Chương 2.
VỊ TỪ, LƯỢNG TỪ

2017

NỘI DUNG

1. Vị từ, lượng từ

2. Nguyên lý quy nạp

Vị từ và lượng từ

Định nghĩa 1 (Vị từ)

Một vị từ/hàm mệnh đề là một khẳng định $p(x, y, \ldots)$ trong đó có chứa một số biến $x, y, \ldots$ lấy giá trị trong những tập hợp cho trước $A, B, \ldots$ sao cho

- Bản thân $p(x, y, \ldots)$ không phải mệnh đề.
- Nếu thay $x, y, \ldots$ bởi nững phần tử cố định nhưng tùy ý $a \in A, b \in B, \ldots$ ta sẽ được một mệnh đề $p(a, b, \ldots)$, nghĩa là chân trị của nó hoàn toàn xác định.

Vị từ và lượng từ

Định nghĩa 2 (Vị từ)

Giả sử $p(x)$ là một vị từ theo biến $x \in \mathbb{A}$. Ba trường hợp xảy ra:

- **Trường hợp 1:** thay x bởi một phần tử *a tùy ý*, ta được mệnh đề $p(a)$ *đúng*.
- **Trường hợp 2:** thay x bởi *một số phần tử* $a \in \mathbb{A}$ thì mệnh đề (a) *đúng*, *một số phần tử* $b \in \mathbb{A}$ thì mệnh đề $p(b)$ *sai*.
- **Trường hợp 3:** thay x bởi phần tử *a tùy ý*, ta được mệnh đề $p(a)$ *sai*.

Vị từ, lượng từ

Định nghĩa 3 (Lượng từ)

Cho vị từ $p(x)$ theo biến $x \in A$. Ta có

- Mệnh đề $\forall x \in A, p(x)$ được gọi là lượng từ hóa của vị từ $p(x)$ bởi lượng từ *"với mọi"* ($\forall$).
- Mệnh đề $\exists x \in A, p(x)$ được gọi là lượng từ hóa của vị từ $p(x)$ bởi lượng từ *"tồn tại"* ($\exists$).

Vị từ, lượng từ

- Xét vị từ $\forall x \in A, p(x)$
  - Nếu trường hợp 1 xảy ra thì mệnh đề $\forall x \in A, p(x)$ đúng.
  - Nếu trường hợp 2 hay 3 xảy ra thì $\forall x \in A, p(x)$ sai.
- Xét vị từ $\exists x \in A, p(x)$
  - Nếu trường hợp 1 hay 2 xảy ra thì $\exists x \in A, p(x)$ đúng.
  - Nếu trường hợp 3 xảy ra thì mệnh đề $\exists x \in A, p(x)$ sai.

Vị từ, lượng từ

Định lý 1 (Luật De Morgan)

Cho $p(x)$ là một vị từ theo biến $x \in A$. Ta có

(i) $\neg(\forall x \in A, p(x)) \Leftrightarrow (\exists x \in A, \neg p(x))$.

(ii) $\neg(\exists x \in A, p(x)) \Leftrightarrow (\forall x \in A, \neg p(x))$.

Ví dụ 1

- Cho phát biểu *"Mọi sinh viên đều tốt"*.
- Phủ định của phát biểu trên là:
  - *"Không phải mọi sinh viên đều tốt"*.
  - *"Tồn tại một sinh viên không tốt"*.

Vị từ, lượng từ

Định lý 2

Cho $p(x)$ và $q(x)$ là hai vị từ theo biến $x \in A$. Ta có

(i) $[\forall x \in A, p(x) \wedge q(x)] \Leftrightarrow [(\forall x \in A, p(x)) \wedge (\forall x \in A, q(x))]$.

(ii) $[\exists x \in A, p(x) \vee q(x)] \Leftrightarrow [(\exists x \in A, p(x)) \vee (\exists x \in A, q(x))]$.

(iii) $[\forall x \in A, p(x) \vee q(x)] \Leftarrow [(\forall x \in A, p(x)) \vee (\forall x \in A, q(x))]$.

