

Chương 6. CÂY

Cây - Cây khung

ThS. Nguyễn Chí Hiếu

2019

NỘI DUNG

1 Định nghĩa và các tính chất cơ bản

- Cây
- Các tính chất của cây

2 Các thuật toán duyệt cây

- NLR
- LNR
- LRN

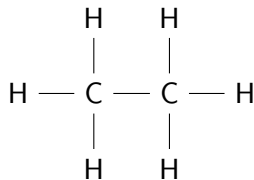
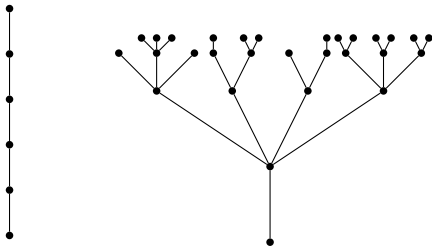
3 Cây khung

Định nghĩa

Định nghĩa 1

Cây (*tree*) là đồ thị vô hướng liên thông và không có chu trình.

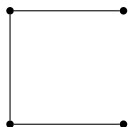
Ví dụ 1



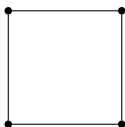
Định nghĩa

Ví dụ 2

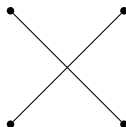
Cho 3 đồ thị G_1 , G_2 và G_3 gồm 4 đỉnh. Đồ thị nào là cây?



Hình 1: G_1



Hình 2: G_2

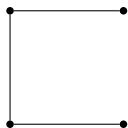


Hình 3: G_3

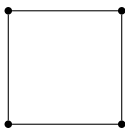
Định nghĩa

Ví dụ 2

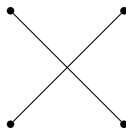
Cho 3 đồ thị G_1 , G_2 và G_3 gồm 4 đỉnh. Đồ thị nào là cây?



Hình 1: G_1



Hình 2: G_2



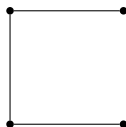
Hình 3: G_3

- G_1 liên thông và không có chu trình $\Rightarrow G_1$ là cây.

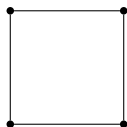
Định nghĩa

Ví dụ 2

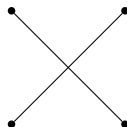
Cho 3 đồ thị G_1 , G_2 và G_3 gồm 4 đỉnh. Đồ thị nào là cây?



Hình 1: G_1



Hình 2: G_2



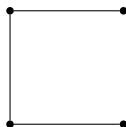
Hình 3: G_3

- G_1 liên thông và không có chu trình $\Rightarrow G_1$ là cây.
- G_2 liên thông và *có chu trình*.

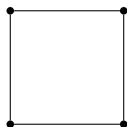
Định nghĩa

Ví dụ 2

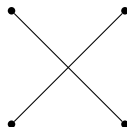
Cho 3 đồ thị G_1 , G_2 và G_3 gồm 4 đỉnh. Đồ thị nào là cây?



Hình 1: G_1



Hình 2: G_2



Hình 3: G_3

- G_1 liên thông và không có chu trình $\Rightarrow G_1$ là cây.
- G_2 liên thông và *có chu trình*.
- G_3 *không liên thông* và không có chu trình.

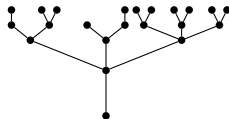
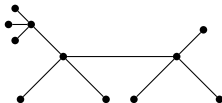
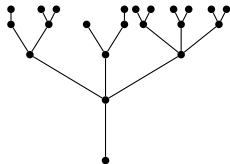
Định nghĩa

Định nghĩa 2

Rừng (*forest*) là một đồ thị vô hướng mà mỗi thành phần liên thông của nó là một cây.

Ví dụ 3

Rừng gồm 3 đồ thị liên thông.

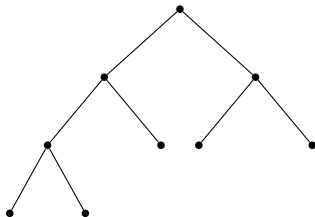


Cây m-phân

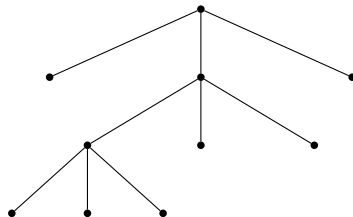
Định nghĩa 4

Cho cây T , nếu *số con tối đa* của một đỉnh trong T là một cây *m-phân*.

