Câu 2.1

Cho biến ngẫu nhiên X có hàm mật độ là $f_X(x)=\begin{cases} kx^{-3} & \text{khi } x\ge 1 \\ 0 & \text{khi } x<1.\end{cases}$ a) Tìm hằng số k, hàm phân bố của X và $P(X>2)$. b) Tìm hàm mật độ của biến ngẫu nhiên $Y=\dfrac{1}{3X}$.	2 đ
a) Ta có $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx=1 \Leftrightarrow \int_1^{+\infty} kx^{-3}dx=1 \Leftrightarrow k=2.$ Hàm phân bố của X là $F_X(x)=\begin{cases} \int_1^x 2u^{-3}du=1-\dfrac{1}{x^2} & x>1 \\ 0 & x\le 1.\end{cases}$ $P(X>2)=1-P(X\le 2)=1-F(2)=1-\left(1-\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{1}{4}.$	1 đ
b) Với y > 0 ta có $F_Y(y)=P(Y<y)=P\left(\dfrac{1}{3X}<y\right)=P\left(X>\dfrac{1}{3y}\right)$ $=1-F_X\left(\dfrac{1}{3y}\right)=\begin{cases} 1 & y\ge 1/3, \\ 9y^2 & 0<y<1/3.\end{cases}$ Với $y\le 0$ ta có $F_Y(y)=0.$ Do đó hàm mật độ của Y là $f_Y(y)=\begin{cases} 18y \text{ khi } 0<y<1/3 \\ 0 \text{ khi } y\notin[0;1/3]\end{cases}$	1 đ

Câu 2.2

Cho hai biến ngẫu nhiên X và Y có hàm phân bố đồng thời là $F(x,y)=\begin{cases} (1-e^{-2x})(1-e^{-y}) \text{ khi } x>0, y>0 \\ 0 \quad \text{nếu trái lại}\end{cases}$ a) Tìm hàm phân bố của X và của Y. b) Chứng minh X và Y độc lập. Tính $P(X<2, Y<2)$.	2 đ
a) $F_X(x)=\begin{cases} 1-e^{-2x} & \text{khi } x>0 \\ 0 & \text{nếu trái lại}\end{cases}$ $\quad F_Y(y)=\begin{cases} 1-e^{-y} & \text{khi } y>0 \\ 0 & \text{nếu trái lại}\end{cases}$	1 đ
b) X, Y độc lập vì $F(x,y)=F_X(x).F_Y(y)$, $\forall x,y$. $P(X<2,Y<2)=F(2,2)=(1-e^{-4})(1-e^{-2})\approx 0.849$.	1 đ

Câu 2.3

Cho biến ngẫu nhiên X có hàm mật độ $f_X(x)=\begin{cases} k\cos 2x \text{ khi } -\dfrac{\pi}{4}\le x\le \dfrac{\pi}{4} \\ 0 \quad \text{nếu trái lại}\end{cases}$ a) Tìm hằng số k và hàm phân bố của X. b) Tính kỳ vọng và phương sai của X.	2 đ
a) Ta có	1 đ

$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \Leftrightarrow k = 1.$ $\qquad F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{khi } x \le -\frac{\pi}{4} \\ \frac{\sin 2x + 1}{2} & \text{khi} -\frac{\pi}{4} < x \le \frac{\pi}{4} \\ 1 & \text{khi } x > \frac{\pi}{4} \end{cases}$	
b) $EX = 0, DX = EX^2 = \frac{\pi^2 - 8}{16}$	1 đ

Câu 2.4

Cho hai biến ngẫu nhiên X và Y có hàm mật độ đồng thời là $f(x,y) = \begin{cases} k(1-x)y & \text{khi } 0 < x < 1, 0 < y < 2 \\ 0 & \text{nếu ngược lại} \end{cases}$ a) Tìm hằng số k và các hàm mật độ của X và của Y. b) X và Y có độc lập hay không? Tính EX.	2 đ
a) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = 1 \Leftrightarrow k = 1.$ Ta có $f_X(x) = \begin{cases} 2(1-x) & \text{khi } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{nếu ngược lại} \end{cases}$ $\qquad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{y}{2} & \text{khi } 0 < y < 2 \\ 0 & \text{nếu ngược lại} \end{cases}$	1 đ
b) X, Y độc lập vì $f(x,y) = f_X(x).f_Y(y)$, $\forall x, y$. $\qquad$ EX $= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx = \frac{1}{3}$.	1 đ

Câu 2.5

Cho biến ngẫu nhiên hai chiều (ξ, η), có hàm mật độ $f_{\xi,\eta}(x) = \begin{cases} k\left(\frac{x^2}{2} + xy\right) & \text{khi } 0 \le x \le 1; 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{nếu trái lại} \end{cases}$ a) Tìm hằng số k. b) Tính xác suất $P\left((\xi,\eta) \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right] \times \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]\right)$.	2 đ
a) $1 = k\int\limits_0^1\int\limits_0^1\left(\frac{x^2}{2} + xy\right)dxdy = \frac{5k}{12} \Rightarrow k = \frac{12}{5}$	1đ
b) $P\left((\xi,\eta) \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right] \times \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]\right) = k\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{u^2}{2} + uv\right)dudv = k\left(\frac{1}{96} + \frac{3}{64}\right) = \frac{11}{80}$	1 đ

Câu 2.6

Cho biến ngẫu nhiên ξ liên tục, có hàm mật độ $f(x) = \begin{cases} k(1-x)(x+2) & \text{khi } -2 \le x \le 1 \\ 0 & \text{nếu trái lại} \end{cases}$ a) Tìm hằng số k, tính $P(-4 < \xi \le 0)$.	2 đ

b) Tính kỳ vọng, phương sai của biến ngẫu nhiên $\eta = -\xi + 3$.		**Câu 2.7**
a) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \Rightarrow k = \frac{2}{9}$ $P(-4 < \xi \le 0) = \frac{2}{9}\int_{-2}^{0}(1-x)(x+2)dx = \frac{20}{27}$.	1 đ	
b) $E\eta = \int_{-\infty}^{\infty}(3-x)f(x)dx = \frac{7}{2}$, $E\eta^2 = \int_{-\infty}^{\infty}(3-x)^2 f(x)dx = \frac{127}{10}$. $D\eta = E\eta^2 - (E\eta)^2 = \frac{9}{20}$. Cách 2. $E\eta = -E\xi + 3 = -\frac{-1}{2} + 3 = \frac{7}{2}$; $D\eta = D\xi = \frac{9}{20}$	1 đ	

Cho biến ngẫu nhiên ξ liên tục, có hàm mật độ $$f(x) = \begin{cases} k.x^{-\frac{5}{2}} & \text{khi } x \ge 1 \\ 0 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$$ a) Tìm hằng số k và hàm phân bố $F_\xi(x)$. b) Tìm hàm mật độ của biến ngẫu nhiên $\eta = \frac{1}{\xi}$ và từ đó tính xác suất $P(0{,}1 < \eta < 0{,}2)$.	2 đ
a) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \Rightarrow k = \frac{3}{2}$ Hàm phân bố $F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 1 - \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} & x \ge 1 \end{cases}$	1 đ
b) Tìm $F_\eta(y)$. Khi y>0, $F_\eta(y) = P(\eta < y) = P\left(\frac{1}{\xi} < y\right) = P\left(\xi > \frac{1}{y}\right) = 1 - F\left(\frac{1}{y}\right)$ $= \begin{cases} 1 & y > 1 \\ y^{\frac{3}{2}} & 0 < y < 1 \end{cases}$ Khi y < 0, $F_\eta(y) = 0$ Và $f_\eta(y) = \begin{cases} 0 & (y<0) \vee (y>1) \\ \frac{3}{2}\sqrt{y} & 0 \le y \le 1 \end{cases}$ $P(0{,}1 < \eta < 0{,}2) = 0{,}2^{\frac{3}{2}} - 0{,}1^{\frac{3}{2}} = 0.058$	1 đ

