

Chương 4

GIAO TUYẾN CỦA MẶT PHẪNG VỚI CÁC MẶT

4.1 Mặt phẳng cắt đa diện

4.1.1. Nhận dạng giao tuyến

4.1.2. Cách vẽ giao tuyến

4.2 Mặt phẳng cắt mặt cong

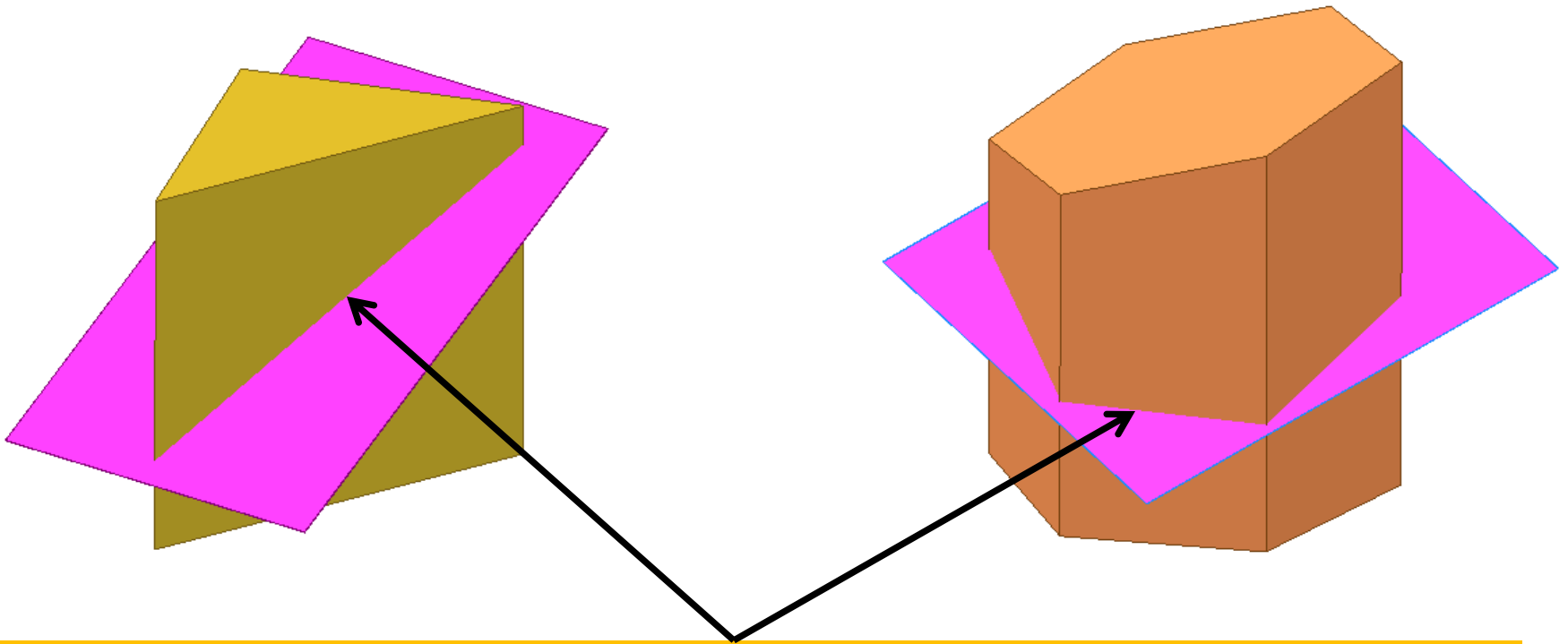
4.2.1. Nhận dạng giao tuyến

4.2.2. Cách vẽ giao tuyến: Mặt phẳng cắt mặt nón, trụ, cầu, xuyên.

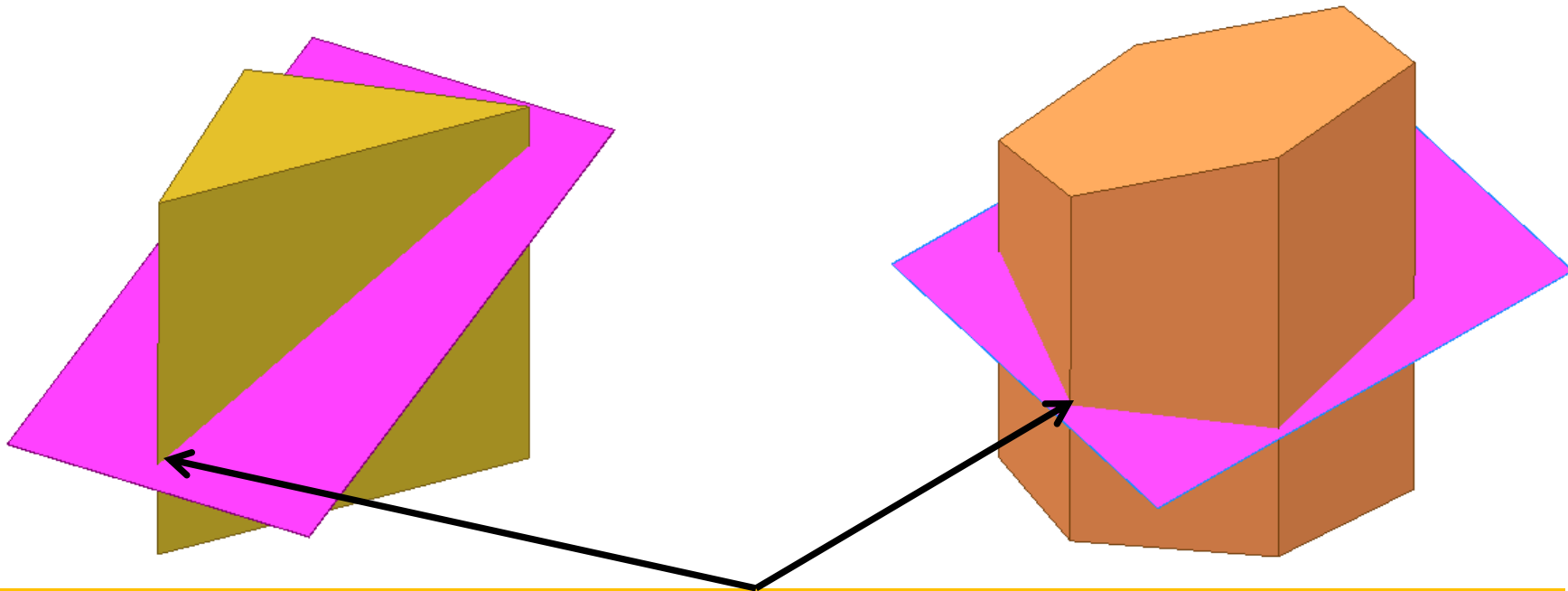
4.1. Mặt phẳng cắt đa diện

4.1.1. Nhận dạng giao tuyến

Giao tuyến của mặt phẳng với một đa diện thường là **một hay nhiều đa giác phẳng** có:

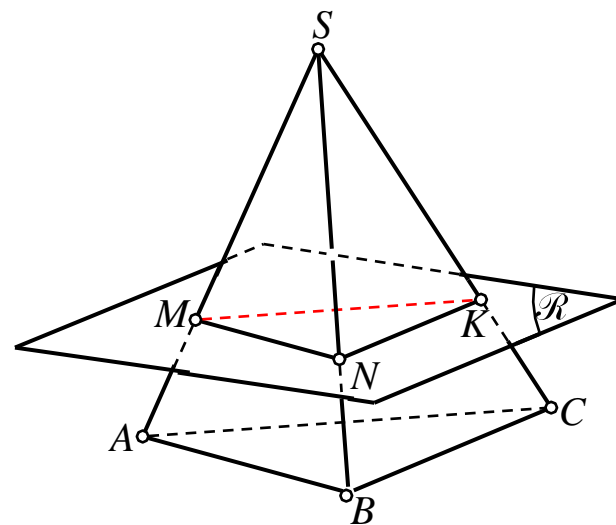


Các cạnh là các giao tuyến của các mặt bên của đa diện với mặt phẳng cắt.



Các đỉnh là các giao điểm của các cạnh của đa diện với mặt phẳng cắt.

Cạnh (MN, NK) thuộc mặt thấy của đa diện là cạnh thấy, cạnh (MK) thuộc mặt khuất của đa diện là cạnh khuất.



4.1.2. Cách vẽ giao tuyến

Từ việc nhận dạng giao tuyến của mặt phẳng cắt với đa diện là ĐA GIÁC PHẪNG, đi đến cách vẽ giao tuyến như sau:

Đó là đi **xác định các đỉnh của đa giác phẳng** bằng cách tìm các giao điểm của các cạnh của đa diện với mặt phẳng cắt và **mỗi cặp đỉnh cùng thuộc một mặt của đa diện** cho một cạnh của giao tuyến.