Ví dụ 5



Hình 4: Cây nhị phân.



Hình 5: Cây tam phân.

Các tính chất của cây

Định lý 1

Cho T là một cây, giữa hai đỉnh bất kỳ luôn tồn tại duy nhất một đường nối chúng.

Chứng minh.

...

...

...



Các tính chất của cây

Định lý 2

Cây T có n đỉnh thì có $n - 1$ cạnh.

Chứng minh.

- Bước cơ sở: với $n = 1$, cây T có $n - 1 = 0$ cạnh (đúng).
- Bước quy nạp: giả sử $n = k$, [định lý 2] đúng. Cần chứng minh [định lý 2] đúng với $n = k + 1$, tức là chứng minh cây T có $n - 1 = k$ cạnh.
 - ▶ Gọi v là đỉnh lá trong cây T .
 - ▶ Nếu loại bỏ đỉnh v thì cây có $k - 1$ cạnh.



Định lý

Giả sử T là một đồ thị có n đỉnh, thì 6 mệnh đề sau đây tương đương:

- i) **T là một cây** (T liên thông và không có chu trình).
- ii) T không có chu trình và có $n - 1$ cạnh.
- iii) T liên thông và nếu hủy bất kỳ một cạnh nào của nó cũng làm mất tính liên thông.
- iv) Giữa hai đỉnh bất kỳ của T luôn luôn tồn tại một đường duy nhất nối chúng.
- v) T không có chu trình và nếu thêm một cạnh mới nối hai đỉnh bất kỳ của T sẽ tạo ra chu trình.
- vi) T liên thông và có $n - 1$ cạnh.

Các thuật toán duyệt cây

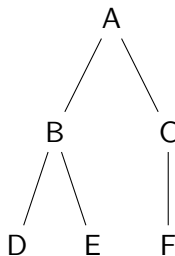
Duyệt cây

- Duyệt cây là thuật toán liệt kê danh sách tất cả các đỉnh của một cây, mỗi đỉnh chỉ một lần.
- Mỗi thuật toán duyệt cây khác nhau ở *thứ tự duyệt nút gốc* của cây con đang xét.
- Ba phương pháp duyệt cây:
 - ▶ Tiền thứ tự (*preorder*) hay NLR (*node-left-right*).
 - ▶ Trung thứ tự (*inoder*) hay LNR (*left-node-right*).
 - ▶ Hậu thứ tự (*postorder*) hay LRN (*left-right-node*).

Các thuật toán duyệt cây

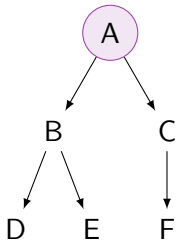
Ví dụ 6

Duyệt cây T theo tiền thứ tự, trung thứ tự và hậu thứ tự.

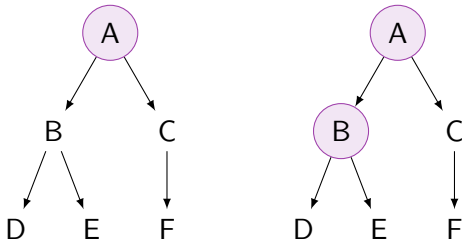


Hình 6: Cây T gồm 6 đỉnh A, B, C, D, E, F .

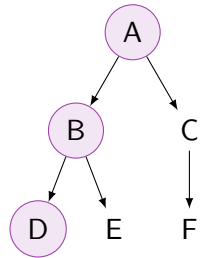
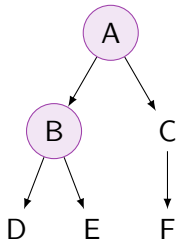
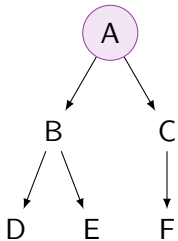
Duyệt tiền thứ tự (NLR)



