Chương 3. ĐƯỜNG ĐI EULER VÀ HAMILTON

ThS. Nguyễn Chí Hiếu

2019

NỘI DUNG

Giới thiệu đường đi và chu trình Euler [1]

Định nghĩa 1

Cho đồ thị G liên thông, khi đó

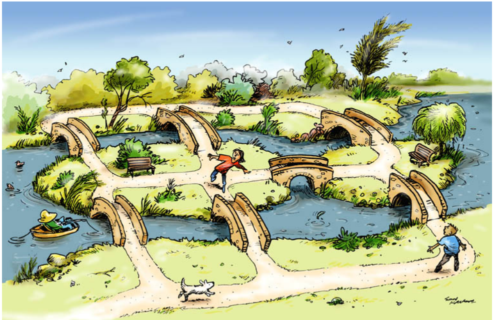
- Một **chu trình Euler** *(Euler circuit)* của G là một chu trình đi qua *tất cả các cạnh* của G.
- Một **đường đi Euler** *(Euler path)* của G là một đường đi có đỉnh bắt đầu khác đỉnh kết thúc đi *qua tất cả các cạnh* của G.
- **Đồ thị Euler** là đồ thị có chứa *ít nhất một chu trình Euler*.

[1] Leonhard Euler (1707–1783)

Giới thiệu đường đi và chu trình Euler

Ví dụ 1

Thành phố Königsberg gồm hai hòn đảo nối với đất liền bởi 7 cây cầu bắc ngang sông Pregel [Hình 1]. Tìm đường đi vòng quanh thành phố với điều kiện *"mỗi cây cầu được đi qua đúng một lần rồi quay về nơi bắt đầu"*.

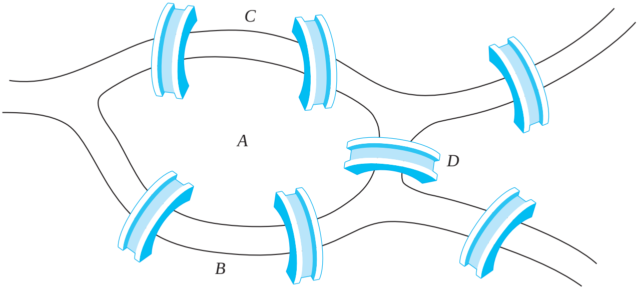


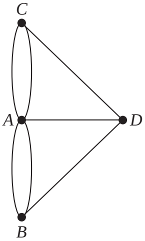
Hình 1: Hình minh họa bài toán 7 cây cầu Königsberg [2].

Giới thiệu đường đi và chu trình Euler

Định lý 1

Định lý Euler 1: *Cho đồ thị vô hướng G liên thông và có hơn một đỉnh. Đồ thị G có chu trình Euler nếu mọi đỉnh của G đều có bậc chẵn.*





Hình 2: Đồ thị biểu diễn bài toán 7 cây cầu Königsberg.

Thuật toán tìm đường đi, chu trình Euler

Ý tưởng

Dựa vào định lý Euler 1: áp dụng trong trường hợp đồ thị ít cạnh. Tại mỗi đỉnh *i* đang duyệt,

- Nếu tìm được đỉnh *j* kề với *i*:
  - Đánh dấu (xóa) cạnh *ij* đã duyệt.
  - Gọi đệ quy thuật toán tìm kiếm chu trình Euler tại đỉnh *j*. Áp dụng thuật toán DFS.
- Thêm đỉnh *i* vào đường đi.

Chú ý

Kiểm tra đồ thị Euler thỏa 2 điều kiện sau:

- Đồ thị liên thông,
- Mọi đỉnh trong đồ thị đều có bậc chẵn.

Thuật toán tìm đường đi, chu trình Euler

Thuật toán 1: **Euler(G, i)**

- Đầu vào: đồ thị G, đỉnh i đang duyệt.
- Đầu ra: chu trình C của đồ thị.

```
1    for each j ∈ V
2        if edge(i,j) ∈ E
3            RemoveEdge(i,j)
4            Euler(G,j)
5    C ← C ∪ {i}
```

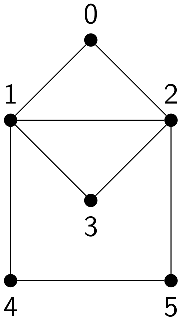
Giải thích

- Dòng 1 ← 2: tìm đỉnh j kề với đỉnh i
- Dòng 3: gọi hàm xóa cạnh nối đỉnh i và j.
- Dòng 5: gọi đệ quy hàm tìm chu trình Euler bắt đầu tại đỉnh j.
- Dòng 6: thêm đỉnh i vào chu trình C.

