Chương 2.
TÌM KIẾM & SẮP XẾP
HEAP SORT

ThS. Nguyễn Chí Hiếu

2017

NỘI DUNG

Các khái niệm

Một số tính chất của Heap

Giới thiệu HeapSort

Đánh giá giải thuật

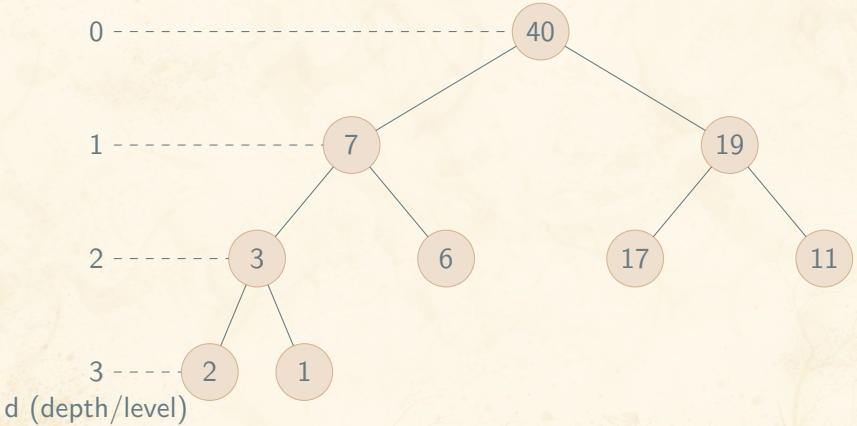
Định nghĩa

Heap là một cây nhị phân đầy đủ thỏa các điều kiện

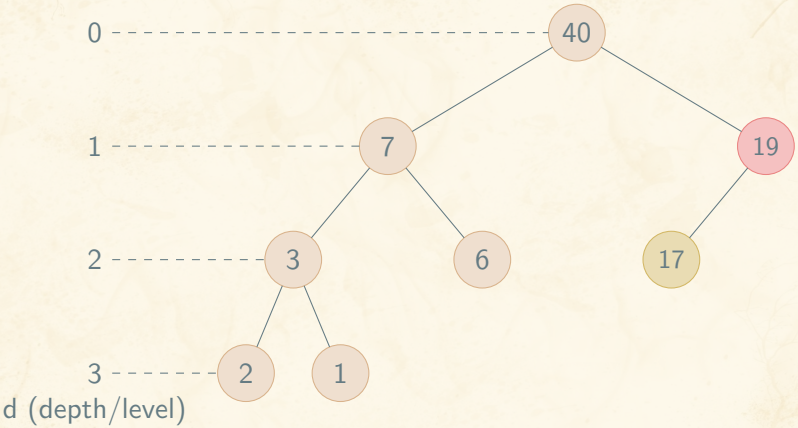
- Các nút từ mức 0 đến $d-1$ đều có đủ số lượng nút *(với d là mức của cây)*.
- Các nút ở mức d được thêm vào từ trái sang phải.
- Giá trị của một nút luôn lớn hơn hay bằng giá trị các nút con của nó (max-heap).
  Xét phần tử a_i
  - $a_i \geq a_{2i+1}$ và $a_i \geq a_{2i+2}$
  - Cặp phần tử liên đới là a_{2i+1} và a_{2i+2}.
  - Trường hợp đặt $j = 2 \cdot i + 1$ thì cặp phần tử liên đới là a_j và a_{j+1}.

Max-Heap

Ví dụ 1

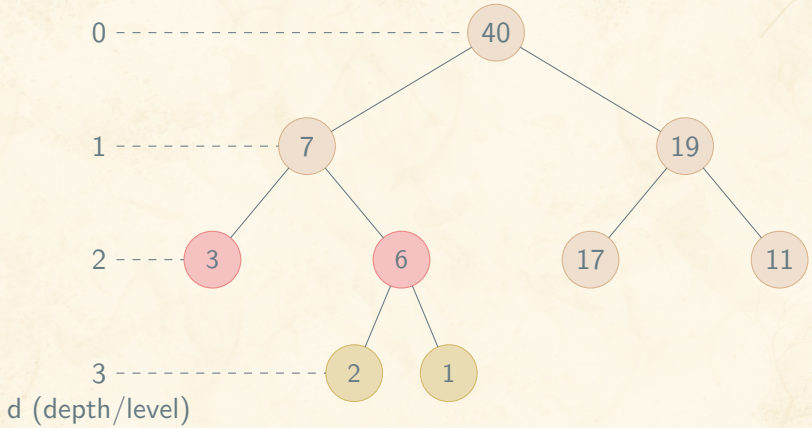


Max-Heap



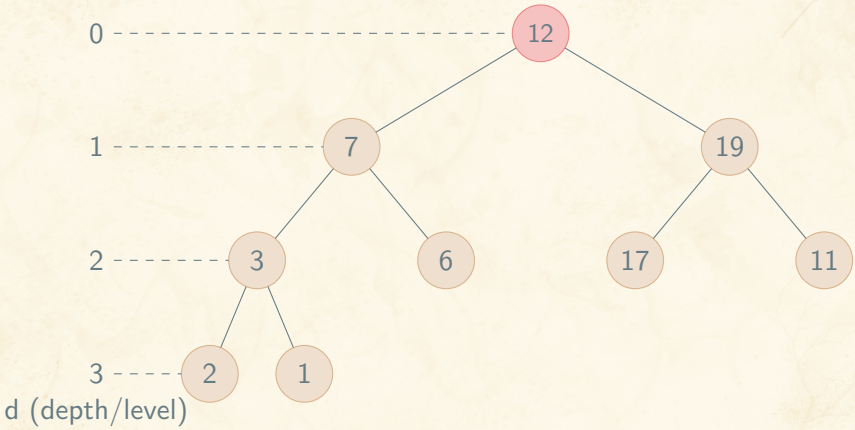
Tại mức $d-1$, số lượng nút không đảm bảo.

Max-Heap



Tại mức d, các nút phải điền từ trái sang phải.

Max-Heap



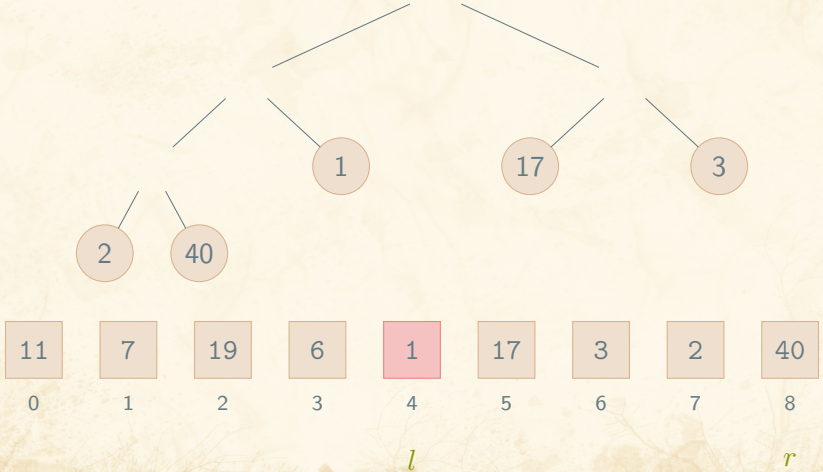
Nút cha $\geq$ nút con.

Một số tính chất của Heap

- Nếu $a_0, a_1, ..., a_r$ là một heap thì sau khi bỏ một số phần tử ở hai đầu, dãy còn lại vẫn là một heap.
- Nếu $a_0, a_1, ..., a_r$ là một heap thì phần tử a_0 có giá trị lớn nhất/nhỏ nhất *(trường hợp max-heap/min-heap)*.

Một số tính chất của Heap

- Cho dãy a gồm n phần tử. Nếu dãy $a_l, a_{l+1}, ..., a_r$ thỏa điều kiện $2l + 1 > r$ thì dãy đó là một heap tự nhiên *(với $l = \frac{n}{2}, r = n - 1$)*.