(iv) $[\exists x \in A, p(x) \wedge q(x)] \Rightarrow [(\exists x \in A, p(x)) \wedge (\exists x \in A, q(x))]$.

Vị từ, lượng từ

Định lý 3

Cho vị từ $p(x, y)$ *theo các biến* $x \in A, b \in B$. *Ta có*

(i) $[\forall x \in A, \forall y \in B, p(x, y)] \Leftrightarrow [\forall y \in B, \forall x \in A, p(x)]$.

(ii) $[\exists x \in A, \exists y \in B, p(x, y)] \Leftrightarrow [\exists y \in B, \exists x \in A, p(x)]$.

(iii) $[\exists x \in A, \forall y \in B, p(x, y)] \Rightarrow [\forall y \in B, \exists x \in A, p(x)]$.

Vị từ, lượng từ

Định lý 4

Trong một mệnh đề lượng từ hóa từ một vị từ theo nhiều biến độc lập, nếu ta hoán vị hai lượng từ đứng cạnh nhau thì:

- *Mệnh đề mới vẫn còn tương đương logic với mệnh đề cũ nếu hai lượng từ cùng loại.*
- *Mệnh đề mới sẽ là hệ quả logic của mệnh đề cũ nếu hai lượng từ trước khi hoán vị có dạng* $\exists\forall$

Vị từ, lượng từ

Ví dụ 2

Xét hai phát biểu:

- "Mọi người đều yêu thương một ai đó".
- "Tồn tại một người được mọi người yêu thương"

Hai phát biểu này không tương đương logic với nhau.

Nguyên lý quy nạp

Nguyên lý quy nạp

Cho vị từ $p(n)$ theo biến $n \in \mathbb{N}$. Nếu

$$p(1) \wedge (\forall n \in \mathbb{N}, p(n) \rightarrow p(n+1)) \tag{1}$$

là mệnh đề đúng. Khi đó,

$$\forall n \in N, p(n).$$

Nguyên lý quy nạp

Ví dụ 3

Chứng minh đẳng thức

$$p(n) = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

đúng $\forall n \in \mathbb{N}$.

....

....

....

....

Nguyên lý quy nạp

Nguyên lý quy nạp

Ví dụ 4

Bài toán tháp Hà Nội *(Ha Noi Tower)*. Ta có hệ thức đệ quy

$$\begin{cases} T_1 = 1 \\ T_n = 2T_{n-1} + 1 \quad ,\forall n \geq 2 \end{cases}$$

Dùng quy nạp để chứng minh $T_n = 2^n - 1, \forall n \in \mathbb{N}$

....

....

....

....

Nguyên lý quy nạp

....

....

....

....

....

....

....

....

Nguyên lý quy nạp

Nguyên lý quy nạp (dạng tổng quát)

Cho vị từ $p(n)$ theo biến $n \in \mathbb{N}$. Giả sử

$$p(1) \wedge [\forall \in \mathbb{N}, (p(1) \wedge p(2) \wedge \ldots p(n)) \to p(n+1)] \qquad (2)$$

là mệnh đề đúng. Khi đó,

$$\forall n \in \mathbb{N}, p(n).$$

Nguyên lý quy nạp

Ví dụ 5

Dãy số Fibonacci $x_0, x_1, x_2, \ldots$ được xác định bằng hệ thức đệ quy

$$\begin{cases} x_0 = x_1 = 1 \\ x_{n+2} = x_{n+1} + x_{n-1} \quad , \forall n > 1 \end{cases}$$

....

....

....

....

Nguyên lý quy nạp

Tài liệu tham khảo

Đinh Ngọc Thanh.
Giáo trình Logic học.
Đại học Cửu Long, 2013.

Kenneth H. Rosen.
Discrete Mathematics and Its Applications, 7th Edition.
McGraw-Hill Publishing, 2012.

Nguyễn Hữu Anh.
Giáo trình Toán rời rạc.
NXB Lao động xã hội, 2007.

Nguyễn Viết Đông.
Bài giảng Toán rời rạc.
ĐH KHTN Tp Hồ Chí Minh.