

Chương 6. CÂY

Cây - Cây khung

ThS. Nguyễn Chí Hiếu

2019

NỘI DUNG

1 Định nghĩa và các tính chất cơ bản

- Cây
- Các tính chất của cây

2 Các thuật toán duyệt cây

- NLR
- LNR
- LRN

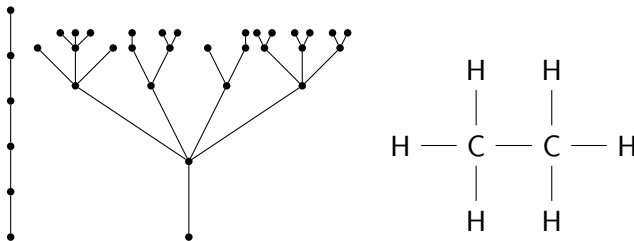
3 Cây khung

Định nghĩa

Định nghĩa 1

Cây (*tree*) là đồ thị vô hướng liên thông và không có chu trình.

Ví dụ 1

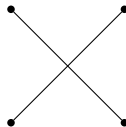
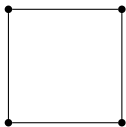
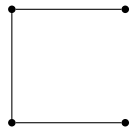


Hình 1: Một số ví dụ về cây.

Định nghĩa

Ví dụ 2

Cho 3 đồ thị G_1 , G_2 và G_3 gồm 4 đỉnh. Đồ thị nào là cây?

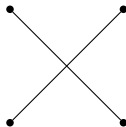
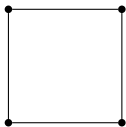
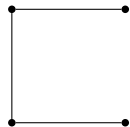


Hình 2: Đồ thị G_1 , G_2 và G_3 .

Định nghĩa

Ví dụ 2

Cho 3 đồ thị G_1 , G_2 và G_3 gồm 4 đỉnh. Đồ thị nào là cây?



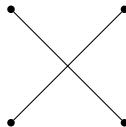
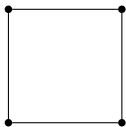
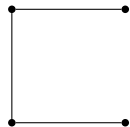
Hình 2: Đồ thị G_1 , G_2 và G_3 .

- G_1 liên thông và không có chu trình $\Rightarrow G_1$ là cây.

Định nghĩa

Ví dụ 2

Cho 3 đồ thị G_1 , G_2 và G_3 gồm 4 đỉnh. Đồ thị nào là cây?



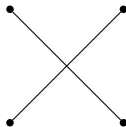
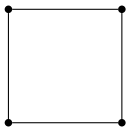
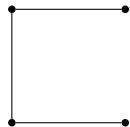
Hình 2: Đồ thị G_1 , G_2 và G_3 .

- G_1 liên thông và không có chu trình $\Rightarrow G_1$ là cây.
- G_2 liên thông và *có chu trình*.

Định nghĩa

Ví dụ 2

Cho 3 đồ thị G_1 , G_2 và G_3 gồm 4 đỉnh. Đồ thị nào là cây?



Hình 2: Đồ thị G_1 , G_2 và G_3 .

- G_1 liên thông và không có chu trình $\Rightarrow G_1$ là cây.
- G_2 liên thông và *có chu trình*.
- G_3 *không liên thông* và không có chu trình.

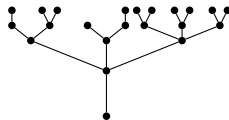
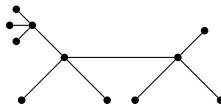
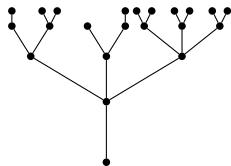
Định nghĩa

Định nghĩa 2

Rừng (*forest*) là một đồ thị vô hướng mà mỗi thành phần liên thông của nó là một cây.

Ví dụ 3

Rừng gồm 3 đồ thị liên thông.



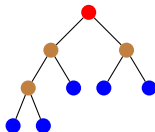
Hình 3: Rừng gồm nhiều thành phần liên thông.

Cây

Định nghĩa 3

- **Cây có gốc** (*rooted tree*) là cây có duy nhất một đỉnh làm gốc và tất cả các đỉnh khác đều có đường đi đến gốc.
- **Lá** (*leaf*) là đỉnh có bậc 1 trong cây.
- Đỉnh có bậc lớn hơn 1 được gọi là **đỉnh trong** (*internal node*) hay **nhánh** (*branch*).

