Chương 4. ĐƯỜNG ĐI NGẮN NHẤT

Thuật toán Bellman-Ford

ThS. Nguyễn Chí Hiếu

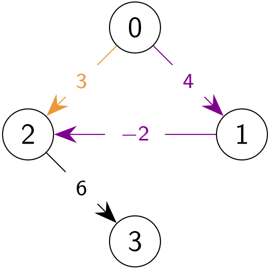
2019

NỘI DUNG

Đồ thị có trọng số âm

Ví dụ 1

Cho đồ thị G gồm 4 đỉnh, tìm đường đi ngắn nhất từ $0 \rightsquigarrow 3$:

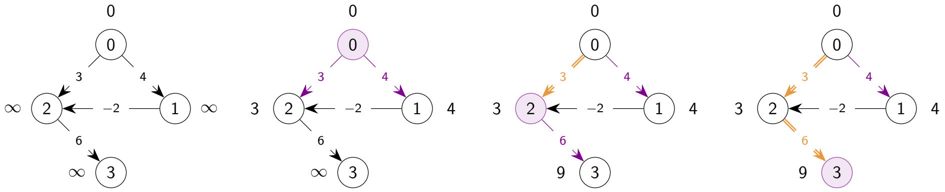


Hình 1: Đồ thị G có trọng số âm.

Đồ thị có trọng số âm

Câu hỏi

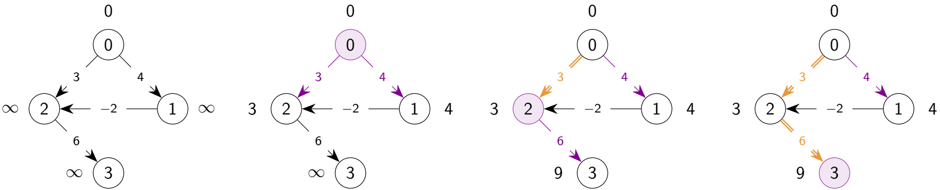
- Áp dụng thuật toán Dijkstra được không?



Đồ thị có trọng số âm

Câu hỏi

- Áp dụng thuật toán Dijkstra được không?



- Đường đi ngắn nhất: $0 \to 2 \to 3$ với khoảng cách là 9 *(không chính xác)*.

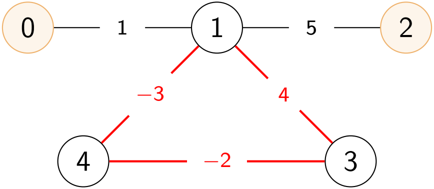
Chú ý

Thuật toán Dijkstra không áp dụng đối với đồ thị có trọng số âm.

Đồ thị có trọng số âm

Ví dụ 2

Cho đồ thị G_2 gồm 5 đỉnh như hình:

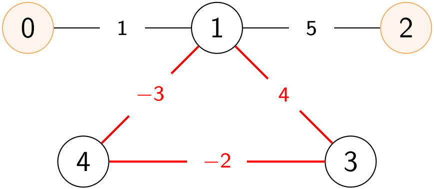


Hình 2: Đồ thị G_2 có *chu trình âm*.

Chu trình âm *(negative cycle)*

Là chu trình trong đồ thị có *tổng trọng số* các cạnh là một *số âm*.

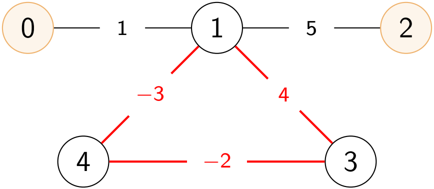
Chu trình âm



Hình 3: Đồ thị G_2 có *chu trình âm*.

- Đường đi ngắn nhất từ $0 \rightsquigarrow 2$?

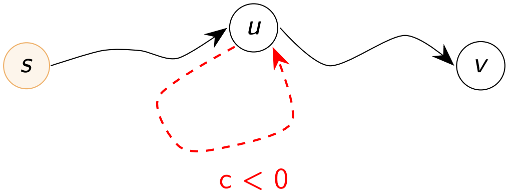
Chu trình âm



Hình 3: Đồ thị G_2 có *chu trình âm*.

- Đường đi ngắn nhất từ $0 \rightsquigarrow 2$?
  - $0 \to 1 \to 2 : 6$
  - $0 \to 1 \to 3 \to 4 \to 1 \to 2 : 5$
  - $0 \to 1 \to 3 \to 4 \to 1 \to 3 \to 4 \to 1 \to 2 : 4$
  - ...

Chu trình âm

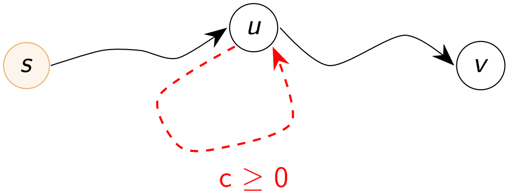


Hình 4: Đường đi từ $s \rightsquigarrow v$.