Câu 2.8

Cho biến ngẫu nhiên ξ liên tục, có hàm mật độ	2 đ

$$f\left(x\right)=\begin{cases}kx^2\left(x-1\right)^2 \text{ khi } 0\le x\le 1\\ 0 \quad \text{nếu trái lại}\end{cases}$$ a) Tìm hằng số k, tính $P\left(-\frac{1}{2}\le\xi\le\frac{1}{2}\right)$. b) Tính kỳ vọng, phương sai của ξ.	
a) $\int_{-\infty}^{\infty} f\left(x\right)dx=1\Rightarrow k=30$; $\quad P\left(-\frac{1}{2}\le\xi\le\frac{1}{2}\right)=30\int_0^{\frac{1}{2}} x^2\left(x-1\right)^2 dx=\frac{1}{2}$	1 đ
b) $E\xi=\int_{-\infty}^{\infty} xf\left(x\right)dx=\frac{1}{2}, E\xi^2=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f\left(x\right)dx=\frac{2}{7}$; $D\xi=E\xi^2-\left(E\xi\right)^2=\frac{1}{28}$	1 đ

Câu 2.9

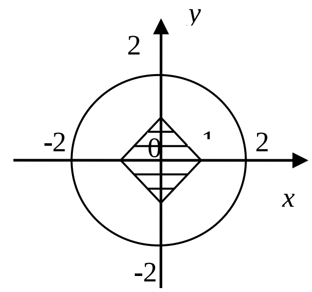
Cho X là biến ngẫu nhiên có hàm mật độ $$f(x)=\begin{cases}20x^3(1-x) \text{ khi } 0<x<1\\ 0 \quad \text{khi } x\notin(0;1)\end{cases}$$ a) Tính kỳ vọng và phương sai của X. b) Tìm hàm phân bố của X, từ đó tính $P\left(0.2<X<0.5\right)$.	2 đ
a) $EX=\int_0^1 20x^4(1-x)dx=\frac{2}{3}$; $EX^2=\int_0^1 20x^5(1-x)dx=\frac{10}{21}$; $DX=EX^2-(EX)^2=\frac{2}{63}$.	1 đ
b) Vậy $F(x)=\begin{cases}0 \quad \text{khi } x\le 0\\ 5x^4-4x^5 \text{ khi } 0<x\le 1\\ 1 \quad \text{khi } x>1\end{cases}$; $P(0,2<X<0,5)=F(0,5)-F(0,2)=0,0181$	1 đ

Câu 2.10

Một thiết bị điện tử có tuổi thọ (năm) là biến ngẫu nhiên X có hàm mật độ dạng $$f(x)=\begin{cases}k.x^3e^{-x} \text{ khi } x\ge 0\\ 0 \quad \text{khi } x<0\end{cases}$$ a) Tìm k, tính tuổi thọ trung bình của thiết bị đó và xác suất thiết bị đó hỏng trong 2 năm đầu làm việc. b) Nếu biết rằng sau 2 năm đầu làm việc vẫn thấy thiết bị đó hoạt động tốt thì xác suất thiết bị đó bị hỏng trong 2 năm tiếp theo là bao nhiêu ?	2 đ
a) $k=\frac{1}{6}$, $EX=4$, $P(X\le 2)=0.1429$	1 đ
c) $P(X\le 4\mid X>2)=\frac{P(2<X\le 4)}{P(X>2)}=\frac{0.4237}{0.8571}=0.4943$	1 đ

Câu 2.11

Cho biến ngẫu nhiên hai chiều (X,Y) có hàm mật độ là $$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{4\pi} \quad \text{khi } x^2+y^2\le 4\\ 0 \quad \text{khi } x^2+y^2>4\end{cases}$$ a) Tính $R(X, Y)$ và $P\left(\lvert X\rvert+\lvert Y\rvert\le 1\right)$. b) X và Y có độc lập không?	2 đ

a) Do tính đối xứng giữa X và Y nên ta có $EX = EY = \iint\limits_{R^2} xf(x,y)dxdy = \dfrac{1}{4\pi}\iint\limits_{\{x^2+y^2\le 1\}} xdxdy = 0$ $EXY = \iint\limits_{R^2} xyf(x,y)dxdy = \dfrac{1}{4\pi}\iint\limits_{\{x^2+y^2\le 1\}} xydxdy = 0$. Do đó $\rho(X,Y)=0$. Từ đó suy ra X và Y không tương quan. Gọi $D = \{(x,y): \|x\|+\|y\|\le 1\}$. Ta có $P(\|X\|+\|Y\|\le 1) = \iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \dfrac{S_D}{4\pi} = \dfrac{2}{4\pi} = \dfrac{1}{2\pi}$  	1 đ
b) Do tính đối xứng của x và y nên hai biến ngẫu nhiên X và Y có cùng phân bố. Hàm mật độ của X là $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{2\pi} & \text{nếu } -2 \le x \le 2 \\ 0 & \text{nếu ngược lại} \end{cases}$. Từ đó ta có $f(x,y) \ne f_X(x).f_Y(y)$. Do vậy X và Y không độc lập.	1 đ

Câu 2.12

Cho X và Y là hai biến ngẫu nhiên có hàm mật độ đồng thời là $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{6}{5}(x^2+y) & \text{khi } 0<x,y<1 \\ 0 & \text{nếu trái lại} \end{cases}$ a) Tìm hàm mật độ của X và Y kiểm tra tính độc lập giữa X và Y. b) Tính $P(X+Y<1)$.	2 đ
a) $\mathrm{f_X(x)} = \begin{cases} 0 & \text{với } x \notin (0;1) \\ \dfrac{6}{5}\int_0^1 (x^2+y)dy & \text{với } x \in (0;1) \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{với } x \notin (0;1) \\ \dfrac{6}{5}(x^2+\dfrac{1}{2}) & \text{với } x \in (0;1) \end{cases}$. $\mathrm{f_Y(y)} = \begin{cases} 0 & \text{với } y \notin (0;1) \\ \dfrac{6}{5}\int_0^1 (x^2+y)dx & \text{với } y \in (0;1) \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{với } y \notin (0;1) \\ \dfrac{6}{5}(y+\dfrac{1}{3}) & \text{với } y \in (0;1) \end{cases}$ Rõ ràng $f(x,y) \ne f_X(x).f_Y(y)$ nên X và Y không độc lập.	1
b) $P(X+Y<1) = \iint\limits_{\{x+y<1\}} f(x,y)dxdy = \dfrac{6}{5}\int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x^2+y)dxdy = \dfrac{3}{10}$.	1

Câu 2.13

Biết rằng mật độ của biến ngẫu nhiên X có dạng $f(x) = \begin{cases} k\,x e^{-x} & \text{khi } x \ge 0 \\ 0 & \text{khi } x<0 \end{cases}$ a) Tìm hằng số k; Mod(X). b) Tính EX, EX^2, DX.	2 đ

a) $1=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int_{0}^{\infty} kxe^{-x}dx=...=k \quad \Rightarrow k=1$ Xét $g(x)=xe^{-x}, \ \ x\geq 0$. $g'(x)=e^{-x}\left[-x+1\right]=0 \Leftrightarrow x=1$, đổi dấu.. $\Rightarrow Mod(X)=1$	1đ
b) $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx=\int_{0}^{\infty} x^2e^{-x}dx=...=2; \quad E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx=\int_{0}^{\infty} x^3e^{-x}dx=...=6$ $\Rightarrow D(X)=E(X^2)-(E(X))^2=6-4=2$	1đ

