x - y \end{cases}$;

**Lời giải:**

$\begin{cases} x' = 3x - y \\ y' = 4x - y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'' = 3x' - y' \\ y' = 4x - y \end{cases} \Rightarrow x'' = 3x' - 4x + 3x - x' \Rightarrow x'' - 2x' + x = 0$

$\Rightarrow \; x = (C_1 + tC_2)e^t \Rightarrow y = (2C_1 - C_2 + 2tC_2)e^t \Rightarrow \begin{cases} x = (C_1 + tC_2)e^t \\ y = (2C_1 - C_2 + 2tC_2)e^t \end{cases}$

c. $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 3x + 4y \end{cases}$

**Lời giải:**

$$\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 3x + 4y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'' = 2x' + y' \\ y' = 3x + 4y \end{cases} \Rightarrow x'' = 2x' + 3x + 4(x' - 2x) \Rightarrow x'' - 6x' + 5x = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = C_1e^t + C_2e^{5t} \\ y = 3C_2e^{5t} - C_1e^t \end{cases}$$