Chương 7. LUỒNG TRONG MẠNG

Tìm luồng cực đại

ThS. Nguyễn Chí Hiếu

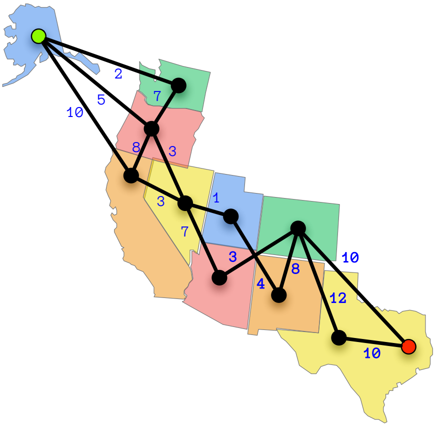
2019

NỘI DUNG

Các khái niệm cơ bản

Ví dụ 1

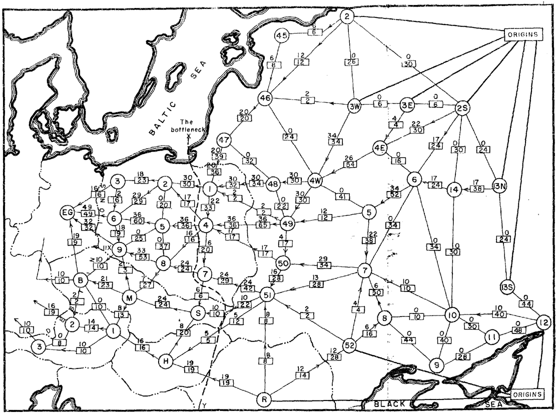
Hệ thống cấp nhiên liệu gồm nhiều đường ống có lưu lượng nhất định. Bài toán đặt ra *"Vận chuyển nhiên liệu nhiều nhất từ bang Alaska đến Texas"*?



Các khái niệm cơ bản

Ví dụ 2

Mạng lưới đường sắt nối Liên Xô và các nước Đông Âu [a].



SECRET RM-1573 10-24-55 -33-

Fig. 7 — Traffic pattern: entire network available

Legend:

International boundary

Railway operating division

Capacity: 12 each way per day. Required flow of 9 per day toward destinations (in direction of arrow) with equivalent number of returning trains in opposite direction

All capacities in trains / 1000's of tons each way per day

Origins: Divisions 2, 3W, 3E, 2S, 13N, 13S, 12, 52 (USSR), and Roumania

Destinations: Divisions 3, 6, 9 (Poland); B (Czechoslovakia); and 2, 3 (Austria)

Alternative destinations: Germany or East Germany

Note IIX at Division 9, Poland

[a] Harris & Ross[1955]

Các khái niệm cơ bản

Định nghĩa 1

Mạng là một đồ thị $G = (V, E)$ có hướng. Trong đó,

- Mỗi cạnh $e = (u, v) \in E$ được gán một số thực không âm, được gọi là **khả năng thông qua** *(capacity)* của cạnh. Ký hiệu $c(e)$ hay $c(u, v)$.
- Có một đỉnh duy nhất có bậc vào là 0, được gọi là **đỉnh phát** *(source)*.
- Có một đỉnh duy nhất có bậc ra là 0, được gọi là **đỉnh thu** *(sink)*.

Các khái niệm cơ bản

Định nghĩa 2

Luồng thô *(raw flow)* là một ánh xạ $r(u, v) : V^2 \rightarrow \mathcal{R}^+$ thỏa các điều kiện:

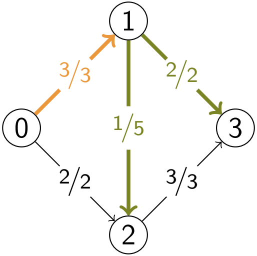
1. **Khả năng thông qua:** luồng trên mỗi cạnh uv phải nhỏ hơn hay bằng khả năng thông qua của nó.