Giới thiệu HeapSort

Ý tưởng

- Dựa vào cấu trúc heap *(đống)*, một max-heap *(đống cực đại)* thì phần tử ở đỉnh luôn có giá trị lớn nhất.
- Giải thuật HeapSort *(sắp xếp vun đống)* thực hiện qua hai giai đoạn:
  - Giai đoạn 1. Tạo (vun đống) và hiệu chỉnh dãy ban đầu thành heap.
  - Giai đoạn 2. Sắp xếp dãy dựa trên heap: thực hiện một vòng lặp
    - Lấy phần tử ở đỉnh của heap.
    - Hoán vị với phần tử cuối cùng của dãy số.
    - Hiệu chỉnh lại heap.

Tạo và hiệu chỉnh heap

- Theo tính chất 3, mọi dãy $a_l, a_{l+1}, ..., a_r$ thỏa điều kiện $2l + 1 > r$ là một heap tự nhiên (với $l = \frac{n}{2}, r = n - 1$).
- Do đó, giai đoạn tạo heap chỉ cần lần lượt ghép thêm các phần tử $a_{l-1}, a_{l-2}, \cdots a_0$ vào heap tự nhiên này.
- Mỗi lần ghép thêm một phần tử thực hiện thao tác hiệu chỉnh *(Heapify/Sift Down)* lại heap.

Thuật toán 1: MakeHeap(a[], n)
- Đầu vào: mảng a gồm n phần tử.
- Đầu ra: mảng a là một max-heap.

```
1   l ← n / 2
2   l ← l - 1
3   while l ≥ 0
4     Heapify(a, l, n - 1)
5     l ← l - 1
```

Tạo và hiệu chỉnh heap

Thuật toán 2: Heapify(a[], l, r)
- Đầu vào: mảng a và mảng con cần hiệu chỉnh $a_l, a_{l+1} \cdots a_r$.
- Đầu ra: mảng con đã hiệu chỉnh thành max-heap.

```
1   i ← l
2   j ← 2 * i + 1
3   x ← a[i]
4   while j <= r
5     if j < r and a[j] < a[j + 1]
6       j ← j + 1
7     if a[j] < x
8       return
9     else
10      a[i] ← a[j]
11      a[j] ← x
12      i ← j
13      j ← 2 * i + 1
```

Tạo và hiệu chỉnh heap

Giải thích

- Dòng 2: hai phần tử liên đới của a_i là a_j và a_{j+1} .
- Dòng 4 $\rightarrow$ 13: nếu a_i có phần tử liên đới thì thực hiện:
  - Dòng 5, 6: tìm phần tử liên đới có giá trị lớn nhất.
  - Dòng 7, 8: nếu thỏa quan hệ liên đới. Kết thúc thao tác hiệu chỉnh.
  - Dòng 10, 11: ngược lại, hoán vị phần tử a_i với phần tử liên đới có giá trị lớn nhất.
  - Dòng 12, 13: xét hiệu chỉnh lan truyền sau khi thực hiện hoán vị.

Sắp xếp heap

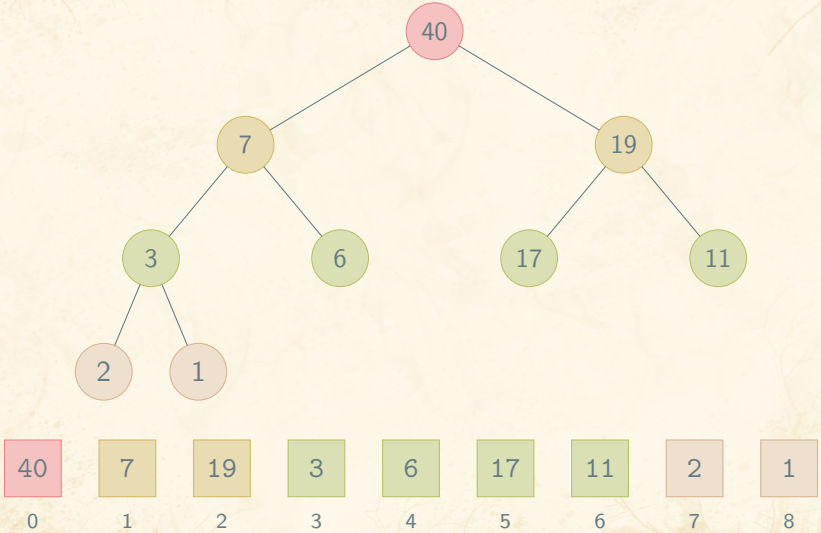
Thuật toán 3: HeapSort(a[], n)
- Đầu vào: mảng a gồm n phần tử.
- Đầu ra: mảng a có thứ tự tăng dần.

```
1  MakeHeap(a, n)
2  r ← n - 1
3  while r > 0
4    Swap(a[0], a[r])
5    r ← r - 1
6    Heapify(a, 0, r)
```

Giải thích

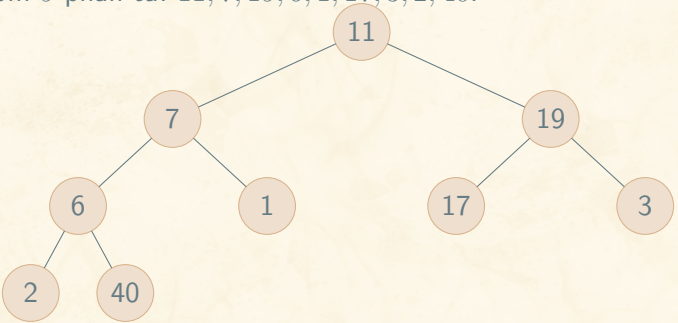
- Dòng 1: gọi hàm tạo max-heap từ mảng ban đầu.
- Dòng 3 $\rightarrow$ 6: mỗi lần lặp, hoán vị phần tử đầu và cuối mảng. Sau đó, gọi hàm hiệu chỉnh mảng tử $a_0, a_1, ..., a_{r-1}$.

Biểu diễn heap bằng cây nhị phân đầy đủ



Ví dụ

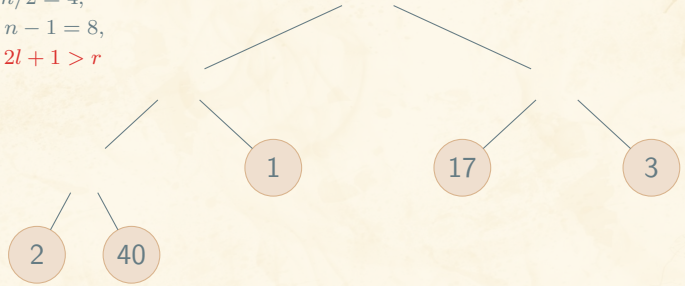
Cho dãy số a gồm 9 phần tử: $11, 7, 19, 6, 1, 17, 3, 2, 40$.



