

Chương 6. CÂY

Bài toán tìm cây khung tối thiểu

ThS. Nguyễn Chí Hiếu

2019

NỘI DUNG

- 1 Các khái niệm cơ bản
- 2 Thuật toán Kruskal
- 3 Thuật toán Prim

Cây khung tối thiểu

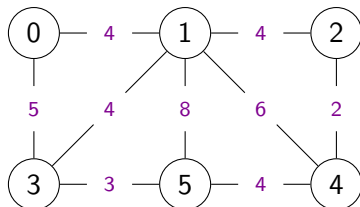
Định nghĩa 1

Cho $G = (V, E)$ là đồ thị vô hướng liên thông. **Cây khung tối thiểu** (*minimum spanning tree* - *MST*) là cây khung có **tổng trọng số tất cả cạnh** của nó là **tối thiểu**.

Cây khung tối thiểu

Ví dụ 1

Cho G là đồ thị vô hướng liên thông.



Hình 1: Đồ thị vô hướng G .

Cây khung tối thiểu



Hình 2: Cây khung T_1 và T_2 của đồ thị G .

- T_1 có tổng trọng số là 17. Nên T_1 là cây khung tối thiểu của đồ thị G .
- T_2 có tổng trọng số là 27.

Các khái niệm cơ bản

Bài toán tìm cây khung tối thiểu

Cho $G = (V, E)$ là đồ thị vô hướng liên thông và có trọng số. Tìm cây khung tối thiểu T của đồ thị G như sau:

- Thuật toán Kruskal
- Thuật toán Prim

Thuật toán Kruskal

Ý tưởng

Cho $G = (V, E)$ là đồ thị vô hướng liên thông và có trọng số. Tìm cây khung tối thiểu T của đồ thị G như sau:

- Bước 1: Sắp xếp tập hợp E theo thứ tự *tăng dần của trọng số*.
- Bước 2: Lần lượt lấy từng cạnh $e \in E$ đã có thứ tự, nếu e kết hợp với T *không tạo thành chu trình* thì thêm e vào T .
- Bước 3: Ngược lại, bỏ qua cạnh e và tiếp tục bước 2.

Thuật toán Kruskal

Thuật toán 1: Kruskal(G)

- Đầu vào: đồ thị G .
- Đầu ra: cây khung tối thiểu.

```
1    $T \leftarrow \emptyset$ 
2   Sort( $E$ )
3   for each  $i \in V$ 
4       MakeSet( $i$ )
5   for each  $e \in E$ 
6       if FindSet( $e.source$ )  $\neq$  FindSet( $e.dest$ )
7           Union( $e.source$ ,  $e.dest$ )
8        $T \leftarrow T \cup \{e\}$ 
```


Thuật toán Kruskal

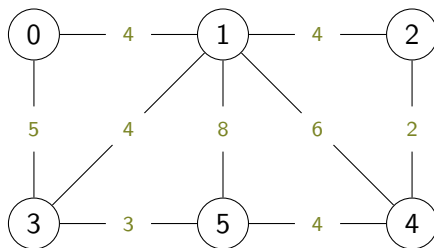
Giải thích

- Dòng 2: $\text{Sort}(E)$ sắp xếp tập E theo thứ tự tăng dần của trọng số.
- Dòng 4: $\text{MakeSet}(i)$ khởi tạo cây chỉ chứa đỉnh i .
- Dòng 6: $\text{FindSet}(i)$ tìm đỉnh gốc của cây chứa đỉnh i .
- Dòng 7: $\text{Union}(i, j)$ hợp nhất hai cây chứa đỉnh i và j .

Thuật toán Kruskal

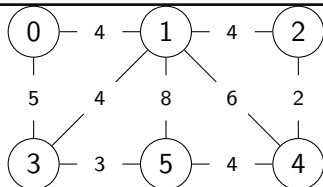
Ví dụ 2

Cho G là đồ thị vô hướng liên thông. Áp dụng thuật toán Kruskal tìm cây khung tối thiểu của G .



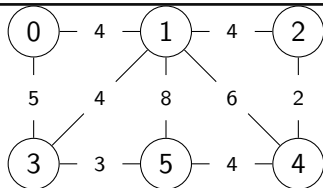
Hình 3: Đồ thị G .