$$\forall u, v \in V, 0 \leq r(u, v) \leq c(u, v).$$

2. **Cân bằng luồng:** ngoại trừ đỉnh phát và đỉnh thu, mỗi đỉnh u bất kỳ có tổng luồng vào và tổng luồng ra bằng nhau.

$$\forall u \in V \setminus \{s, t\}, \sum_{v \in V} r(v, u) = \sum_{w \in V} r(u, w).$$

Các khái niệm cơ bản



- Trọng số của các cạnh trong mạng tương ứng với luồng và khả năng thông qua của nó. Ta có
  - $r(1,2) \leq c(1,2)$
  - Tổng luồng vào của 1: 3.
  - Tổng luồng ra của 1: 3.

Các khái niệm cơ bản

Định nghĩa 3

Luồng trên mạng *(flow network)* là một ánh xạ $f(u, v) : V^2 \to \mathcal{R}^+$ được định nghĩa bởi $f(u, v) = r(u, v) - r(v, u)$ thỏa các điều kiện:

1. **Đối xứng:** luồng từ u tới v bằng đối của luồng từ v tới u.

$$f(u, v) = -f(v, u).$$

2. **Khả năng thông qua:** luồng trên mỗi cạnh uv phải nhỏ hơn hay bằng khả năng thông qua của nó.

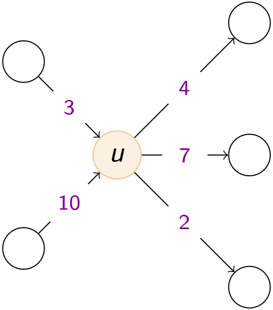
$$\forall u, v \in V, 0 \leq f(u, v) \leq c(u, v).$$

3. **Cân bằng luồng:** ngoại trừ đỉnh phát và đỉnh thu, mỗi đỉnh u bất kỳ có tổng luồng vào và tổng luồng ra bằng nhau.

$$\forall u \in V \setminus \{s, t\}, \sum_{v \in V} f(u, v) = 0.$$

Các khái niệm cơ bản

Ví dụ 3



Hình 1: Tổng luồng ra và vào của đỉnh u.

Các khái niệm cơ bản

Định nghĩa 4

Giá trị luồng đi ra tại đỉnh phát s được tính bởi:

$$\boxed{|f| = \sum_{u \in V} f(s,u).} \tag{1}$$

Luồng cực đại

Bài toán Tìm luồng cực đại

Cho một mạng $G = (V, E)$, tìm luồng f trong mạng sao cho giá trị luồng cực đại.

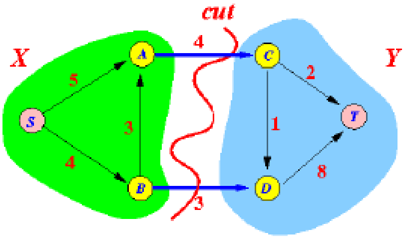
Luồng cực đại

Định nghĩa 5

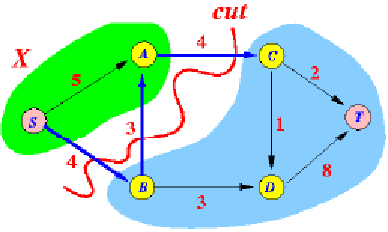
Lát cắt *(cut)* (S, T) là một phân hoạch chia tập hợp V thành hai tập hợp khác rỗng S và $T = V \setminus S$ sao cho $s \in S, t \in T$.

Ví dụ 4

Xét hai lát cắt của mạng sau:



Cut = { (A,C), (B,D) }



Cut = { (S,B), (B,A), (A,C) }

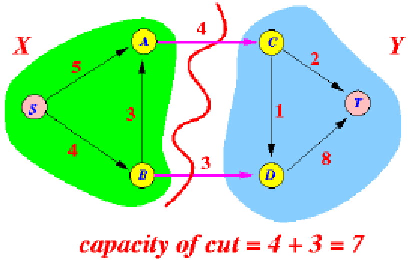
Luồng cực đại

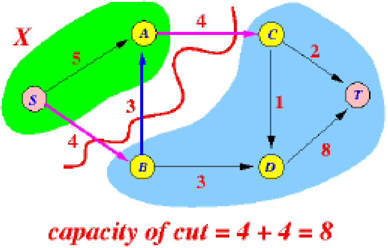
Khả năng thông qua của một lát cắt (S, T)

$$c(S, T) = \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} c(u, v). \quad (2)$$