11	7	19	6	1	17	3	2	40
0	1	2	3	4	5	6	7	8

Tạo và hiệu chỉnh dãy thành max-heap

$$\begin{cases} l = n/2 = 4, \\ r = n - 1 = 8, \\ j = 2l + 1 > r \end{cases}$$

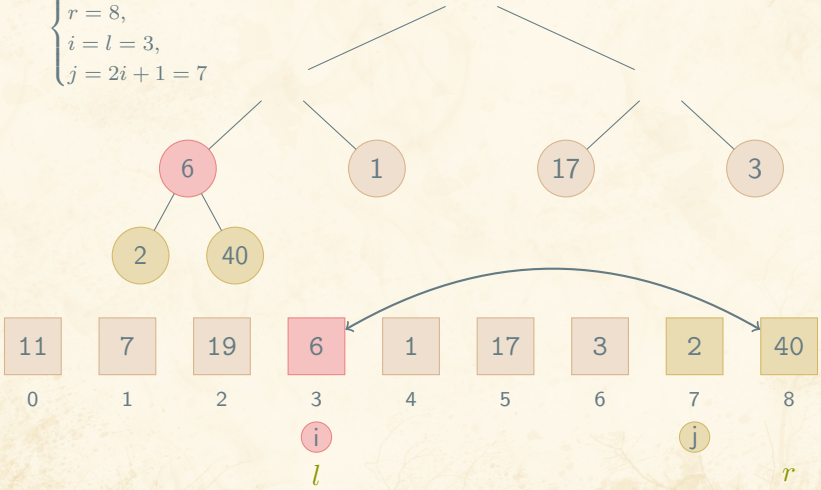


11	7	19	6	1	17	3	2	40
0	1	2	3	4	5	6	7	8

l r

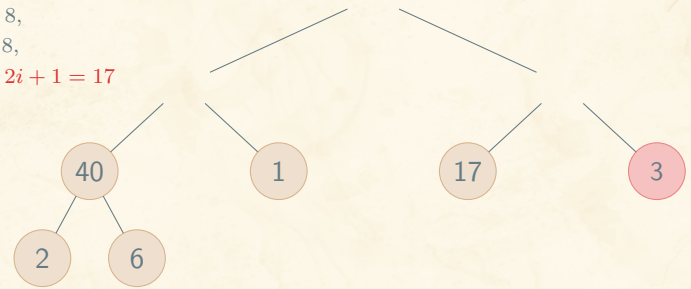
Tạo và hiệu chỉnh dãy thành max-heap

$$\begin{cases} l = l - 1 = 3, \\ r = 8, \\ i = l = 3, \\ j = 2i + 1 = 7 \end{cases}$$



Tạo và hiệu chỉnh dãy thành max-heap

$$\begin{cases} l = 3, \\ r = 8, \\ i = 8, \\ j = 2i + 1 = 17 \end{cases}$$



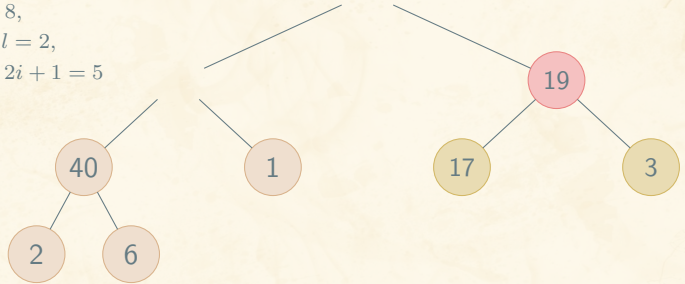
11	7	19	40	1	17	3	2	6
0	1	2	3	4	5	6	7	8

i

l r

Tạo và hiệu chỉnh dãy thành max-heap

$$\begin{cases} l = l - 1 = 2, \\ r = 8, \\ i = l = 2, \\ j = 2i + 1 = 5 \end{cases}$$



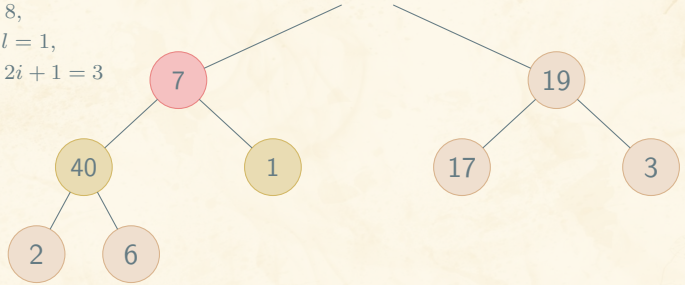
11	7	19	40	1	17	3	2	6
0	1	2	3	4	5	6	7	8

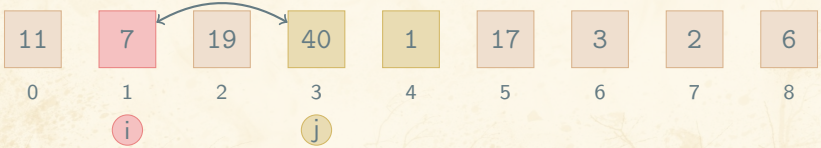
i j

l r

Tạo và hiệu chỉnh dãy thành max-heap

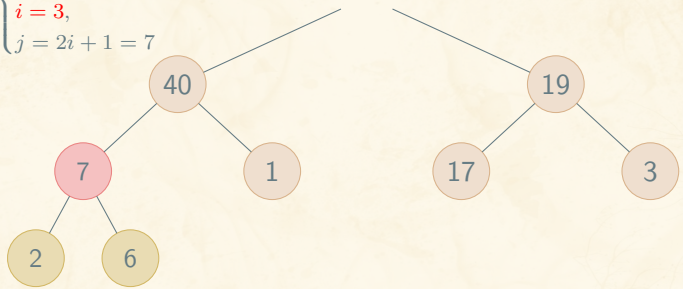
$$\begin{cases} l = l - 1 = 1, \\ r = 8, \\ i = l = 1, \\ j = 2i + 1 = 3 \end{cases}$$





Tạo và hiệu chỉnh dãy thành max-heap

lan truyền hiệu chỉnh $\begin{cases} l = 1, \\ r = 8, \\ i = 3, \\ j = 2i + 1 = 7 \end{cases}$

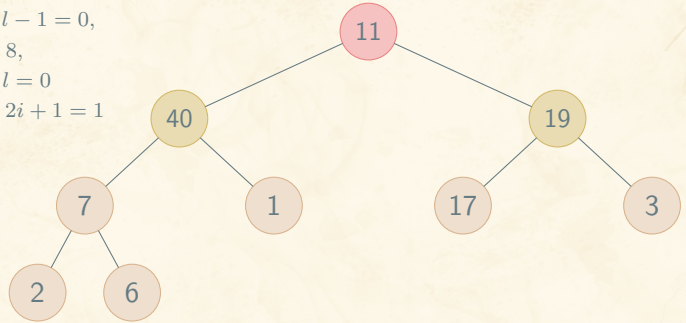


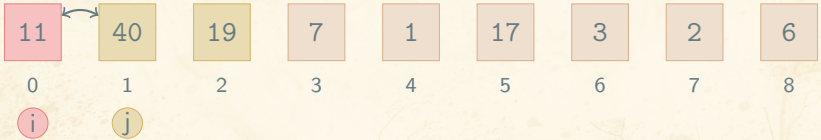
11	40	19	7	1	17	3	2	6
0	1	2	3	4	5	6	7	8
			i				j	

l r

Tạo và hiệu chỉnh dãy thành max-heap

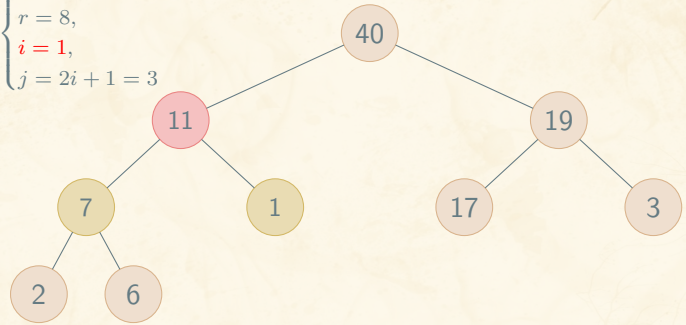
$$\begin{cases} l = l - 1 = 0, \\ r = 8, \\ i = l = 0 \\ j = 2i + 1 = 1 \end{cases}$$





Tạo và hiệu chỉnh dãy thành max-heap

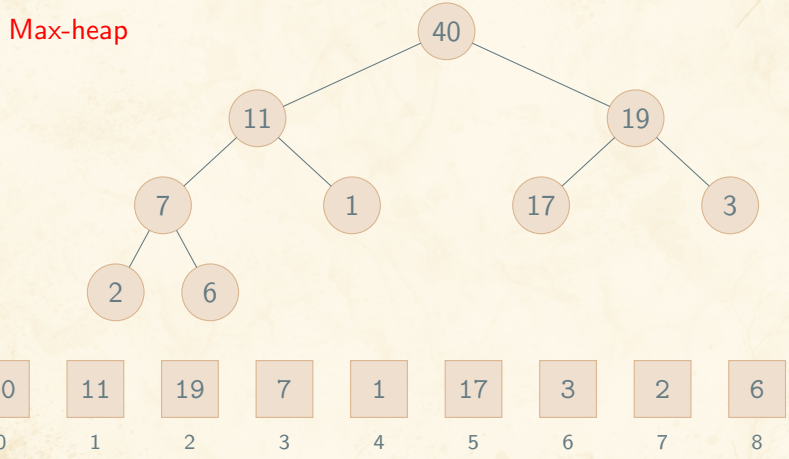
lan truyền hiệu chỉnh $\begin{cases} l = 0, \\ r = 8, \\ i = 1, \\ j = 2i + 1 = 3 \end{cases}$