Nhận xét

- Nếu đường đi từ $s \rightsquigarrow v$ có *chứa chu trình âm*, thì *không tồn tại* đường đi ngắn nhất từ $s \rightsquigarrow v$.

Chu trình âm

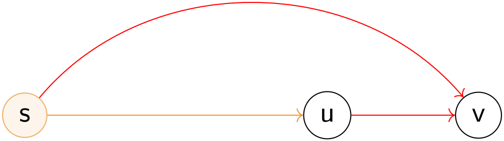


Hình 5: Đường đi từ $s \rightsquigarrow v$.

Nhận xét

- Nếu đường đi từ $s \rightsquigarrow v$ *không chứa chu trình âm*, thì *tồn tại* đường đi ngắn nhất từ $s \rightsquigarrow v$.

Thuật toán Bellman-Ford



Hình 6: Đường đi ngắn nhất từ $s \rightsquigarrow v$.

Thuật toán Bellman-Ford

Nguyên tắc *giảm cạnh không cần thiết (edge relaxation)*

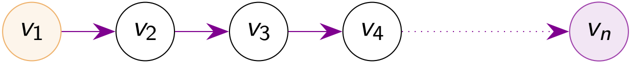
Giả sử, cạnh $(u, v) \in E$ là *cạnh cuối* của *đường đi ngắn nhất từ* $s \leadsto u \to v$.

- $d[u]$ là khoảng cách đường đi ngắn nhất từ $s \leadsto u$.
- $d[v]$ là khoảng cách đường đi ngắn nhất từ $s \leadsto v$.
- Nếu cạnh (u, v) giúp đường đi từ $s \leadsto u \to v$ ngắn hơn trước, thì cập nhật lại khoảng cách và đường đi tại v.

$$\boxed{\begin{cases} d[v] & = min\left\{d[v], d[u] + w\left(u, v\right)\right\} \\ p[v] & = u \end{cases}} \qquad (1)$$

với $p[v] = u$ có nghĩa là u chính là đỉnh kề trước của v.

Thuật toán Bellman-Ford



Hình 7: Đường đi ngắn nhất từ $v_1 \rightsquigarrow v_n$ chứa tối đa $|n-1|$ cạnh.

Ý tưởng

- Dựa vào nguyên tắc *giảm cạnh không cần thiết*, một khoảng cách *xấp xỉ* dần được thay thế bằng *khoảng cách chính xác* của đường đi ngắn nhất.
- Vì đường đi ngắn nhất giữa hai đỉnh trong đồ thị $G = (V, E)$ có *tối đa* $|V| - 1$ *cạnh*, nên chỉ cần *lặp tối đa* $k = |V| - 1$ lần để tìm được đường đi ngắn nhất giữa hai đỉnh. Mỗi lần lặp, thực hiện nguyên tắc *giảm cạnh không cần thiết* đối với tất cả các cạnh.
- Chỉ áp dụng đối với đồ thị không chứa chu trình âm.

Thuật toán Bellman-Ford

Thuật toán 1: **BellmanFord(G, s)**

- Đầu vào: đồ thị G, đỉnh s.
- Đầu ra: đường đi ngắn nhất từ đỉnh s đến các đỉnh khác.

```
for each u ∈ V
    d[u] ← ∞        // distance
    p[u] ← NO_PATH  // previous/parent
d[s] ← 0

for k ← 1 to |V| - 1
    for each edge(u, v) ∈ E // Relax(u, v)
        if d[v] > d[u] + w(u, v)
            d[v] ← d[u] + w(u,v)
            p[v] ← u
```

Thuật toán Bellman-Ford

Giải thích

- Dòng 1 $\rightarrow$ 3: khởi tạo khoảng cách và đường đi ngắn nhất đến tất cả đỉnh trong đồ thị.
- Dòng 4: bắt đầu tại đỉnh s, cập nhật khoảng cách của đường đi đến đỉnh này là 0.
- Dòng 6: lặp $k = |V| - 1$ lần, tìm k cạnh trong đường đi ngắn nhất từ đỉnh 0 đến các đỉnh khác *thực hiện nguyên tắc giảm cạnh không cần thiết đối với tất cả các cạnh*.
- *Sau khi thực hiện vòng lặp thứ $k = |V| - 1$, giá trị của $d[v]$ chính là khoảng cách đường đi ngắn nhất từ $s \rightsquigarrow v$.*

Thuật toán Bellman-Ford

Độ phức tạp của thuật toán

```
6    for k ← 1 to |V| - 1
7        for each edge(u, v) ∈ E // Relax(u, v)
8            if d[v] > d[u] + w(u, v)
9                d[v] ← d[u] + w(u, v)
10               p[v] ← u
```

- Dòng 6: lặp $k = |V| - 1$ lần $\Rightarrow \mathcal{O}(|V| - 1)$.
- Dòng 7: lặp $|E|$ lần $\Rightarrow \mathcal{O}(|E|)$.