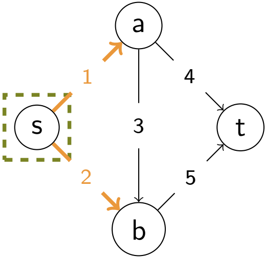
Ví dụ 5

Xét hai lát cắt của mạng sau:

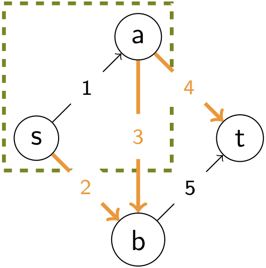




Luồng cực đại

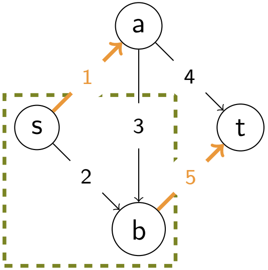


- $c(s,t) = 1 + 2 = 3$

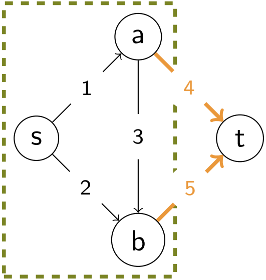


- $c(s,t) = 2 + 3 + 4 = 9$

Luồng cực đại



- $c(s,t) = 1 + 5 = 6$



- $c(s,t) = 4 + 5 = 9$

Luồng cực đại

Luồng của một lát cắt

$$\boxed{f(S,T) = \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} f(u,v).} \tag{3}$$

Luồng cực đại

Định lý 1

Nếu f là luồng hợp lệ và với mọi lát cắt (S, T), thì ta có:

$$\boxed{|f| \leq c\,(S, T)\,.} \tag{4}$$

Chứng minh 1

- *Từ công thức [3 trang 16], ta có*

$$\begin{aligned} |f| = & \textstyle\sum_{u \in S} \left(\sum_{v \in T} f(u, v)\right) \\ \leq & \textstyle\sum_{u \in S} \left(\sum_{v \in T} c(u, v)\right) \quad \textit{(điều kiện 2 trang 8)} \\ \leq & \; c\,(S, T)\,. \end{aligned}$$

Luồng cực đại

Định lý 2 (**Định lý Ford-Fulkerson**)

Lát cắt hẹp nhất (min cut) hay khả năng thông qua nhỏ nhất chính là giá trị của luồng cực đại.

Luồng cực đại

Định nghĩa 6

Mạng thặng dư *(residual network)* $G_f = (V, E_f)$ trên luồng f cho biết khả năng còn có thể thông qua *(residual capacity)* trên mạng sau khi gửi một số luồng qua nó.
Khả năng thông qua của mạng thặng dư được tính bởi công thức:

$$c_f(u, v) = \begin{cases} c(u, v) - f(u, v) & \text{, nếu } (u, v) \in E \\ f(v, u) & \text{, nếu } (v, u) \in E \\ 0 & \text{, ngược lại.} \end{cases} \tag{5}$$

Luồng cực đại

Định nghĩa 7

Đường tăng luồng/tăng trưởng *(augment path)* p là đường đi có hướng từ s đến t trong mạng thặng dư G_f.
Khả năng thông qua tối đa sau khi tăng luồng được tính bởi công thức:

$$\boxed{c_f(p) = \min\{c_f(u,v) : (u,v) \in p\}} \tag{6}$$

Luồng cực đại

Cho mạng $G = (V, E)$, luồng f trong G và p là đường tăng luồng trong mạng thặng dư G_f. Luồng f_p được định nghĩa

$$\boxed{f_p(u,v) = \begin{cases} c_f(p) & \text{, nếu } (u,v) \in p \\ 0 & \text{, ngược lại.} \end{cases}} \tag{7}$$

Giá trị của luồng f_p là $|f_p| = |c_f(p)|$.

