Chương 4. ĐƯỜNG ĐI NGẮN NHẤT

Bài toán tìm đường đi ngắn nhất & Thuật toán Dijkstra

ThS. Nguyễn Chí Hiếu

2019

NỘI DUNG

Các khái niệm cơ bản

Định nghĩa 1 (Đồ thị có trọng số)

Cho đồ thị $G = (V, E)$, mỗi cạnh $e \in E$ được gán một giá trị w. Đây chính là **trọng số** *(weight)* của một cạnh trong đồ thị.

- Trọng số biểu diễn các giá trị tương ứng với khoảng cách, thời gian, khối lượng, ...
- Một số trường hợp đặc biệt trọng số có thể là số âm.

Các khái niệm cơ bản

Định nghĩa 2 (**Đường đi ngắn nhất giữa hai đỉnh**)

Cho đồ thị $G = (V, E)$, xét hai đỉnh $i, j \in V$ với i là đỉnh kề trước của j. Khi đó, đường đi ngắn nhất đến đỉnh j được định nghĩa bởi công thức:

$$\boxed{d[j] = min\left\{d[j], d[i] + w[i][j]\right\}.} \tag{1}$$

trong đó, $w[i][j]$ là trọng số của cạnh nối hai đỉnh i và j.

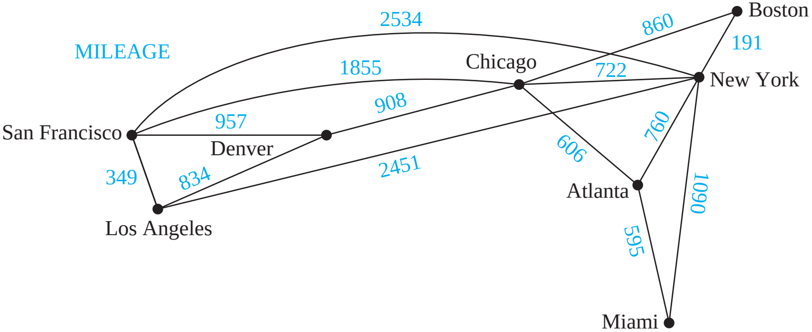
Tìm đường đi ngắn nhất?

Các thuật toán sẽ cập nhật đường đi ngắn nhất theo công thức 1 để tìm đường đi ngắn nhất giữa hai đỉnh trong đồ thị.

Các khái niệm cơ bản

Ví dụ 1

Cho đồ thị G_1 biểu diễn đường bay [Hình 1] giữa các thành phố. Trọng số của các cạnh trong đồ thị chính là *khoảng cách* tương ứng với mỗi đường bay.

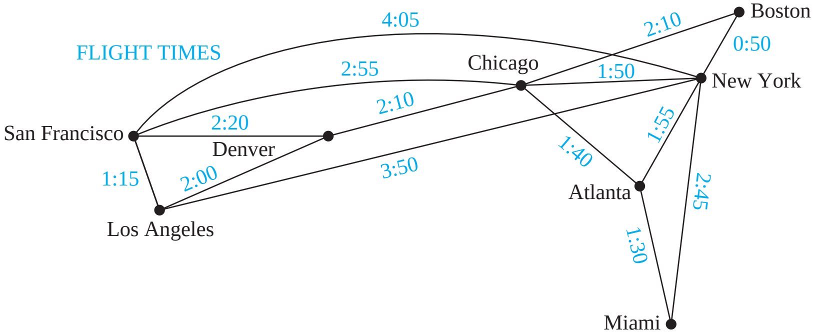


Hình 1: Đồ thị G_1 biểu diễn khoảng cách của đường bay giữa các thành phố.

Các khái niệm cơ bản

Ví dụ 2

Cho đồ thị G_2 biểu diễn đường bay [Hình 2] giữa các thành phố. Trọng số của các cạnh trong đồ thị chính là *thời gian bay* tương ứng với mỗi đường bay.



Hình 2: Đồ thị G_2 biểu diễn thời gian bay của đường bay giữa các thành phố.

Thuật toán Dijkstra [1]

Ý tưởng

- Dựa vào việc **gán nhãn** đường đi ngắn nhất từ *đỉnh bắt đầu* đến *đỉnh đang xét*.
- Đỉnh kế tiếp được chọn là đỉnh **có nhãn chứa đường đi ngắn nhất** trong các đỉnh chưa xét.
- Thuật toán là một dãy các bước lặp.
  - Thêm một đỉnh $i \in V \setminus S$ vào tập S (*tập hợp đánh dấu các đỉnh thuộc đường đi ngắn nhất*) và thỏa điều kiện đường đi ngắn nhất.
  - Tìm các đỉnh $j \in V \setminus S$ kề với i và cập nhật nhãn cho các đỉnh này.