Thuật toán tìm đường đi, chu trình Euler

Ví dụ 2

Cho đồ thị vô hướng G liên thông và ma trận kề M. Tìm chu trình Euler của đồ thị G.



(a) Đồ thị G.

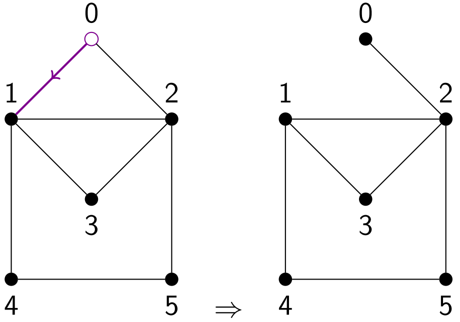
$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(b) Ma trận kề M.

Hình 3: Đồ thị liên thông G và ma trận kề M.

Thuật toán tìm đường đi, chu trình Euler

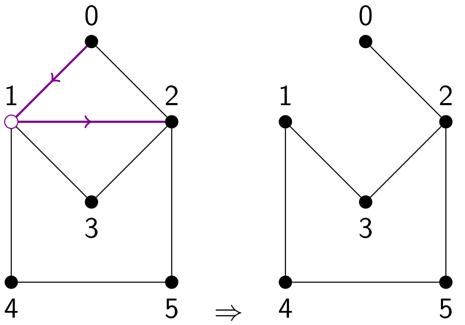
- Xét đỉnh 0, chọn đỉnh kề là 1.
- Đường đi: $0 \to 1$.



$$M = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Thuật toán tìm đường đi, chu trình Euler

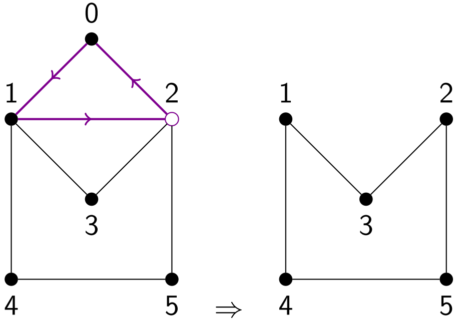
- Xét đỉnh 1, chọn đỉnh kề là 2.
- Đường đi: $0 \to 1 \to 2$.



$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{0} & 1 & 1 & 0 \\ 1 & \mathbf{0} & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Thuật toán tìm đường đi, chu trình Euler

- Xét đỉnh 2, chọn đỉnh kề là 0.
- Đường đi: $0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 0$. *Tạo thành chu trình C:* $0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 0$.

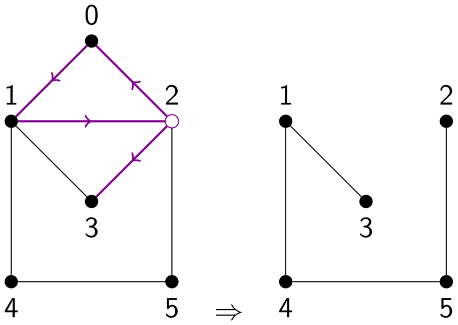


$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Thuật toán tìm đường đi, chu trình Euler

Mở rộng chu trình C: tìm một đỉnh kề với một trong các đỉnh trong chu trình C.

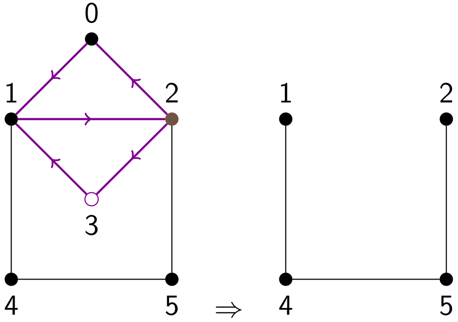
- Xét đỉnh 0 (đỉnh cuối chu trình): không có đường đi đến các đỉnh khác trong đồ thị G.
- Tiếp tục xét đỉnh 2: tìm thấy đỉnh 3 kề với đỉnh 2, chọn đỉnh 3.
- Đường đi: $0 \to 1 \to 2 \to 3$.



$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Thuật toán tìm đường đi, chu trình Euler

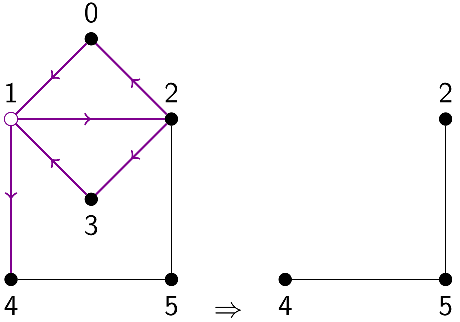
- Xét đỉnh 3, chọn đỉnh kề là 1.
- Đường đi: $0 \to 1 \to 2 \to 3 \to 1$.