Câu 2.14

Cho X là biến ngẫu nhiên có mật độ $f(x)=\begin{cases} k\,x\,e^{-x} & \text{khi} \quad x\geq 0 \\ 0 & \text{khi} \quad x<0 \end{cases}$ a) Tìm hằng số k và tính $P(X>e)$. b) Tìm hàm mật độ của biến ngẫu nhiên $\sqrt{X}$.	2
a) $k=1$, $P(X>e)=0.2454$	1đ
b) $y<0$: $F_Y(y)=0$; y > 0: $F_Y(y)=P\left\{\sqrt{X}<y\right\}=P\left\{X<y^2\right\}=F_X(y^2)$ $\Rightarrow f_Y(y)=\dfrac{d}{dy}(F_Y(y))=\dfrac{d}{dy}(F_X(y^2))=f(y^2).2y=2y^3e^{-y^2}$	1đ

Câu 2.15

Một cầu thủ ném bóng vào rổ với xác suất trúng là 0.6; kết quả các lần ném độc lập, cuộc chơi dừng lại khi anh ta ném được một quả bóng vào rổ. a) Lập bảng phân bố xác suất số lần ném. Tính xác suất phải ném ít nhất 3 lần. b) Tính kỳ vọng số lần ném.	2 đ
a)	1 đ

X	1	2	3	…	n	…
P	0,6	0,4.0,6	$0,4^2$. 0,6	…	$0,4^{n-1}$. 0,6	…

P=1- (0,6 + 0,24) = 0,16

b) $E(X)=\sum_{n=1}^{\infty} n(0,4)^{n-1}0,6=0,6\sum_{n=1}^{\infty} n(0,4)^{n-1}$. Chuỗi hàm $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} x^n=\dfrac{1}{1-x}$, bán kính hội tụ là r = 1. $\Rightarrow f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1}=\dfrac{1}{(1-x)^2}$ $\Rightarrow E(x)=0,6.f'(0,4)=\dfrac{0,6}{(0,6)^2}=1,667$.	1 đ

Câu 2.16

Véc tơ ngẫu nhiên *(X, Y)* có mật độ $f(x,y)=\begin{cases} e^{-(x+y)} & \text{khi} \ \ x\geq 0, y\geq 0; \\ 0 & \text{nếu trái lại.} \end{cases}$ a) Tìm các mật độ biên $f_X(x)$; $f_Y(y)$; suy ra rằng X, Y là 2 biến ngẫu nhiên độc lập. b) Tìm mật độ của $Z=X+Y$.	2 đ

$a)\ *\ x<0:\ f_x(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy=0$ $*\ x\ge 0:\ f_x(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy=\int_0^{\infty} e^{-(x+y)}dy=...=e^{-x}$ $\Rightarrow f_X(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ e^{-x} & x\ge 0\end{cases}$ Tương tự, $f_Y(x)=\begin{cases}0 & y<0\\ e^{-y} & y\ge 0\end{cases}$. Do đó $f(x,y)=f_X(x).f_Y(y)\quad \forall x,y$. Vậy *X*, *Y* độc lập	1 đ
b) $f_Z(x)=f_X(x)*f_Y(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x-t)f_Y(t)dt=\int_0^{\infty} f_X(x-t)f_Y(t)dt$ $*\ x\le 0:\ f_Z(x)=0$; $x>0:\ f_Z(x)=\int_0^x e^{-(x-t)}e^{-t}dt=xe^{-x}$. $f_Z(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ xe^{-x}, & x>0\end{cases}$	1 đ

Câu 2.17

Cho X là biến ngẫu nhiên có $f(x)=\begin{cases}k\,x\,e^{-x} & \text{khi} \quad x\ge 0\\ 0 & \text{khi} \quad x<0\end{cases}$. a) Tìm hằng số k và mật độ của biến ngẫu nhiên X^2. b) Tính $P(X^2<1)$.	2 đ
a) $k=1$ $y<0:\ F_Y(y)=0$; y > 0: $F_Y(y)=P\left\{X^2<y\right\}=P\left\{X<\sqrt{y}\right\}=F_X(\sqrt{y})$ $\Rightarrow f_Y(y)=\frac{d}{dy}(F_Y(y))=\frac{d}{dy}(F_X(\sqrt{y}))=f(\sqrt{y}).\frac{1}{2\sqrt{y}}=\sqrt{y}e^{-\sqrt{y}}\ \frac{1}{2\sqrt{y}}=\frac{1}{2}e^{-\sqrt{y}}$ vậy $f_Y(y)=\begin{cases}0 & \text{khi}\ \ y\le 0\\ \frac{1}{2}e^{-\sqrt{y}} & \text{khi}\ \ y>0\end{cases}$	1
b) $P(X^2<1)=P(X<1)=0.264$	1

Câu 2.18

Tầm bắn của một loại pháo là biến ngẫu nhiên có phân bố chuẩn với trung bình 16.7km và độ lệch chuẩn 0.3km. a) Tính xác suất một phát bắn đạt xa hơn 16.7km b) Tính xác suất một phát bắn đạt từ 15.8km đến 17.6km Cho $\Phi(0)=0,5000;\ \ \Phi(3)=0,9987;\ \ \Phi(1.96)=0,9750$	2 đ
$Z=\frac{X-16.7}{0.3}\approx N(0,1)$ a) $P(X>16.7)=P(Z>0)=\frac{1}{2}\Rightarrow 50\%$	1 đ
b) $P(15.8<X<17.6)=P(-3<Z<3)=0.997\Rightarrow 99.7\%$	1 đ

Câu 2.19

Tuổi thọ *X* của một loại thiết bị điện tử là biến ngẫu nhiên có phân bố với hàm mật độ	2 đ

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}xe^{-x/2} & \text{khi } x>0\\ 0 & \text{khi } x\le 0.\end{cases}$$ a) Tính $P(X\ge 4)$ và $P(X\ge 4/X\ge 2)$. b) Tính kỳ vọng và phương sai của *X*.	
a) $P(X\ge 4)=\int_4^{\infty}\frac{x}{4}e^{-x/2}dx=3e^{-2}.$ $\quad P(X\ge 4/X\ge 2)=\frac{P(X\ge 4)}{P(X\ge 2)}=\frac{3e^{-2}}{2e^{-1}}=\frac{3}{2}e^{-1}.$	1 đ
b) $E(X)=4,\ EX^2=24,\quad Var(X)=8.$	1 đ

Câu 2.20

Cho biến ngẫu nhiên X có hàm mật độ $$f(x)=\begin{cases}cx^2.e^{-2x} & \text{khi } x\ge 0\\ 0 & \text{khi } x<0\end{cases}$$ a Tìm c và tính $P\left(x<\frac{1}{2}\right)$. a) Tìm *EX*.	2 đ
a) $c=4;\quad P\left(X<\frac{1}{2}\right)=0.0803$	1 đ
b) $E\text{X}=\frac{3}{2}.$	1 đ

Câu 2.21

Cho *X* là biến ngẫu nhiên có hàm mật độ $f(x)=\begin{cases}4x(1-x^2) & \text{khi } x\in(0;1)\\ 0 & \text{khi } x\notin(0;1)\end{cases}$ a) Tính kỳ vọng và độ lệch chuẩn của *X*. b) Tìm med*X* và tính $P\left(0<X<\frac{1}{2}\right)$.	2 đ
a) $EX=4\int_0^1 x^2(1-x^2)dx=\frac{8}{15}$; $EX^2=4\int_0^1 x^3(1-x^2)dx=\frac{1}{3}$; $DX=\frac{11}{225}$; $\sigma_X=\frac{\sqrt{11}}{15}$	1 đ
b) $medX=a\in(0;1)$ với a là nghiệm của $2a^4-4a^2+1=0$. Do đó $medX=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}\approx 0.541.$ $P\left(0<X<\frac{1}{2}\right)=4\int_0^{1/2}x(1-x^2)dx=\frac{7}{16}.$	1 đ

