

Chương 1. GIỚI THIỆU ĐỒ THỊ

ThS. Nguyễn Chí Hiếu

2019

NỘI DUNG

1 Các khái niệm cơ bản

- Đồ thị
- Tính kề trong đồ thị
- Độ tuổi
- Đường đi, chu trình

2 Biểu diễn đồ thị trong máy tính

- Ma trận kề
- Danh sách cạnh
- Danh sách kề

3 Ứng dụng của đồ thị

Đồ thị

Định nghĩa 1

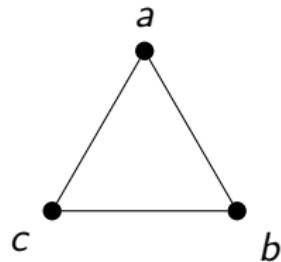
Đồ thị (graph) $G = (V, E)$ là một bộ gồm hai tập hợp E và V . Trong đó,

- $V \neq \emptyset$ là tập hợp các **đỉnh** (*vertices*) của G .
- E là tập hợp các **cạnh/cung** (*edges*) của G . Mỗi phần tử là một cặp có thứ tự của hai đỉnh.

Đồ thị

Ví dụ 1

Cho đồ thị G gồm 3 đỉnh như sau:



Hình 1: Đồ thị G .

- Tập đỉnh $V = \{a, b, c\}$.
- Tập cạnh $E = \{ab, ac, bc\}$.

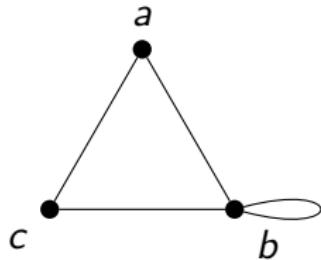
Đồ thị

Định nghĩa 2

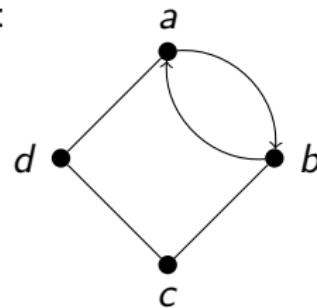
- Cạnh tương ứng với 2 đỉnh trùng nhau gọi là **vòng/khuyên** (*loop*).
- Hai cạnh phân biệt cùng tương ứng với một cặp đỉnh gọi là **2 cạnh song song** (*parallel*).

Ví dụ 2

Cho 2 đồ thị G_1 và G_2 gồm các đỉnh như sau:



Hình 2: Đồ thị G_1 có vòng.



Hình 3: Đồ thị G_2 có cạnh song song.

Đồ thị

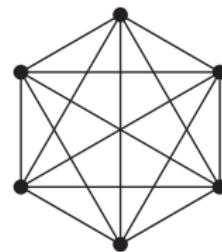
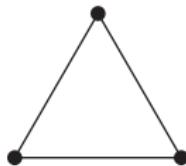
Các loại đồ thị

- Đồ thị không có vòng và không có cạnh song song được gọi là **đơn đồ thị** (*simple graph*). Ngược lại, là **đa đồ thị** (*multigraph*).
- Đồ thị mà mọi cặp đỉnh đều kề nhau được gọi là **đồ thị đầy đủ** (*complete graph*). Ký hiệu K_n .
- Đồ thị **phân đôi/lưỡng phân** (*bipartite graph*) là đồ thị mà tập đỉnh V của nó có thể chia thành hai tập con V_1 và V_2 phân biệt. Mỗi cạnh sẽ nối một đỉnh trong tập V_1 với một đỉnh trong tập V_2 .

Đồ thị

Ví dụ 3

Đồ thị đầy đủ.

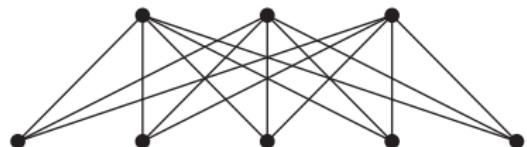
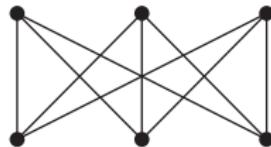


Hình 4: Đồ thị đầy đủ K_3 và K_6 .