Ví dụ 4

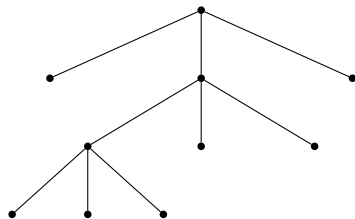
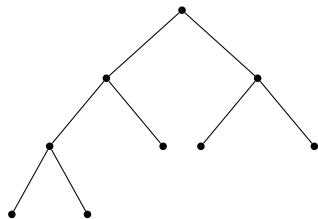


Cây m-phân

Định nghĩa 4

Cho cây T , nếu *số con tối đa* của một đỉnh trong T là một cây *m-phân*.

Ví dụ 5



Hình 4: Cây nhị phân T_1 và cây tam phân T_2 .

Các tính chất của cây

Định lý 1

Cho T là một cây, giữa hai đỉnh bất kỳ luôn tồn tại duy nhất một đường nối chúng.

Chứng minh.

...

...

...



Các tính chất của cây

Định lý 2

Cây T có n đỉnh thì có $n - 1$ cạnh.

Chứng minh.

- Bước cơ sở: với $n = 1$, cây T có $n - 1 = 0$ cạnh (đúng).
- Bước quy nạp: giả sử $n = k$, [định lý 2] đúng. Cần chứng minh [định lý 2] đúng với $n = k + 1$, tức là chứng minh cây T có $n - 1 = k$ cạnh.
 - ▶ Gọi v là đỉnh lá trong cây T .
 - ▶ Nếu loại bỏ đỉnh v thì cây có $k - 1$ cạnh.



Định lý

Giả sử T là một đồ thị có n đỉnh, thì 6 mệnh đề sau đây tương đương:

- ❶ T là một cây (T liên thông và không có chu trình).
- ❷ T không có chu trình và có $n - 1$ cạnh.
- ❸ T liên thông và nếu hủy bất kỳ một cạnh nào của nó cũng làm mất tính liên thông.
- ❹ Giữa hai đỉnh bất kỳ của T luôn luôn tồn tại một đường duy nhất nối chúng.
- ❺ T không có chu trình và nếu thêm một cạnh mới nối hai đỉnh bất kỳ của T sẽ tạo ra chu trình.
- ❻ T liên thông và có $n - 1$ cạnh.

Các thuật toán duyệt cây

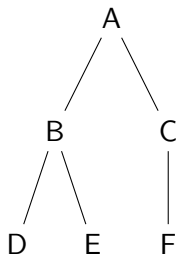
Duyệt cây

- Duyệt cây là thuật toán liệt kê danh sách tất cả các đỉnh của một cây, mỗi đỉnh chỉ một lần.
- Mỗi thuật toán duyệt cây khác nhau ở *thứ tự duyệt nút gốc* của cây con đang xét.
- Ba phương pháp duyệt cây:
 - ▶ Tiền thứ tự (*preorder*) hay NLR (*node-left-right*).
 - ▶ Trung thứ tự (*inoder*) hay LNR (*left-node-right*).
 - ▶ Hậu thứ tự (*postorder*) hay LRN (*left-right-node*).

Các thuật toán duyệt cây

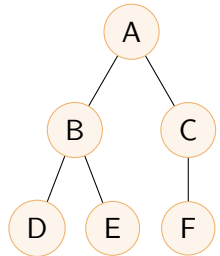
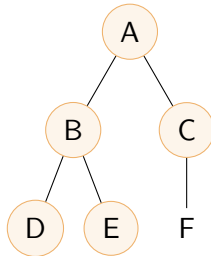
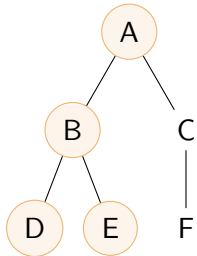
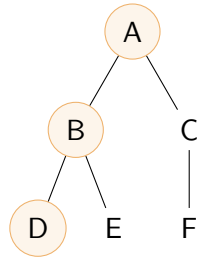
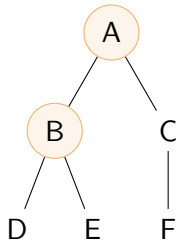
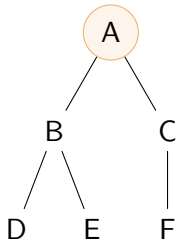
Ví dụ 6

Duyệt cây T theo tiền thứ tự, trung thứ tự và hậu thứ tự.