[1] Edsger Dijkstra (1930–2002)

Thuật toán Dijkstra

Thuật toán 1: Dijkstra(G, start, end)

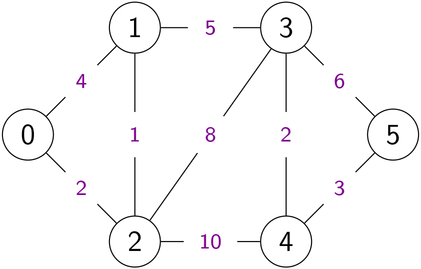
- Đầu vào: đồ thị G, đỉnh start, đỉnh end.
- Đầu ra: đường đi ngắn nhất từ đỉnh start → end.

```
foreach i ∈ V
    d[i] ← ∞
    p[i] ← NO_PATH
d[start] ← 0
S ← ∅
while end ∉ S
    foreach j ∉ S
        if d[j] < d[i]
            i = j
    S ← S ∪ {i}
    foreach edge(i, j) ∈ E
        if j ∉ S
            d[j] ← min{d[j], d[i] + w[i][j]}
            p[i] ← j
```

Thuật toán Dijkstra

Ví dụ 3

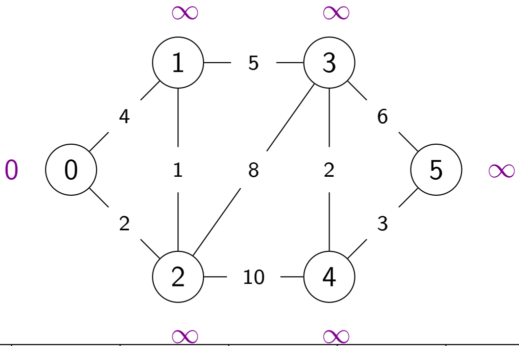
Cho đồ thị $G = (V, E)$, tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh 0 đến đỉnh 5.



Hình 3: Đồ thị G.

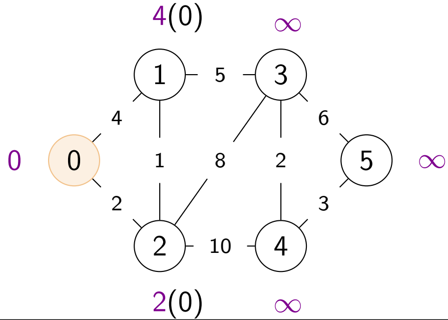
Thuật toán Dijkstra

- Bước khởi tạo: gán nhãn đường đi đến tất cả các đỉnh là vô cực (trừ đỉnh 0).



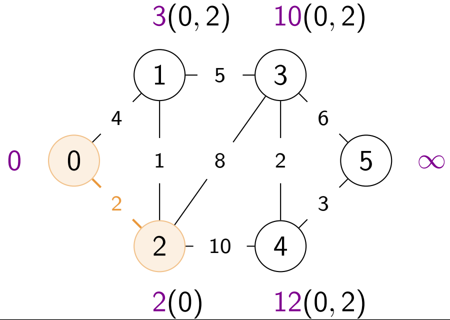
	0	1	2	3	4	5
Khởi tạo	0,0	$\infty, -1$	$\infty, -1$	$\infty, -1$	$\infty, -1$	$\infty, -1$

Thuật toán Dijkstra



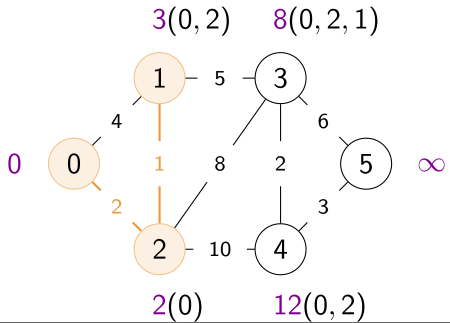
	0	1	2	3	4	5
Khởi tạo	0,0	$\infty, -1$	$\infty, -1$	$\infty, -1$	$\infty, -1$	$\infty, -1$
1	-	4,0	2,0*	$\infty, 0$	$\infty, 0$	$\infty, 0$

Thuật toán Dijkstra



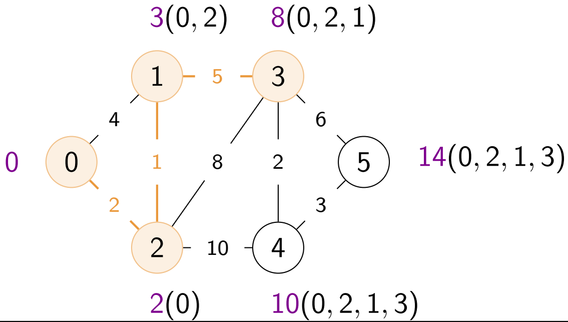
	0	1	2	3	4	5
Khởi tạo	0,0	$\infty, -1$	$\infty, -1$	$\infty, -1$	$\infty, -1$	$\infty, -1$
1	-	4,0	2,0*	$\infty, 0$	$\infty, 0$	$\infty, 0$
2	-	3,2*	-	10,2	12,2	$\infty, 2$