Đồ thị

Ví dụ 4

Đồ thị phân đôi với 2 tập đỉnh.



Hình 5: Đồ thị phân đôi $K_{3,3}$ và $K_{3,3}$.

Đồ thị

Định nghĩa 3

Hai đồ thị G và H được gọi là **đẳng cấu/cùng cấu hình** (*isomorphism*) với nhau nếu tồn tại một song ánh $f : V(G) \rightarrow V(H)$ sao cho:

$$\{u, v\} \in E(G) \Leftrightarrow \{f(u), f(v)\} \in E(H).$$

Đồ thị

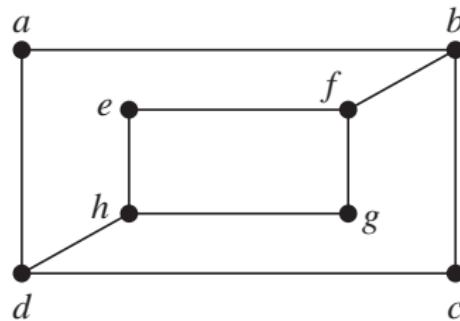
Xác định hai đồ thị có đẳng cấu không?

- Cùng số đỉnh
- Cùng số cạnh
- Độ lớn các đỉnh tương ứng của các đơn đồ thị giống nhau

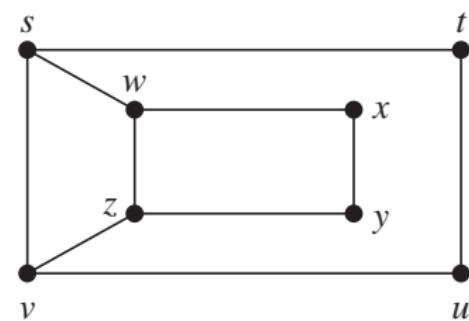
Đồ thị

Ví dụ 5

Cho đồ thị G và H . Xác định hai đồ thị có đẳng cấu với nhau?



G



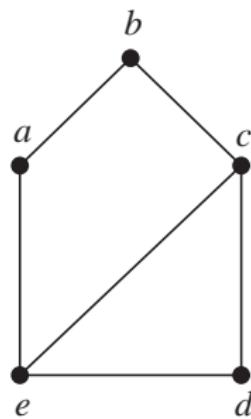
H

Hình 6: Đồ thị G và H .

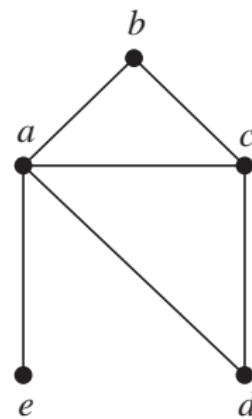
Đồ thị

Ví dụ 6

Cho đồ thị G và H . Xác định hai đồ thị có đẳng cấu với nhau?



G



H

Hình 7: Đồ thị G và H .

Tính kè trong đồ thị

Tính chất

Cho đồ thị vô hướng $G = (V, E)$

- Nếu cạnh e tương ứng với hai đỉnh u, v thì ta nói u, v là **hai đỉnh kè** (*adjacent*) hay **cạnh e tối/liên thuộc** (*incident*) với các đỉnh u, v .
- Hai đỉnh u, v được gọi là **kè nhau** nếu chúng có **chung một cạnh liên thuộc**.
- Hai cạnh được gọi là **kè nhau** nếu chúng có **một đỉnh chung**.

Bậc của đỉnh

Định nghĩa 4

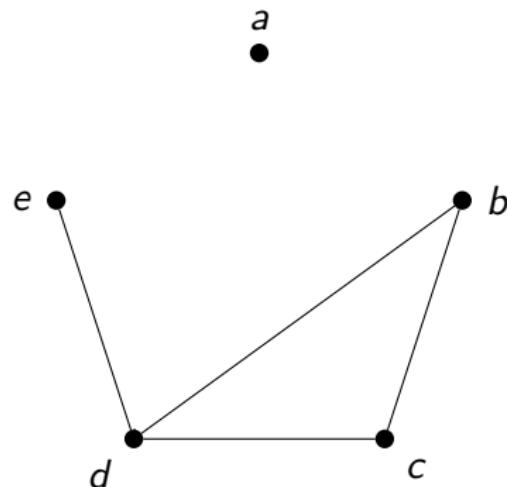
Xét một đỉnh v trong đồ thị G . Số cạnh tới v , trong đó mỗi vòng tại v được kể là 2 cạnh tới v , gọi là **bậc** (*degree*) của v . Ký hiệu là $\deg(v)$.