Câu 2.22

Cho *X* là biến ngẫu nhiên có hàm mật độ $f(x)=\begin{cases}12x^3(1-x^2) & \text{khi } x\in(0;1)\\ 0 & \text{khi } x\notin(0;1)\end{cases}$ a) Tính kỳ vọng và phương sai của *X*. b) Tìm mod*X* và tính $P\left(0<X<\frac{1}{2}\right)$.	2 đ
a) $EX=12\int_0^1 x^4(1-x^2)dx=\frac{24}{35}$; $EX^2=12\int_0^1 x^5(1-x^2)dx=\frac{1}{2}$; $DX=\frac{73}{2450}$	1 đ
b) $modX=\sqrt{\frac{3}{5}}\approx 0.775$; $P\left(0<X<\frac{1}{2}\right)=12\int_0^{1/2}x^3(1-x^2)dx=\frac{5}{32}=0.15625$	1 đ

Câu 2.23

Cho X là biến ngẫu nhiên có hàm mật độ $f(x)=\begin{cases}12x^2(1-x) & \text{khi } x\in(0;1)\\ 0 & \text{khi } x\notin(0;1)\end{cases}$ a) Tìm kỳ vọng và độ lệch chuẩn của X. b) Tiến hành quan sát giá trị của X. Tính xác suất trong 5 lần quan sát có đúng hai lần X nhận giá trị nhỏ hơn $\frac{1}{2}$.	2 đ
a) $EX=12\int_0^1 x^3(1-x)dx=\frac{3}{5}$; $EX^2=12\int_0^1 x^4(1-x)dx=\frac{2}{5}$; $DX=\frac{1}{25}$; $\sigma_X=\frac{1}{5}$	1 đ
b) $P\left(0<X<\frac{1}{2}\right)=12\int_0^{1/2} x^2(1-x)dx=\frac{5}{16}$. Do đó $p=C_5^2\left(\frac{5}{16}\right)^2.\left(\frac{11}{16}\right)^3\approx 0.3173$	1 đ

Câu 2.24

Cho X là biến ngẫu nhiên có hàm mật độ $f(x)=\begin{cases}kx^3(1-x) & \text{khi } x\in[0;1]\\ 0 & \text{khi } x\notin[0;1].\end{cases}$ 1) Tìm hằng số k, tính kỳ vọng và phương sai của X. 2) Tìm hàm phân bố của X và tính $P(0.5 < X < 1)$.	2 đ
$k=20$ $EX=\int_0^1 20x^4(1-x)dx=\frac{2}{3}$ $\quad EX^2=\int_0^1 20x^5(1-x)dx=\frac{10}{21}$ $\quad DX=EX^2-(EX)^2=\frac{2}{63}$.	1 đ
$F(x)=\int_{-\infty}^x f(t)dt=\begin{cases}0 & \text{khi } x\le 0\\ 5x^4-4x^5 & \text{khi } 0<x\le 1\\ 1 & \text{khi } x>1\end{cases}$ và $P(0.5<X<1)=F(1)-F(0.5)=\frac{13}{16}$.	1 đ

Câu 2.25

Qua nghiên cứu ở một vùng trồng cam, người ta thấy số quả cam trên một cây là biến ngẫu nhiên có phân bố chuẩn. Người ta đếm thử 600 cây thì thấy 15 cây có ít hơn 20 quả, 30 cây có ít hơn 25 quả. a) Hãy ước lượng số quả cam trung bình trên một cây. b) Ước lượng tỷ lệ cây cam có từ 60 quả trở lên. Biết rằng: $u(0.05)=1.65$; $u(0.302)=0.52$; $u(0.025)=1.96$; $u(0.10)=1.28$.	2 đ
a) Gọi X là số quả cam trên một cây. Ta có $X\sim N(\mu,\sigma^2)$. $P(X<20)=\Phi\left(\frac{20-\mu}{\sigma}\right)\approx 0.025=\Phi(-1.96)$ $P(X<25)=\Phi\left(\frac{25-\mu}{\sigma}\right)\approx 0.05=\Phi(-1.65)$. Do đó ta có hệ phương trình $\begin{cases}\frac{20-\mu}{\sigma}\approx -1.96\\ \frac{25-\mu}{\sigma}\approx -1.65\end{cases}$. Giải hệ ta có $\mu\approx 51.61$ và $\sigma\approx 16.13$. Do đó trung bình một cây cam có 51.61 quả.	1 đ
b) $P(X\ge 60)=1-\Phi\left(\frac{60-\mu}{\sigma}\right)\approx 1-\Phi(0.52)=0.302$. Do đó tỷ lệ cây có từ 60 quả	1 đ

trở lên chiếm khoảng 30.2%.	

Câu 2.26

Một cơ quan mua về 15 cái máy tính, trong đó có 4 cái máy không đạt chất lượng. Phòng kinh doanh được phân cho 6 chiếc và họ đã nhận một cách ngẫu nhiên 6 chiếc đem về. Gọi ξ là số chiếc máy tính đạt chất lượng mà phòng kinh doanh nhận được. a) Lập bảng phân phối xác suất của ξ b) Tính xác suất để phòng kinh doanh nhận được 3 máy không đạt chất lượng biết rằng có ít nhất 1 máy không đạt chất lượng.	2đ
$P(\xi=2)=\frac{C_{11}^2.C_4^4}{C_{15}^6}=0.011$ $P(\xi=3)=\frac{C_{11}^3.C_4^3}{C_{15}^6}=0.132$ a) $P(\xi=4)=\frac{C_{11}^4.C_4^2}{C_{15}^6}=0.396$ $P(\xi=5)=\frac{C_{11}^5.C_4^1}{C_{15}^6}=0.369$ $P(\xi=6)=\frac{C_{11}^6}{C_{15}^6}=0.092$	1đ

ξ	2	3	4	5	6
P	0.011	0.132	0.396	0.369	0.092

b) $P(\xi=3\mid\xi\le 5)=\frac{P(\xi=3\cap\xi\le 5)}{P(\xi\le 5)}=\frac{0.132}{0.908}=0.145$	1đ

Câu 2.27

Cho X là biến ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ $f(x)=\begin{cases} kx & \text{khi } 0\le x<1 \\ k & \text{khi } 1\le x<2 \\ 0 & \text{khi } x\notin[1;2] \end{cases}$ a) Xác định giá trị của *k*. Tính $P\left(\frac{1}{2}<X<\frac{4}{3}\right)$. b) Tính kì vọng và phương sai của biến ngẫu nhiên $Y=3X-2$.	2đ
a) $k=\frac{2}{3}, P\left(\frac{1}{2}<X<\frac{4}{3}\right)=\frac{2}{3}$	1đ
b) $\text{EX}=\frac{11}{9}\to EY=3EX-2=\frac{5}{3}$ $DX=0.228\to DY=9DX=2.052$	1đ

Câu 2.28

Cho X là biến ngẫu nhiên có hàm phân bố xác suất $F(x)=\begin{cases} 0 & \text{khi } x<-2 \\ 0.25x+0.5 & \text{khi } -2\le x<1 \\ 0.5x+0.25 & \text{khi } 1\le x<1.5 \\ 1 & \text{khi } 1.5\le x \end{cases}$ a) Tính $P(\{X<-1\}\cup\{X>1.6\})$. Tìm hàm mật độ của *X*. b) Tính kì vọng, phương sai của biến ngẫu nhiên $Y=\mid X\mid$.	2đ
a) $P(X<-1\cup X>1,6)=P(X<-1)+P(X>1,6)=F(-1)+1-F(1.6)=0.25$	1đ

$$f(x)=\begin{cases}0.25, & -2\le x<1\\ 0.5, & 1\le x<1.5\\ 0, & x\notin[-2;1.5]\end{cases}$$	
b) $EY=0.875,\ DY=0.38$	1đ