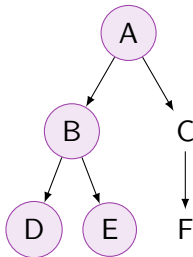
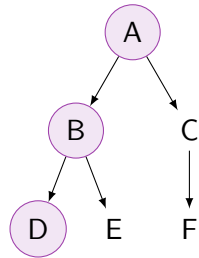
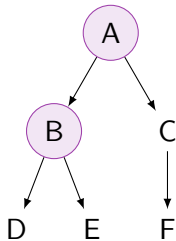
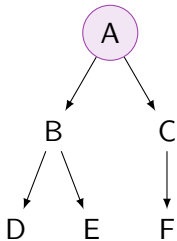
Duyệt tiền thứ tự (NLR)



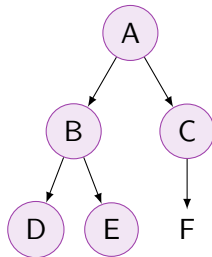
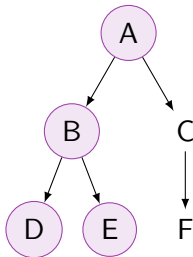
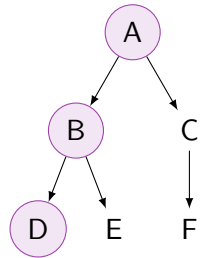
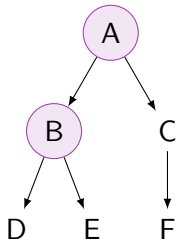
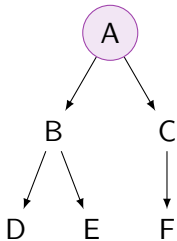
Duyệt tiền thứ tự (NLR)



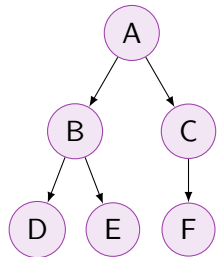
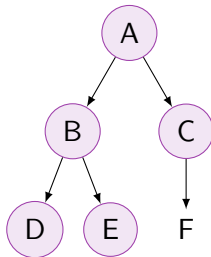
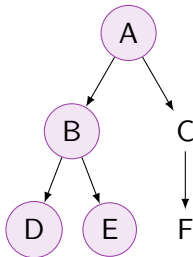
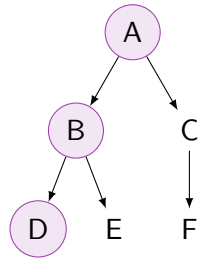
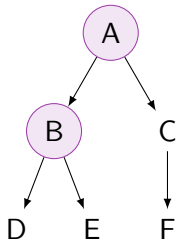
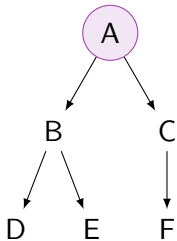
Duyệt tiền thứ tự (NLR)



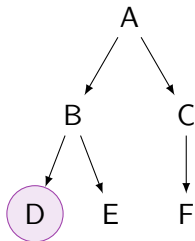
Duyệt tiền thứ tự (NLR)



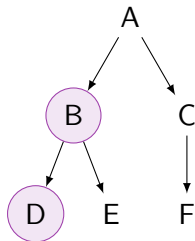
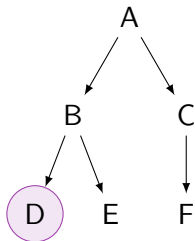
Duyệt tiền thứ tự (NLR)



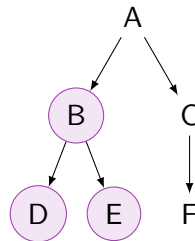
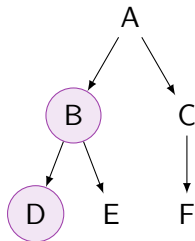
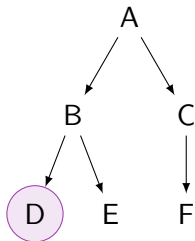
Duyệt trung thứ tự (LNR)



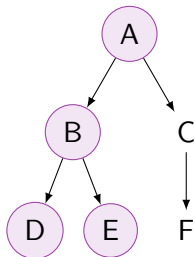
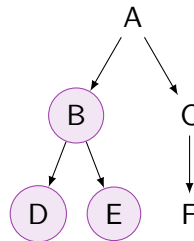
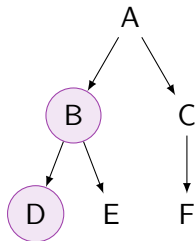
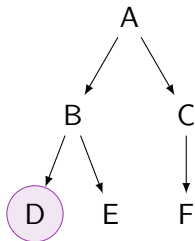
Duyệt trung thứ tự (LNR)