$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Thuật toán tìm đường đi, chu trình Euler

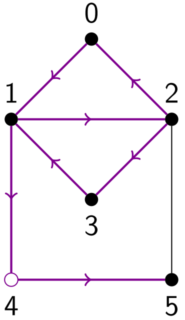
- Xét đỉnh 1, chọn đỉnh kề là 4.
- Đường đi: $0 \to 1 \to 2 \to 3 \to 1 \to 4$.



$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Thuật toán tìm đường đi, chu trình Euler

- Xét đỉnh 4, chọn đỉnh kề là 5.
- Đường đi: $0 \to 1 \to 2 \to 3 \to 1 \to 4 \to 5$.

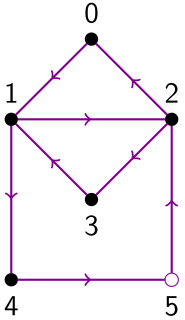


$\Rightarrow$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix}$$

Thuật toán tìm đường đi, chu trình Euler

- Xét đỉnh 5, chọn đỉnh kề là 2.
- Đường đi: $0 \to 1 \to 2 \to 3 \to 1 \to 4 \to 5 \to 2$.



$$\Rightarrow \qquad M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- **Chu trình Euler**: $0 \to 1 \to 2 \{\to 3 \to 1 \to 4 \to 5 \to 2\} \to 0$.

Giới thiệu đường đi và chu trình Hamilton [3]

Định nghĩa 2

Cho đồ thị G liên thông và có hơn một đỉnh, khi đó

- Một **chu trình Hamilton** *(Hamilton circuit)* của G là một chu trình đi qua *tất cả các đỉnh* của G, mỗi đỉnh đúng một lần.
- Một **đường đi Hamilton** *(Hamilton path)* của G là một đường đi có đỉnh bắt đầu khác đỉnh kết thúc và qua *tất cả các đỉnh* của G, mỗi đỉnh đúng một lần.

[3] William Rowan Hamilton (1805 - 1865)

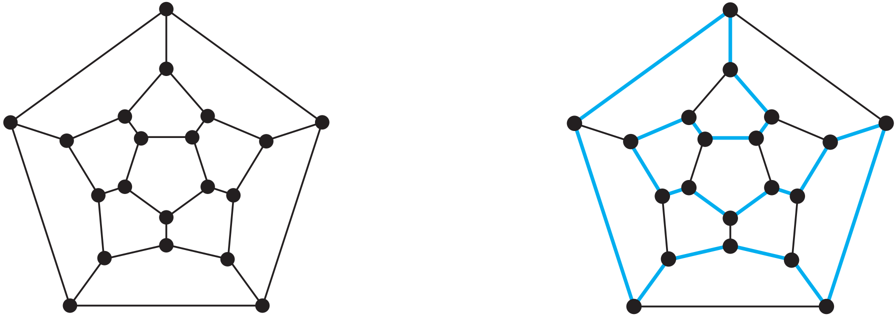
Giới thiệu đường đi và chu trình Hamilton

Ví dụ 3

Trò chơi Icosian [Hình 12] là một mặt phẳng gồm 12 hình ngũ giác kết hợp với nhau. Các đỉnh trên mặt phẳng được đánh thứ tự. Người chơi sẽ tìm cách nối tất cả các đỉnh sao cho mỗi đỉnh chỉ đi qua một lần.

Hình 12: Hình minh họa trò chơi Icosian của Hamilton.

Giới thiệu đường đi và chu trình Hamilton



Hình 13: Hình minh họa trò chơi Icosian và lời giải.

Thuật toán tìm đường đi, chu trình Hamilton

Ý tưởng

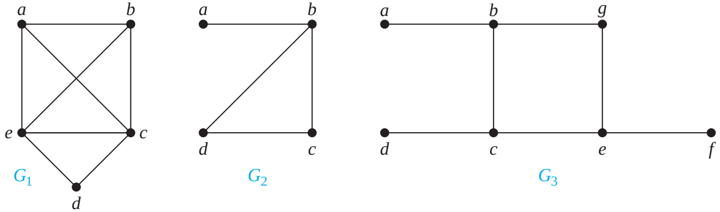
Áp dụng thuật toán **quay lui** *(Backtracking)*. Tại mỗi đỉnh i đang duyệt,

- Nếu tìm được đỉnh j kề với i và chưa được duyệt thì thực hiện:
  - Đánh dấu đỉnh j đã được duyệt
  - Gọi đệ quy thuật toán tìm kiếm chu trình Hamilton tại đỉnh j
  - Hủy đánh dấu đỉnh j đã được duyệt và thử với đỉnh khác.
- Thêm đỉnh i vào đường đi.

