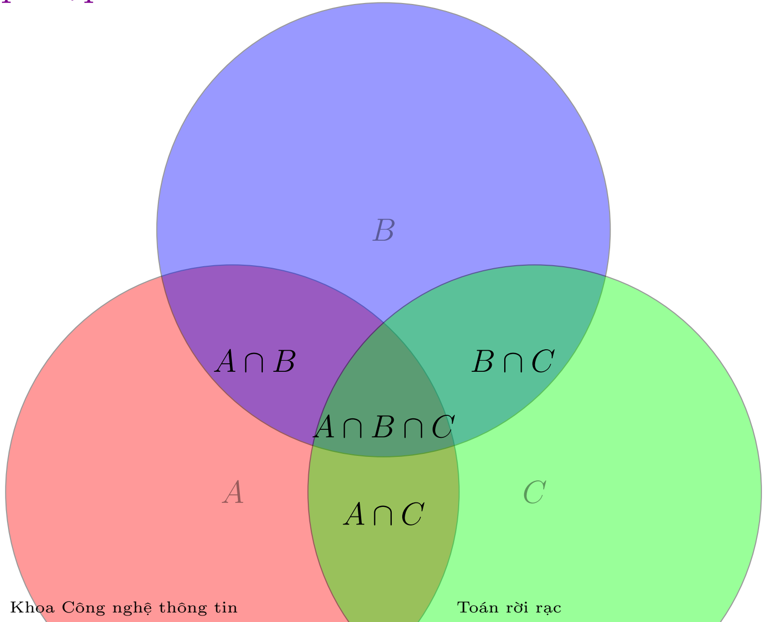
Chương 3.
LÝ THUYẾT TẬP HỢP

2017

NỘI DUNG

Tập hợp



Phép đếm

Nguyên lý cộng *(sum rule)*

Nếu một công việc có thể được thực hiện bằng một trong n cách loại trừ *(không đồng thời xảy ra)* lẫn nhau: $k_1, k_2, \ldots, k_n$. Trong đó để thực hiện theo cách k_i lại có t_i cách khác nhau ($i = 1...n$). Khi đó, tổng số cách để thực hiện công việc ban đầu là:

$$t_1 + t_2 + \cdots + t_n.$$

Phép đếm

Nguyên lý cộng *(sum rule)*

Ví dụ 1

Từ Tp.HCM ra Hà Nội có thể đi bằng 3 loại phương tiện:

- Đi bằng ô tô: taxi, xe dịch vụ, xe cá nhân.
- Đi bằng tàu hỏa: tàu bình thường, tàu tốc hành.
- Đi bằng máy bay: Vietnam Ariline, JetStar.

Vậy có tất cả $3 + 2 + 2 = 7$ cách để đi từ Tp.HCM ra Hà Nội.

Phép đếm

Nguyên lý cộng *(sum rule)*

Ví dụ 2

a) Có 150 sinh viên đăng ký học môn Toán rời rạc và 120 sinh viên đăng ký môn Cơ sở dữ liệu. Hỏi có bao nhiêu sinh viên đăng ký một trong hai môn biết rằng không có sinh viên nào học cả hai môn.

b) Có 150 sinh viên đăng ký học môn Toán rời rạc và 120 sinh viên đăng ký môn Cơ sở dữ liệu. Hỏi có bao nhiêu sinh viên đăng ký học.

Phép đếm

Ví dụ 3

Cho một túi chứa 9 đĩa (được đánh số từ 1-9). Chọn một đĩa bất kỳ từ trong túi. Nếu đĩa này được đánh số chẵn thì tung đồng xu, ngược lại đĩa này đánh số lẻ thì tung xúc sắc. Có bao nhiêu trường hợp có thể xảy ra?

- Chọn đĩa đánh số chẵn: 4 cách, tung đồng xu: 2 cách.
- Nên số cách chọn đĩa đánh số chẵn và tung đồng xu: $4 \times 2 = 8$ cách.
- Chọn đĩa đánh số lẻ: 5 cách, tung xúc sắc: 6 cách.
- Nên số cách chọn đĩa đánh số lẻ và tung xúc sắc: $5 \times 6 = 30$ cách.
- Tổng số cách thực hiện là $8 + 30 = 38$ cách.