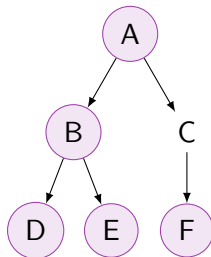
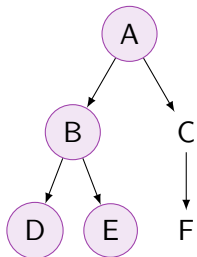
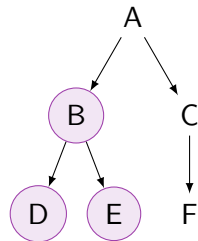
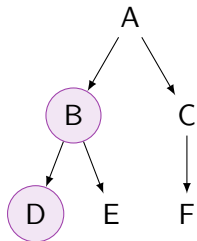
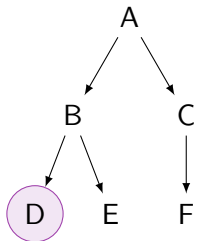
Duyệt trung thứ tự (LNR)



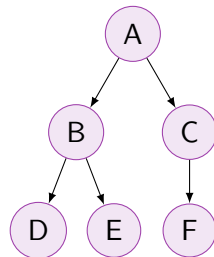
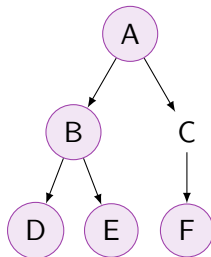
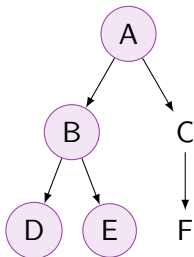
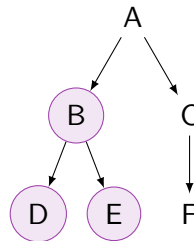
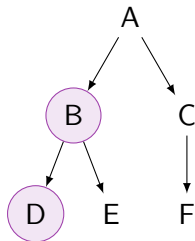
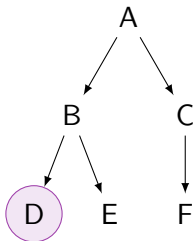
Duyệt trung thứ tự (LNR)



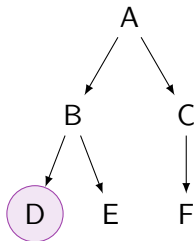
Duyệt trung thứ tự (LNR)



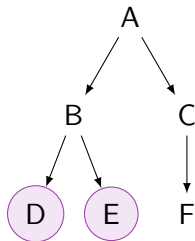
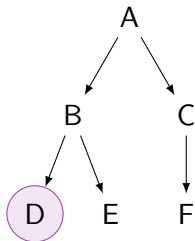
Duyệt trung thứ tự (LNR)



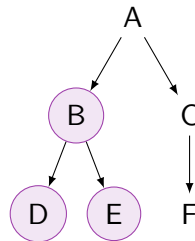
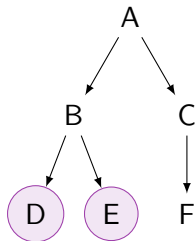
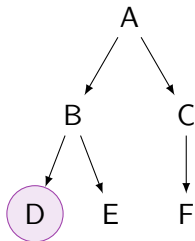
Duyệt hậu thứ tự (LRN)



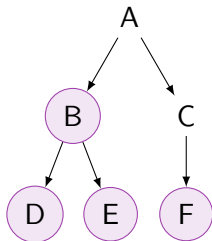
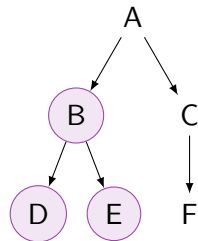
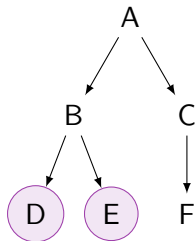
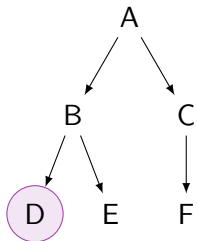
Duyệt hậu thứ tự (LRN)