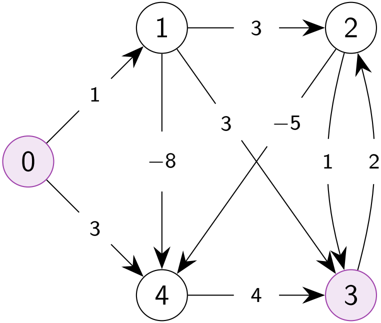
Do đó, độ phức tạp thời gian của thuật toán

$$T \approx \mathcal{O}(|V||E|).$$

Thuật toán Bellman-Ford

Ví dụ 3

Cho đồ thị G gồm 5 đỉnh. Tìm đường đi ngắn nhất từ $0 \rightsquigarrow 3$.



Hình 8: Đồ thị G.

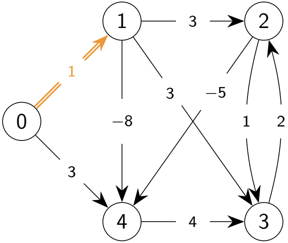
Thuật toán Bellman-Ford

- Bước 1: Khởi tạo khoảng cách và đường đi ngắn nhất từ đỉnh 0 đến tất cả các đỉnh trong đồ thị.

Khởi tạo					
	0	**1**	**2**	**3**	**4**
d	0	∞	∞	∞	∞
p	-1	-1	-1	-1	-1

- Bước 2: Vì đồ thị có 5 đỉnh, nên lặp $k = 4$ lần để tìm k cạnh trong đường đi ngắn nhất từ đỉnh 0 đến các đỉnh khác.
  - ...
  - ...
  - ...

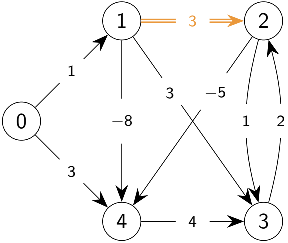
Thuật toán Bellman-Ford



- $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(3, 2)$, $(1, 3)$, $(2, 3)$, $(4, 3)$ $(0, 4)$, $(1, 4)$, $(2, 4)$

1 cạnh					
	0	**1**	**2**	**3**	**4**
d	0	1	∞	∞	∞
p	-1	0	-1	-1	-1

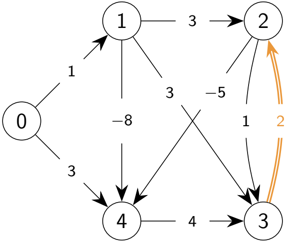
Thuật toán Bellman-Ford



- $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(3, 2)$, $(1, 3)$, $(2, 3)$, $(4, 3)$, $(0, 4)$, $(1, 4)$, $(2, 4)$

1 cạnh					
	0	**1**	**2**	**3**	**4**
d	0	1	4	∞	∞
p	-1	0	1	-1	-1

Thuật toán Bellman-Ford

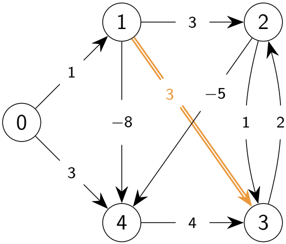


- $(0,1)$, $(1,2)$, $(3,2)$, $(1,3)$, $(2,3)$, $(4,3)$, $(0,4)$, $(1,4)$, $(2,4)$

1 cạnh					
	0	**1**	**2**	**3**	**4**
d	0	1	4	∞	∞
p	-1	0	1	-1	-1

- Xét cạnh $(3,2)$, tìm $d[2] = \min\{d[2], d[3] + w[3,2]\}$

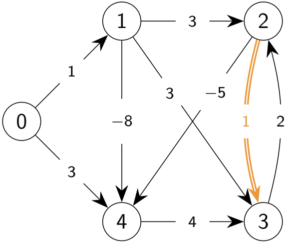
Thuật toán Bellman-Ford



- $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(3, 2)$, $(1, 3)$, $(2, 3)$, $(4, 3)$, $(0, 4)$, $(1, 4)$, $(2, 4)$

1 cạnh					
	0	**1**	**2**	**3**	**4**
d	0	1	4	4	∞
p	-1	0	1	1	-1

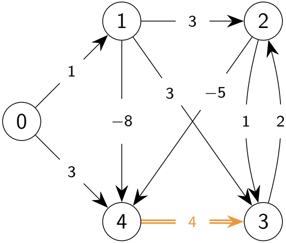
Thuật toán Bellman-Ford



- $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(3, 2)$, $(1, 3)$, $(2, 3)$, $(4, 3)$, $(0, 4)$, $(1, 4)$, $(2, 4)$