Thuật toán tìm đường đi, chu trình Hamilton

Ví dụ 4

Cho đồ thị G_1, G_2 và G_3 như hình sau:



Hình 14: Đồ thị G_1, G_2 và G_3.

- G_1 có chu trình Hamilton.
- G_2 không có chu trình Hamilton nhưng có đường đi Hamilton.
- G_3 không có chu trình và đường đi Hamilton.

Thuật toán tìm đường đi, chu trình Hamilton

Thuật toán 2: **Hamilton(G, i, count, visited, circuit)**

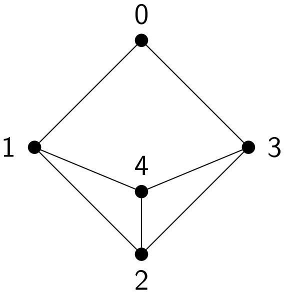
- Đầu vào: đồ thị G, đỉnh i đang duyệt, tổng số đỉnh đã duyệt count, mảng đánh dấu đỉnh đã duyệt visited, chu trình circuit.
- Đầu ra: chu trình C của đồ thị.

```
if edge(i, C[0]) ∈ E and count = |V|
    PrintCircuit()
foreach vertice j ∈ V
    if visited[j] = false and edge (i,j) ∈ E
        count ← count + 1
        visited[j] ← true
        Hamilton(G, j, count, visited, C)
        count ← count - 1
        visited[j] ← false
C ← C ∪ {i}
```

Thuật toán tìm đường đi, chu trình Hamilton

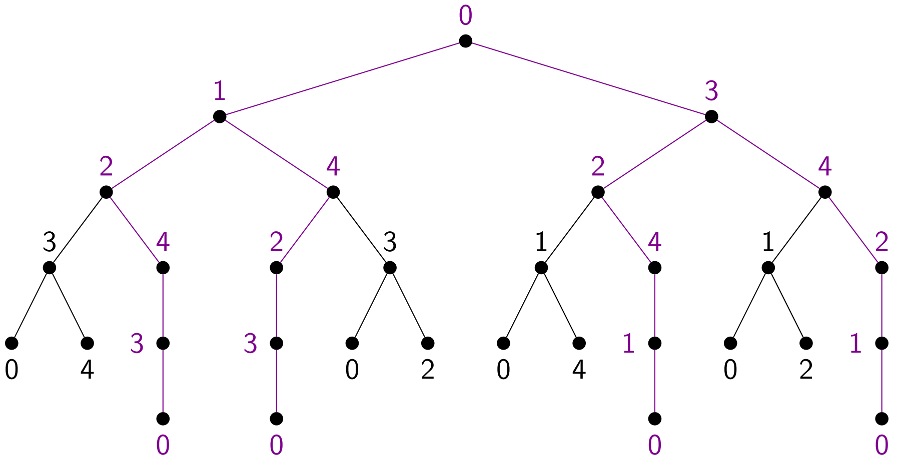
Ví dụ 5

Cho đồ thị G, tìm chu trình Hamilton của đồ thị.



Hình 15: Đồ thị G.

Thuật toán tìm đường đi, chu trình Hamilton

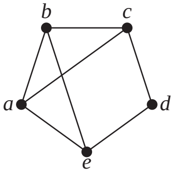


Hình 16: Minh hoạ thuật toán tìm chu trình Hamilton.

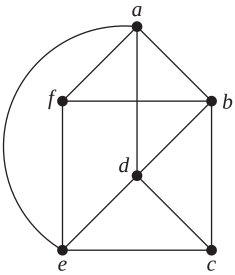
- Chu trình: {0 1 2 4 3 0}, {0 1 4 2 3 0}, {0 3 2 4 1 0}, {0 3 4 2 1 0}

Bài tập

1. Xác định xem có tồn tại chu trình Euler trong các đồ thị sau hay không? Vẽ chu trình Euler của đồ thị nếu có.



a)

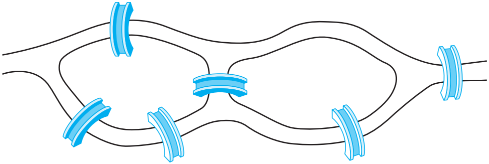


b)

2. Xác định xem các đồ thị bài tập 1 có đường đi Euler hay không? Vẽ đường đi Euler của đồ thị nếu có.

Bài tập

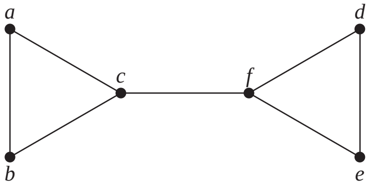
3. Xác định xem một người có thể đi qua những cây cầu với điều kiện mỗi cây cầu được đi qua đúng một lần rồi quay về nơi bắt đầu.