Câu 2.29

Cho biến ngẫu nhiên rời rạc X có bảng phân phối xác suất	2đ

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P	0.05	0.19	0.20	0.25	0.12	0.10	x	0.08	y	0.01

a) Tìm giá trị của x, y. Từ đó tính $P(X>6)$.

b) Quan sát biến ngẫu nhiên X 20 lần độc lập nhau trong cùng một điều kiện. Tính xác suất để trong 20 lần có đúng 17 lần $X\le 6$. Trung bình có bao nhiêu lần $X\le 6$?

a) $x=y=0,\ P(X>6)=0.09$	1đ
b) Gọi Y là số lần $X\le 6$ trong 20 lần quan sát. $P(X\le 6)=0.91$ $P(Y=17)=C_{20}^{175}0.91^{17}0.09^{3}=0.167$; $EY=20\times 0.91=18.2$ lần	1đ

Câu 2.30

Một thiết bị gồm 3 bộ phận hoạt động độc lập với nhau, xác suất trong khoảng thời gian *t* các bộ phận bị hỏng tương ứng là 0.2; 0.3 và 0.25. Gọi ξ là số bộ phận bị hỏng trong khoảng thời gian *t*. a) Tìm bảng phân phối xác suất của ξ. b) Tính kì vọng, phương sai của ξ và xác suất để trong khoảng thời gian t có đúng 2 bộ phận bị hỏng biết rằng có ít nhất 1 bộ phận bị hỏng.	2đ

a) Gọi A_i: bộ phận thứ i bị hỏng, i = 1, 2, 3. — 1đ

$$P(\xi=0)=P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3})=0.8\times 0.7\times 0.75=0.42$$

$$P(\xi=1)=P(A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}\cup\overline{A_1}A_2\overline{A_3}\cup\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3)=0.2\times 0.7\times 0.75+0.8\times 0.3\times 0.75+0.8\times 0.7\times 0.25=0.425$$

$$P(\xi=2)=P(A_1A_2\overline{A_3}\cup A_1\overline{A_2}A_3\cup\overline{A_1}A_2A_3)=0.2\times 0.3\times 0.75+0.2\times 0.7\times 0.25+0.8\times 0.3\times 0.25=0.14$$

$$P(\xi=3)=P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3})=0.2\times 0.3\times 0.25=0.015$$

Bảng phân phối xác suất của ξ

ξ	0	1	2	3
P	0.42	0.425	0.14	0.015

b) $E\xi=0.75, D\xi=0.5575$; $P(\xi=2\,|\,\xi\ge 1)=\dfrac{P(\xi=2\cap\xi\ge 1)}{P(\xi\ge 1)}=\dfrac{0.14}{0.58}=0.24$ — 1đ

Câu 2.31

Cho hai biến ngẫu nhiên độc lập ξ,η có bảng phân phối xác suất — 2đ

ξ	-1	0	2	4
P	0,2	0,3	0,1	0,4

η	-1	1	3	5	7
P	0,1	0,1	0,2	0,4	0,2

a) Lập bảng phân phối xác suất đồng thời cho ξ,η.

b) Cho $X=\xi-2\eta$. Tính EX, DX và $P(X\le 2)$.

a) Bảng phân phối xác suất đồng thời của ξ,η — 1đ

ξ \ η	-1	1	3	5	7
-1	0.02	0.02	0.04	0.04	0.02

0	0.03	0.03	0.06	0.12	0.06
2	0.01	0.01	0.02	0.04	0.02
4	0.04	0.04	0.08	1.6	0.08

b) $\text{EX} = E\xi + 2E\eta = 1.6 - 2\times 4 = -6.4$

$DX = D\xi + 4D\eta = 4.44 + 4\times 5.8 = 27.64$ — 1đ

Câu 2.32

Câu hỏi: Cho X, Y là các biến ngẫu nhiên có hàm mật động đồng thời $f(x,y)=\begin{cases} c(x+y) & \text{khi } 0<x<3, x<y<x+2 \\ 0 & \text{nếu trái lại}\end{cases}$ a) Tìm c. Tính các xác suất $P\left(X<1, Y<2\right)$, $P\left(1<X<2\right)$. b) Tính EX, DX .	2đ
a) $c=\frac{1}{24}$, $P(X<1, Y<2)=\int_0^1\int_x^2 \frac{1}{24}(x+y)dxdy = 0.104; P(1<X<2)=\int_1^2\int_x^{x+2}\frac{1}{24}(x+y)dxdy = 0.33$	1đ
b) $\text{EX}=\int_0^3\int_x^{x+2} x\frac{1}{24}(x+y)dxdy = 1.875$ $\text{EX}^2=\int_0^3\int_x^{x+2} x^2\frac{1}{24}(x+y)dxdy = 4.125 \to DX = \text{EX}^2-(\text{EX})^2 = 0.609$	1đ

Câu 2.33

Cho X, Y là các biến ngẫu nhiên có hàm mật động đồng thời $f(x,y)=\begin{cases} ce^{-2x-3y} & \text{khi } 0<x, x<y \\ 0 & \text{nếu trái lại}\end{cases}$ a) Tìm c. Tính các xác suất $P\left(X<2, Y<2\right)$, $P\left(Y>3\right)$. b) Tính kì vọng, phương sai của X.	2đ
a) $c=15$ $P(X<2, Y<2)=\int_0^2\int_x^2 15e^{-2x-3y}dxdy = 1+\frac{3}{2}e^{-10}-\frac{5}{2}e^{-6} = 0.994$ $P(Y>3)=\int_1^2\int_3^{+\infty}15e^{-2x-3y}dxdy = 0.00012$	1đ
b) $\text{EX}=\int_0^{+\infty}\int_x^{+\infty} x15e^{-2x-3y}dxdy = \frac{1}{5} = 0.2$ $\text{EX}^2=\int_0^{+\infty}\int_x^{+\infty} x^2 15e^{-2x-3y}dxdy = \frac{2}{25} = 0.08 \to \text{DX}=\text{EX}^2-(\text{EX})^2 = 0.04$	1đ

Câu 2.34

Tuổi thọ (năm) của một bóng đèn là biến ngẫu nhiên X có hàm mật độ $f(x)=\begin{cases} kx^2(4-x) & \text{khi } x\in[0;4] \\ 0 & \text{khi } x\notin[0;4]\end{cases}$. a) Tìm hằng số k và tính tuổi thọ trung bình của bóng đèn. b) Tính xác suất tuổi thọ của bóng đèn không quá 1 năm.	2đ

a) Do $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ nên $1 = \int_0^4 kx^2(4-x)dx = k.\frac{64}{3} \Rightarrow k = \frac{3}{64}$. Tuổi thọ trung bình của bóng đèn là $EX = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \frac{3}{64}\int_0^4 x^3(4-x)dx = \frac{3}{64}.\frac{256}{5} = \frac{12}{5}$=2,4 (năm).	1đ
b) Xác suất tuổi thọ của bóng đèn không quá 1 năm là $P(0 \le X \le 1) = \int_0^1 f(x)dx = \frac{3}{64}\int_0^1 x^2(4-x)dx = \frac{13}{256} \approx 0,051$.	1đ