1 cạnh					
	0	**1**	**2**	**3**	**4**
d	0	1	4	4	∞
p	-1	0	1	1	-1

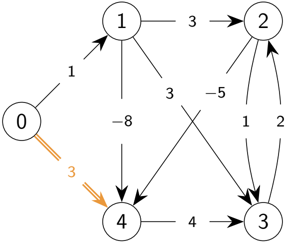
Thuật toán Bellman-Ford



- $(0,1)$, $(1,2)$, $(3,2)$, $(1,3)$, $(2,3)$, $(4,3)$, $(0,4)$, $(1,4)$, $(2,4)$

1 cạnh					
	0	**1**	**2**	**3**	**4**
d	0	1	4	4	∞
p	-1	0	1	1	-1

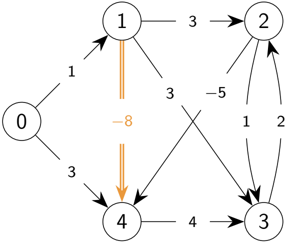
Thuật toán Bellman-Ford



- $(0,1)$, $(1,2)$, $(3,2)$, $(1,3)$, $(2,3)$, $(4,3)$, $(0,4)$, $(1,4)$, $(2,4)$

1 cạnh					
	0	**1**	**2**	**3**	**4**
d	0	1	4	4	3
p	−1	0	1	1	0

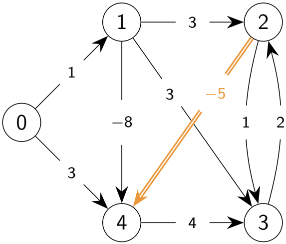
Thuật toán Bellman-Ford



- $(0,1)$, $(1,2)$, $(3,2)$, $(1,3)$, $(2,3)$, $(4,3)$, $(0,4)$, $(1,4)$, $(2,4)$

1 cạnh					
	0	**1**	**2**	**3**	**4**
d	0	1	4	4	−7
p	−1	0	1	1	1

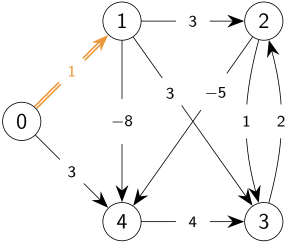
Thuật toán Bellman-Ford



- $(0,1)$, $(1,2)$, $(3,2)$, $(1,3)$, $(2,3)$, $(4,3)$, $(0,4)$, $(1,4)$, $(2,4)$

1 cạnh					
	0	**1**	**2**	**3**	**4**
d	0	1	4	4	−7
p	−1	0	1	1	1

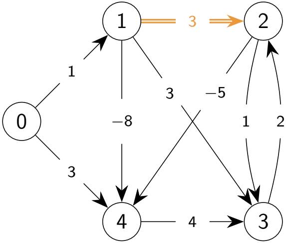
Thuật toán Bellman-Ford



- $(0,1)$, $(1,2)$, $(3,2)$, $(1,3)$, $(2,3)$, $(4,3)$, $(0,4)$, $(1,4)$, $(2,4)$

2 cạnh					
	0	**1**	**2**	**3**	**4**
d	0	1	4	4	−7
p	−1	0	1	1	1

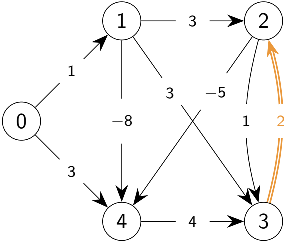
Thuật toán Bellman-Ford



- $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(3, 2)$, $(1, 3)$, $(2, 3)$, $(4, 3)$, $(0, 4)$, $(1, 4)$, $(2, 4)$

2 cạnh					
	0	**1**	**2**	**3**	**4**
d	0	1	4	4	−7
p	−1	0	1	1	1

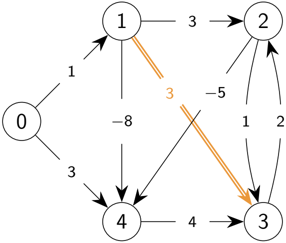
Thuật toán Bellman-Ford



- (0, 1), (1, 2), (3, 2), (1, 3), (2, 3), (4, 3), (0, 4), (1, 4), (2, 4)

2 cạnh					
	0	**1**	**2**	**3**	**4**
d	0	1	4	4	−7
p	−1	0	1	1	1

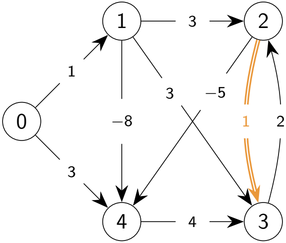
Thuật toán Bellman-Ford



- $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(3, 2)$, $(1, 3)$, $(2, 3)$, $(4, 3)$, $(0, 4)$, $(1, 4)$, $(2, 4)$