Phép đếm

Tích Descartes

Ví dụ 4

Cho 2 tập hợp $A = \{0, 1\}$ và $B = \{a, b, c\}$. Tích Descartes $A \times B$?

$$A \times B = \{(0, a), (0, b), (0, c), (1, a), (1, b), (1, c)\}$$

Giải tích tổ hợp

Loại mẫu

- Mẫu có lặp *(lấy mẫu có hoàn lại)*: mỗi phần tử có thể có mặt *nhiều lần*.
- Mẫu không lặp *(lấy mẫu không hoàn lại)*: mỗi phần tử chỉ có mặt *một lần*.
- Mẫu có thứ tự: khi thay đổi vị trí các phần tử khác nhau của mẫu ta *nhận được* mẫu mới.
- Mẫu không thứ tự: khi thay đổi vị trí các phần tử khác nhau của mẫu ta *không nhận* được mẫu mới.

Giải tích tổ hợp

Loại mẫu

Ví dụ 5

Cho tập hợp $A = \{1, 2, 3\}$. Các mẫu cỡ 2 gồm:
$(1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1), (2, 3), (3, 2), (1, 1), (2, 2), (3, 3)$
Xác định các mẫu

- Có lặp
- Không lặp
- Có thứ tự
- Không thứ tự
- Có lặp và có thứ tự
- Có lặp và không thứ tự
- Không lặp và có thứ tự
- Không lặp và không thứ tự

Giải tích tổ hợp

Loại mẫu

	Có thứ tự	Không thứ tự
Không lặp	**Chỉnh hợp**	**Tổ hợp**
Có lặp	**Chỉnh hợp lặp**	**Tổ hợp lặp**

Bảng 1: Bảng kết hợp từng cặp các loại mẫu.

Giải tích tổ hợp

Định nghĩa 1 (Hoán vị)

Một hoán vị của tập hợp A là một *song sánh* từ tập A vào chính nó.

Số hoán vị của một tập hợp có n phần tử phân biệt là:

$$P_n = n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n.$$

Giải tích tổ hợp

Chứng minh.

Ta chứng minh công thức này dựa trên nguyên lý nhân. Xét công việc xây dựng một hoán vị của n phần tử ban đầu. Công việc này được chia thành các bước sau:

- Chọn phần tử thứ nhất: có n cách chọn.
- Chọn phần tử thứ hai: có $n-1$ cách chọn *(do đã chọn phần tử thứ nhất)*.
- ...

Như vậy theo nguyên lý nhân, số cách xây dựng hoán vị, cũng chính là số các hoán vị của n phần tử ban đầu là:

$$n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1 = n!.$$

□

Giải tích tổ hợp

Ví dụ 6

Cho tập hợp $A = \{a, b, c\}$, ta có 6 hoán vị sau:

- a b c
- a c b
- b a c
- b c a
- c a b
- c b a

Giải tích tổ hợp

Định nghĩa 2 (Chỉnh hợp)

Một *chỉnh hợp* chặp k của n phần tử là một tập hợp chứa k phần tử *phân biệt* trong n phần tử *theo một thứ tự* nào đó.

Số chỉnh hợp chặp k của n phần tử phân biệt là:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n \times (n-1) \times (n-2) \ldots (n-k+1) \, .$$

Giải tích tổ hợp

Chỉnh hợp

Ví dụ 7

Có bao nhiêu cách chọn mật khẩu gồm 6 ký tự trong tập hợp gồm 9 số $\{1, 2, \ldots, 9\}$. Quy định các ký tự mật khẩu không được lặp lại.

- $A_9^6 = \frac{9!}{(9-6)!} = 60480$

Giải tích tổ hợp

Chỉnh hợp

Ví dụ 8

Cho tập hợp gồm 6 sinh viên A, B, C, D, E, F. Có bao nhiêu cách sắp chỗ 6 sinh viên trên cùng một hàng ghế?

- Mỗi sinh viên ngồi tùy ý.
- A và B cạnh nhau.
- A và B không cạnh nhau.
- D, E và F cạnh nhau.
- A và F đầu và cuối hàng ghế.