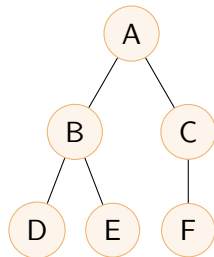
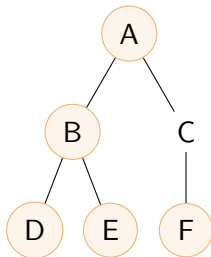
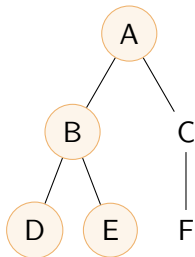
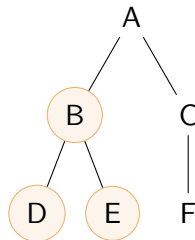
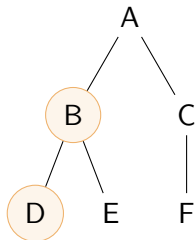
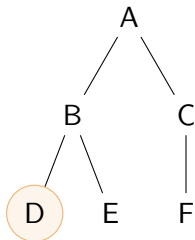


Hình 5: Cây T gồm 6 đỉnh A, B, C, D, E, F .

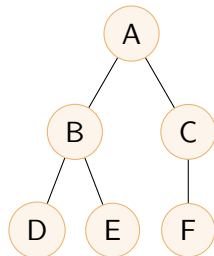
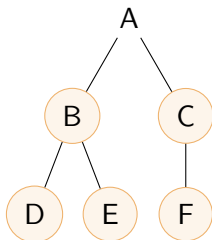
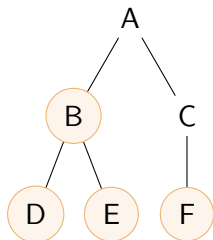
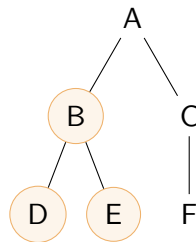
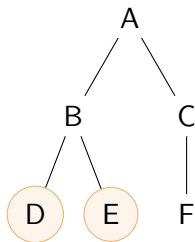
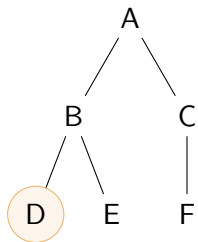
Duyệt tiền thứ tự (NLR)



Duyệt trung thứ tự (LNR)



Duyệt hậu thứ tự (LRN)



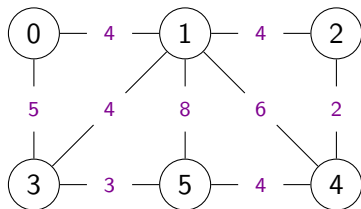
Cây khung

Định nghĩa 5

Cho $G = (V, E)$ là đồ thị vô hướng liên thông. Một cây T được gọi là **cây khung** (*spanning tree*) nếu T là đồ thị con chứa mọi đỉnh của G .

Ví dụ 7

Cho G là đồ thị vô hướng liên thông.



Hình 6: Đồ thị vô hướng G .

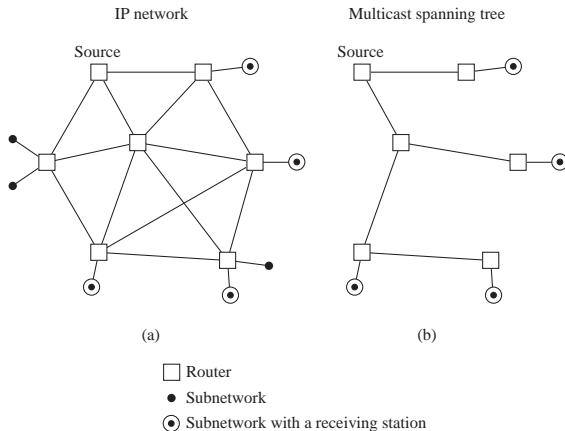
Cây khung



Hình 7: Cây khung T_1 và T_2 của đồ thị G .