- Đỉnh có bậc 0 gọi là **đỉnh cô lập** (*isolated vertex*).
- Đỉnh có bậc 1 gọi là **đỉnh treo** (*pendant vertex*).
- Đồ thị mà mọi đỉnh là đỉnh cô lập gọi là **đồ thị rỗng** (*null graph*).

Bậc của đỉnh

Ví dụ 7

Cho đồ thị G gồm các đỉnh như sau:



Hình 8: Đồ thị G .

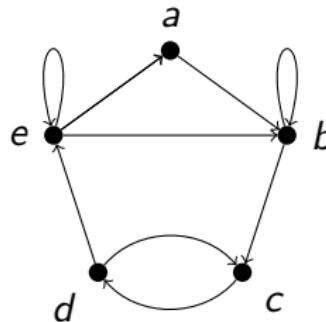
Bậc của đỉnh

Định nghĩa 5

Trong đồ thị có hướng, **bậc vào** của đỉnh v ký hiệu là $\deg^+(v)$ là số các cạnh có đỉnh cuối là v . Ngược lại, **bậc ra** của đỉnh v ký hiệu là $\deg^-(v)$ là số các cạnh có đỉnh đầu là v .

Ví dụ 8

Cho đồ thị G gồm 5 đỉnh như sau:



Hình 9: Đồ thị G .

Bậc của đỉnh

Định lý 1

Trong đồ thị vô hướng, tổng số bậc của các đỉnh bằng hai lần số cạnh của nó.

$$2 \cdot |E| = \sum_{v \in V} \deg(v). \quad (1)$$

Định lý 2

Tổng số bậc của các đỉnh bậc lẻ trong đồ thị đều là số chẵn.

Định lý 3

Tổng số bậc ra bằng tổng số bậc vào của các đỉnh và bằng số cạnh của đồ thị.

$$\sum_{v \in V} \deg^-(v) = \sum_{v \in V} \deg^+(v) = |E|. \quad (2)$$

Đường đi, chu trình

Định nghĩa 6

Cho đồ thị có hướng $G = (V, E)$. Khi đó,

- ① **Đường đi/dây chuyền (path)** có chiều dài k nối hai đỉnh u, v là một dây các đỉnh và các cạnh liên tiếp nhau

$$v_0 e_1 v_1 \cdots v_{k-1} e_k v_k.$$

Trong đó,

$$\begin{aligned} v_0 &= u, \\ v_k &= v, \\ e_i &= v_{i-1} v_i, 1 \leq i \leq k. \end{aligned}$$

- ② Đường đi không có đỉnh nào xuất hiện quá một lần gọi là **đường đi sơ cấp**.

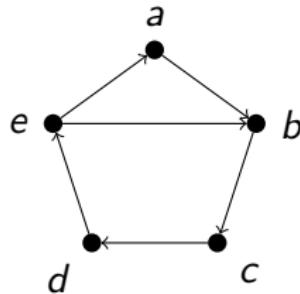
Đường đi, chu trình

Định nghĩa 7

Chu trình (*cycle/circuit*) là đường đi bắt đầu và kết thúc tại cùng một đỉnh.

Ví dụ 9

Cho đồ thị G gồm các đỉnh như sau:



- Chu trình $abcdea$
- Đường đi $abcdeb$

Hình 10: Đồ thị G .

Biểu diễn đồ thị trong máy tính

Các cấu trúc dữ liệu thường được biểu diễn một đồ thị:

- Ma trận kề (*Adjacency matrix*).
- Danh sách cạnh (*Edge list*).
- Danh sách kề (*Adjacency list*).