2 cạnh					
	0	**1**	**2**	**3**	**4**
d	0	1	4	4	-7
p	-1	0	1	1	1

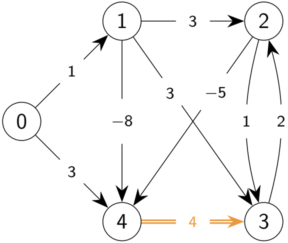
Thuật toán Bellman-Ford



- $(0,1)$, $(1,2)$, $(3,2)$, $(1,3)$, $(2,3)$, $(4,3)$, $(0,4)$, $(1,4)$, $(2,4)$

2 cạnh					
	0	**1**	**2**	**3**	**4**
d	0	1	4	4	-7
p	-1	0	1	1	1

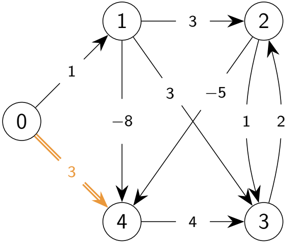
Thuật toán Bellman-Ford



- $(0,1)$, $(1,2)$, $(3,2)$, $(1,3)$, $(2,3)$, $(4,3)$, $(0,4)$, $(1,4)$, $(2,4)$

2 cạnh					
	0	**1**	**2**	**3**	**4**
d	0	1	4	-3	-7
p	-1	0	1	4	1

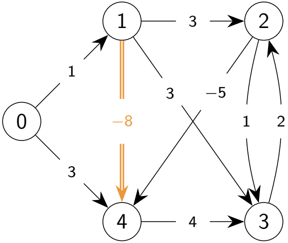
Thuật toán Bellman-Ford



- $(0,1)$, $(1,2)$, $(3,2)$, $(1,3)$, $(2,3)$, $(4,3)$, $(0,4)$, $(1,4)$, $(2,4)$

2 cạnh					
	0	**1**	**2**	**3**	**4**
d	0	1	4	−3	−7
p	−1	0	1	4	1

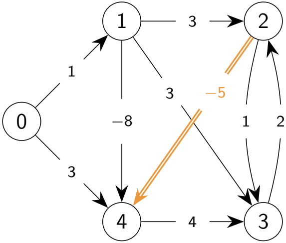
Thuật toán Bellman-Ford



- (0, 1), (1, 2), (3, 2), (1, 3), (2, 3), (4, 3), (0, 4), (1, 4), (2, 4)

2 cạnh					
	0	**1**	**2**	**3**	**4**
d	0	1	4	−3	−7
p	−1	0	1	4	1

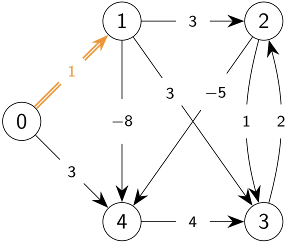
Thuật toán Bellman-Ford



- $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(3, 2)$, $(1, 3)$, $(2, 3)$, $(4, 3)$, $(0, 4)$, $(1, 4)$, $(2, 4)$

2 cạnh					
	0	**1**	**2**	**3**	**4**
d	0	1	4	−3	−7
p	−1	0	1	4	1

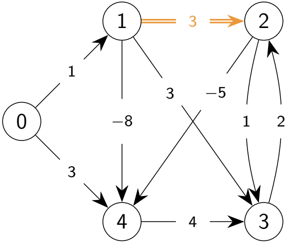
Thuật toán Bellman-Ford



- (0, 1), (1, 2), (3, 2), (1, 3), (2, 3), (4, 3), (0, 4), (1, 4), (2, 4)

3 cạnh					
	0	**1**	**2**	**3**	**4**
d	0	1	4	−3	−7
p	−1	0	1	4	1

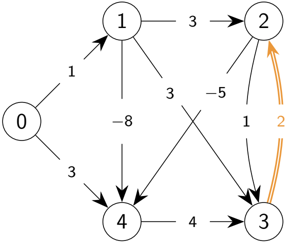
Thuật toán Bellman-Ford



- (0, 1), (1, 2), (3, 2), (1, 3), (2, 3), (4, 3), (0, 4), (1, 4), (2, 4)

3 cạnh					
	0	**1**	**2**	**3**	**4**
d	0	1	4	−3	−7
p	−1	0	1	4	1

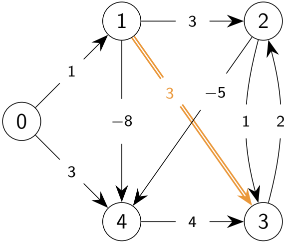
Thuật toán Bellman-Ford



- (0, 1), (1, 2), (3, 2), (1, 3), (2, 3), (4, 3), (0, 4), (1, 4), (2, 4)