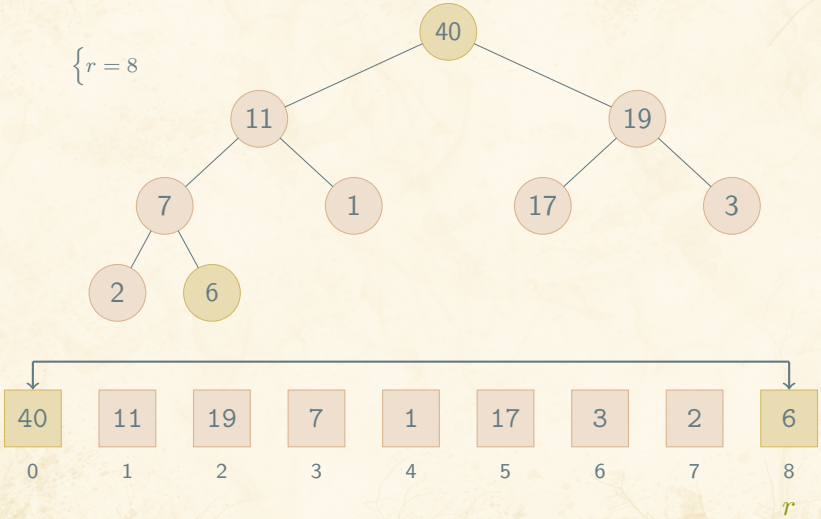
40	11	19	7	1	17	3	2	6
0	1	2	3	4	5	6	7	8
	i		j					