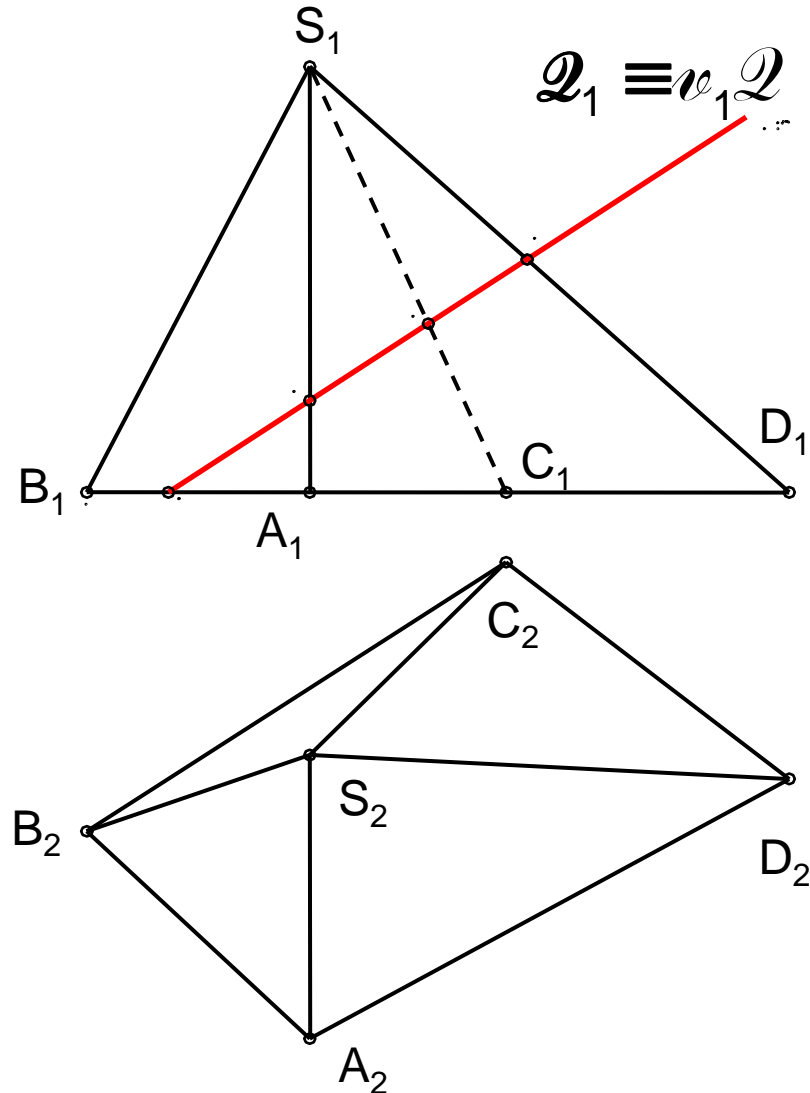
Như vậy bài toán này thực chất đi đến vận dụng bài toán đã biết: tìm **giao điểm của một đường thẳng với một mặt phẳng (Chương 1)**.

4.1.3. Các ví dụ

Ví dụ 1: Vẽ giao tuyến của **mặt phẳng chiếu đứng \mathcal{Q}** với hình chóp S.ABCD

Giải: Xác định các đỉnh của đa giác giao tuyến là các giao điểm của các cạnh: BA, BC, SA, SC, SD với \mathcal{Q} . Ở đây hình chiếu đứng của các đỉnh đã biết (do $\mathcal{Q} \perp \mathcal{P}_1$).

Lưu ý: Hai giao điểm của các cạnh: BA, BC với \mathcal{Q} nằm trên đường thẳng chiếu đứng. Vì $\mathcal{Q} \perp \mathcal{P}_1$ và $(ABCD) \perp \mathcal{P}_1$.

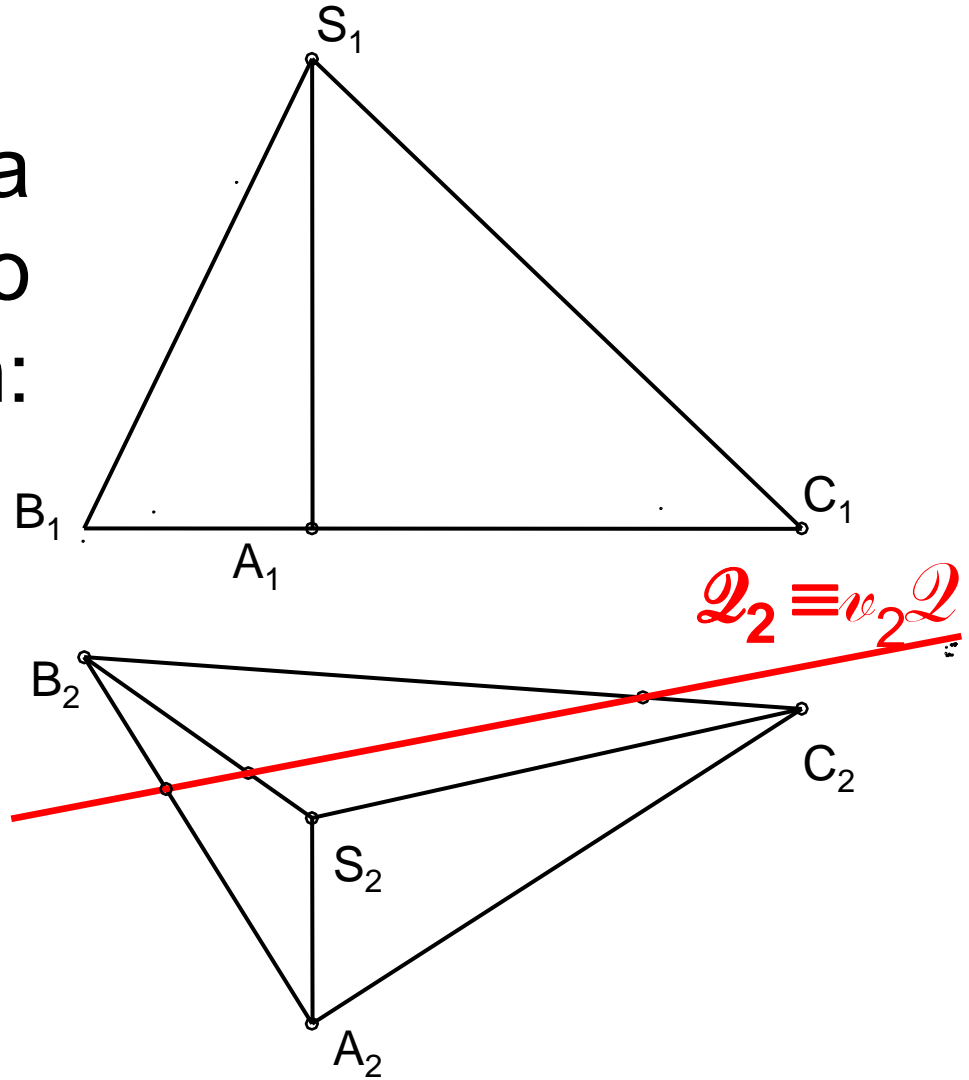


Ví dụ 2 (Về nhà): Vẽ giao tuyến của mặt phẳng chiếu bằng \mathcal{Q} với hình chóp SABC.

Hướng dẫn:

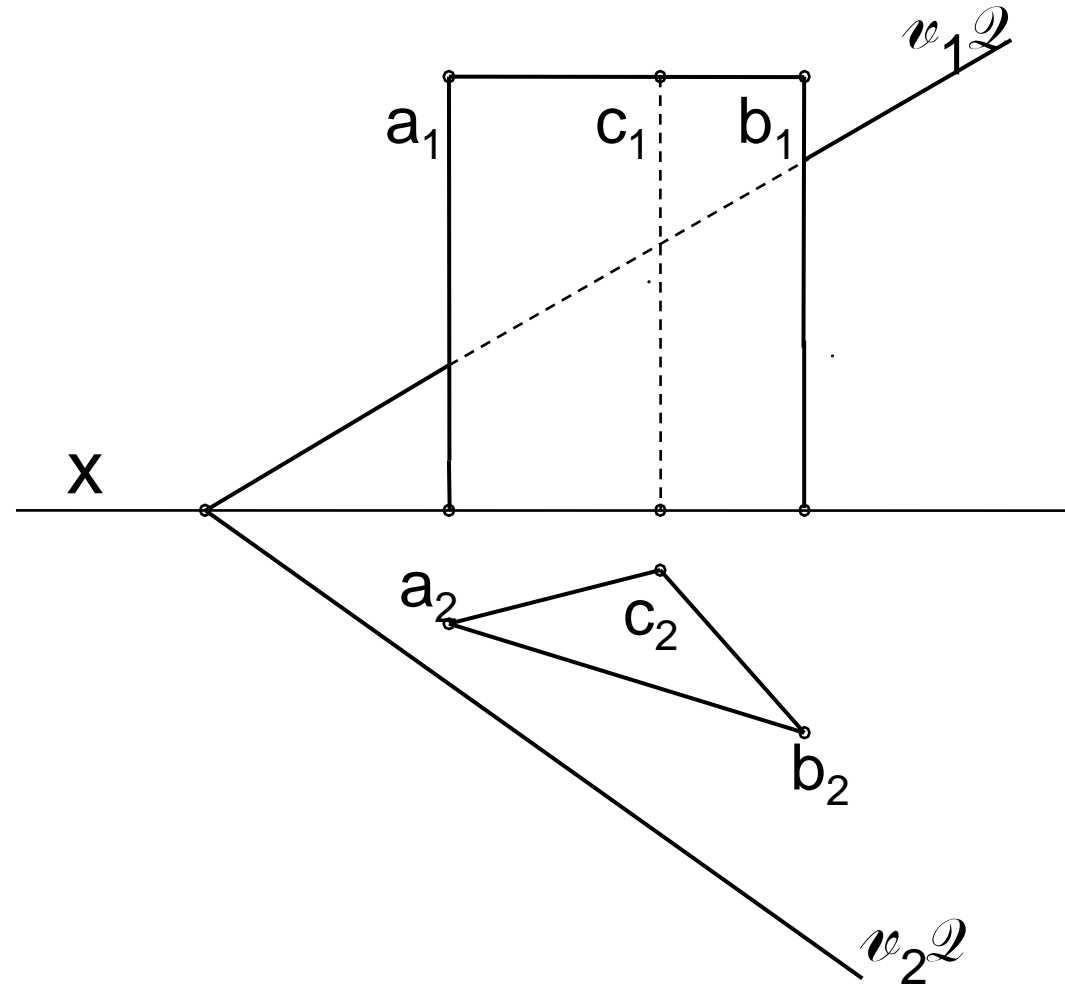
Xác định các đỉnh của giao tuyến là các giao điểm của các cạnh:

BA, SB, BC với \mathcal{Q} .