Ứng dụng của cây khung

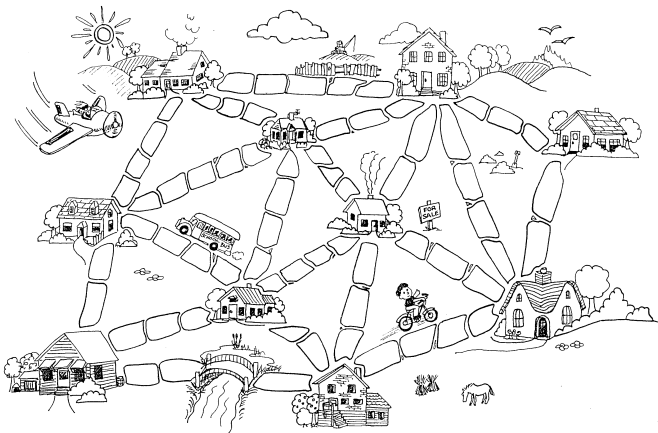
- Truyền thông tin dựa trên địa chỉ IP (*IP Multicasting*): một gói tin có thể chia thành nhiều gói tin và gửi đến nhiều người nhận.



Hình 8: Cây khung trong truyền tin dạng multicast.

Ứng dụng của cây khung

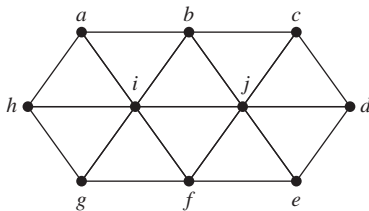
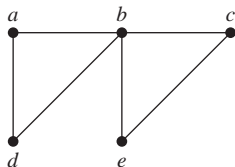
- Xác định những đường nào cần rải nhựa sao cho giữa các căn nhà đều có đường đi.



Hình 9: Bản đồ của một vùng dân cư.

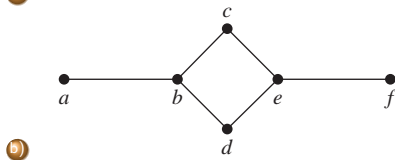
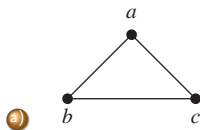
Bài tập

- 1 Tìm cây khung của những đồ thị sau đây bằng cách loại bỏ một số cạnh của các chu trình.



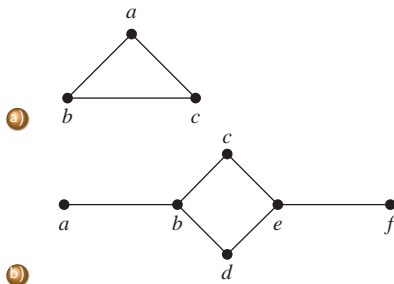
Bài tập

- 2 Tìm tất cả cây khung của những đồ thị sau đây.



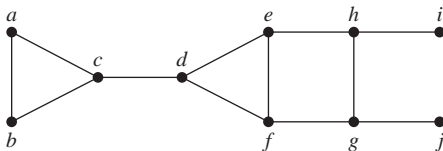
Bài tập

- 3 Áp dụng thuật toán tìm kiếm theo chiều sâu (DFS) vẽ cây khung của đồ thị. Chọn a là gốc của mỗi cây và các đỉnh xếp theo thứ tự alphabet.



Bài tập

4. Vẽ cây khung của đồ thị G . Chọn a là gốc của cây khung và các đỉnh xếp theo thứ tự alphabet.



Hình 10: Đồ thị G .

- a) Áp dụng thuật toán tìm kiếm theo chiều sâu (DFS).
- b) Áp dụng thuật toán tìm kiếm theo chiều rộng (BFS).

Tài liệu tham khảo



ADRIAN BONDY, U.S.R. MURTY, *Graph Theory*, Springer, 2008.



KENNETH H. ROSEN, *Discrete Mathematics and its Applications*, 7th Edition, McGraw-Hill, 2011.



NGUYỄN ĐỨC NGHĨA, NGUYỄN TÔ THÀNH, *Toán rời rạc*, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội, 2003.



NGUYỄN CAM, CHU ĐỨC KHÁNH, *Lý thuyết đồ thị*, NXB Đại học Quốc gia Tp Hồ Chí Minh, 2008.



REINHARD DIESTEL, *Graph Theory*, Springer, 2005.