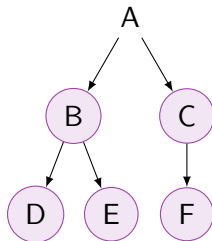
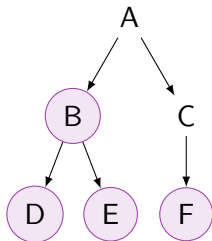
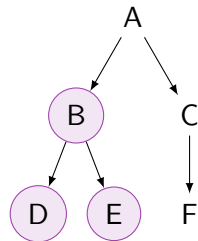
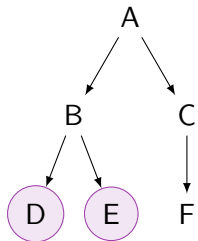
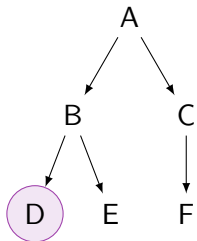
Duyệt hậu thứ tự (LRN)



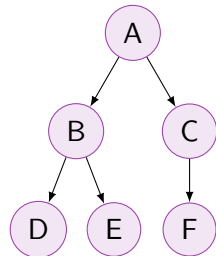
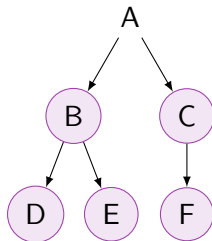
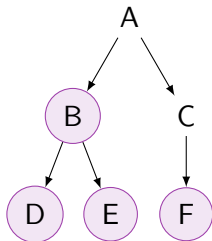
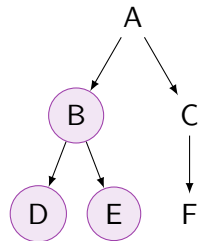
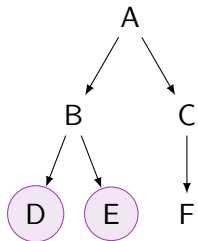
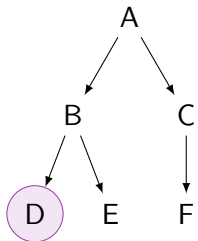
Duyệt hậu thứ tự (LRN)



Duyệt hậu thứ tự (LRN)



Duyệt hậu thứ tự (LRN)



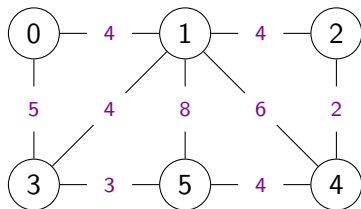
Cây khung

Định nghĩa 5

Cho $G = (V, E)$ là đồ thị vô hướng liên thông. Một cây T được gọi là **cây khung** (*spanning tree*) nếu T là đồ thị con chứa mọi đỉnh của G .

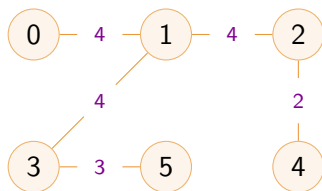
Ví dụ 7

Cho G là đồ thị vô hướng liên thông.

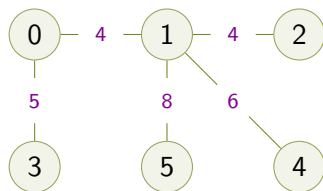


Hình 7: Đồ thị vô hướng G .

Cây khung



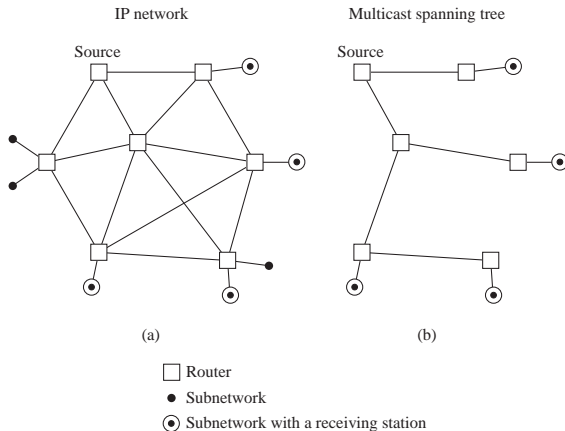
Hình 8: Cây khung T_1 của đồ thị G .



Hình 9: Cây khung T_2 của đồ thị G .