Ví dụ 3(VN): Vẽ giao tuyến của mặt phẳng $\mathcal{Q}(v_1\mathcal{Q}, v_2\mathcal{Q})$ với lăng trụ chiếu bằng abc.

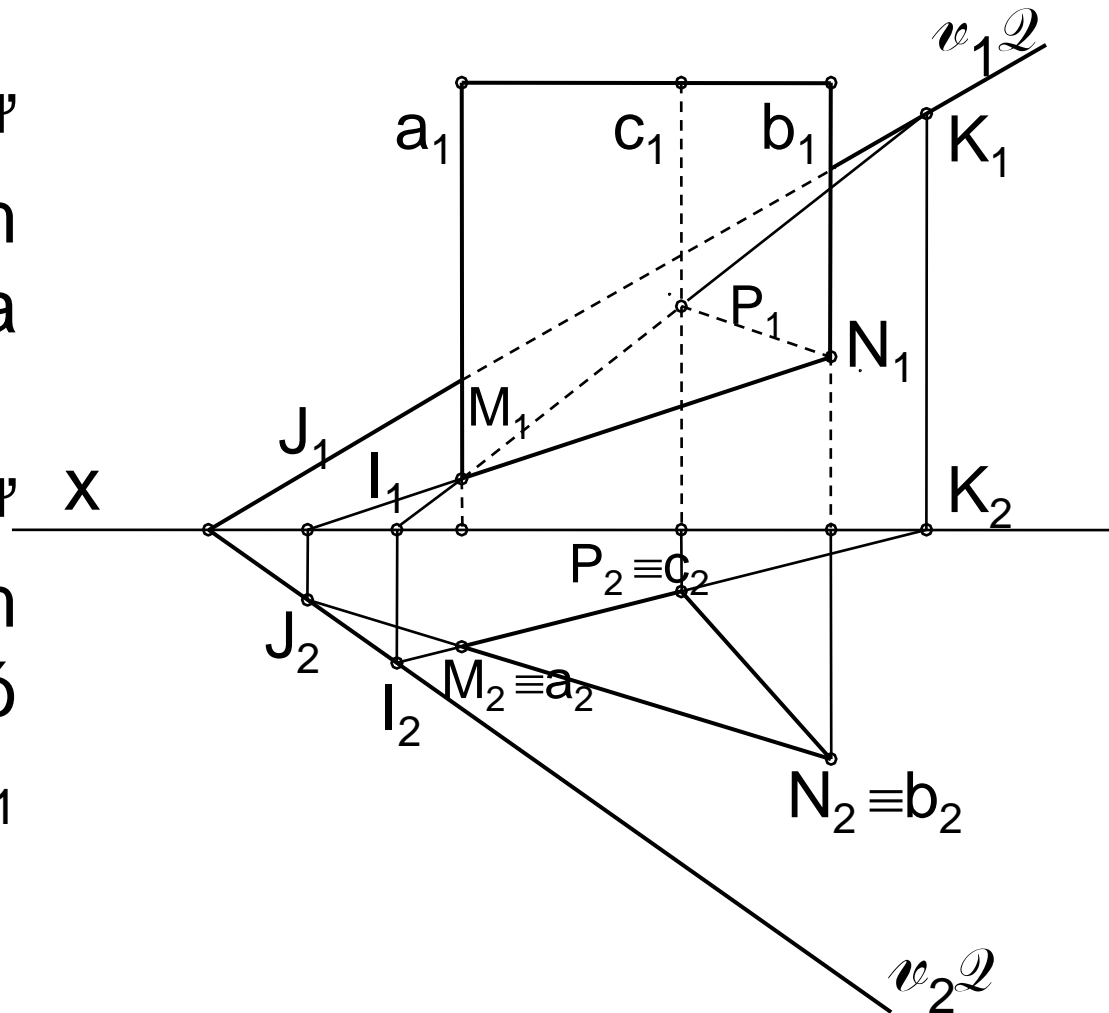
Giải: Xác định các đỉnh của đa giác giao tuyến là các giao điểm sau: $M=a\cap\mathcal{Q}$, $N=b\cap\mathcal{Q}$, $P=c\cap\mathcal{Q}$. Các cạnh bên lăng trụ là các đường thẳng chiếu bằng nên dễ dàng tìm được **hình chiếu bằng của giao điểm là $\Delta a_2b_2c_2$** .



Tìm hình chiếu đứng của giao tuyến:

- Vì $MP \in \mathcal{Q}$ nên từ M_2P_2 ta dễ dàng tìm được M_1P_1 thông qua việc tìm vết của MP .

- Vì $MN \in \mathcal{Q}$ nên từ M_2N_2 ta dễ dàng tìm được vết bằng của nó là J , tìm được JM và $N_1 = M_1J_1 \cap b_1$.



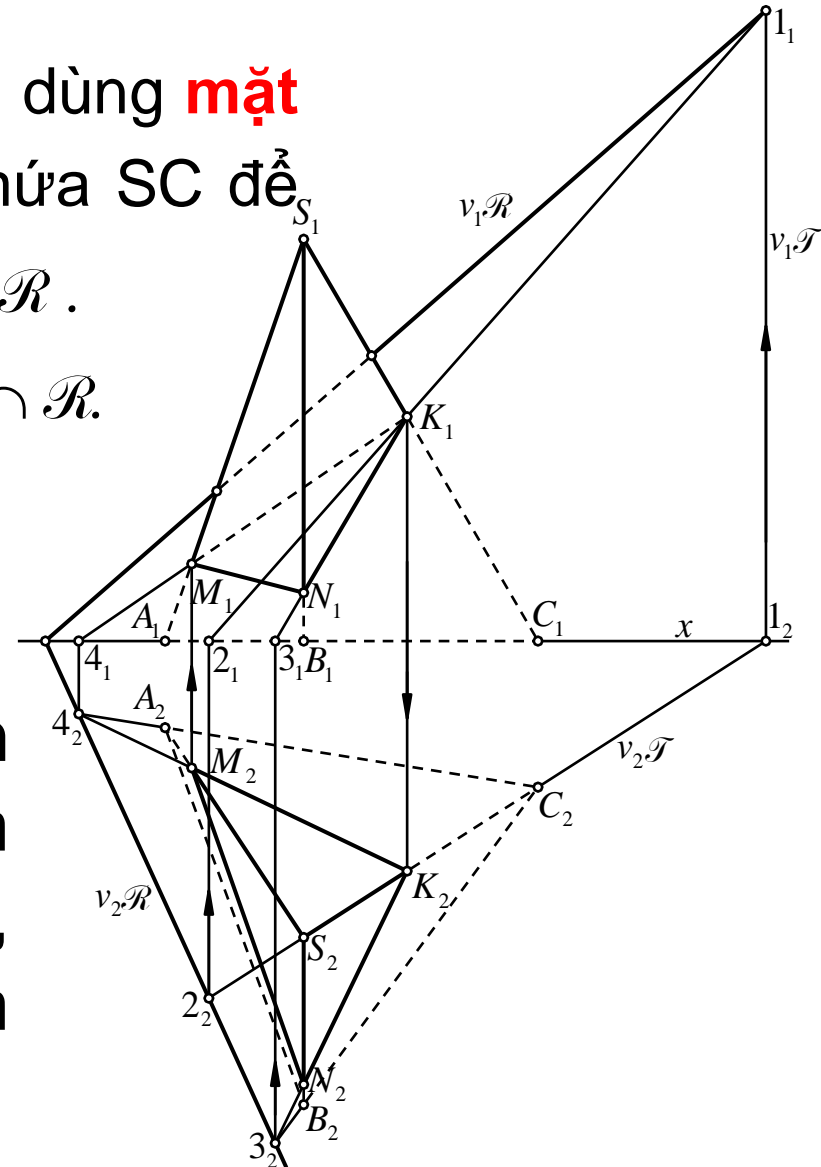
Tổng quát: Vẽ giao của mặt phẳng \mathcal{R} với hình chóp SABC .

***Dạng giao tuyến:** là một đa giác mà cả hai hình chiếu đều chưa biết.

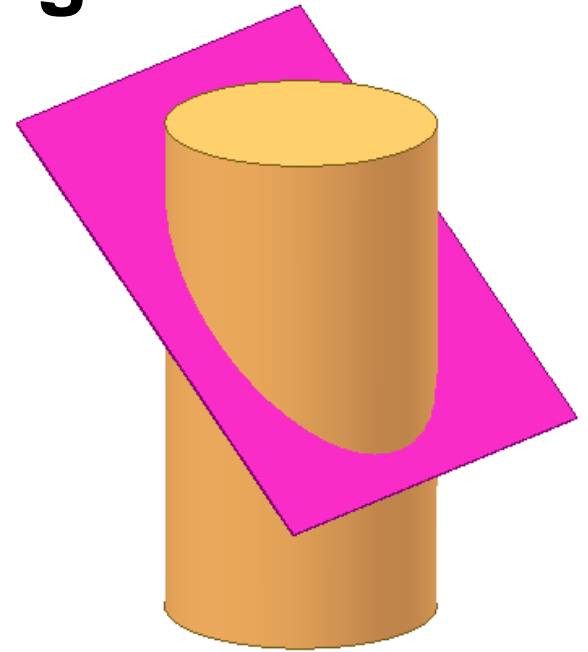
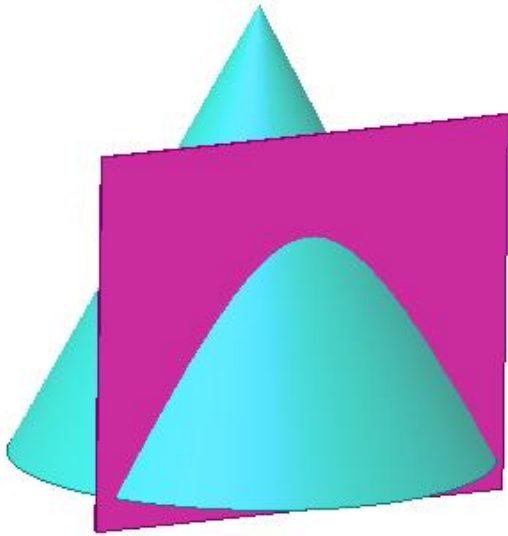
***Cách xác định giao tuyến:** ta phải dùng **mặt phẳng cắt phụ trợ chiếu bằng \mathcal{T}** chứa SC để tìm đỉnh đa giác giao tuyến: $K = SC \cap \mathcal{R}$.