3 cạnh					
	0	**1**	**2**	**3**	**4**
d	0	1	−1	−3	−7
p	−1	0	3	4	1

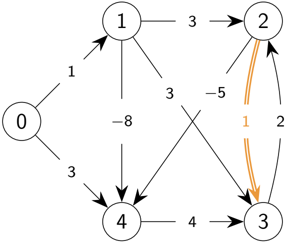
Thuật toán Bellman-Ford



- $(0,1)$, $(1,2)$, $(3,2)$, $(1,3)$, $(2,3)$, $(4,3)$, $(0,4)$, $(1,4)$, $(2,4)$

3 cạnh					
	0	**1**	**2**	**3**	**4**
d	0	1	−1	−3	−7
p	−1	0	3	4	1

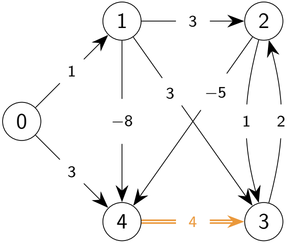
Thuật toán Bellman-Ford



- (0, 1), (1, 2), (3, 2), (1, 3), (2, 3), (4, 3), (0, 4), (1, 4), (2, 4)

3 cạnh					
	0	**1**	**2**	**3**	**4**
d	0	1	−1	−3	−7
p	−1	0	3	4	1

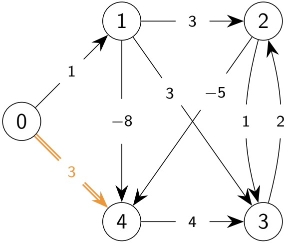
Thuật toán Bellman-Ford



- $(0,1)$, $(1,2)$, $(3,2)$, $(1,3)$, $(2,3)$, $(4,3)$, $(0,4)$, $(1,4)$, $(2,4)$

3 cạnh					
	0	**1**	**2**	**3**	**4**
d	0	1	−1	−3	−7
p	−1	0	3	4	1

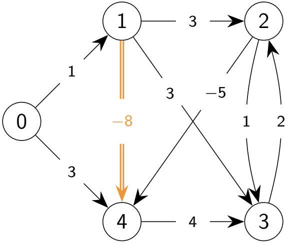
Thuật toán Bellman-Ford



- $(0,1)$, $(1,2)$, $(3,2)$, $(1,3)$, $(2,3)$, $(4,3)$, $(0,4)$, $(1,4)$, $(2,4)$

3 cạnh					
	0	**1**	**2**	**3**	**4**
d	0	1	−1	−3	−7
p	−1	0	3	4	1

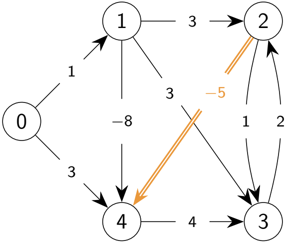
Thuật toán Bellman-Ford



- $(0,1)$, $(1,2)$, $(3,2)$, $(1,3)$, $(2,3)$, $(4,3)$, $(0,4)$, $(1,4)$, $(2,4)$

3 cạnh					
	0	**1**	**2**	**3**	**4**
d	0	1	−1	−3	−7
p	−1	0	3	4	1

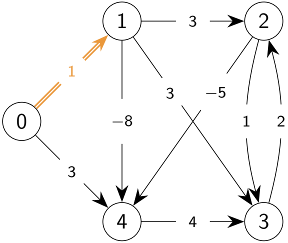
Thuật toán Bellman-Ford



- $(0,1)$, $(1,2)$, $(3,2)$, $(1,3)$, $(2,3)$, $(4,3)$, $(0,4)$, $(1,4)$, $(2,4)$

3 cạnh					
	0	**1**	**2**	**3**	**4**
d	0	1	−1	−3	−7
p	−1	0	3	4	1

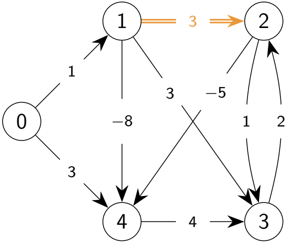
Thuật toán Bellman-Ford



- (0, 1), (1, 2), (3, 2), (1, 3), (2, 3), (4, 3), (0, 4), (1, 4), (2, 4)

4 cạnh					
	0	**1**	**2**	**3**	**4**
d	0	1	−1	−3	−7
p	−1	0	3	4	1

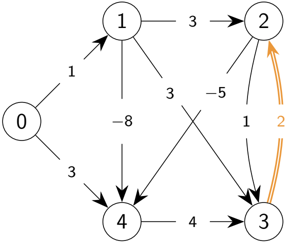
Thuật toán Bellman-Ford



- $(0,1)$, $(1,2)$, $(3,2)$, $(1,3)$, $(2,3)$, $(4,3)$, $(0,4)$, $(1,4)$, $(2,4)$