Giải tích tổ hợp

Định nghĩa 3 (Chỉnh hợp lặp)

Một *chỉnh hợp lặp* chặp k của n phần tử là một tập hợp chứa k phần tử trong n phần tử *theo một thứ tự* nào đó.

Số chỉnh hợp lặp chặp k của n phần tử là:

$$\widetilde{A}_n^k = n^k.$$

Giải tích tổ hợp

Chỉnh hợp lặp

Ví dụ 9

Có bao nhiêu cách chọn mật khẩu gồm 6 ký tự từ tập hợp gồm 9 số $\{1, 2, \ldots, 9\}$.

- $\widetilde{A}_9^6 = 9^6$.

Giải tích tổ hợp

Định nghĩa 4 (Tổ hợp)

Một *tổ hợp* chập k của n phần tử là một phép chọn k phần tử *phân biệt* trong n phần tử *không theo một thứ tự* nào đó.

Số tổ hợp chập k của n phần tử phân biệt là

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \times (n-k)!} = \frac{A_n^k}{k!}.$$

Giải tích tổ hợp

Tổ hợp

Ví dụ 10

Một đội bóng đăng ký 13 cầu thủ. Mỗi trận đấu huấn luyện viên sẽ chọn 11 cầu thủ trong 13 cầu thủ để đá chính thức. Hỏi có bao nhiêu cách chọn?

$$C_n^k = \frac{13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3}{11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 78.$$

Giải tích tổ hợp

Định nghĩa 5 (Tổ hợp lặp)

Một *tổ hợp lặp* chập k của n phần tử là một phép chọn k phần tử trong n phần tử *không theo một thứ tự* nào đó.

Số tổ hợp lặp chập k của n phần tử phân biệt là

$$\widetilde{C}_n^k = C_{n+k-1}^k.$$

Giải tích tổ hợp

Tổ hợp lặp

Ví dụ 11

Có bao nhiêu cách 2 học bổng giống nhau cho 3 sinh viên. Biết rằng mỗi sinh viên có thể nhận 2 học bổng.

$$\widetilde{C}_n^k = C_{3+2-1}^2 = C_4^2 = 6.$$

Giải tích tổ hợp

Tổ hợp lặp

Ví dụ 12

Cho tập hợp $A = \{1, 2, 3, 4\}$

- $(1, 1)$ biểu diễn bởi

$$**|\quad|\quad|$$

- $(1, 2, 4)$ biểu diễn bởi

$$*|*|\quad|*$$

Giải tích tổ hợp

Định nghĩa 6 (Nhị thức Newton)

Cho n là số tự nhiên bất kỳ, hệ thức Newton được tính theo công thức sau:

$$(a+b)^n = \Sigma_{k=0}^{k} = C_n^k a^k b^{n-k}.$$

Giải tích tổ hợp

Định nghĩa 7 (Nguyên lý Dirichlet)

Nếu có $k+1$ hoặc nhiều hơn đồ vật đặt vào trong k hộp, thì có ít nhất một hộp chứa hai hoặc nhiều hơn hai vật.

Ví dụ 13

Trong 367 người có ít nhất hai người trùng ngày sinh (với số ngày sinh tối đa một năm là 366).

Giải tích tổ hợp

Định nghĩa 8 (Nguyên lý Dirichlet tổng quát)

Nếu nhốt n con bồ câu vào trong một chuồng gồm k cửa thì chắc chắn có một cửa chứa ít nhất $\lceil \frac{n}{k} \rceil$ con bồ câu.

Ví dụ 14

Trong 100 người, có ít nhất bao nhiêu người có cùng tháng sinh?

- Sô người: $n = 100$ người.
- Số tháng trong năm $k = 12$ tháng.
- $m \geq \frac{n}{k} \approx 9$ người sinh cùng một tháng.

Tài liệu tham khảo

Đinh Ngọc Thanh.
Giáo trình Logic học.
Đại học Cửu Long, 2013.

Kenneth H. Rosen.
Discrete Mathematics and Its Applications, 7th Edition.
McGraw-Hill Publishing, 2012.

Nguyễn Hữu Anh.
Giáo trình Toán rời rạc.
NXB Lao động xã hội, 2007.

Nguyễn Viết Đông.
Bài giảng Toán rời rạc.
ĐH KHTN Tp Hồ Chí Minh.