Tương tự cho: $N = SB \cap \mathcal{R}$, $M = SA \cap \mathcal{R}$.

Xét thấy khuất: trên hình chiếu bằng, tất cả giao tuyến đều thấy. Trên hình chiếu đứng, cạnh MN và NK của giao tuyến thấy.



4.2. Mặt phẳng cắt mặt cong



** Dạng giao tuyến:*

Nói chung, giao tuyến **là một đường cong phẳng; cũng có thể là các đường thẳng** (khi mặt cong là **mặt trụ hoặc nón** và **phụ thuộc vào vị trí tương đối** của mặt phẳng với mặt nón và trụ)

1. Trường hợp tổng quát:

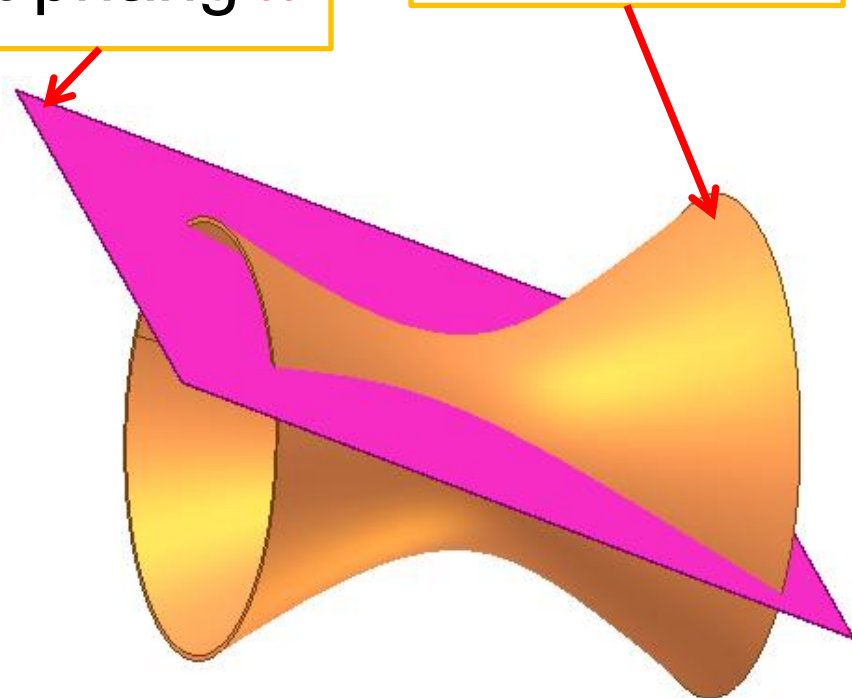
Muốn vẽ giao tuyến e của mặt phẳng \mathcal{Q} với một mặt cong Φ , tiến hành như sau:

1. Nhận dạng của giao tuyến e và tìm các yếu tố xác định e (tâm, bán kính đường tròn; trục ngắn, trục dài của elíp;...).

2. Xác định các điểm đặc biệt của giao tuyến e như: điểm giới hạn thấy- khuất; điểm cao–thấp nhất; điểm gần-xa nhất;...

Mặt phẳng \mathcal{Q}

Mặt cong Φ



Để tìm các điểm đặc biệt đó thuộc giao tuyến e , thường làm như sau:

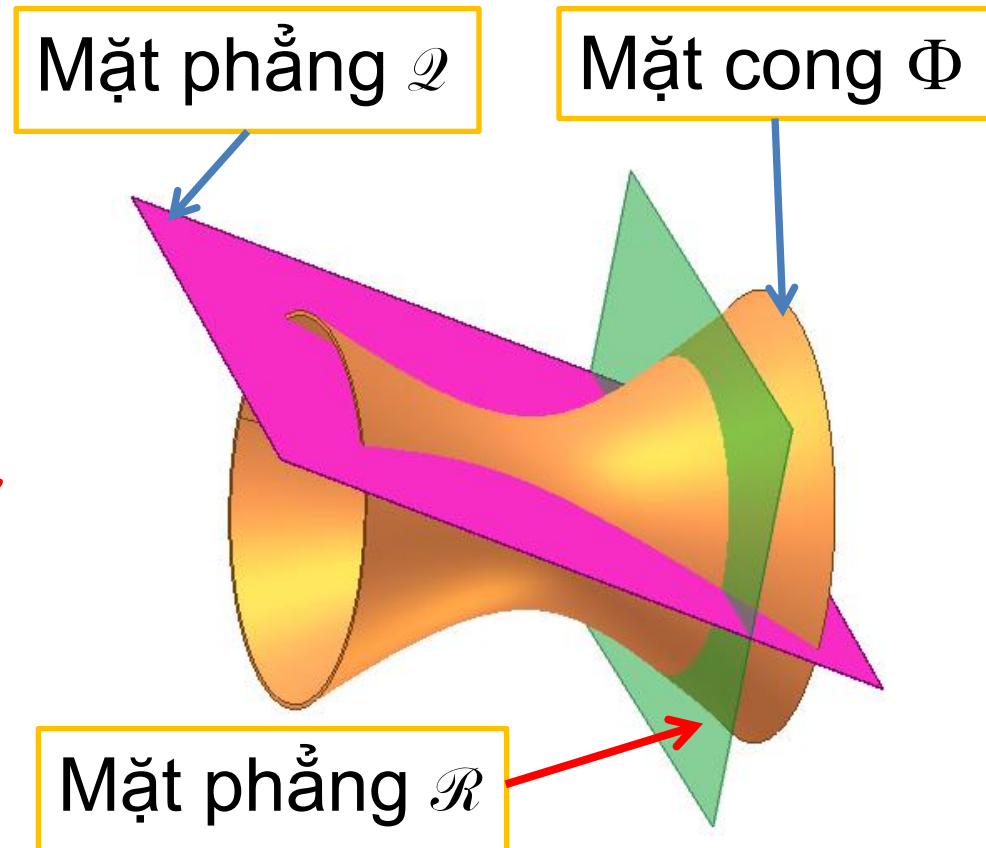
1. Cắt Φ và \mathcal{Q} bằng một mặt phẳng phụ trợ \mathcal{R} .

2. Tìm các giao tuyến phụ: $g = \mathcal{R} \cap \Phi$, $m = \mathcal{R} \cap \mathcal{Q}$.

3. Tìm các giao điểm của hai giao tuyến phụ:

$A, B, \dots = g \cap m$, đây chính là các điểm thuộc giao tuyến e .

Mặt phẳng phụ trợ \mathcal{R} được chọn sao cho giao tuyến phụ $g = \mathcal{R} \cap \Phi$ dễ vẽ.



2. Trường hợp đặc biệt:

- **Khi mặt cắt Q là mặt phẳng chiếu** thì một hình chiếu của giao tuyến e suy biến thành đoạn thẳng, để tìm hình chiếu còn lại ta gắn các điểm cần tìm của e vào **các đường đặc biệt của mặt cong** (đường sinh của trụ và nón, đường tròn vĩ tuyến của mặt xuyên,....)

- **Khi mặt trụ là mặt chiếu** thì một hình chiếu của giao tuyến e suy biến và trùng với hình chiếu suy biến của mặt trụ, để tìm hình chiếu còn lại ta gắn các điểm đặc biệt của giao tuyến vào đường thẳng đặc biệt của mặt phẳng Q (ví dụ: **đường dốc nhất**, đường bằng, **đường mặt**).

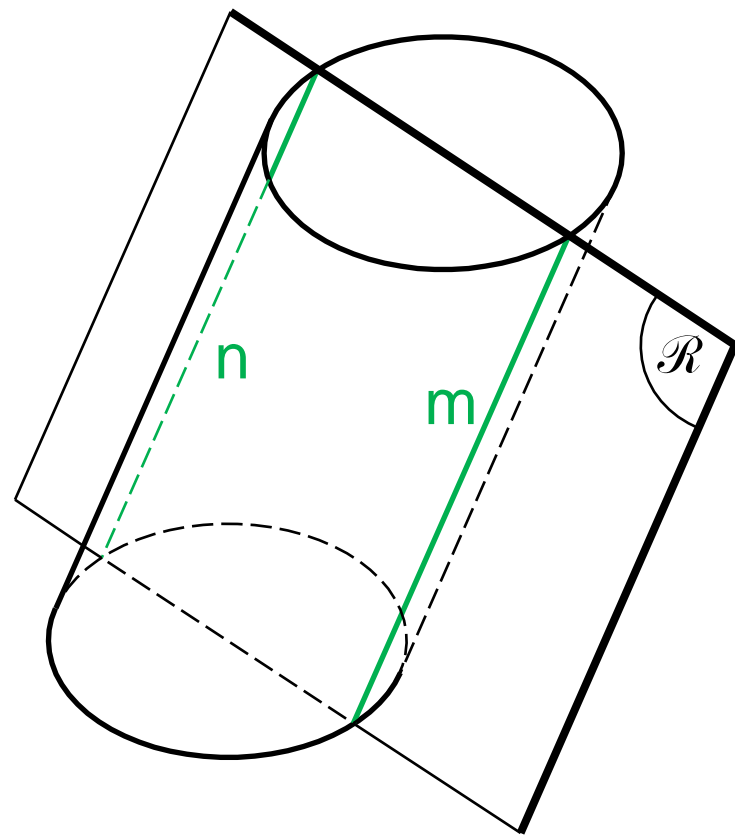
- **Mặt khác, ta cũng có thể thực hiện như sau:** Chọn trên mặt mặt cong Φ những đường dễ vẽ (đường sinh, đường tròn vĩ tuyến,...) và tìm các giao điểm của chúng với mặt phẳng cắt đã cho.