4 cạnh					
	0	**1**	**2**	**3**	**4**
d	0	1	−1	−3	−7
p	−1	0	3	4	1

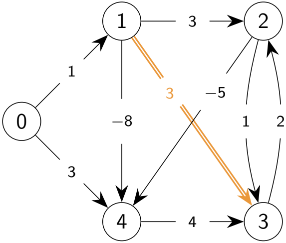
Thuật toán Bellman-Ford



- $(0,1)$, $(1,2)$, $(3,2)$, $(1,3)$, $(2,3)$, $(4,3)$, $(0,4)$, $(1,4)$, $(2,4)$

4 cạnh					
	0	**1**	**2**	**3**	**4**
d	0	1	-1	-3	-7
p	-1	0	3	4	1

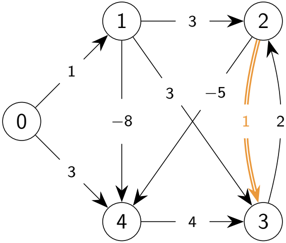
Thuật toán Bellman-Ford



- $(0,1)$, $(1,2)$, $(3,2)$, $(1,3)$, $(2,3)$, $(4,3)$, $(0,4)$, $(1,4)$, $(2,4)$

4 cạnh					
	0	**1**	**2**	**3**	**4**
d	0	1	−1	−3	−7
p	−1	0	3	4	1

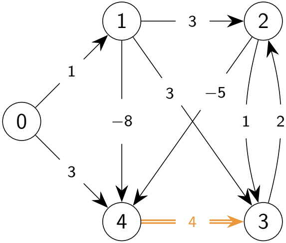
Thuật toán Bellman-Ford



- $(0,1)$, $(1,2)$, $(3,2)$, $(1,3)$, $(2,3)$, $(4,3)$, $(0,4)$, $(1,4)$, $(2,4)$

4 cạnh					
	0	**1**	**2**	**3**	**4**
d	0	1	−1	−3	−7
p	−1	0	3	4	1

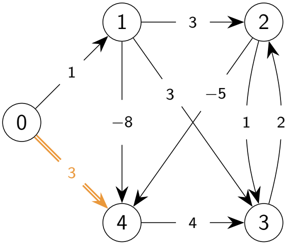
Thuật toán Bellman-Ford



- $(0,1)$, $(1,2)$, $(3,2)$, $(1,3)$, $(2,3)$, $(4,3)$, $(0,4)$, $(1,4)$, $(2,4)$

4 cạnh					
	0	**1**	**2**	**3**	**4**
d	0	1	−1	−3	−7
p	−1	0	3	4	1

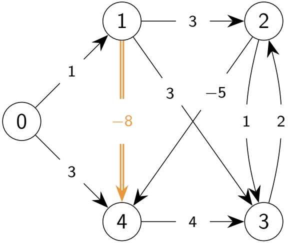
Thuật toán Bellman-Ford



- $(0,1)$, $(1,2)$, $(3,2)$, $(1,3)$, $(2,3)$, $(4,3)$, $(0,4)$, $(1,4)$, $(2,4)$

4 cạnh					
	0	**1**	**2**	**3**	**4**
d	0	1	−1	−3	−7
p	−1	0	3	4	1

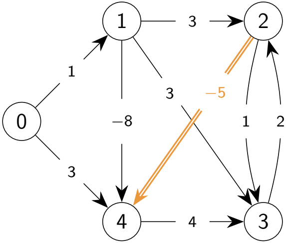
Thuật toán Bellman-Ford



- (0, 1), (1, 2), (3, 2), (1, 3), (2, 3), (4, 3), (0, 4), (1, 4), (2, 4)

4 cạnh					
	0	**1**	**2**	**3**	**4**
d	0	1	−1	−3	−7
p	−1	0	3	4	1

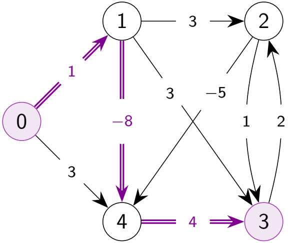
Thuật toán Bellman-Ford



- $(0,1)$, $(1,2)$, $(3,2)$, $(1,3)$, $(2,3)$, $(4,3)$, $(0,4)$, $(1,4)$, $(2,4)$

4 cạnh					
	0	**1**	**2**	**3**	**4**
d	0	1	−1	−3	−7
p	−1	0	3	4	1

Thuật toán Bellman-Ford

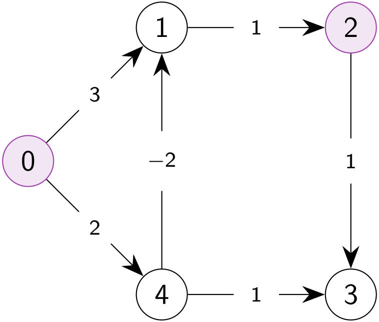


- Đường đi ngắn nhất từ 0 $\rightsquigarrow$ 3: $0 \to 1 \to 4 \to 3$.
- Khoảng cách của đường đi ngắn nhất từ 0 $\rightsquigarrow$ 3: -3.