Câu 2.35 3 ý

Một thùng hàng có 5 sản phẩm cũ và 10 sản phẩm mới. Lấy ngẫu nhiên đồng thời ra 2 sản phẩm. Gọi *X* là số sản phẩm mới trong 2 sản phẩm được lấy ra. a) Lập bảng phân bố xác suất của *X*. b) Tính giá trị trung bình của *X* và xác suất có ít nhất 1 sản phẩm mới được lấy ra.	2đ
a) Ta có bảng phân bố X: 0, 1, 2 P: $\frac{10}{105}$, $\frac{50}{105}$, $\frac{45}{105}$	1đ
b) $EX = \sum_{i=0}^{2} x_i p_i = 0.\frac{10}{105} + 1.\frac{50}{105} + 2.\frac{45}{105} = \frac{140}{105} = \frac{4}{3}$; $P(X \ge 1) = \frac{95}{105} = \frac{19}{21}$.	1đ

Câu 2.36

Tuổi thọ (năm) của một thiết bị là biến ngẫu nhiên *X* có hàm mật độ $f(x) = \begin{cases} kx^3(4-x)^2 & \text{khi } x \in [0;4] \\ 0 & \text{khi } x \notin [0;4] \end{cases}$. a) Tìm *k*. Tính tuổi thọ trung bình của thiết bị đó. b) Nhà sản xuất bảo hành thiết bị đó trong vòng 1 năm. Tính tỷ lệ số thiết bị bị hỏng trong thời gian còn được bảo hành.	2đ
a) Do $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ nên $1 = \int_0^4 kx^3(4-x)^2 = \frac{1024}{15}.k \Rightarrow k = \frac{15}{1024}$. Tuổi thọ trung bình của thiết bị là $EX = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \frac{15}{1024}\int_0^4 x^4(4-x)^2 = \frac{16}{7} \approx 2,286$ (năm).	1đ
b) Thiết bị bị hỏng trong thời gian còn được bảo hành nghĩa là tuổi thọ không quá 1 năm. Ta có $P(X \le 1) = \int_0^1 f(x)dx = \frac{15}{1024}\int_0^1 x^3(4-x)^2 dx = \frac{77}{2048} \approx 0,0376 = 3,76\%$.	1đ

Câu 2.37

Độ bền (vạn km) của một loại lốp ô tô là biến ngẫu nhiên *X* có hàm mật độ $f(x) = \begin{cases} kx^3(6-x)^2 & \text{khi } x \in [0;6] \\ 0 & \text{khi } x \notin [0;6] \end{cases}$. a) Tìm *k*. Tính tỷ lệ số lốp có độ bền trên 4 vạn km. b) Tính độ bền trung bình của loại lốp đó.	2đ
a) Do $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ nên $1 = \int_0^6 kx^3(6-x)^2dx = \frac{3888}{5}.k \Rightarrow k = \frac{5}{3888}$. Tỷ lệ lốp có độ bền trên 4 vạn km là	1đ

$P(X>4)=\int_4^6 f(x)dx=\frac{5}{3888}\int_4^6 x^3(6-x)^2dx=\frac{233}{729}\approx 0,3196=31,96\%$.	
b) Độ bền trung bình của lốp là $EX=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\frac{5}{3888}\int_0^6 x^4(6-x)^2dx=\frac{24}{7}\approx 3,43$ (vạn km).	1đ

Câu 2.38

Hàm mật độ của biến ngẫu nhiên *X* có dạng $$f(x)=\begin{cases} ax^3(2-x) & \text{khi } x\in[0;2] \\ 0 & \text{khi } x\notin[0;2] \end{cases}.$$ a) Tìm hằng số *a* và tính $P(0\le X\le 1)$. b) Tính kỳ vọng và phương sai của *X*.	2đ
a) Do $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$ nên $1=\int_0^2 ax^3(2-x)dx=\frac{8}{5}.a\Rightarrow a=\frac{5}{8}$. $P(0\le X\le 1)=\int_0^1 f(x)dx=\frac{5}{8}\int_0^1 x^3(2-x)dx=\frac{3}{16}$.	1đ
b) $\text{EX}=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\frac{5}{8}\int_0^2 x^4(2-x)dx=\frac{4}{3}$. $\text{EX}^2=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2f(x)dx=\frac{5}{8}\int_0^2 x^5(2-x)dx=\frac{40}{21}$. $VX=EX^2-(EX)^2=\frac{40}{21}-\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{8}{63}$.	1đ

Câu 2.39

Khả năng chịu tải phân bố (tấn/m) của một loại dầm bê tông đúc sẵn là biến ngẫu nhiên *X* có hàm mật độ $$f(x)=\begin{cases} k(x-4)(8-x) & \text{khi } x\in[4;8] \\ 0 & \text{khi } x\notin[4;8] \end{cases}.$$ a) Tìm hằng số *k* và tính khả năng chịu tải phân bố trung bình của loại dầm bê tông kể trên. b) Tính tỷ lệ số dầm bê tông có khả năng chịu tải phân bố lớn hơn 5 tấn/m. Người ta mua 3 cái dầm bê tông thuộc loại trên. Tính xác suất ít nhất 2 cái có khả năng chịu tải phân bố lớn hơn 5 tấn/m.	2đ
a) Do $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$ nên $1=\int_4^8 k(x-4)(8-x)dx=k.\frac{32}{3}\Rightarrow k=\frac{3}{32}$. Khả năng chịu tải phân bố trung bình của loại dầm bê tông đó là $\text{EX}=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\frac{3}{32}\int_4^8 x(x-4)(8-x)dx=6$ (tấn/m).	1đ
b) Tỷ lệ dầm bê tông có khả năng chịu tải phân bố lớn hơn 5 tấn/m là $P(X>5)=\int_5^{+\infty} f(x)dx=\frac{3}{32}\int_5^8 (x-4)(8-x)dx=\frac{27}{32}=84.375\%$. Xác suất ít nhất 2 dầm có khả năng chịu tải phân bố lớn hơn 5 tấn/m là	1đ

$3\times\left(\frac{27}{32}\right)^2\left(1-\frac{27}{32}\right)+\left(\frac{27}{32}\right)^3\approx 0.9344$.	

Câu 2.40

Tuổi thọ X của một loại đèn điện tử do nhà máy sản xuất ra là đại lượng ngẫu nhiên có phân bố chuẩn với trung bình $\mu=1500$ và $\sigma=150$ giờ. Nếu thời gian sử dụng thực tế chỉ đạt dưới 1200 giờ thì nhà máy phải bảo hành miễn phí. a) Tính tỷ lệ sản phẩm phải bảo hành miễn phí b) Nếu muốn tỷ lệ bảo hành miễn phí chỉ còn 1% thì nhà máy phải quy định thời gian bảo hành là bao nhiêu giờ. Cho biết: $\Phi_0(2)=0,4772;\Phi_0(2,33)=0,49;\Phi_0(\infty)=0,5$	2 đ
a) $P(X<1200)=\Phi_0\left(\frac{1200-1500}{150}\right)-\Phi_0(-\infty)=-\Phi_0(2)+0,5=-0,4772+0,5=0,0228$	1đ
b)Gọi t là thời gian quy định bảo hành để tỷ lệ bảo hành là 1%. $P(X<t)=0,01\Leftrightarrow\Phi_0\left(\frac{t-1500}{150}\right)-\Phi_0(-\infty)=0,01\Leftrightarrow\Phi_0\left(\frac{t-1500}{150}\right)=-0,49$ $\Rightarrow\frac{1500-t}{150}=2,33\Leftrightarrow t=1150,5$ giờ.	1 đ