4.2.1. Mặt phẳng cắt mặt trụ

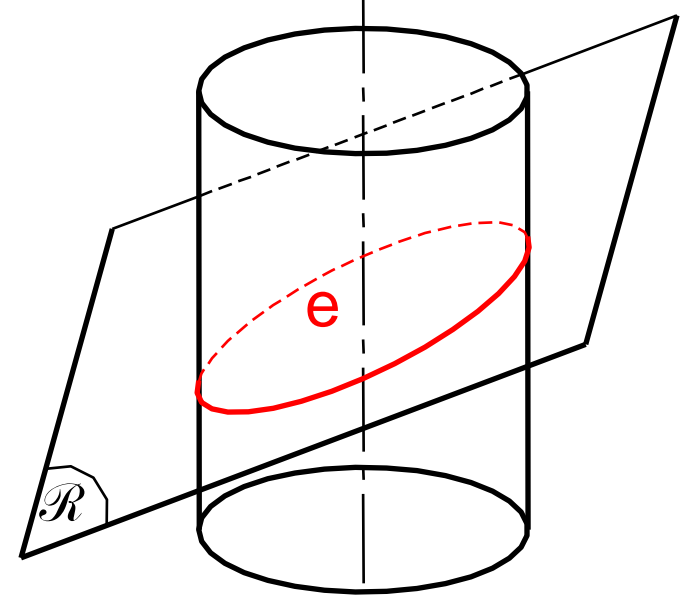
1. Nhận dạng giao tuyến

Giao tuyến của mặt phẳng \mathcal{R} với **mặt trụ có đường chuẩn là đường tròn**, có thể là một trong hai dạng sau:

- Là **một** hoặc **hai đường sinh** (**m,n**) nếu mặt phẳng song song với đường sinh (trục) của trụ.

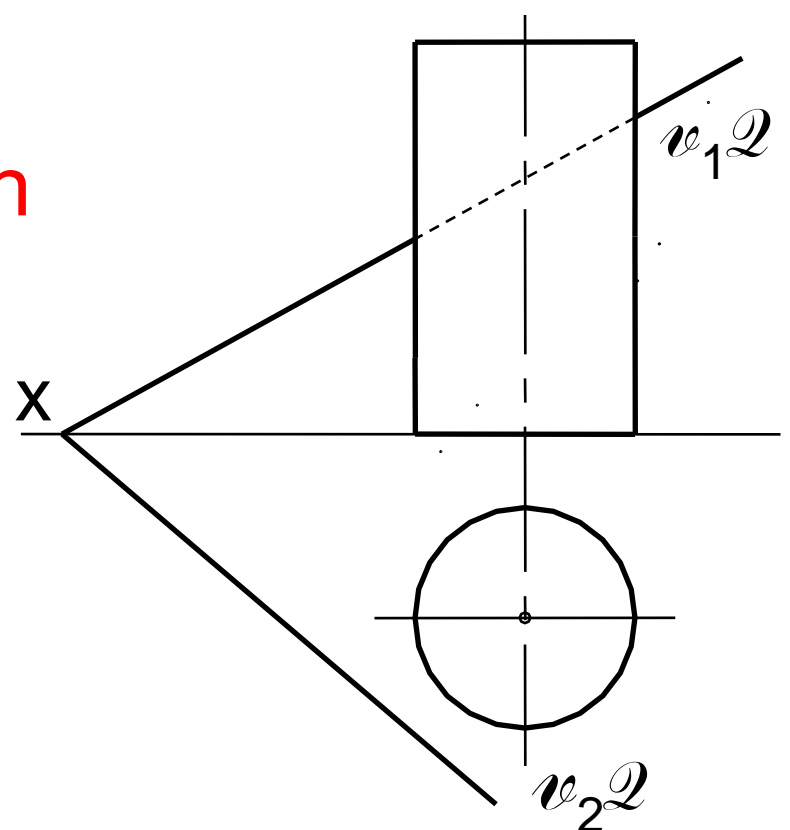


- Là **elip** nếu mặt phẳng cắt đường sinh của mặt trụ, (là **đường tròn** nếu mặt phẳng // đường chuẩn)



2. Cách xác định giao tuyến

Ví dụ 1: Tìm giao tuyến của mặt phẳng $\mathcal{Q}(v_1\mathcal{Q}, v_2\mathcal{Q})$ với mặt trụ tròn xoay, trục là đường thẳng chiếu bằng

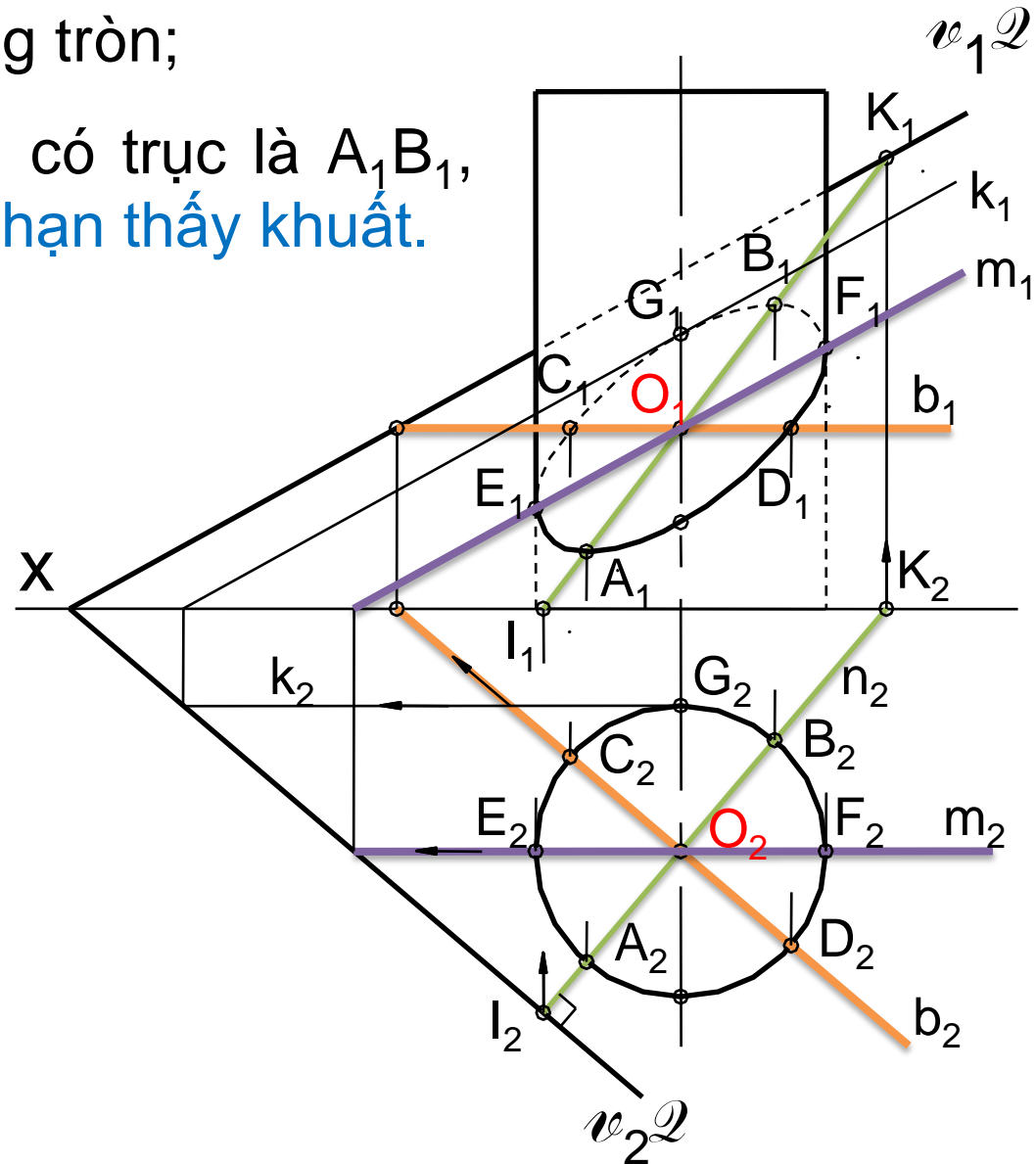


Giải:

- **Dạng giao tuyến là một elip e** (trục dài AB, trục ngắn CD).
- **Hình chiếu bằng e_2** là đường tròn;
- **Hình chiếu đứng là elip e_1** có trục là A_1B_1 , C_1D_1 ; E_1, F_1 là các điểm giới hạn thấy khuất.