l r

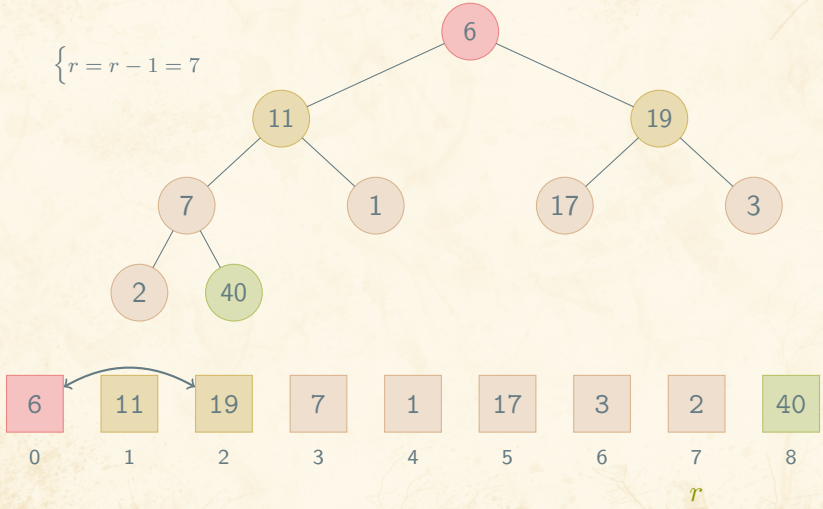
Tạo và hiệu chỉnh dãy thành max-heap



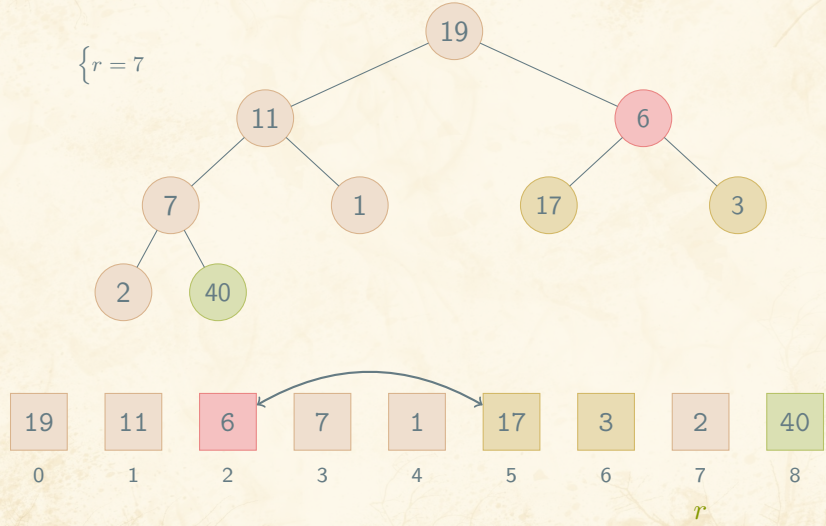
Sắp xếp dãy số dựa trên max-heap



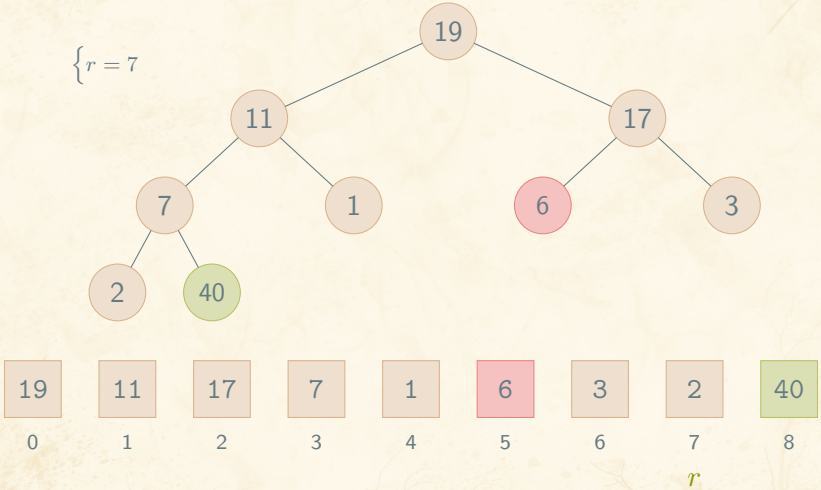
Sắp xếp dãy số dựa trên max-heap



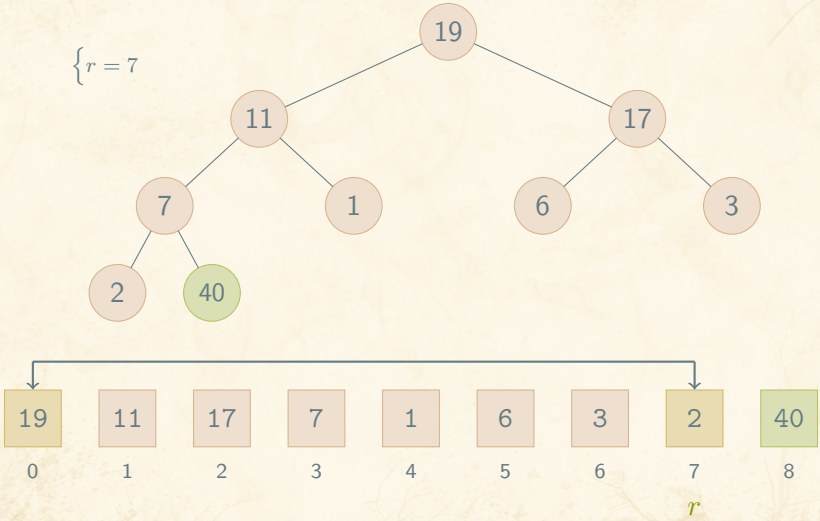
Sắp xếp dãy số dựa trên max-heap



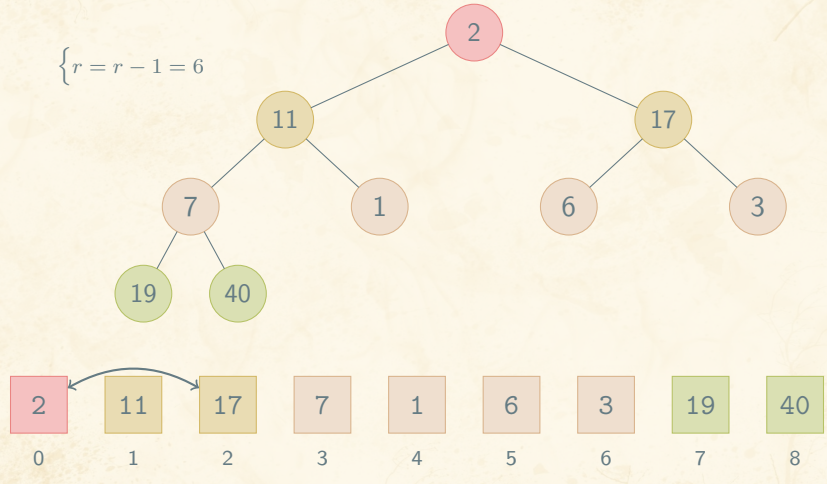
Sắp xếp dãy số dựa trên max-heap



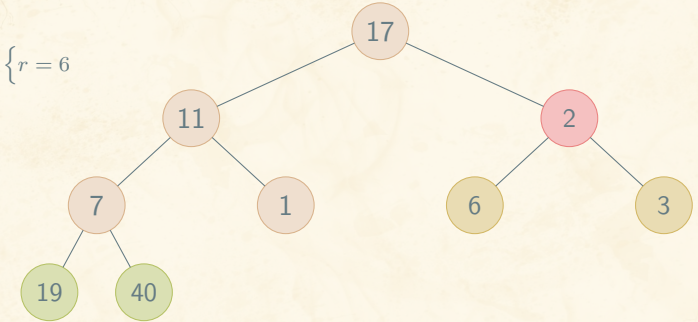
Sắp xếp dãy số dựa trên max-heap

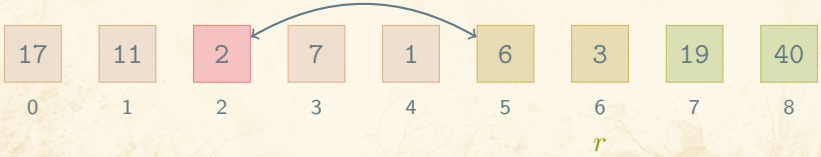


Sắp xếp dãy số dựa trên max-heap

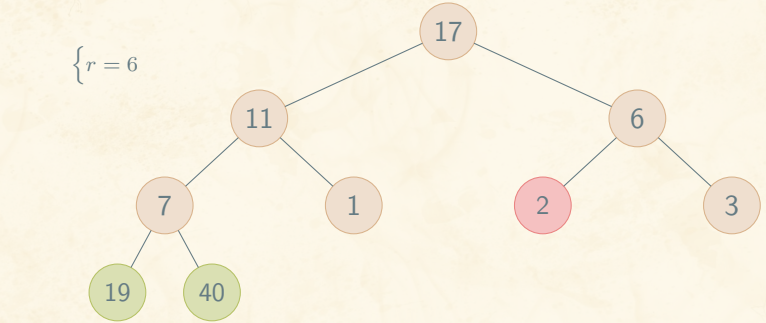


Sắp xếp dãy số dựa trên max-heap

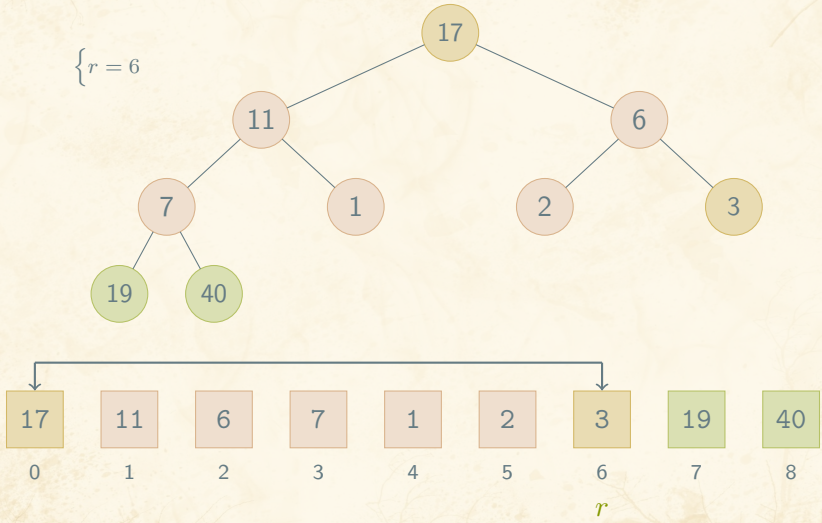




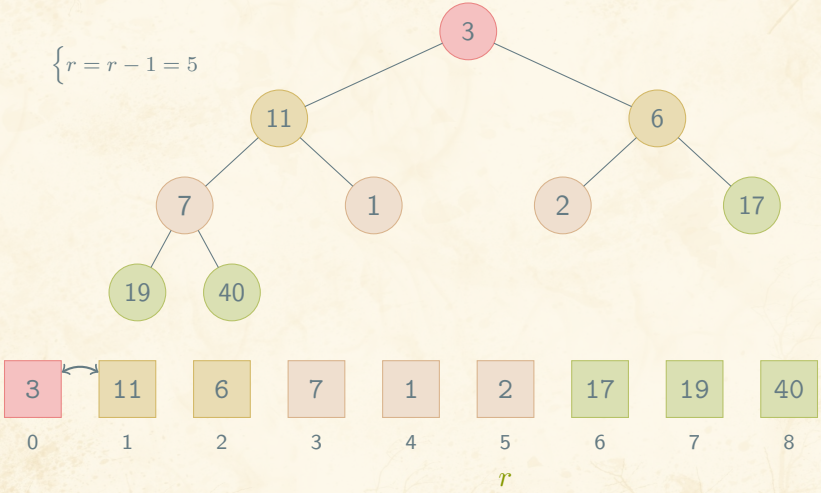
Sắp xếp dãy số dựa trên max-heap



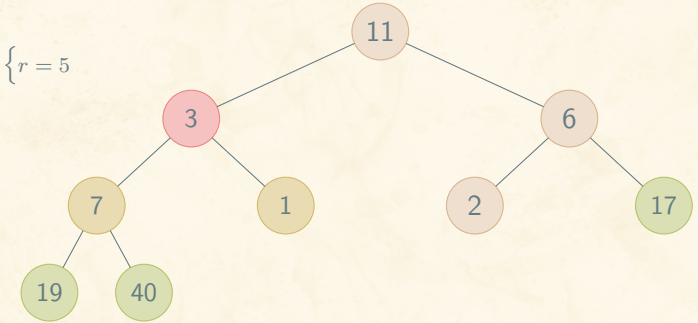
Sắp xếp dãy số dựa trên max-heap



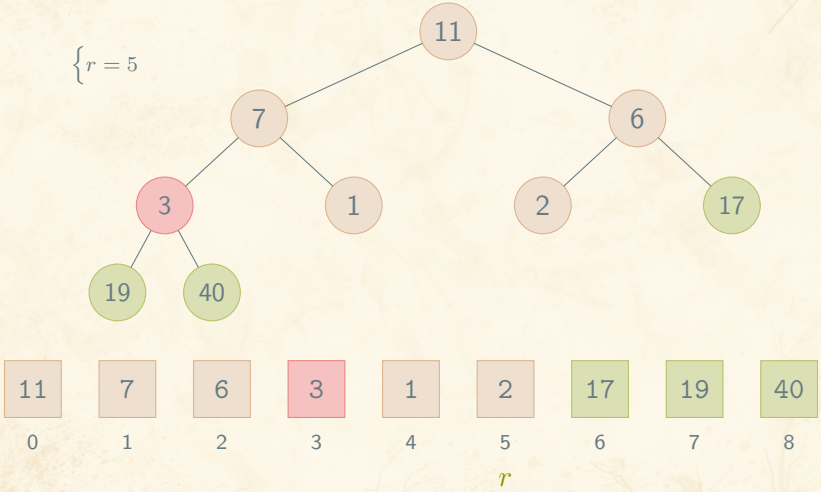