Thuật toán Kruskal



E	$[(0,1), (0,3), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,4), (3,5), (4,5)]$
---	---

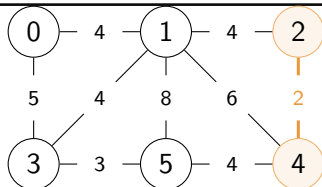
T	$[\]$
---	--------



E	$[(2,4), (3,5), (0,1), (1,2), (1,3), (4,5), (0,3), (1,4), (1,5)]$
---	---

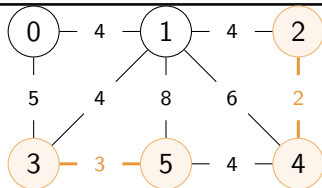
T	$[\]$
---	--------

Thuật toán Kruskal



E	$[(3,5), (0,1), (1,2), (1,3), (4,5), (0,3), (1,4), (1,5)]$
---	--

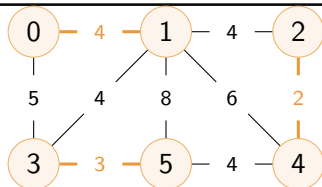
T	$[(2,4)]$
---	-----------



E	$[(0,1), (1,2), (1,3), (4,5), (0,3), (1,4), (1,5)]$
---	---

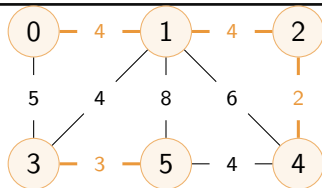
T	$[(2,4), (3,5)]$
---	------------------

Thuật toán Kruskal



E	$[(1,2), (1,3), (4,5), (0,3), (1,4), (1,5)]$
---	--

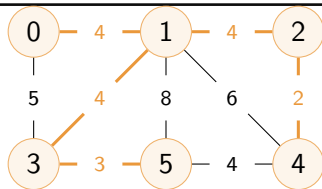
T	$[(2,4), (3,5), (0,1)]$
---	-------------------------



E	$[(1,3), (4,5), (0,3), (1,4), (1,5)]$
---	---------------------------------------

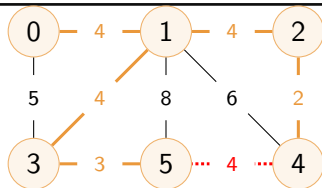
T	$[(2,4), (3,5), (0,1), (1,2)]$
---	--------------------------------

Thuật toán Kruskal



E	$[(4,5), (0,3), (1,4), (1,5)]$
---	--------------------------------

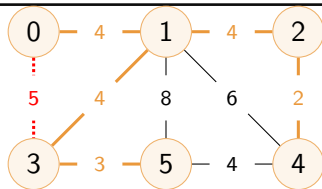
T	$[(2,4), (3,5), (0,1), (1,2), (1,3)]$
---	---------------------------------------



E	$[(0,3), (1,4), (1,5)]$
---	-------------------------

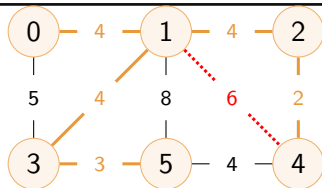
T	$[(2,4), (3,5), (0,1), (1,2), (1,3)]$
---	---------------------------------------

Thuật toán Kruskal



E	$[(1,4), (1,5)]$
---	------------------

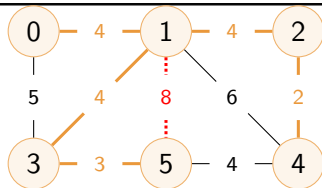
T	$[(2,4), (3,5), (0,1), (1,2), (1,3)]$
---	---------------------------------------



E	$[(1,5)]$
---	-----------

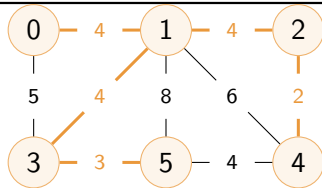
T	$[(2,4), (3,5), (0,1), (1,2), (1,3)]$
---	---------------------------------------

Thuật toán Kruskal



E	[]
---	----

T	[(2,4), (3,5), (0,1), (1,2), (1,3)]
---	-------------------------------------



T	[(2,4), (3,5), (0,1), (1,2), (1,3)]
---	-------------------------------------

Thuật toán Prim

Ý tưởng

Cho $G = (V, E)$ là đồ thị vô hướng liên thông và có trọng số. Tìm cây khung tối thiểu T của đồ thị G như sau:

- Bước 1: Chọn một đỉnh tùy ý trong G và thêm vào T .
- Bước 2: Nếu mọi đỉnh trong G đều thuộc T thì dừng thuật toán.
- Bước 3: Ngược lại, tìm một cạnh có *khoảng cách tối thiểu* nối một đỉnh $i \in T$ và một đỉnh $j \notin T$. *Thêm cạnh* ij vào T và quay lại bước 2.