Tìm các điểm này như sau:

- + Gắn $A, B \in n \in \mathcal{Q}$ (n là đường dốc nhất của Q so với \mathcal{P}_2 và n cắt trục trụ);
- + Gắn $C, D \in b \in \mathcal{Q}$ (b đường bằng cắt trục trụ);
- + Gắn $E, F \in m \in \mathcal{Q}$ (m đường mặt cắt trục trụ)

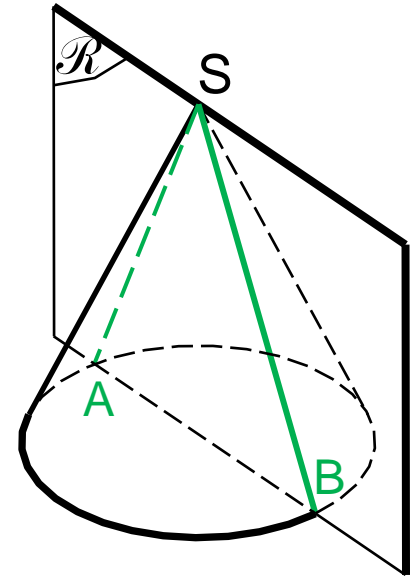


4.2.2. Mặt phẳng cắt mặt nón

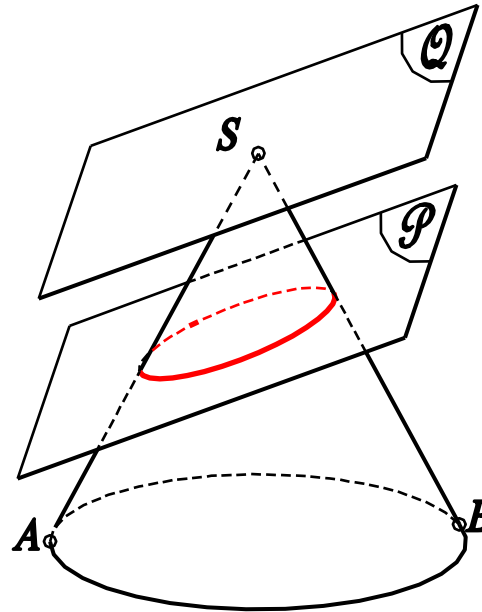
1. Nhận dạng giao tuyến

Giao tuyến của một mặt phẳng với mặt nón có **đường chuẩn là đường tròn** có thể là một trong các dạng sau:

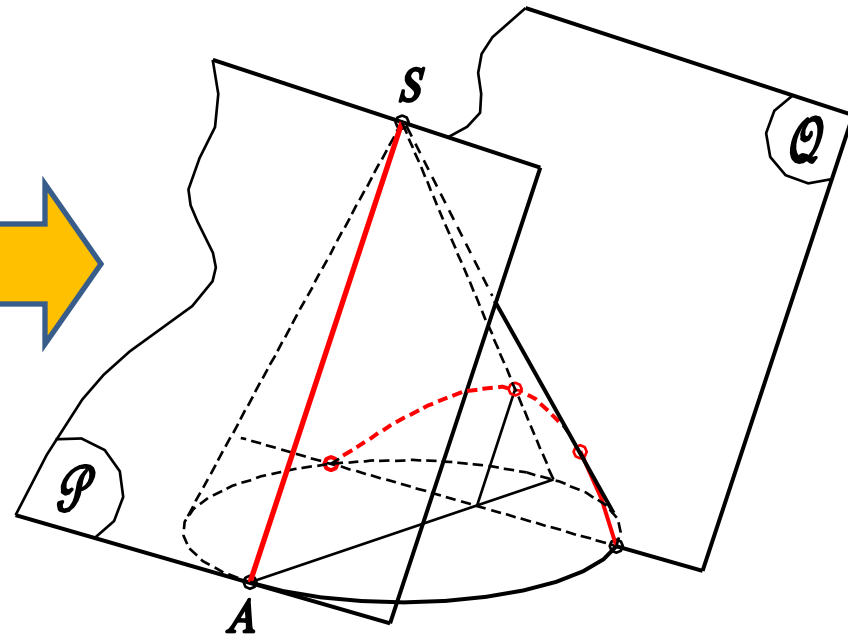
- **Hai đường sinh** (SA, SB) nếu mặt phẳng đi qua đỉnh nón và cắt đường chuẩn.



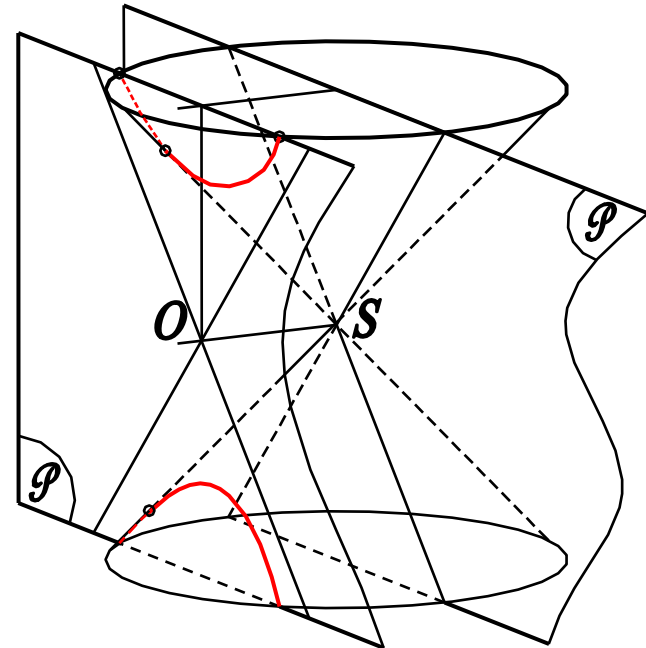
- Là **elip** nếu mặt phẳng không đi qua đỉnh và cắt tất cả các đường sinh.



- **Là Parabol** nếu mặt phẳng cắt chỉ song song với một đường sinh **duy nhất**.



- **Là hypebol** nếu mặt phẳng cắt **song song với hai** đường sinh.



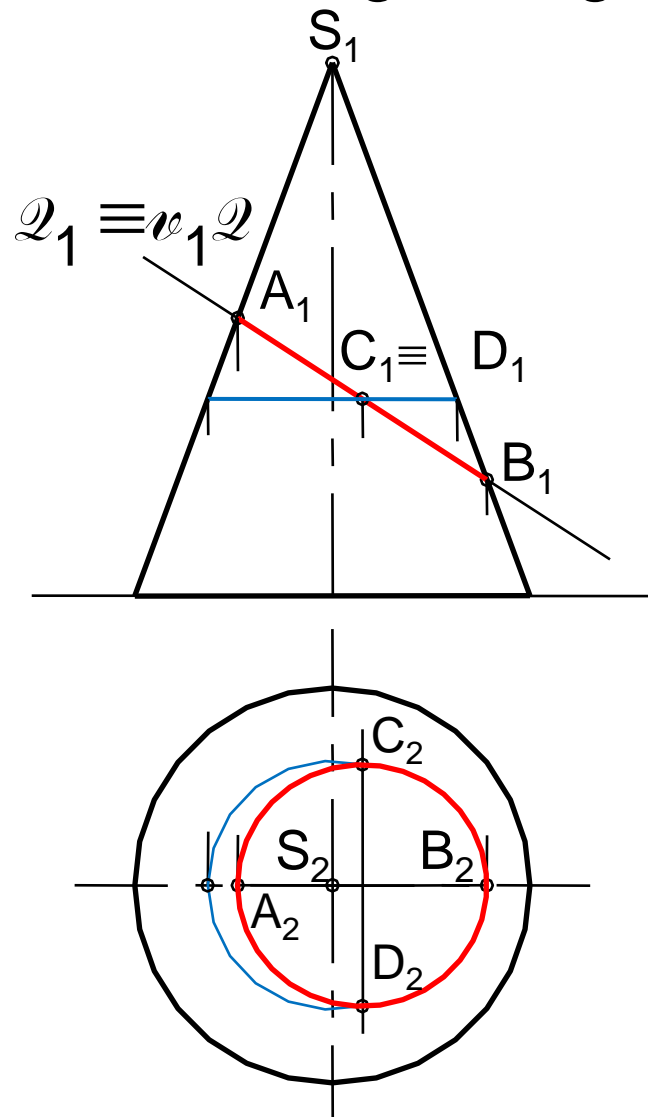
2. Cách vẽ giao tuyến

Ví dụ 1: Vẽ giao tuyến của mặt phẳng chiếu đứng \mathcal{Q} với mặt nón tròn xoay đỉnh S có trục là đường thẳng chiếu bằng.

- **Nhận dạng:** Giao tuyến là một elip (trục là AB và CD) vì mặt phẳng \mathcal{Q} cắt tất cả các đường sinh.

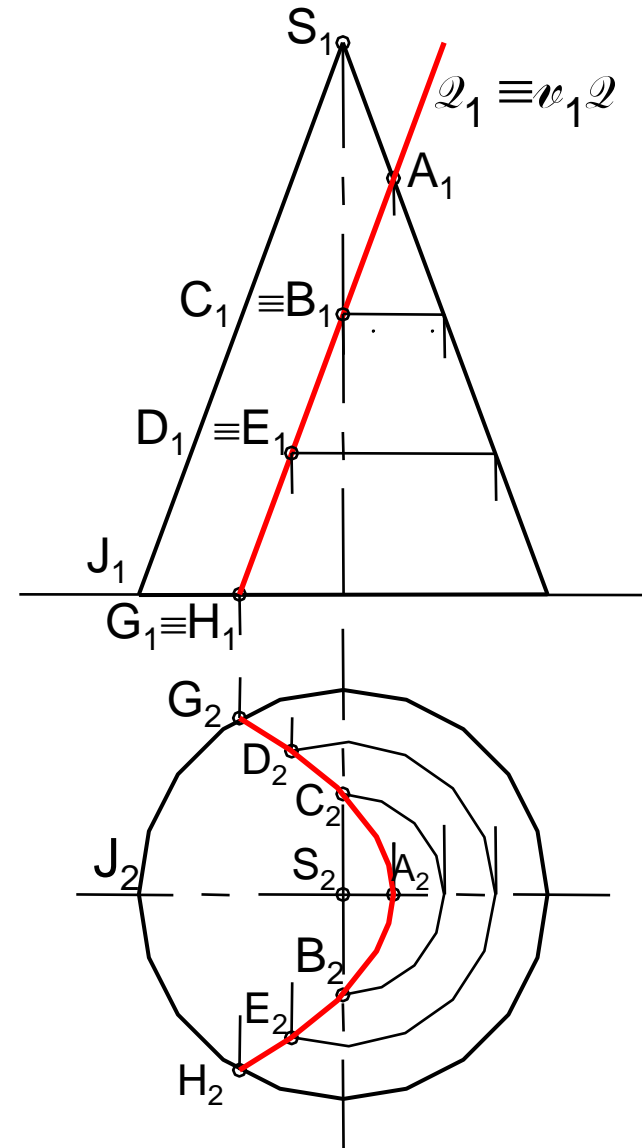
- **Hình chiếu đứng** của elip này là đoạn thẳng A_1B_1 .