Sắp xếp dãy số dựa trên max-heap



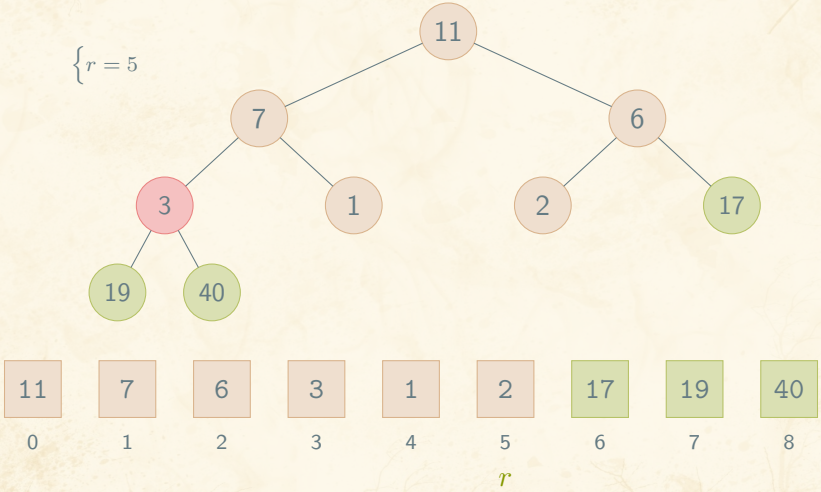
Sắp xếp dãy số dựa trên max-heap



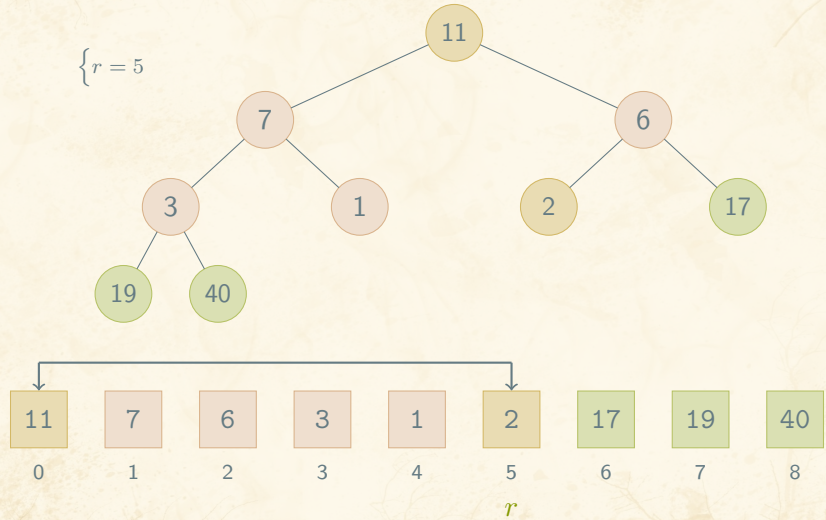
Sắp xếp dãy số dựa trên max-heap



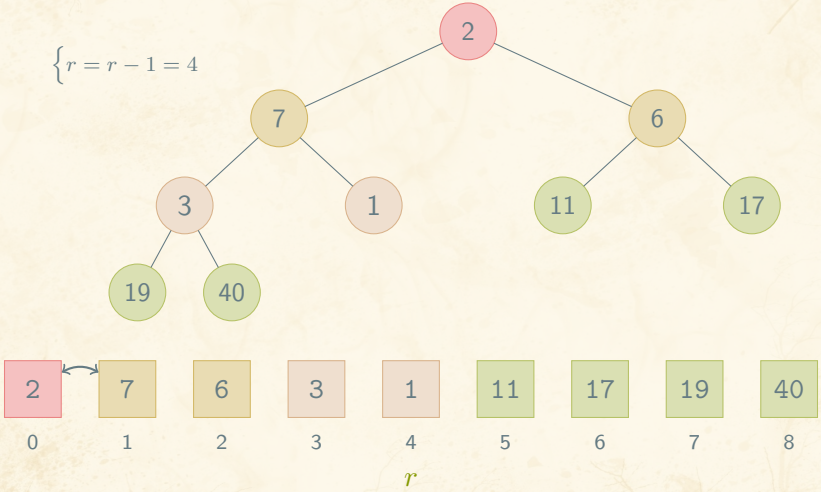
Sắp xếp dãy số dựa trên max-heap



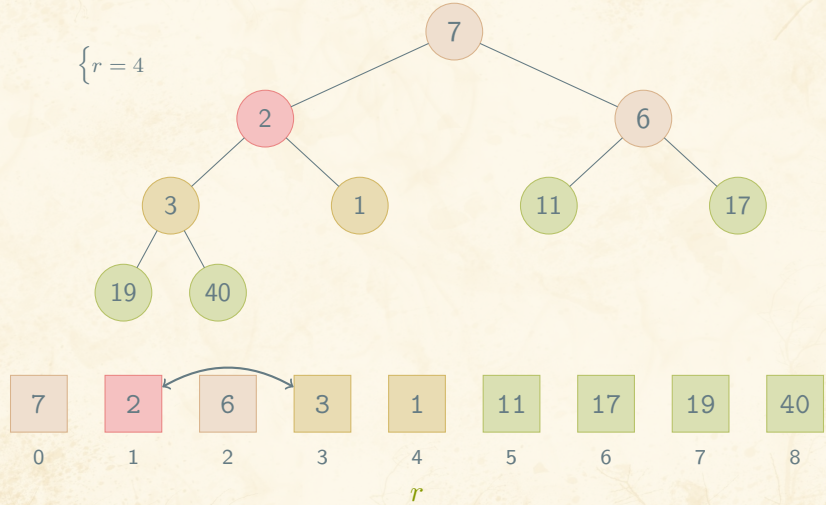
Sắp xếp dãy số dựa trên max-heap



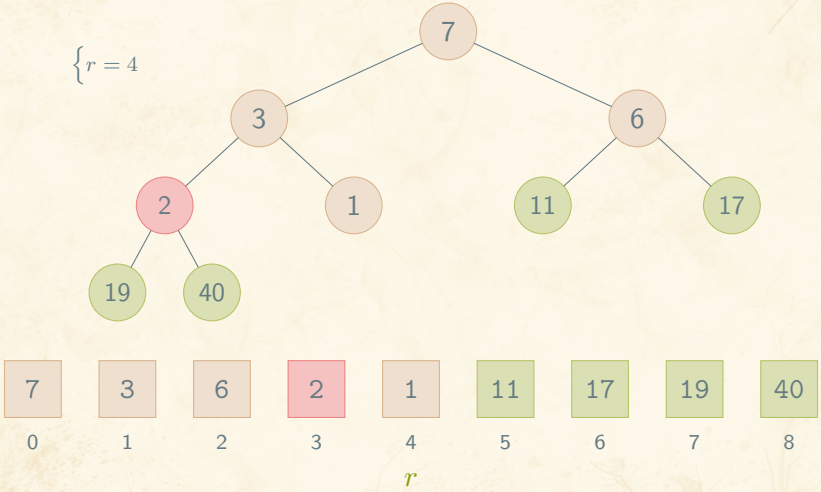
Sắp xếp dãy số dựa trên max-heap



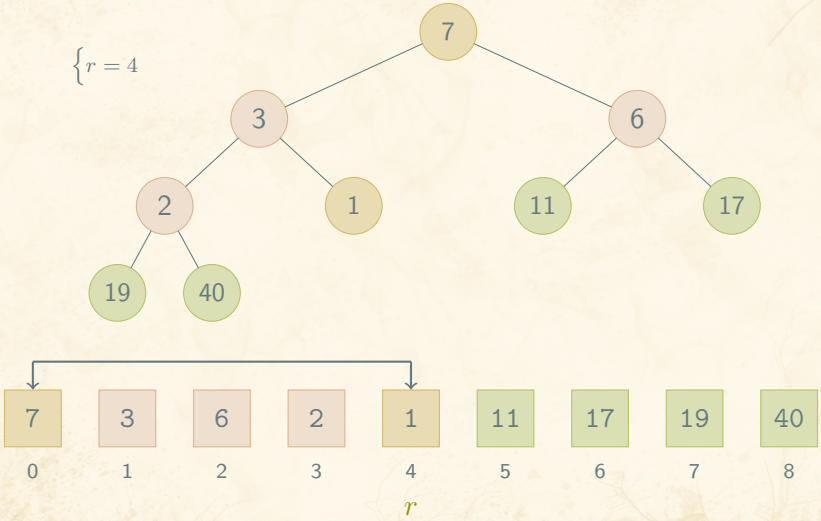
Sắp xếp dãy số dựa trên max-heap



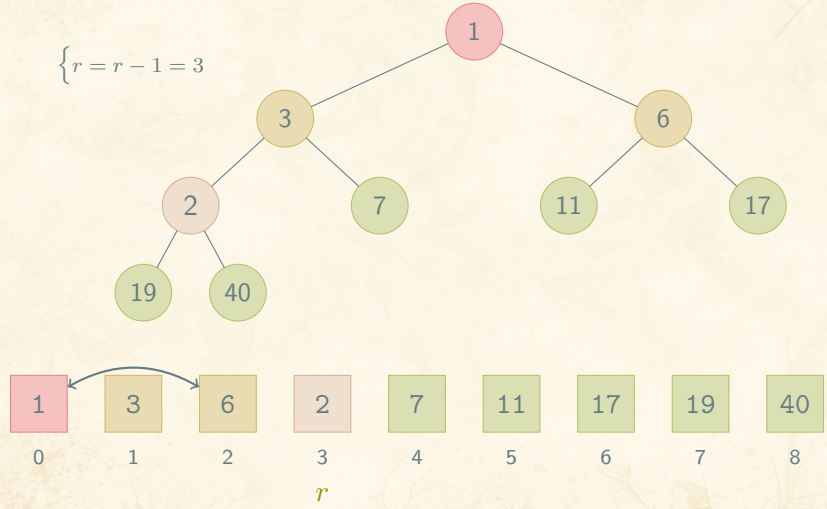
Sắp xếp dãy số dựa trên max-heap



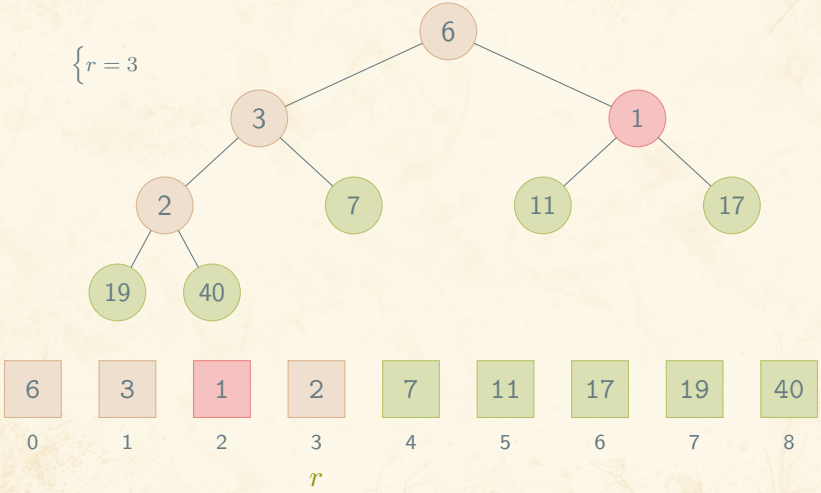
Sắp xếp dãy số dựa trên max-heap



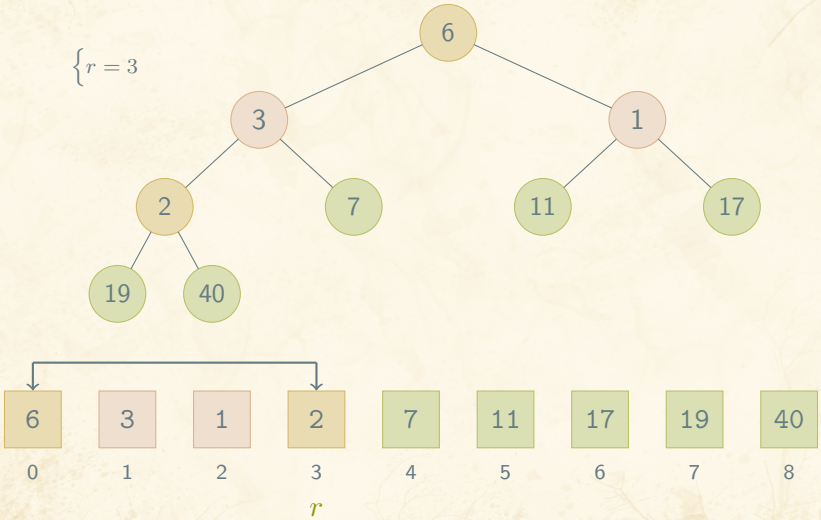
Sắp xếp dãy số dựa trên max-heap



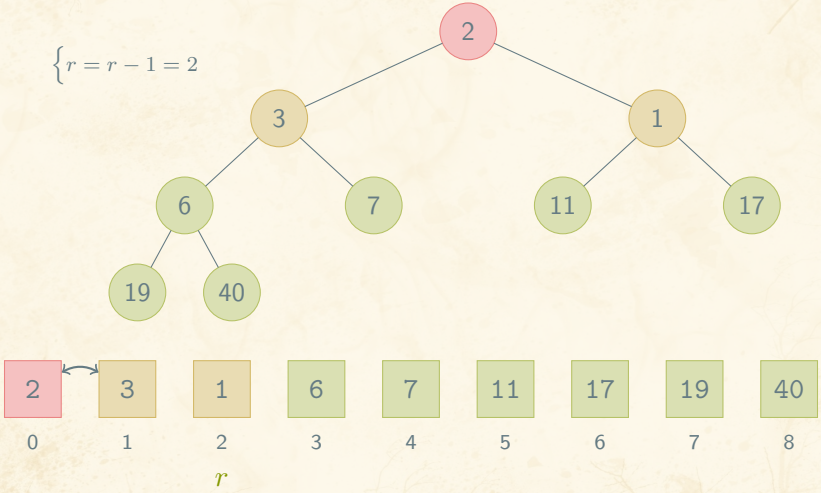
Sắp xếp dãy số dựa trên max-heap



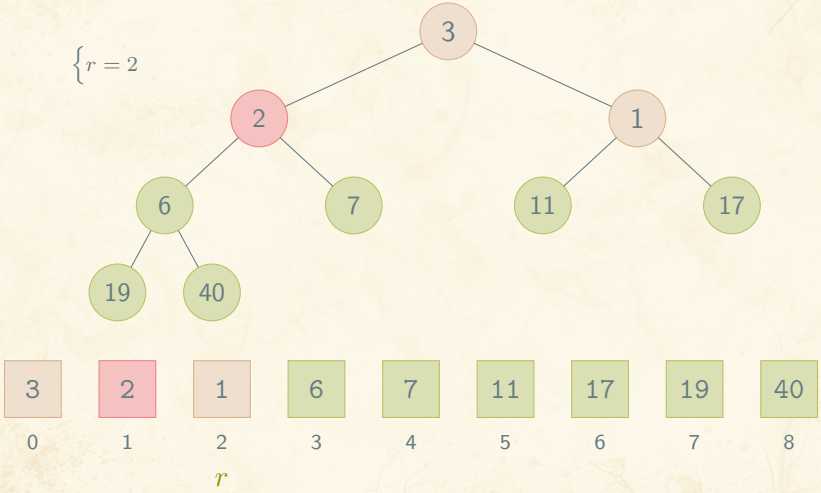