Câu 2.41

Thời gian hoạt động tốt X (không phải sửa chữa) của một loại tivi là đại lượng ngẫu nhiên có phân bố chuẩn với trung bình là 4000 giờ và độ lệch chuẩn 350 giờ. Giả thiết mỗi ngày người ta sử dụng trung bình là 10 giờ và thời gian bảo hành là 1 năm (365 ngày). a) Tính tỷ lệ tivi phải bảo hành trong thời hạn trên. b) Phải nâng chất lượng tivi bằng cách tăng thời gian hoạt động tốt trung bình của nó lên bao nhiêu giờ để tỷ lệ tivi phải bảo hành vẫn như trên song thời gian bảo hành là 2 năm. Cho biết: $\Phi_0(11,42)=0,3413;\Phi_0(\infty)=0,5;\Phi_0(1)=0,3413$	2 đ
a) Thời gian hoạt động được bảo hành là: $X=10x365=3650$ (giờ) Tỷ lệ phải bảo hành loại tivi trên là: $P(X<3650)=\Phi_0\left(\frac{3650-4000}{350}\right)-\Phi_0(-\infty)=\Phi_0(-1)+0,5=-0,3413+0,5=0,1587$	1 đ
b)Thời gian hoạt động trung bình là a $P(X<7300)=\Phi_0\left(\frac{7300-a}{350}\right)-\Phi_0(-\infty)=\Phi_0\left(\frac{7300-a}{350}\right)+0,5=0,1587$ $\Rightarrow\Phi_0\left(\frac{7300-a}{350}\right)=-0,3413=\Phi_0(-1)\Rightarrow\frac{7300-a}{350}=-1\Rightarrow a=7650$	1 đ

.	

Câu 2.42

Đường kính của một loại chi tiết do một máy sản xuất có phân phối chuẩn, kỳ vọng 20mm, phương sai $(0{,}2\ \text{mm})^2$. Lấy ngẫu nhiên một chi tiết máy. Tính xác suất để: a) Có đường kính trong khoảng từ 19,9mm đến 20,3mm. b) Có đường kính sai khác kỳ vọng không quá 0,3mm. Cho biết: $\Phi_0(1{,}5) = 0{,}4332;\ \Phi_0(0{,}5) = 0{,}1915$	2 đ
a) Gọi X là đường kính chi tiết lấy ra thì $X \sim N(20;\, 0{,}2^2)$. Ta có $P = P(19{,}9 < X < 20{,}3) = P\left(\frac{19{,}9-20}{0{,}2} < \frac{X-20}{0{,}2} < \frac{20{,}3-20}{0{,}2}\right)$ $= \Phi_0(\frac{20{,}3-20}{0{,}2}) - \Phi_0(\frac{19{,}9-20}{0{,}2}) = \Phi_0(1{,}5) - \Phi_0(-0{,}5) = 0{,}4332 + 0{,}1915 = 0{,}6247.$	1 đ
b) $P = P\left\{\lvert X-20\rvert \le 0{,}3\right\} = P\left\{-0{,}3 \le X-20 \le 0{,}3\right\}$ $= P\left\{\frac{-0{,}3}{0{,}2} < \frac{X-20}{0{,}2} < \frac{0{,}3}{0{,}2}\right\} = \Phi_0(1{,}5) - \Phi_0(-1{,}5) = 2\Phi_0(1{,}5) = 2.0{,}4332 = 0{,}8664$	1 đ

Câu 2.43

Một nữ công nhân phụ trách 3 máy dệt tự động. Xác suất để các máy 1, 2, 3 cần đến sự điều chỉnh của chị trong khoảng thời gian T tương ứng là 0,1; 0,2; 0,2. Gọi X là số máy cần sự điều chỉnh trong khoảng thời gian T. Tìm phân bố xác suất của X	2 đ
Đặt A_i là biến cố máy thứ i cần sự điều chỉnh trong khoảng thời gian T, i = 1, 2, 3 X là số máy cần sự điều chỉnh trong khoảng thời gian T, X là BNN rời rạc nhận các giá trị 0, 1, 2, 3 $P(X=0) = P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3) = P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3) = 0{,}9.0{,}8.0{,}8 = 0{,}576$ $P(X=1) = P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3) = 0{,}352$ $P(X=2) = P(A_1A_2\overline{A}_3 + A_1\overline{A}_2A_3 + \overline{A}_1A_2A_3) = 0{,}068$ $P(X=3) = P(A_1A_2A_3) = 0{,}004$ Bảng phân bố xác suất của X <table><tr><td>X</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>P</td><td>0,576</td><td>0,352</td><td>0.068</td><td>0,004</td></tr></table>	2 đ

Câu 2.44

Cho véc tơ ngẫu nhiên (X,Y) có hàm mật độ $f(x,y) = \begin{cases} k(x+2xy), & (x,y) \in D = (0,3)\times(0,1) \\ 0, & (x,y) \notin D = (0,3)\times(0,1) \end{cases}$ a) Tính hàm phân bố đồng thời của (X,Y). b) Hỏi X và Y có độc lập hay không.	2đ

a) Ta có $1=\int\limits_{R^2} f(x,y)dxdy = k\int\limits_0^3\left(\int\limits_0^1 (x+2xy)dy\right)dx = 9$ dẫn đến $k=\dfrac{1}{9}$ Hàm phân bố $F(x,y)=\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} f(u,v)dudv$ - Nếu $x\le 0$ hoặc $y\le 0$ thì $F(x,y)=0$ - Nếu $\begin{cases}0<x<3\\ y\ge 1\end{cases}$ thì $F(x,y)=\dfrac{1}{9}\int\limits_0^x\left(\int\limits_0^1 (u+2uv)dv\right)du=\dfrac{1}{9}\int\limits_0^1(1+2v)dv\int\limits_0^x udu=\dfrac{x^2}{9}$ - Nếu $\begin{cases}x\ge 3\\ 0<y<1\end{cases}$ thì $F(x,y)=\dfrac{1}{9}\int\limits_0^3\left(\int\limits_0^y (u+2uv)dv\right)du=\dfrac{1}{9}\int\limits_0^y(1+2v)dv\int\limits_0^3 udu=\dfrac{1}{2}\left(y+y^2\right)$ - Nếu $\begin{cases}x\ge 3\\ y\ge 1\end{cases}$ thì $F(x,y)=1$	1đ
b) Hàm mật độ thành phần Nếu $0\le x\le 3$, $f_X(x)=\dfrac{1}{9}\int\limits_0^1(x+2xy)dy=\dfrac{1}{9}x\int\limits_0^1(1+2y)dy=\dfrac{2x}{9}$ Nếu $\left[\begin{array}{l}x<0\\ x>3\end{array}\right.$, $f_X(x)=0$ Nếu $0\le y\le 1$, $f_Y(y)=\dfrac{1}{9}\int\limits_0^3(x+2xy)dx=\dfrac{1}{9}(1+2y)\int\limits_0^3 xdx=\dfrac{1+2y}{2}$ Nếu $\left[\begin{array}{l}y<0\\ y>3\end{array}\right.$, $f_Y(y)=0$ Do đó X, Y độc lập.	1đ

Câu 2.45

Cho véc tơ ngẫu nhiên (X,Y) có hàm mật độ $f(x,y)=\begin{cases}k\left(x^2+3xy^2\right), & (x,y)\in D=(0,2)\times(0,1)\\ 0, & (x,y)\notin D=(0,2)\times(0,1)\end{cases}$ Tìm hệ số tương quan của X, Y.	2đ
- Tính k $1=k\int\limits_0^2\left(\int\limits_0^1\left(x^2+3xy^2\right)dy\right)dx=k\int\limits_0^2\left(x^2+x\right)dx=\dfrac{14}{3}k$ dẫn đến $k=\dfrac{3}{14}$ - Tính EX $EX=\dfrac{3}{14}\int\limits_0^2\left(\int\limits_0^1\left(x^3+3x^2y^2\right)dy\right)dx=\dfrac{3}{14}\int\limits_0^2\left(x^3+x^2\right)dx=\dfrac{3}{14}.\dfrac{20}{3}=\dfrac{10}{7}$	2đ