- **Hình chiếu bằng** là elip có trục là: A_2B_2 và C_2D_2 . C_2, D_2 được xác định nhờ gắn C, D vào đường tròn có mặt phẳng // đáy của mặt nón.



Ví dụ 2: Vẽ giao tuyến của mặt phẳng chiếu đứng \mathcal{Q} với mặt nón tròn xoay đỉnh S có trục là đường thẳng chiếu bằng, với $\mathcal{Q} // SJ$.

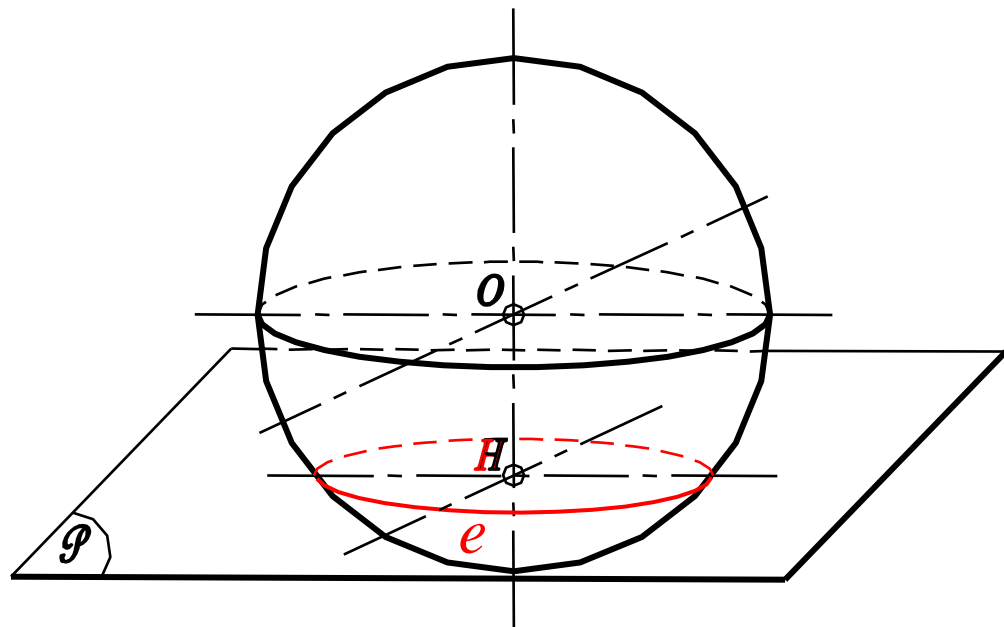
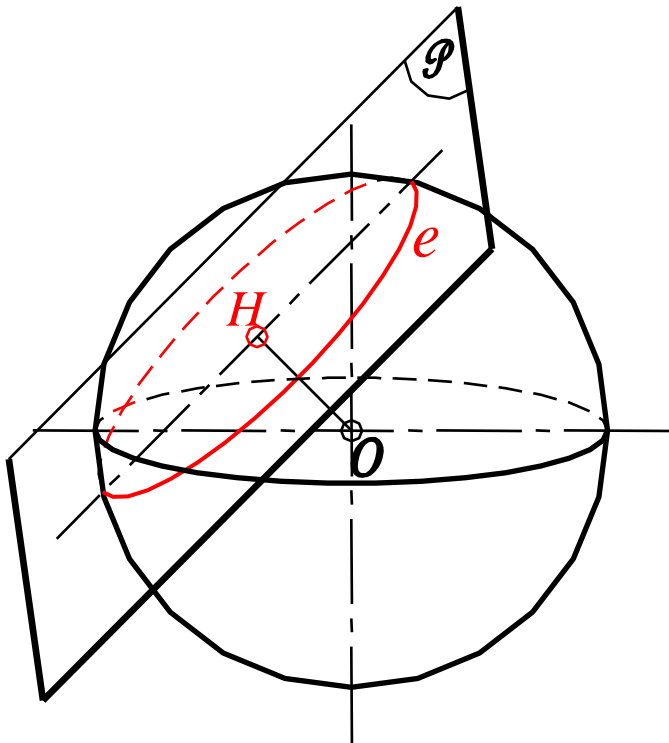
- **Nhận dạng:** Giao tuyến là một Parabol vì mặt phẳng $\mathcal{Q} // SJ$.
- **Hình chiếu đứng** suy biến, là đoạn thẳng A_1H_1 .
- **Hình chiếu bằng** là Parabol, để tìm hình chiếu bằng của giao tuyến, **gắn các điểm: C, B, E, D vào những đường tròn có mặt phẳng // mặt phẳng đáy nón.**



4.2.3. Mặt phẳng cắt mặt cầu

1. Nhận dạng giao tuyến

Là một đường tròn có tâm (H) là chân đường vuông góc hạ từ tâm mặt cầu (O) xuống mặt phẳng cắt.

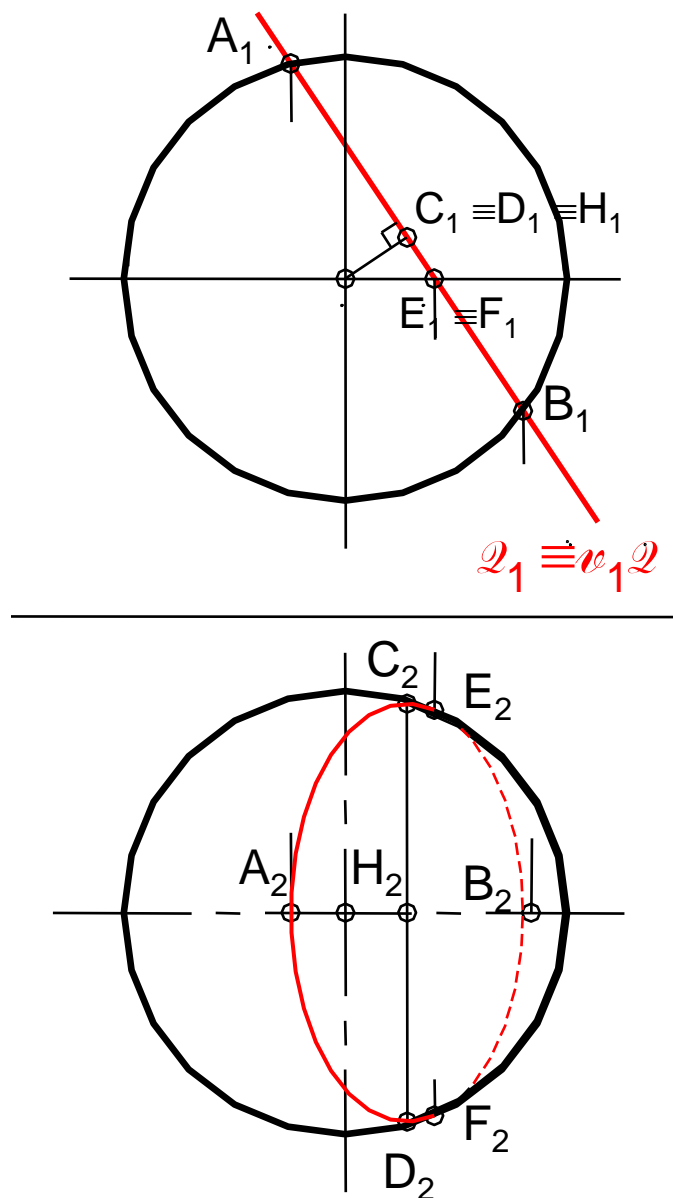


2. Cách vẽ giao tuyến

Giải: Giao tuyến cần tìm là đường tròn tâm H , đường kính $AB \parallel \mathcal{P}_1$ và $CD \perp \mathcal{P}_1$:

Hình chiếu đứng của đường tròn là đoạn thẳng A_1B_1 .