Ma trận kề

Định nghĩa 8 (Ma trận kề)

Cho đồ thị $G = (V, E)$ có đỉnh là v_1, v_2, \dots, v_n . **Ma trận kề/ma trận liên kết (adjacency matrix)** của G là một ma trận vuông kích thước $n \times n$. Trong đó, giá trị mỗi phần tử $M_{i,j}$ của ma trận được xác định bởi

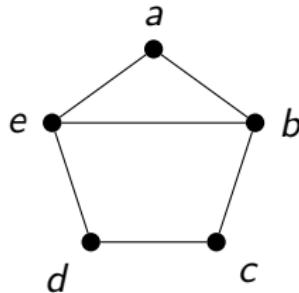
$$M_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{nếu tồn tại cạnh nối } v_i \text{ và } v_j \\ 0, & \text{ngược lại.} \end{cases}$$

với $1 \leq i, j \leq n$.

Ma trận kề

Ví dụ 10

Cho đồ thị vô hướng G_1 , biểu diễn đồ thị bằng ma trận kề.



$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Đồ thị vô hướng G_1 .

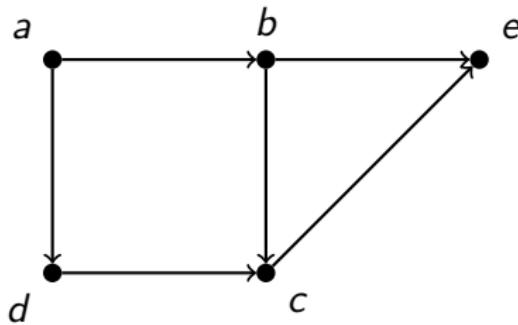
(b) Ma trận kề M_1 .

Hình 11: Đồ thị vô hướng G_1 và ma trận kề M_1 biểu diễn đồ thị này.

Ma trận kề

Ví dụ 11

Cho đồ thị có hướng G_2 , biểu diễn đồ thị bằng ma trận kề.



$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Đồ thị có hướng G_2 .

(b) Ma trận kề M_2 .

Hình 12: Đồ thị có hướng G_2 và ma trận kề M_2 biểu diễn đồ thị này.

Biểu diễn đồ thị trong máy tính

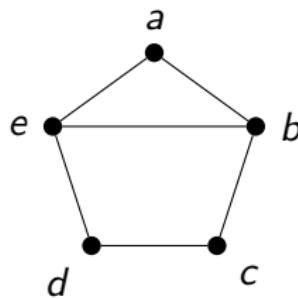
Định nghĩa 9 (Danh sách cạnh)

- Mỗi phần tử của danh sách là một cặp đỉnh (u, v) tương ứng với một cạnh của đồ thị.
- Có thể biểu diễn danh sách cạnh bằng mảng hay danh sách liên kết.

Danh sách cạnh

Ví dụ 12

Cho đồ thị vô hướng G_1 , biểu diễn đồ thị bằng danh sách cạnh.

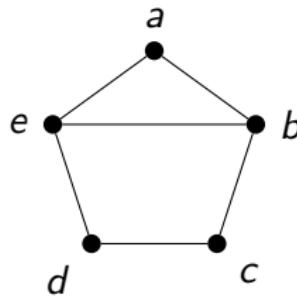


Hình 13: Đồ thị vô hướng G_1 .

Danh sách cạnh

Ví dụ 12

Cho đồ thị vô hướng G_1 , biểu diễn đồ thị bằng danh sách cạnh.



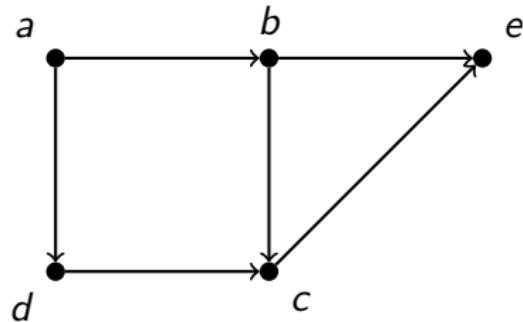
Hình 13: Đồ thị vô hướng G_1 .



Biểu diễn đồ thị trong máy tính

Ví dụ 13

Cho đồ thị vô hướng G_2 , Biểu diễn đồ thị bằng danh sách cạnh.



Hình 14: Đồ thị có hướng G_2 .