Sắp xếp dãy số dựa trên max-heap



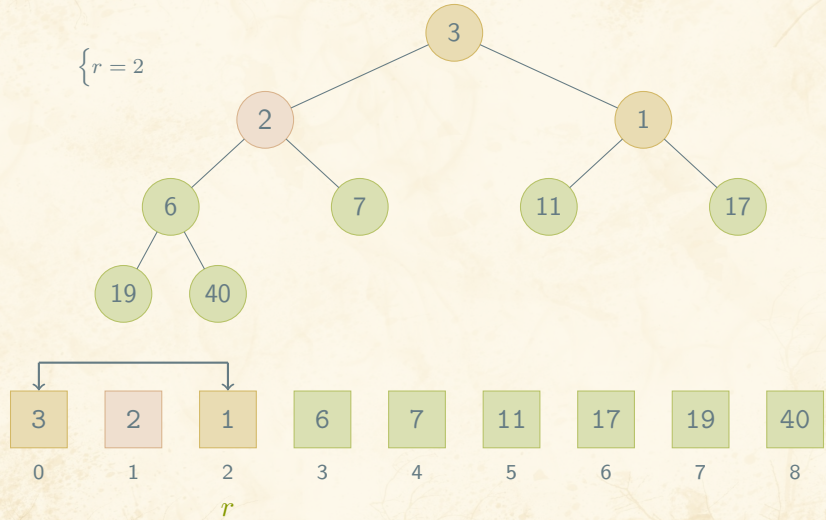
Sắp xếp dãy số dựa trên max-heap



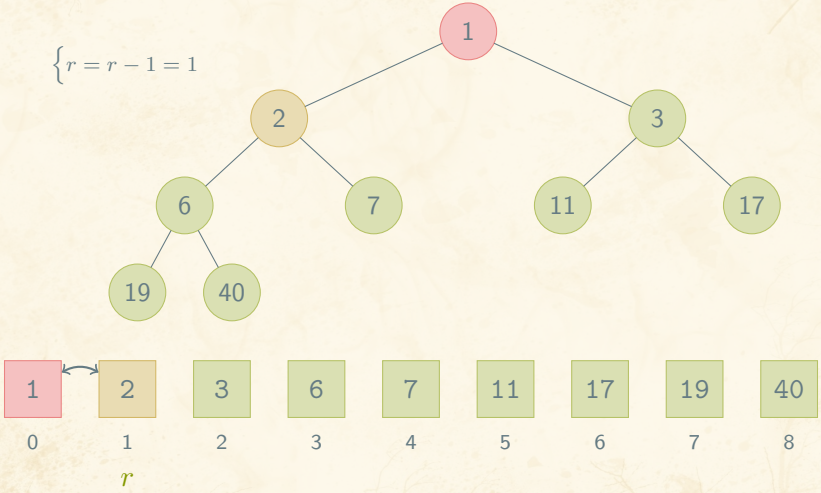
Sắp xếp dãy số dựa trên max-heap



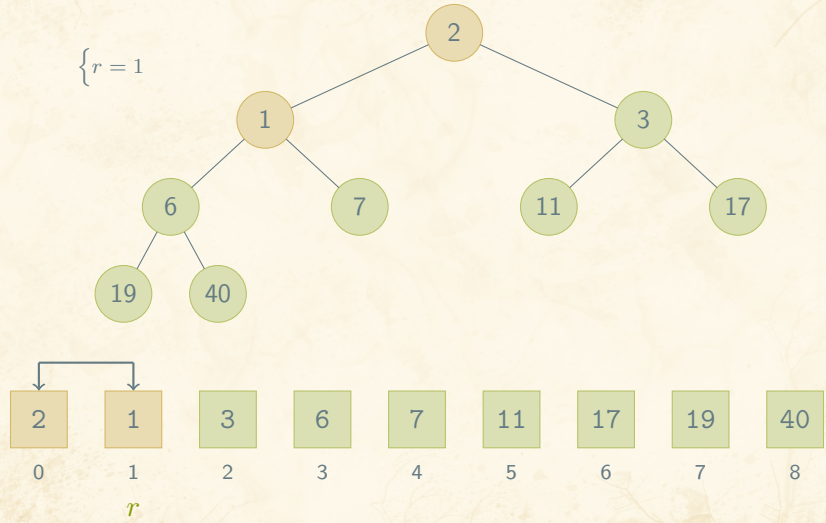
Sắp xếp dãy số dựa trên max-heap



Sắp xếp dãy số dựa trên max-heap

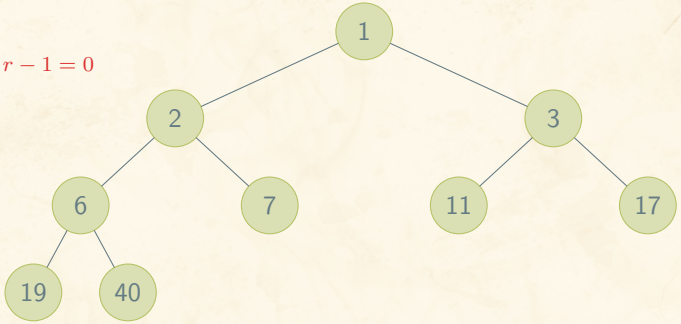


Sắp xếp dãy số dựa trên max-heap



Sắp xếp dãy số dựa trên max-heap

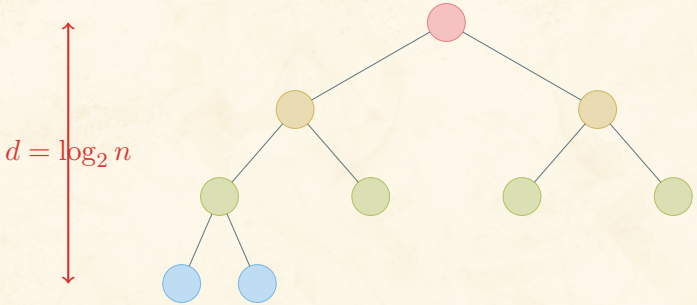
$\{ r = r - 1 = 0$



1	2	3	6	7	11	17	19	40
0	1	2	3	4	5	6	7	8

r

Đánh giá giải thuật



- Trường hợp xấu nhất, hàm hiệu chỉnh `Heapify` sẽ thực hiện từ nút gốc đến các nút lá. Cây có mức là d thì độ phức tạp thời gian của hàm hiệu chỉnh là

$$T(n) = O(d) = O(\log_2 n).$$

Đánh giá giải thuật

- Hiệu chỉnh heap là thao tác chính của giải thuật HeapSort.
  - Bước 1. Tạo heap
    $$\frac{n}{2} - 1.$$
  - Bước 2. Sắp xếp heap
    $$n - 1.$$
- Do đó, độ phức tạp thời gian của giải thuật HeapSort
$$T(n) = \left(\frac{3n}{2} - 2\right) \log_2 n = O(n \log n).$$

Bài tập

1. Áp dụng giải thuật HeapSort sắp xếp dãy b và c theo thứ tự tăng dần
   - $b = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$
   - $c = 5, 4, 3, 2, 1, 0.$

   Nhận xét sau khi thực hiện.
2. Áp dụng giải thuật HeapSort sắp xếp mảng a trong ví dụ trang 16 theo thứ tự *giảm dần*.

Tài liệu tham khảo

Dương Anh Đức, Trần Hạnh Nhi.
Nhập môn Cấu trúc dữ liệu và Thuật toán.
Đại học Khoa học tự nhiên TP Hồ Chí Minh, 2003.

Donald E. Knuth.
The Art of Computer Programming, Volume 3.
Addison-Wesley, 1998.

Niklaus Wirth.
Algorithms + Data Structures = Programs.
Prentice-Hall, 1976.

Robert Sedgewick.
Algorithms in C.
Addison-Wesley, 1990.