Thuật toán Kruskal

Trong thuật toán có sử dụng PQ là hàng đợi ưu tiên (*priority queue*), lưu trữ thông tin về **đỉnh và độ ưu tiên của đỉnh đó** (*độ ưu tiên chính là trọng số, trọng số càng nhỏ độ ưu tiên càng cao*).

Thuật toán 2: Prim(G)

- Đầu vào: đồ thị G .
- Đầu ra: cây khung tối thiểu.

```

1  T ← ∅
2  for each i ∈ V
3      dist[i] ← ∞
4      parent[i] ← i
5      DecreaseKey(PQ, i, ∞)
6  // ...

```

Thuật toán Kruskal

Thuật toán 3: Prim(G)

- Đầu vào: đồ thị G.
- Đầu ra: cây khung tối thiểu.

```

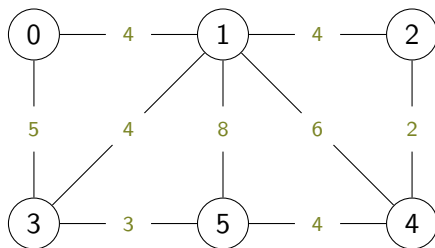
6      //...
7      DecreaseKey(PQ, start, 0)
8      while PQ  $\neq \emptyset$ 
9          i  $\leftarrow$  DeleteMin(PQ)
10         if parent[i]  $\neq$  i
11             T  $\leftarrow$  T  $\cup$  {(parent[i], i)}
12         for each j  $\in$  V
13             if edge (i, j)  $\in$  E
14                 if j  $\in$  PQ and w[i][j] < dist[j]
15                     dist[j]  $\leftarrow$  w[i][j]
16                     parent[j]  $\leftarrow$  i
17                     DecreaseKey(PQ, j, dist[j])

```

Thuật toán Prim

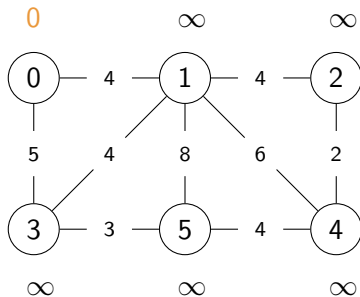
Ví dụ 3

Cho G là đồ thị vô hướng liên thông. Áp dụng thuật toán Prim tìm cây khung tối thiểu của G .



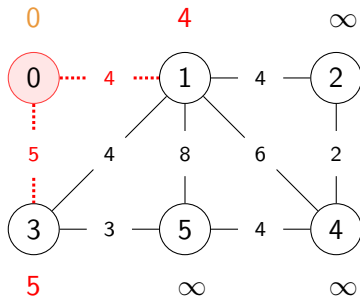
Hình 4: Đồ thị G .

Thuật toán Prim



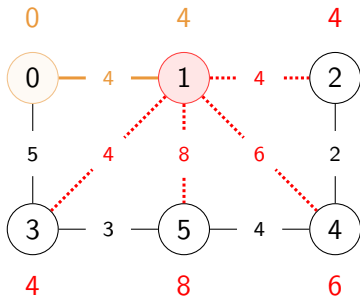
PQ	$[(0, 0), (1, \infty), (2, \infty), (3, \infty), (4, \infty), (5, \infty)]$
T	\square

Thuật toán Prim



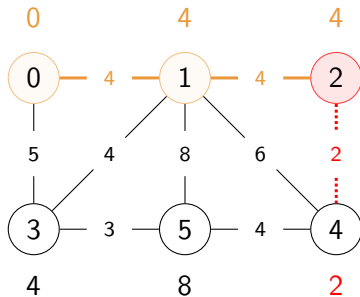
PQ	$[(1, 4), (3, 5), (2, \infty); (4, \infty), (5, \infty)]$
T	\square