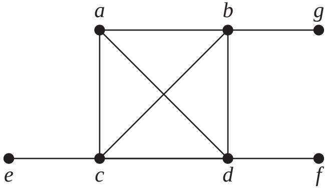
Bài tập

4. Xác định xem có tồn tại chu trình Hamilton trong các đồ thị sau hay không? Vẽ chu trình Hamilton của đồ thị nếu có.

a)



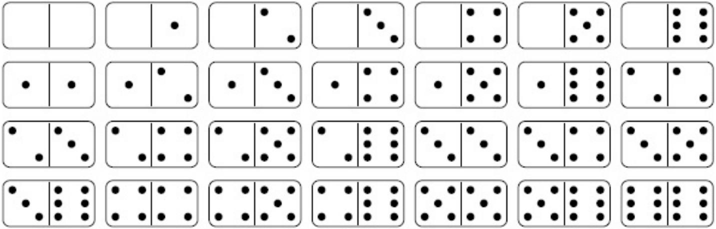
b)



5. Xác định xem các đồ thị bài tập 1 có đường đi Hamilton hay không? Vẽ đường đi Hamilton của đồ thị nếu có.

Bài tập

6. Có thể sắp xếp 28 quân domino thành một vòng tròn theo luật chơi domino được hay không?

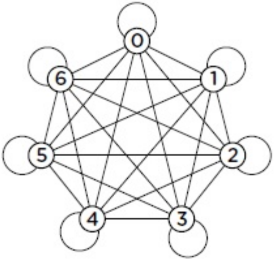


Hình 17: Danh sách 28 quân domino.

Bài tập

Gợi ý

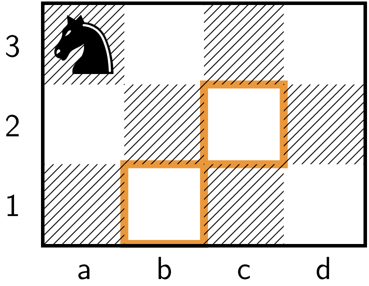
Nếu xem các số $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ là các đỉnh của một đồ thị, thì mỗi quân domino là một cạnh nối. Quân domino có 2 phần giống nhau là một khuyên. Khi đó, đồ thị được biểu diễn như sau:



Hình 18: Đồ thị giữa các đỉnh của quân domino.

Bài tập

7. **Mã đi tuần** *(Knight tour)* [4] là bài toán di chuyển quân mã trên bàn cờ Vua. Quân mã được đặt ở một ô trên một bàn cờ trống nó phải di chuyển theo quy tắc của cờ vua để đi qua mỗi ô trên bàn cờ đúng một lần.
   Cho bàn cờ kích thước 3×4, áp dụng thuật toán tìm đường đi Hamilton để xác định hành trình di chuyển quân mã.



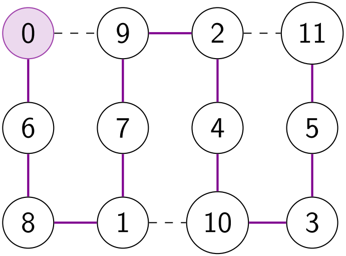
[4] https://en.wikipedia.org/wiki/Knights_tour

Bài tập

Gợi ý

Để đơn giản, mỗi ô trong bàn cờ được biểu diễn tương ứng với một đỉnh trong đồ thị và các bước di chuyển của quân mã giữa hai ô tương ứng với một cạnh của đồ thị. Bước di chuyển được đánh số bắt đầu từ 0.

0	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11



Tài liệu tham khảo

ADRIAN BONDY, U.S.R. MURTY, *Graph Theory*, Springer, 2008.

KENNETH H. ROSEN, *Discrete Mathematics and its Applications, 7th Edidion*, McGraw-Hill, 2011.

NGUYỄN CAM, CHU ĐỨC KHÁNH, *Lý thuyết đồ thị*, NXB Đại học Quốc gia Tp Hồ Chí Minh, 2008.

NGUYỄN ĐỨC NGHĨA, NGUYỄN TÔ THÀNH, *Toán rời rạc*, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội, 2003.

REINHARD DIESTEL, *Graph Theory*, Springer, 2005.