- Tính EX^2

$$EX^2=\frac{3}{14}\int_0^2\left(\int_0^1\left(x^4+3x^3y^2\right)dy\right)dx=\frac{3}{14}\int_0^2\left(x^4+x^3\right)dx=\frac{3}{14}.\frac{52}{5}=\frac{78}{35}$$

- Tính EY

$$EY=\frac{3}{14}\int_0^2\left(\int_0^1\left(x^2y+3xy^3\right)dy\right)dx=\frac{3}{14}\int_0^2\left(\frac{x^2}{2}+\frac{3x}{4}\right)dx=\frac{3}{14}.\frac{17}{6}=\frac{17}{28}$$

- Tính EX^2

$$EX^2=\frac{3}{14}\int_0^2\left(\int_0^1\left(x^2y^2+3xy^3\right)dy\right)dx=\frac{3}{14}\int_0^2\left(\frac{x^2}{3}+\frac{3x}{4}\right)dx=\frac{3}{14}.\frac{43}{18}=\frac{129}{252}$$

- Tính EXY

$$EY=\frac{3}{14}\int_0^2\left(\int_0^1\left(x^3y+3x^2y^3\right)dy\right)dx=\frac{3}{14}\int_0^2\left(\frac{x^3}{2}+\frac{3x^2}{4}\right)dx=\frac{3}{14}.7=\frac{3}{2}$$

- $$\rho_{X,Y}=\frac{\frac{3}{2}-\frac{10}{7}.\frac{17}{28}}{\sqrt{\frac{78}{35}-\left(\frac{10}{7}\right)^2}\sqrt{\frac{129}{252}-\left(\frac{17}{28}\right)^2}}=0,667$$

Câu 2.46

Véc tơ ngẫu nhiên (X,Y) có hàm mật độ đồng thời

2đ

$$f(x,y)=\begin{cases}k\left(x^2+y\right), & (x,y)\in D=\left\{(x,y)\,|\,|x|\le 1, 0\le y\le 1-x^2\right\}\\ 0, & (x,y)\notin D=\left\{(x,y)\,|\,|x|\le 1, 0\le y\le 1-x^2\right\}\end{cases}$$

a) Xác định hằng số k. Tính kỳ của X.

b) Tính xác suất $P\left(0\le X\le\frac{1}{2}\right)$.

- Tính k

1đ

$$1=k\int_{-1}^1\left(\int_0^{1-x^2}\left(x^2+y\right)dy\right)dx=k\int_{-1}^1\left(x^2\left(1-x^2\right)+\frac{1}{2}\left(1-x^2\right)^2\right)dx=\frac{4}{5}k$$

dẫn đến $k=\frac{5}{4}$

- Tính kỳ vọng

$$EX=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dxdy=\frac{5}{4}\int_{-1}^1\left(\int_0^{1-x^2}x\left(x^2+y\right)dy\right)dx$$

$$=\frac{5}{4}\int_{-1}^1\left(x^3\left(1-x^2\right)+x\frac{\left(1-x^2\right)^2}{2}\right)dx$$

dẫn đến EX=0 (hàm lẻ).

$P\left(0\le X\le \frac{1}{2}\right)=\frac{5}{4}\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^{1-x^2}\left(x^2+y\right)dy\right)dx=\frac{5}{4}\int_0^{\frac{1}{2}}\left(x^2\left(1-x^2\right)+\frac{1}{2}\left(1-x^2\right)^2\right)dx$ $=\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}\left(1-x^4\right)dx=\frac{79}{256}$	1đ

Câu 2.47

Cho biến ngẫu nhiên liên tục X có hàm mật độ $f(x)=\begin{cases} a\cos^2 x, & x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\\ 0, & x\notin\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\end{cases}$ a) Tìm hệ số a, và tính xác suất để trong 3 phép thử độc lập, có 2 lần X nhận giá trị trong khoảng $\left(0;\frac{\pi}{4}\right)$. b) Tìm hàm phân bố $F(x)$ của X.	2đ
a) Tính hệ số a: $1=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a\cos^2 xdx=a\pi$ dẫn đến $a=\frac{2}{\pi}$ H: “X nhận giá trị trong $\left(0;\frac{\pi}{4}\right)$” , $P(H)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 xdx=\frac{\pi+2}{4\pi}$ Xác suất trong 3 phép thử độc lập, có 2 lần H xảy ra là $P=C_3^2\left(\frac{\pi+2}{4\pi}\right)^2\left(1-\frac{\pi+2}{4\pi}\right)=3\left(\frac{\pi+2}{4\pi}\right)^2\frac{3\pi-2}{4\pi}$	1đ
b) Hàm phân bố $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ - Nếu $x\le-\frac{\pi}{2}$, $F(x)=0$; Nếu $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$: $F(x)=\frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x}\cos^2 tdt=\frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x}\frac{1+\cos 2t}{2}dt=\frac{1}{\pi}\left(x+\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\sin 2x\right)$ - Nếu $x\ge\frac{\pi}{2}$, $F(x)=1$	1đ

Câu 2.48

Cho đại lượng ngẫu nhiên X có phân bố chuẩn với kỳ vọng $\mu=10$ và độ lệch tiêu chuẩn $\sigma=2$.	2đ

a) Tính kỳ vọng, phương sai của đại lượng ngẫu nhiên $Y = 2X - 10$. b) Tính xác suất $P\left(\frac{1}{23} < Z < \frac{1}{21}\right)$ với $Z = \frac{1}{2\left(\lvert X\rvert + 1\right)}$. Cho biết $\Phi_0\left(0,25\right) = 0,0987$.	
$EY = 2EX - 10 = 10,\quad DY = 4DX = 16$	1đ
$P\left(\frac{1}{23} < Z < \frac{1}{21}\right) = P\left(\frac{1}{23} < \frac{1}{2\left(\lvert X\rvert+1\right)} < \frac{1}{21}\right) = P\left(\frac{21}{2} < \lvert X\rvert + 1 < \frac{23}{2}\right)$ b) $= P\left(\frac{19}{2} < \lvert X\rvert < \frac{21}{2}\right) = P\left(-\frac{21}{2} < X < -\frac{19}{2}\right) + P\left(\frac{19}{2} < X < \frac{21}{2}\right)$ $= 0 + P\left(-\frac{1}{4} < \frac{X-10}{2} < \frac{1}{4}\right) = 2\Phi_0\left(0,25\right) = 0,1974$	1đ

Câu 2.49

Trong một hộp có 10 sản phẩm trong đó có 6 chính phẩm. Lấy ngẫu nhiên từ hộp ra 2 sản phẩm. Gọi X là số chính phẩm trong 2 sản phẩm lấy ra. a) Lập bảng phân bố xác suất của X. b) Tìm phân bố xác suất và tính kỳ vọng của X.	2 đ
a) X: 0, 1, 2 P: $\frac{C_4^2}{C_{10}^2} = \frac{2}{15}$, $\frac{C_6^1 C_4^1}{C_{10}^2} = \frac{8}{15}$, $\frac{C_6^2}{C_{10}^2} = \frac{5}{15}$	1đ
b) $F(X) = \begin{cases} 0 & \text{khi } x \le 0 \\ 2/5 & \text{khi } 0 < x \le 1 \\ 10/5 & \text{khi } 1 < x \le 2 \\ 1 & \text{khi } x > 2 \end{cases}$ Kỳ vọng $EX = 0.\frac{2}{15} + 1.\frac{8}{15} + 2.\frac{5}{15} = \frac{6}{3}$	1 đ