Thuật toán Ford-Fulkerson

Ý tưởng

- Khởi tạo giá luồng cực đại là 0
- Lặp nếu tìm thấy đường tăng luồng từ $s \to t$:
  - Tính *khả năng thông qua nhỏ nhất của đường tăng luồng* hay *giá trị của luồng đang xét*.
  - Thêm giá trị vừa tính vào luồng cực đại.
  - Mạng G sau khi tăng luồng.

Thuật toán Ford-Fulkerson

- Tìm đường tăng luồng từ đỉnh phát đến đỉnh thu:
  - Thuật toán duyệt theo chiều sâu (DFS).
  - Thuật toán duyệt theo chiều rộng (BFS).
  - Thuật toán tìm đường đi ngắn nhất.

Thuật toán Ford-Fulkerson

Thuật toán 1: **FordFulkerson(s, t)**

- Đầu vào: đồ thị G, đỉnh s và t.
- Đầu ra: giá trị của luồng cực đại từ s đến t.

```
1   fmax ← 0
2   for each edge(u,v) ∈ E
3       c[u, v] ← m[u, v]
4   while (FindAugmentPath(c, s, t, p))
5       cfp ← min{ cf (u,v): (u,v) in p}
6       for each edge(u,v) ∈ p
7           c[u, v] ← c[u, v] + cfp;
8           c[v, u] ← c[v, u] - cfp;
9       fmax ← fmax + cfp;
10  return fmax
```

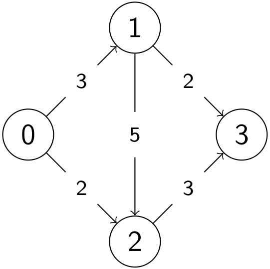
Giải thích

- Dòng 4: hàm `FindAugmentPath()` dùng để tìm một đường tăng luồng, có thể áp dụng DFS hay BFS.

Thuật toán Ford-Fulkerson

Ví dụ 6

Cho mạng vận chuyển được biểu diễn bởi đồ thị có hướng như hình sau. Tìm luồng cực đại từ đỉnh $0 \to 1$.

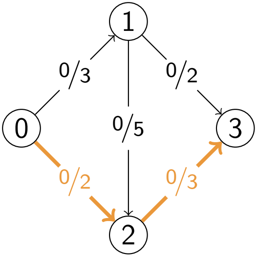


	0	1	2	3
0	0	3	2	0
1	0	0	5	2
2	0	0	0	3
3	0	0	0	0

Hình 2: Đồ thị có hướng G và ma trận kề biểu diễn đồ thị này.

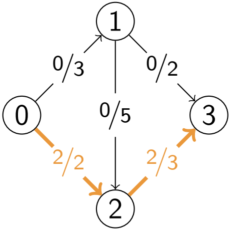
Thuật toán Ford-Fulkerson

- Khởi tạo mạng với luồng bằng 0.



Thuật toán Ford-Fulkerson

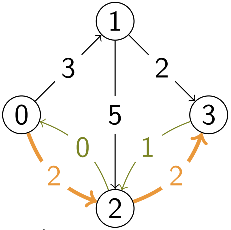
- Tìm một đường tăng luồng từ $0 \to 3$ và khả năng thông qua của nó.



- Luồng: $0 \xrightarrow{2} 2 \xrightarrow{3} 3$.
- Giá trị luồng:

$$\begin{aligned} c_f(p) &= min(c_f(0,2), c_f(2,3)) \\ &= min(c(0,2) - f(0,2), \\ &\quad c(2,3) - f(2,3)) \\ &= 2. \end{aligned}$$

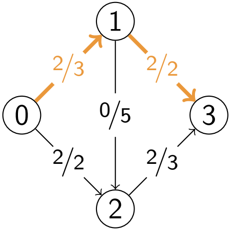
- Mạng G sau khi tăng luồng.