Thuật toán Prim



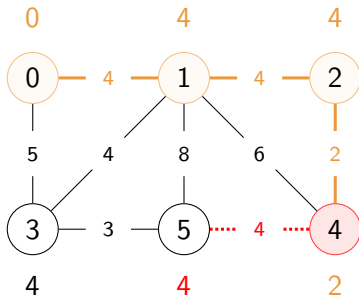
PQ	$[(2, 4), (3, 4), (4, 6), (5, 8)]$
T	$[(0, 1)]$

Thuật toán Prim



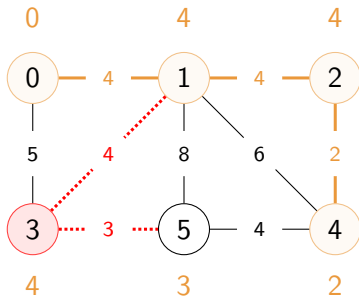
PQ	$[(4, 2), (3, 4), (5, 8)]$
T	$[(0, 1), (1, 2)]$

Thuật toán Prim



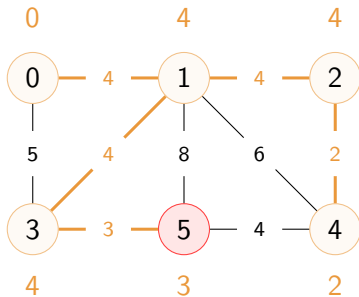
PQ	$[(3, 4), (5, 4)]$
T	$[(0, 1), (1, 2), (2, 4)]$

Thuật toán Prim



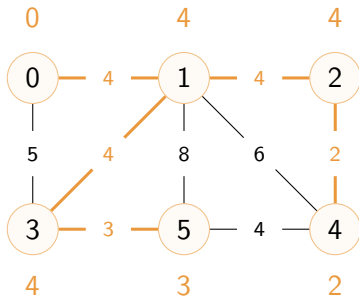
PQ	[(5, 3)]
T	[(0, 1), (1, 2), (2, 4), (1, 3)]

Thuật toán Prim



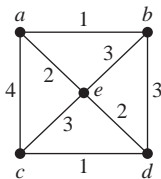
PQ	[]
T	[(0, 1), (1, 2), (2, 4), (1, 3), (3, 5)]

Thuật toán Prim

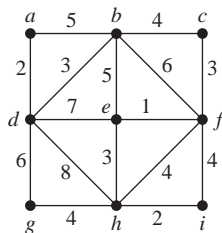


PQ	[]
T	[(0, 1), (1, 2), (2, 4), (1, 3), (3, 5)]

- a)

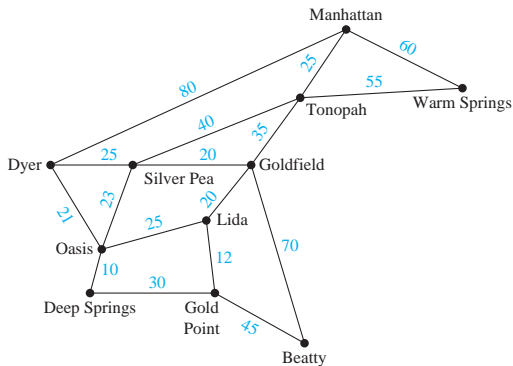


- b)



Bài tập

- 3 Cho G là đồ thị liên thông có trọng số biểu diễn đường đi giữa các thành phố. Xác định những đường nào cần được rải nhựa sao cho giữa các thành phố đều có đường được rải nhựa và chiều dài đường rải nhựa là tối thiểu.



Hình 5: Đồ thị G .

Tài liệu tham khảo



ADRIAN BONDY, U.S.R. MURTY, *Graph Theory*, Springer, 2008.



KENNETH H. ROSEN, *Discrete Mathematics and its Applications*, 7th Edition, McGraw-Hill, 2011.



NGUYỄN ĐỨC NGHĨA, NGUYỄN TÔ THÀNH, *Toán rời rạc*, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội, 2003.



NGUYỄN CAM, CHU ĐỨC KHÁNH, *Lý thuyết đồ thị*, NXB Đại học Quốc gia Tp Hồ Chí Minh, 2008.



REINHARD DIESTEL, *Graph Theory*, Springer, 2005.