Biểu diễn đồ thị trong máy tính

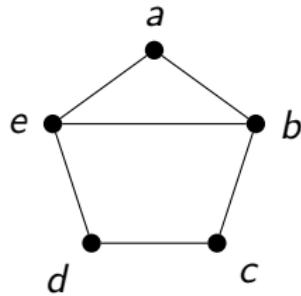
Định nghĩa 10 (Danh sách kề)

- Mỗi đỉnh của đồ thị được biểu diễn bởi một danh sách các đỉnh kề với nó.
- Có thể biểu diễn danh sách kề bằng mảng hay danh sách liên kết.

Biểu diễn đồ thị trong máy tính

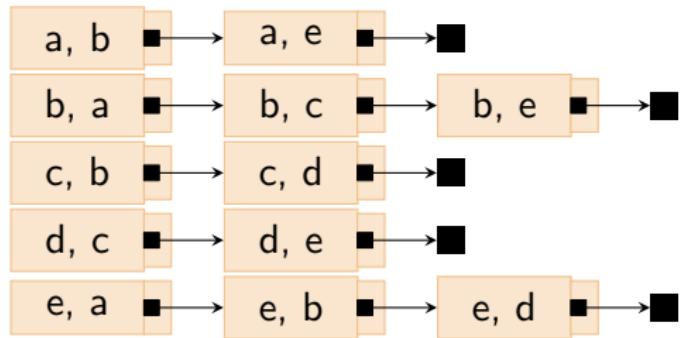
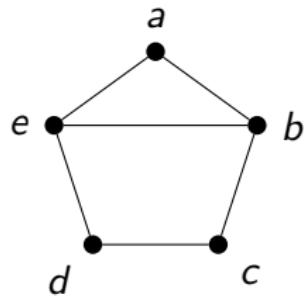
Ví dụ 14

Cho đồ thị vô hướng G_1 , biểu diễn đồ thị bằng danh sách kề.



Hình 15: Đồ thị vô hướng G_1 .

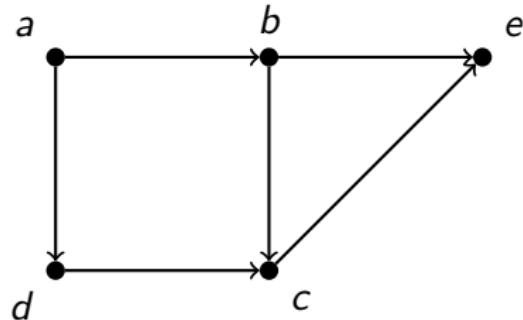
Biểu diễn đồ thị trong máy tính



Biểu diễn đồ thị trong máy tính

Ví dụ 15

Cho đồ thị vô hướng G_2 , biểu diễn đồ thị bằng danh sách kề.



Hình 16: Đồ thị có hướng G_2 .