	0	1	2	3
0	0	3	0	0
1	0	0	5	2
2	2	0	0	1
3	0	0	2	0

Thuật toán Ford-Fulkerson

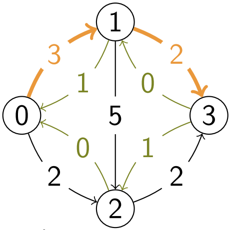
- Tìm một đường tăng luồng từ $0 \to 3$ và khả năng thông qua của nó.



- Luồng: $0 \xrightarrow{3} 1 \xrightarrow{2} 3$.
- Giá trị luồng:

$$\begin{aligned} c_f(p) = \quad & min(c_f(0,1), c_f(1,3)) \\ = \quad & min(c(0,1) - f(0,1), \\ & c(1,3) - f(1,3)) \\ = \quad & 2. \end{aligned}$$

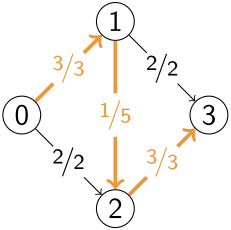
- Mạng G sau khi tăng luồng.



	0	1	2	3
0	0	1	0	0
1	2	0	5	0
2	2	0	0	1
3	0	2	2	0

Thuật toán Ford-Fulkerson

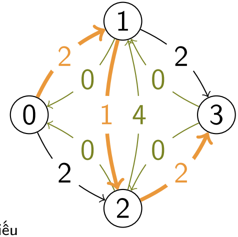
- Tìm một đường tăng luồng từ $0 \to 3$ và khả năng thông qua của nó.



  - Luồng: $0 \xrightarrow{1} 1 \xrightarrow{5} 2 \xrightarrow{1} 3$.
  - Giá trị luồng:

$$\begin{aligned} c_f(p) &= min(c_f(0,1), c_f(1,2), c_f(2,3 \\ &= min(c(0,1) - f(0,1), \\ &\quad c(1,2) - f(1,2)) \\ &\quad c(2,3) - f(2,3)) \\ &= 1. \end{aligned}$$

- Mạng G sau khi tăng luồng.



	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	3	0	4	0
2	2	1	0	0
3	0	2	3	0

Thuật toán Ford-Fulkerson

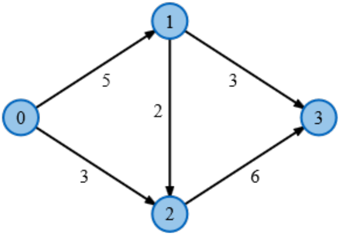
- Thuật toán lần lượt tìm được 3 đường tăng luồng.
- Luồng cực đại là tổng giá trị các luồng tìm được:

$$f_{max} = 2 + 2 + 1 = 5.$$

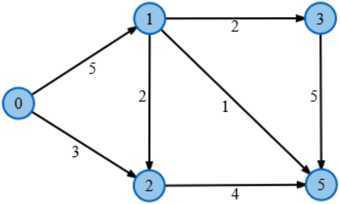
Bài tập

1. Áp dụng thuật toán Ford-Fulkerson tìm luồng cực đại của các mạng sau đây:

a)



b)



Bài tập

2

Tài liệu tham khảo

- ADRIAN BONDY, U.S.R. MURTY, *Graph Theory*, Springer, 2008.
- KENNETH H. ROSEN, *Discrete Mathematics and its Applications, 7th Edidion*, McGraw-Hill, 2011.
- NGUYỄN ĐỨC NGHĨA, NGUYỄN TÔ THÀNH, *Toán rời rạc*, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội, 2003.
- NGUYỄN CAM, CHU ĐỨC KHÁNH, *Lý thuyết đồ thị*, NXB Đại học Quốc gia Tp Hồ Chí Minh, 2008.
- REINHARD DIESTEL, *Graph Theory*, Springer, 2005.