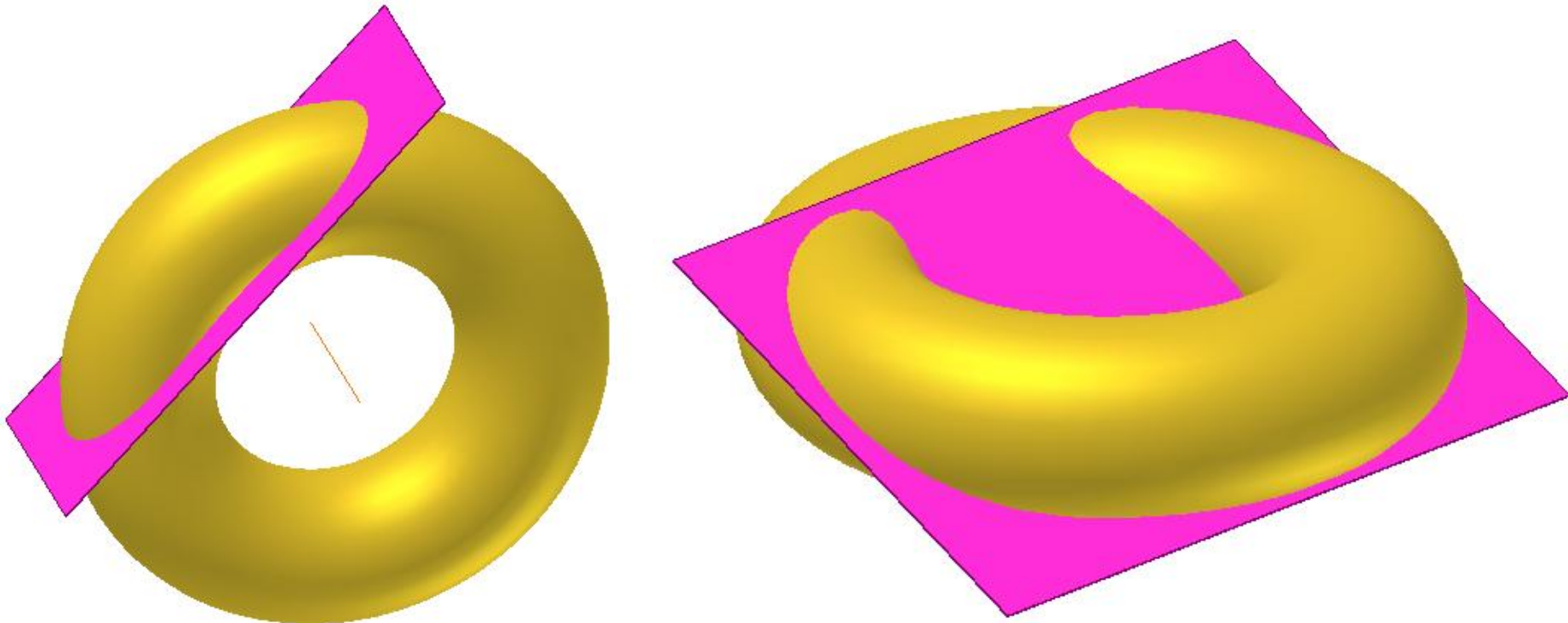
Hình chiếu bằng của giao tuyến là elip tâm H_2 , trục ngắn A_2B_2 , trục dài C_2D_2 (để tìm C_2, D_2 chỉ cần gắn C, D vào đường tròn của mặt cầu $\parallel \mathcal{P}_2$); E, F là hai điểm giới hạn thấy khuất của giao tuyến trên hình chiếu bằng.



4.2.4. Mặt phẳng cắt mặt xuyên

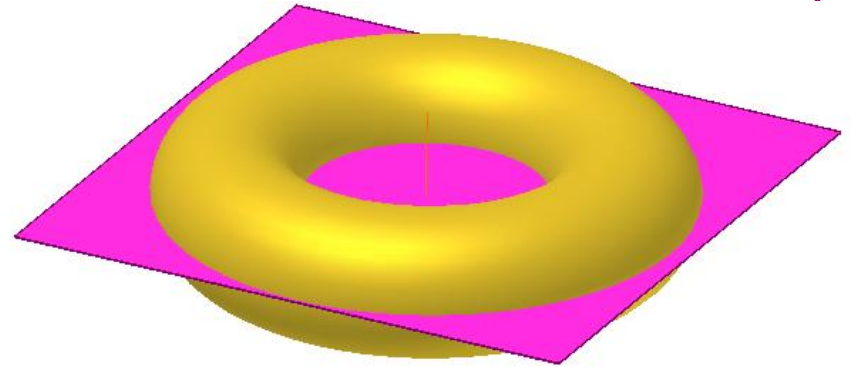
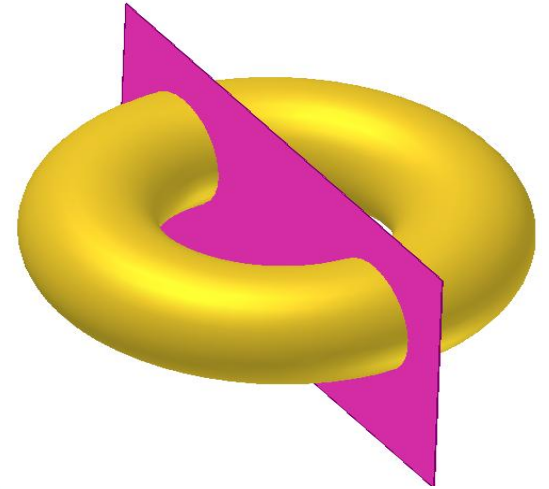
1. Nhận dạng giao tuyến

Giao tuyến của mặt phẳng với mặt xuyên nói chung là một **đường cong phẳng bậc 4**.



Trong các trường hợp đặc biệt sau **giao tuyến** của mặt phẳng với mặt xuyên **là các đường tròn**:

- **Mặt phẳng cắt chứa trục xuyên**, cắt mặt xuyên theo hai đường tròn(sinh) đối xứng với nhau qua trục.
- **Mặt phẳng vuông góc với trục** sẽ cắt mặt xuyên theo các đường tròn vĩ tuyến.
- Mặt phẳng cắt **tiếp xúc trong với hai đường tròn sinh đối xứng trục** của mặt xuyên thì giao tuyến là hai đường tròn có bán kính bằng bán kính đường tròn vĩ tuyến trung bình



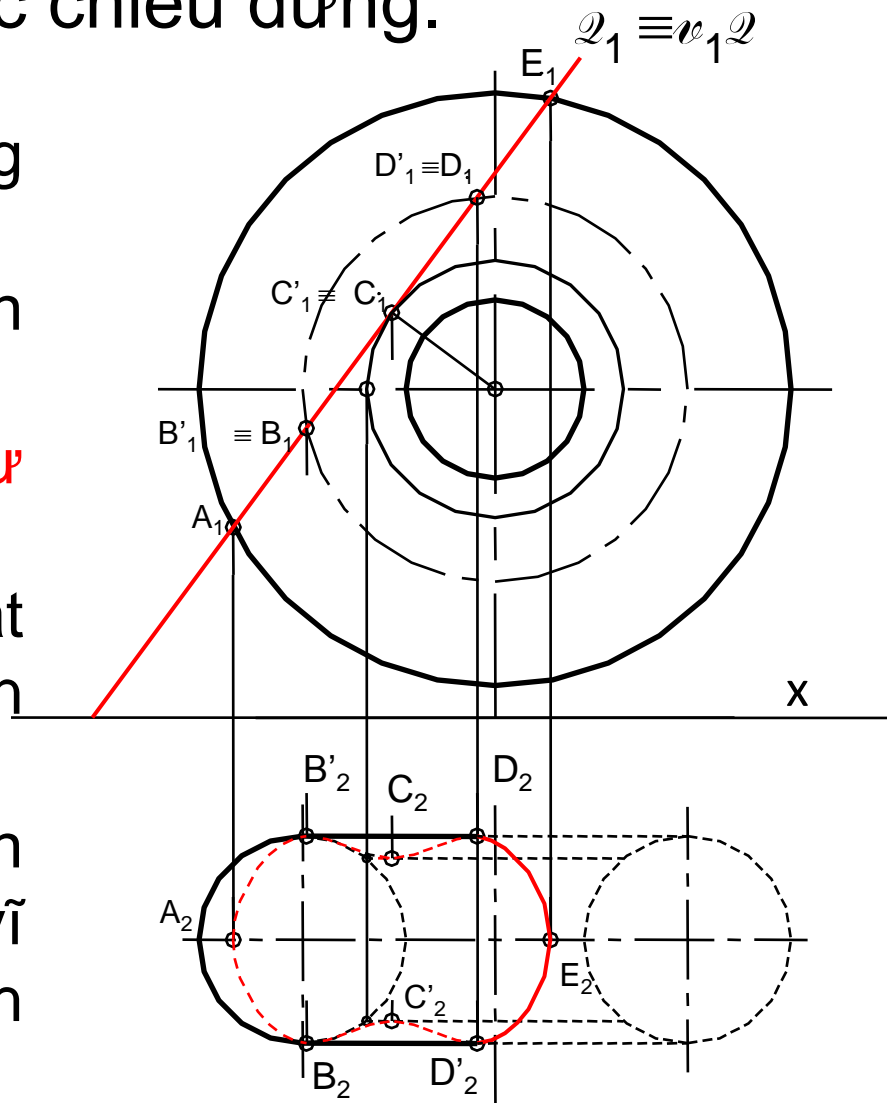
2. Cách vẽ giao tuyến

Ví dụ 1 : Vẽ giao tuyến của **mặt phẳng chiếu đứng 2** với mặt xuyên có trục chiếu đứng.

- **Dạng giao tuyến** là đường cong phẳng bậc 4.
- **Hình chiếu đứng** suy biến thành đoạn thẳng A_1E_1 ;
- **Tìm hình chiếu bằng** như sau:

+ Gắn điểm giới hạn thấy khuất D và D' , B và B' vào 2 đường tròn vĩ tuyến có bán kính trung bình;

+ Gắn C và C' là hai điểm gần trục xuyên nhất vào đường tròn vĩ tuyến có bán kính là khoảng cách từ tâm hình chiếu đứng đến A_1E_1



Ví dụ 2 : Vẽ giao tuyến của mặt phẳng chiếu đứng \mathcal{Q} với mặt xuyên có trục chiếu bằng.

- **Dạng giao tuyến là 2 đường tròn** (có đường kính là **CA và HP, BD và KQ** bằng đường kính của đường tròn vĩ tuyến trung bình.

- **Hình chiếu đứng** suy biến thành đoạn thẳng K_1P_1 ;

- **Hình chiếu bằng là 2 elip** có trục là: A_2C_2 và P_2H_2 , B_2D_2 và K_2Q_2 ; để tìm hình chiếu bằng của các điểm này ta gán nó vào các đường tròn vĩ tuyến.