Thuật toán Dijkstra



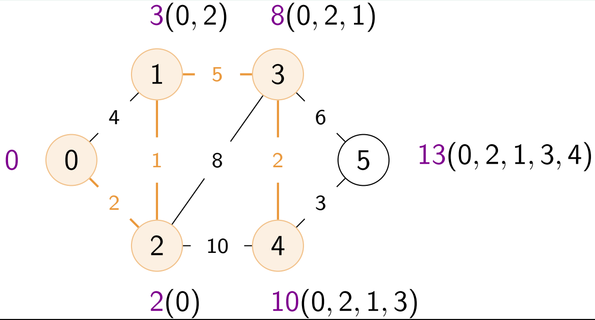
	0	1	2	3	4	5
Khởi tạo	0,0	$\infty, -1$	$\infty, -1$	$\infty, -1$	$\infty, -1$	$\infty, -1$
1	-	4,0	2,0*	$\infty, 0$	$\infty, 0$	$\infty, 0$
2	-	3,2*	-	10,2	12,2	$\infty, 2$
3	-	-	-	8,1*	12,2	$\infty, 1$

Thuật toán Dijkstra



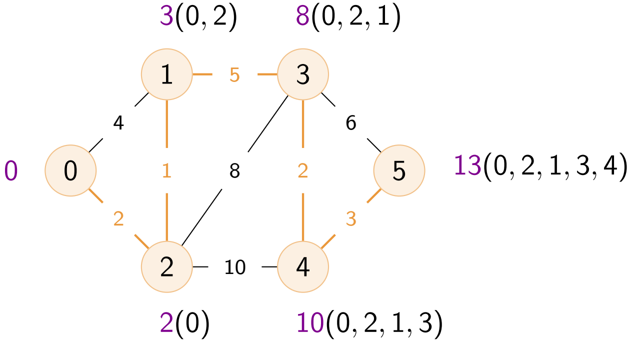
	0	1	2	3	4	5
Khởi tạo	0,0	$\infty, -1$	$\infty, -1$	$\infty, -1$	$\infty, -1$	$\infty, -1$
1	-	4,0	2,0*	$\infty, 0$	$\infty, 0$	$\infty, 0$
2	-	3,2*	-	10,2	12,2	$\infty, 2$
3	-	-	-	8,1*	12,2	$\infty, 1$
4	-	-	-	-	10,3*	14,3

Thuật toán Dijkstra



	0	1	2	3	4	5
Khởi tạo	0,0	$\infty, -1$	$\infty, -1$	$\infty, -1$	$\infty, -1$	$\infty, -1$
1	-	4,0	2,0*	$\infty, 0$	$\infty, 0$	$\infty, 0$
2	-	3,2*	-	10,2	12,2	$\infty, 2$
3	-	-	-	8,1*	12,2	$\infty, 1$
4	-	-	-	-	10,3*	14,3
5	-	-	-	-	-	13,4

Thuật toán Dijkstra



- Đường đi ngắn nhất từ $0 \rightarrow 5$: $(0, 2, 1, 3, 4, 5)$.
- Chiều dài đường đi ngắn nhất: 13.

Thuật toán Dijkstra

Độ phức tạp của thuật toán

- Trường hợp thuật toán Dijkstra không có sử dụng các cấu trúc dữ liệu, độ phức tạp $\mathcal{O}\left(n^2\right)$ với $n = |V|$.
- Trường hợp thuật toán Dijkstra có sử dụng cấu trúc dữ liệu *Binary Heap*, độ phức tạp $\mathcal{O}\left(m + nlogn\right)$ với $n = |V|$ và $m = |E|$.

Giới thiệu bài toán

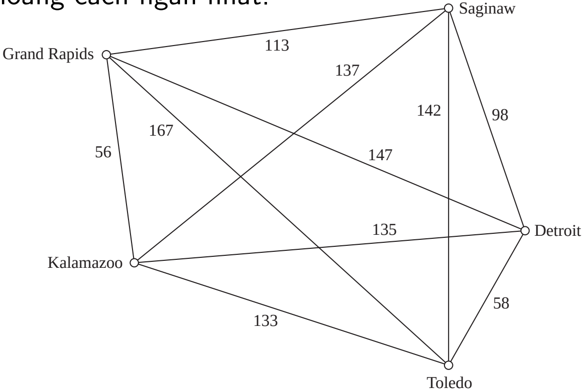
Bài toán đường đi người bán hàng *(Travelling salesman person-TSP)*

Một người bán hàng muốn đi qua tất cả n thành phố, mỗi thành phố chỉ một lần và quay về nơi xuất phát. Tìm chu trình di chuyển với *khoảng cách ngắn nhất*.