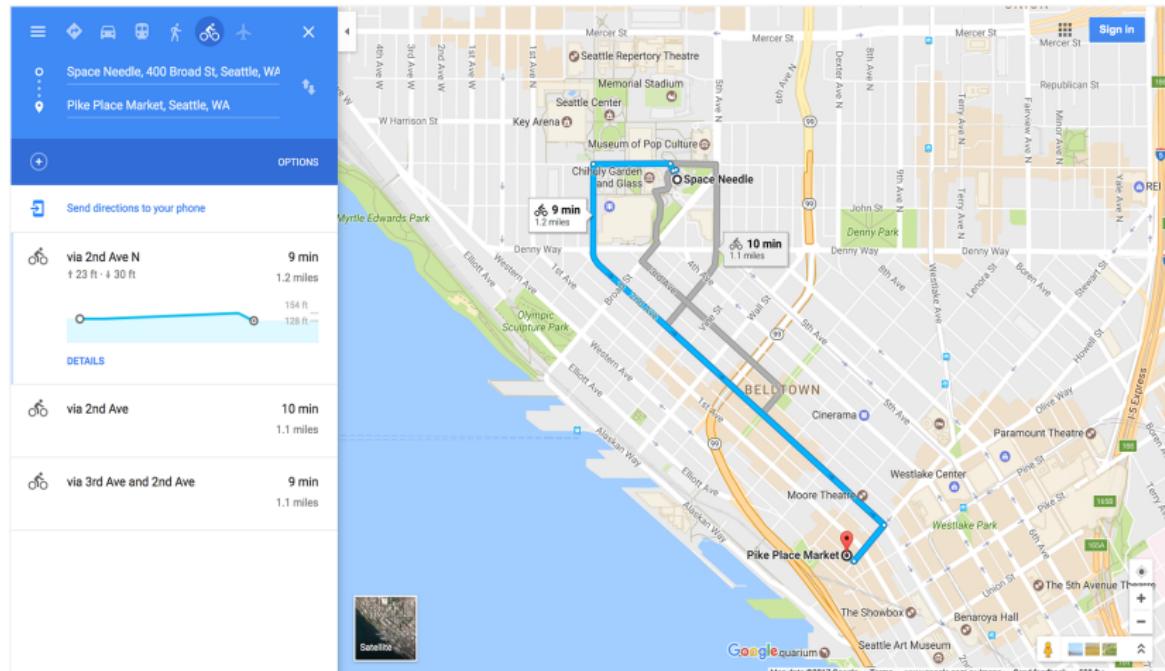
Biểu diễn đồ thị trong máy tính

Nhận xét

Cần chọn cấu trúc dữ liệu phù hợp để tối ưu về thời gian và không gian.

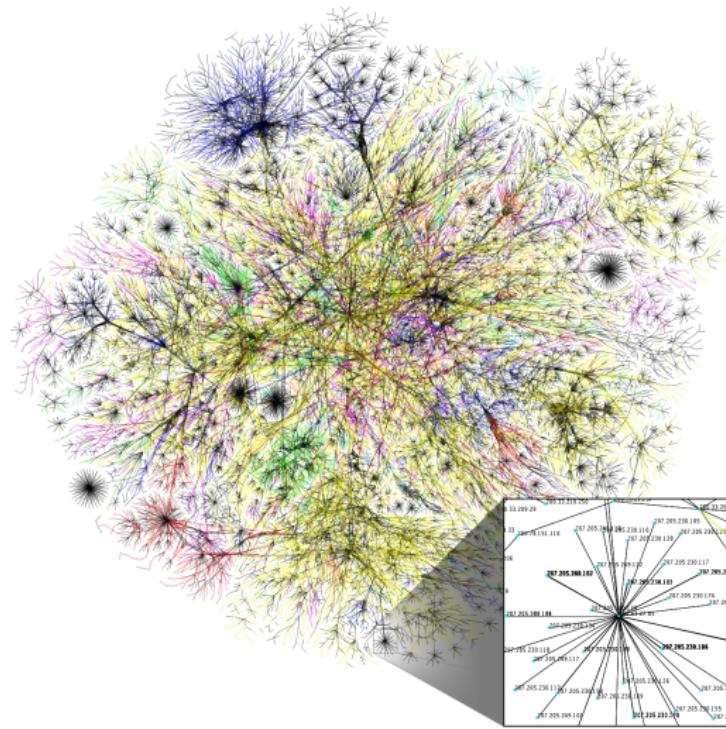
- Trường hợp đồ thị thưa (*ít cạnh*)?
- Trường hợp đồ thị dày (*nhiều cạnh*)?

Ứng dụng của đồ thị



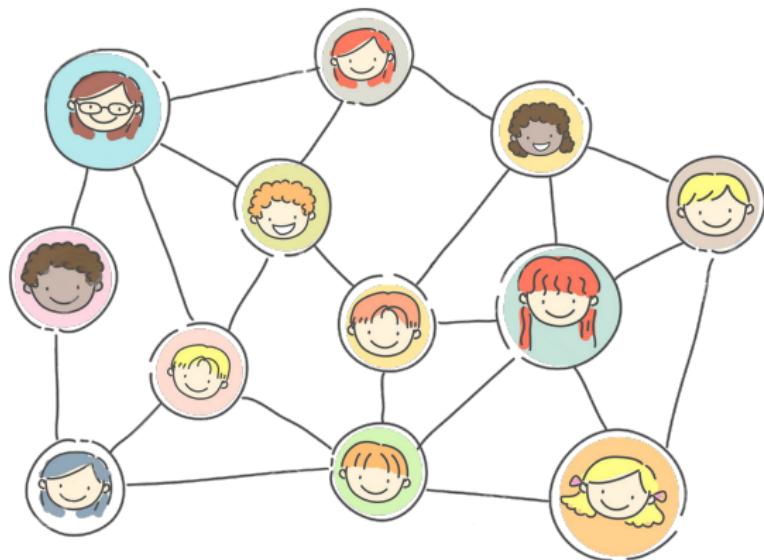
Hình 17: Bản đồ Google Map.