Thuật toán Bellman-Ford

Ví dụ 4

Cho đồ thị G gồm 5 đỉnh. Tìm đường đi ngắn nhất từ $0 \rightsquigarrow 2$.



Hình 9: Đồ thị G.

Thuật toán Bellman-Ford

- Áp dụng thuật toán Bellman-Ford tìm chu trình âm của đồ thị.

Thuật toán 2: **BellmanFord(G, s)**

```
for each u ∈ V
    d[u] ← ∞ // distance
    p[u] ← NO_PATH // previous/parent
d[s] ← 0

for k ← 1 to |V| - 1
    for each edge (u,v) ∈ E // Relax(u,v)
        if d[v] > d[u] + w(u,v)
            d[v] ← d[u] + w(u,v)
            p[v] ← u

for each edge (u,v) ∈ E
    if d[v] > d[u] + w(u,v)
        return false // negative cycle
return true
```

Thuật toán Bellman-Ford

Giải thích

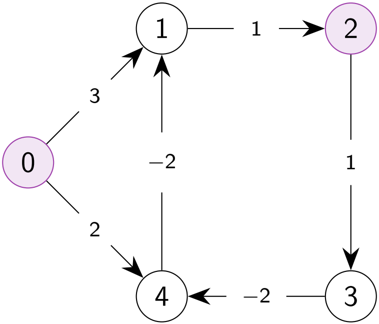
```
12    for each edge (u,v) ∈ E
13       if d[v] > d[u] + w(u,v)
14          return false // negative cycle
15    return true
```

- Dòng 12 → 15: tìm chu trình âm của đồ thị.
  - Nếu tìm thấy trả về false *(đồ thị có chu trình âm và không tìm thấy đường đi ngắn nhất)*.
  - Ngược lại, trả về true *(đồ thị không có chu trình âm và tìm thấy đường đi ngắn nhất)*.

Thuật toán Bellman-Ford

Ví dụ 5

Cho đồ thị G gồm 5 đỉnh. Tìm đường đi ngắn nhất từ $0 \rightsquigarrow 2$.



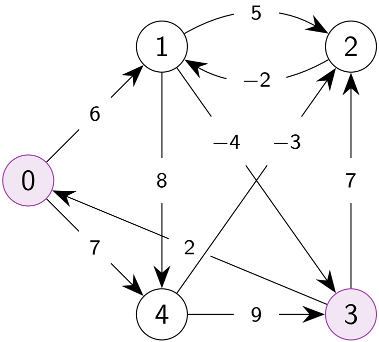
Hình 10: Đồ thị G.

Ứng dụng của thuật toán Bellman-Ford

- Tìm đường đi ngắn nhất giữa 2 đỉnh của đồ thị có trọng số âm.
- Phát hiện chu trình âm trong đồ thị.

Bài tập

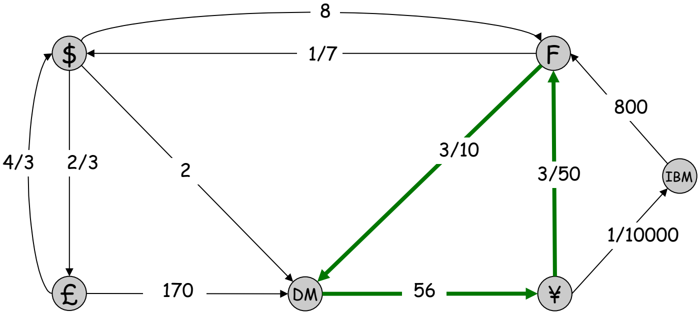
1. Cho đồ thị G gồm 5 đỉnh. Tìm đường đi ngắn nhất từ $0 \rightsquigarrow 3$.



Hình 11: Đồ thị G.

Bài tập

2. Bài toán chuyển đổi ngoại tệ: cho n loại tiền tệ và tỷ giá giữa các loại tiền tệ. Kiểm tra giá trị có bị lệch hay không?



3. Trong ví dụ 3, không cần lặp đến $k = |V| - 1$ lần để tìm đường đi ngắn nhất từ s đến các đỉnh khác. Cải tiến thuật toán Bellman-Ford.

Tài liệu tham khảo

- ADRIAN BONDY, U.S.R. MURTY, *Graph Theory*, Springer, 2008.
- KENNETH H. ROSEN, *Discrete Mathematics and its Applications, 7th Edidion*, McGraw-Hill, 2011.
- NGUYỄN CAM, CHU ĐỨC KHÁNH, *Lý thuyết đồ thị*, NXB Đại học Quốc gia Tp Hồ Chí Minh, 2008.
- NGUYỄN ĐỨC NGHĨA, NGUYỄN TÔ THÀNH, *Toán rời rạc*, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội, 2003.
- REINHARD DIESTEL, *Graph Theory*, Springer, 2005.