Ứng dụng của cây khung

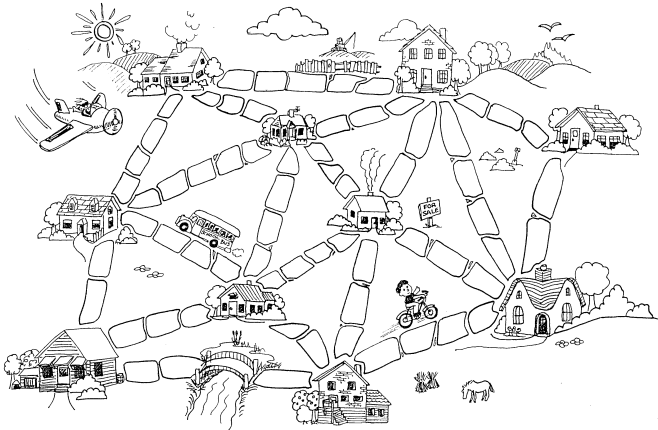
- Truyền thông tin dựa trên địa chỉ IP (*IP Multicasting*): một gói tin có thể chia thành nhiều gói tin và gửi đến nhiều người nhận.



Hình 10: Cây khung trong truyền tin dạng multicast.

Ứng dụng của cây khung

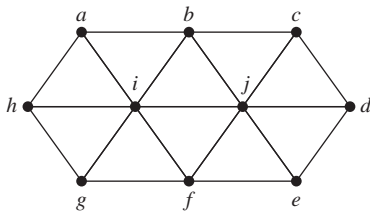
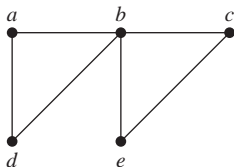
- Xác định những đường nào cần rải nhựa sao cho giữa các căn nhà đều có đường đi.



Hình 11: Bản đồ của một vùng dân cư.

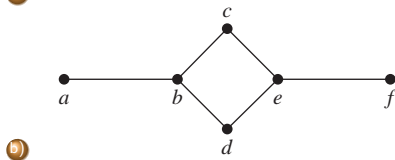
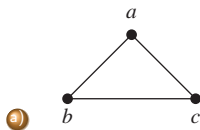
Bài tập

- 1 Tìm cây khung của những đồ thị sau đây bằng cách loại bỏ một số cạnh của các chu trình.



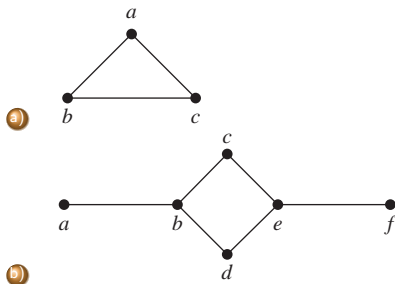
Bài tập

- 2 Tìm tất cả cây khung của những đồ thị sau đây.



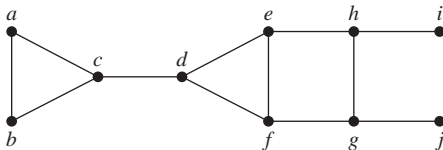
Bài tập

- 3 Áp dụng thuật toán tìm kiếm theo chiều sâu (DFS) vẽ cây khung của đồ thị. Chọn a là gốc của mỗi cây và các đỉnh xếp theo thứ tự alphabet.



Bài tập

4. Vẽ cây khung của đồ thị G . Chọn a là gốc của cây khung và các đỉnh xếp theo thứ tự alphabet.



Hình 12: Đồ thị G .

- a) Áp dụng thuật toán tìm kiếm theo chiều sâu (DFS).
- b) Áp dụng thuật toán tìm kiếm theo chiều rộng (BFS).

Tài liệu tham khảo



ADRIAN BONDY, U.S.R. MURTY, *Graph Theory*, Springer, 2008.



KENNETH H. ROSEN, *Discrete Mathematics and its Applications, 7th Edition*, McGraw-Hill, 2011.



NGUYỄN CAM, CHU ĐỨC KHÁNH, *Lý thuyết đồ thị*, NXB Đại học Quốc gia Tp Hồ Chí Minh, 2008.



NGUYỄN ĐỨC NGHĨA, NGUYỄN TÔ THÀNH, *Toán rời rạc*, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội, 2003.



REINHARD DIESTEL, *Graph Theory*, Springer, 2005.