Ứng dụng của đồ thị



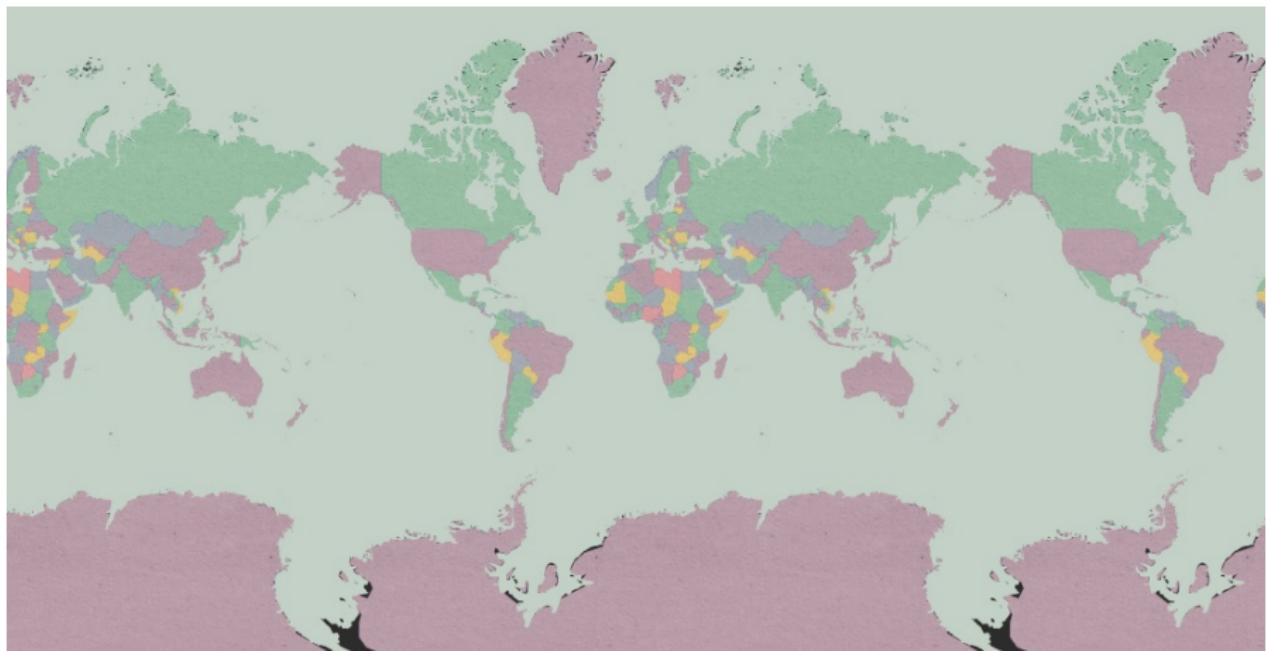
Hình 18: Internet.

Ứng dụng của đồ thị



Hình 19: Mạng xã hội.

Ứng dụng của đồ thị

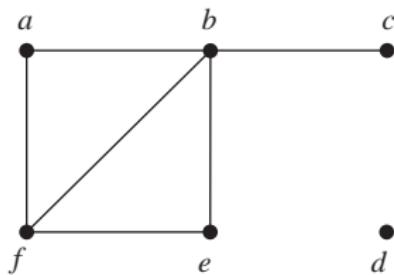


Hình 20: Tô màu bản đồ.