Bài toán đường đi người bán hàng

Ví dụ 4

Cho đồ thị G biểu diễn khoảng cách giữa các thành phố. Tìm chu trình di chuyển với khoảng cách ngắn nhất.



Hình 4: Đồ thị G biểu diễn khoảng cách giữa các thành phố.

Bài toán đường đi người bán hàng

Route	***Total Distance (miles)***
Detroit–Toledo–Grand Rapids–Saginaw–Kalamazoo–Detroit	610
Detroit–Toledo–Grand Rapids–Kalamazoo–Saginaw–Detroit	516
Detroit–Toledo–Kalamazoo–Saginaw–Grand Rapids–Detroit	588
Detroit–Toledo–Kalamazoo–Grand Rapids–Saginaw–Detroit	458
Detroit–Toledo–Saginaw–Kalamazoo–Grand Rapids–Detroit	540
Detroit–Toledo–Saginaw–Grand Rapids–Kalamazoo–Detroit	504
Detroit–Saginaw–Toledo–Grand Rapids–Kalamazoo–Detroit	598
Detroit–Saginaw–Toledo–Kalamazoo–Grand Rapids–Detroit	576
Detroit–Saginaw–Kalamazoo–Toledo–Grand Rapids–Detroit	682
Detroit–Saginaw–Grand Rapids–Toledo–Kalamazoo–Detroit	646
Detroit–Grand Rapids–Saginaw–Toledo–Kalamazoo–Detroit	670
Detroit–Grand Rapids–Toledo–Saginaw–Kalamazoo–Detroit	728

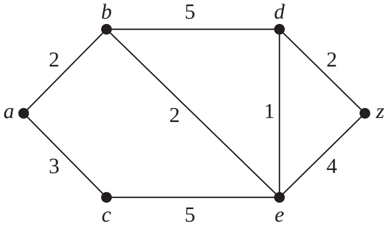
Bảng 1: Bảng liệt kê các chu trình và khoảng cách tương ứng.

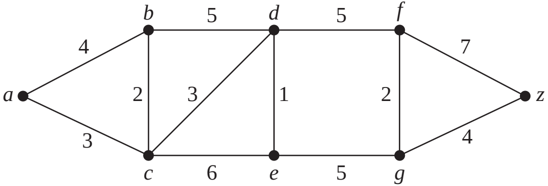
Bài toán đường đi người bán hàng

Giải bài toán?

- Áp dụng tìm chu trình Hamilton: *không hiệu quả* trường hợp khi đồ thị có nhiền đỉnh.
- Trong trường hợp xấu nhất: phải dùng những *thuật toán gần đúng*.

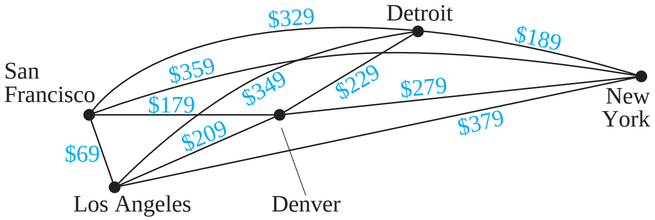
Bài tập

1. Tìm đường đi ngắn nhất giữa *a* và *z* trong các đồ thị có trọng số sau đây:
   a) 

   b) 

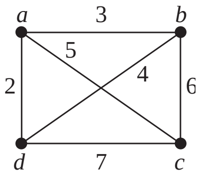
Bài tập

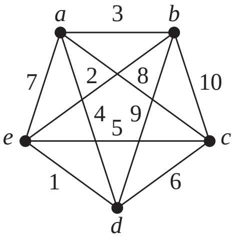
2. Tìm đường bay có chi phí nhỏ nhất giữa hai thành phố *San Francisco* và *New York*.



Bài tập

3. Giải bài toán người bán hàng bằng cách tìm tổng trọng số của tất cả chu trình Hamilton và xác định chu trình có tổng trọng số nhỏ nhất.

a) 

b) 

Tài liệu tham khảo

- ADRIAN BONDY, U.S.R. MURTY, *Graph Theory*, Springer, 2008.
- KENNETH H. ROSEN, *Discrete Mathematics and its Applications, 7th Edidion*, McGraw-Hill, 2011.
- NGUYỄN CAM, CHU ĐỨC KHÁNH, *Lý thuyết đồ thị*, NXB Đại học Quốc gia Tp Hồ Chí Minh, 2008.
- NGUYỄN ĐỨC NGHĨA, NGUYỄN TÔ THÀNH, *Toán rời rạc*, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội, 2003.
- REINHARD DIESTEL, *Graph Theory*, Springer, 2005.