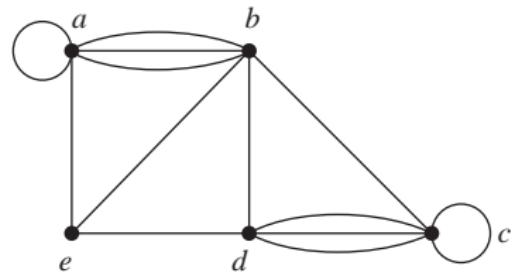
Bài tập

① Cho đồ thị G , xác định bậc của tất cả các đỉnh.

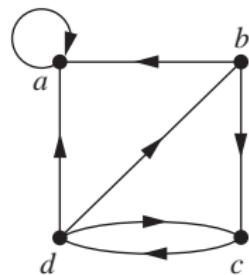
a)



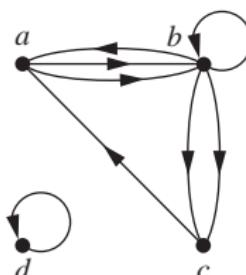
b)



e)



d)

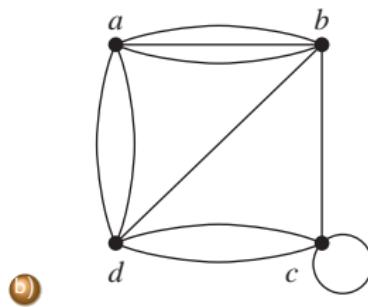
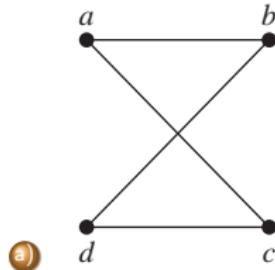


② Vẽ một đồ thị có 4 đỉnh với bậc các đỉnh là 3, 2, 2, 1.

Bài tập

③ Cho đồ thị vô hướng G , biểu diễn đồ thị bằng:

- ▶ Ma trận kề.
- ▶ Danh sách cạnh.
- ▶ Danh sách kề.



Bài tập

- ④ Cho ma trận kề M biểu diễn đường đi giữa các đỉnh trong đồ thị. Vẽ đồ thị tương ứng với ma trận M .

a)

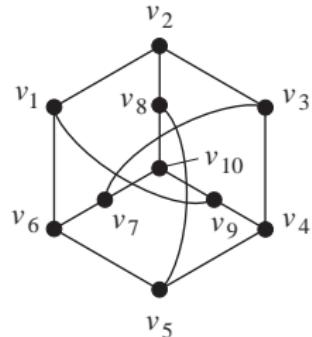
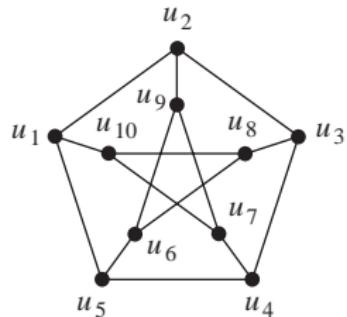
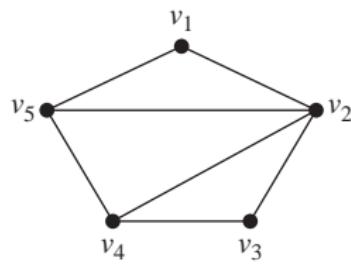
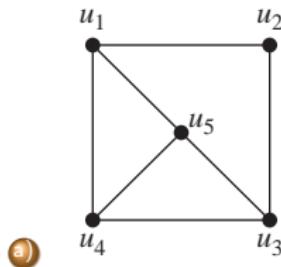
$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

b)

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Bài tập

- 5 Xác định hai đồ thị có đẳng cấu với nhau hay không?



Tài liệu tham khảo

-  ADRIAN BONDY, U.S.R. MURTY, *Graph Theory*, Springer, 2008.
-  KENNETH H. ROSEN, *Discrete Mathematics and its Applications*, 7th Edition, McGraw-Hill, 2011.
-  NGUYỄN ĐỨC NGHĨA, NGUYỄN TÔ THÀNH, *Toán rời rạc*, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội, 2003.
-  NGUYỄN CAM, CHU ĐỨC KHÁNH, *Lý thuyết đồ thị*, NXB Đại học Quốc gia Tp Hồ Chí Minh, 2008.
-  REINHARD DIESTEL, *Graph Theory*, Springer, 2005.