Chương 1.
MỆNH ĐỀ

2017

NỘI DUNG

Mệnh đề

Khái niệm

- Mệnh đề toán học/mệnh đề *(proposition)* là *một khẳng định có chân trị xác định* *(truth value)* (đúng hoặc sai chứ không thể vừa đúng vừa sai).

Ví dụ 1

- Các khẳng định sau là mệnh đề
  - $2 + 7 = 9$.
  - 1 không là số nguyên tố.
- Các khẳng định sau không là mệnh đề
  - $x > 0$.
  - n là số nguyên tố.

Mệnh đề

✍ Chú ý

- Câu *cảm thán*, *hỏi* hoặc *mệnh lệnh* *không là mệnh đề* vì nó không có chân trị xác định.

Ví dụ 2

- "Hôm nay là ngày thứ mấy?"
- "Hỡi cảnh rừng ghê gớm của ta ơi!"

  (Thế Lữ, Nhớ rừng)

Mệnh đề

Mệnh đề được chia ra làm 2 loại

- Mệnh đề phức hợp: các mệnh đề *được xây dựng* từ các mệnh đề khác bằng các liên từ (và, hay, nếu ... thì, ...) hoặc trạng trừ "không".
- Mệnh đề nguyên thủy/sơ cấp: các mệnh đề *không thể xây dựng* từ các mệnh đề khác bằng các liên từ hoặc trạng từ "không".

Mệnh đề

Chân trị của mệnh đề

- Một mệnh đề *chỉ có thể đúng hoặc sai*, không thể đồng thời vừa đúng vừa sai. Khi mệnh đề p đúng ta nói p có chân trị đúng, ngược lại ta nói p có chân trị sai.
- Ký hiệu:
  - *Chân trị đúng* là 1 hay Đ *(đúng)*, T *(true)*.
  - *Chân trị sai* là 0 hay S *(sai)*, F *(false)*.

Phép toán mệnh đề

Mục đích nghiên cứu của phép toán mệnh đề

- Nghiên cứu chân trị của một mệnh đề phức hợp từ chân trị của các mệnh đề đơn giản hơn và các phép nối những mệnh đề này biểu hiện qua liên từ hoặc trạng từ “không”.

Phép toán mệnh đề

Phép phủ định *(negation)*

- Phủ định của mệnh đề p được ký hiệu bởi $\neg p$ hay $\overline{p}$.

Bảng 1: Bảng chân trị phép phủ định.

p	$\neg p$
0	1
1	0

Phép toán mệnh đề

Phép nối liền (conjunction)/phép hội

- Mệnh đề *nối liền* của hai mệnh đề p và q được ký hiệu bởi $p \wedge q$ (p và q).

Bảng 2: Bảng chân trị phép nối liền.

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Phép toán mệnh đề

Phép nối liền (conjunction)/phép hội

Ví dụ 3

Cho 2 mệnh đề p và q như sau:

- p: "Hôm nay là ngày chủ nhật".
- q: "Trời nắng".
- Phép nối liền của 2 mệnh đề p và q là mệnh đề:

Phép toán mệnh đề

Phép nối liền (conjunction)/phép hội

Ví dụ 3

Cho 2 mệnh đề p và q như sau:

- p: "Hôm nay là ngày chủ nhật".
- q: "Trời nắng".
- Phép nối liền của 2 mệnh đề p và q là mệnh đề:

$$p \wedge q : \text{"Hôm này là ngày chủ nhật và trời nắng"}$$

Phép toán mệnh đề

Phép nối liền (conjunction)/phép hội

Ví dụ 3

Cho 2 mệnh đề p và q như sau:

- p: "Hôm nay là ngày chủ nhật".
- q: "Trời nắng".
- Phép nối liền của 2 mệnh đề p và q là mệnh đề:

$$p \wedge q : \text{"Hôm này là ngày chủ nhật và trời nắng"}$$

- Mệnh đề $p \wedge q$ *chỉ đúng* khi "hôm nay là chủ nhật" và "trời nắng".

Phép toán mệnh đề

Phép nối rời (disjunction)/phép tuyển

- Mệnh đề *nối rời* của hai mệnh đề p và q được ký hiệu bởi $p \vee q$ (p hay/hoặc-bao hàm q).

Bảng 3: Bảng chân trị phép nối rời.

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Phép toán mệnh đề

Phép nối rời (disjunction)/phép tuyển

Ví dụ 4

Cho 2 mệnh đề p và q như sau:

- p: "An đọc báo".
- q: "An xem tivi".
- Phép nối rời của 2 mệnh đề p và q là mệnh đề:

Phép toán mệnh đề

Phép nối rời (disjunction)/phép tuyển

Ví dụ 4

Cho 2 mệnh đề p và q như sau:

- p: "An đọc báo".
- q: "An xem tivi".
- Phép nối rời của 2 mệnh đề p và q là mệnh đề:

$p \vee q$: "An đang đọc báo hay xem tivi".

Phép toán mệnh đề

Phép nối rời (disjunction)/phép tuyển

Ví dụ 4

Cho 2 mệnh đề p và q như sau:

- p: "An đọc báo".
- q: "An xem tivi".
- Phép nối rời của 2 mệnh đề p và q là mệnh đề:

$$p \vee q : \text{"An đang đọc báo hay xem tivi".}$$

- Mệnh đề $p \vee q$ *chỉ sai* khi "An không đọc báo" và "An không xem tivi".

Phép toán mệnh đề

Phép tuyển loại *(exclusive-OR)*

- Mệnh đề *tuyển loại* của hai mệnh đề p và q được ký hiệu bởi $p \oplus q$ (p hoặc q, hoặc-loại trừ).

Bảng 4: Bảng chân trị phép tuyển loại.

p	q	$p \oplus q$	$(p \lor q) \land \neg(p \land q)$
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	0

Phép toán mệnh đề

Phép kéo theo *(Implication/If ... then ...)*

- Mệnh đề nếu p thì q được ký hiệu là $p \to q$.
    - p kéo theo q.
    - p là điều kiện đủ của q.
    - q là điều kiện cần của p.
    - nếu p thì q.

Phép toán mệnh đề

Phép kéo theo *(Implication/If ... then ...)*

Bảng 5: Bảng chân trị phép kéo theo.

p	q	$p \to q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Phép toán mệnh đề

Phép kéo theo *(Implication/If ... then ...)*

Ví dụ 5

Cho 2 mệnh đề p và q như sau:

- p: "Trời nắng".
- q: "Chúng tôi đá banh".
- Phép kéo theo của 2 mệnh đề p và q là mệnh đề:

Phép toán mệnh đề

Phép kéo theo *(Implication/If ... then ...)*

Ví dụ 5

Cho 2 mệnh đề p và q như sau:

- p: "Trời nắng".
- q: "Chúng tôi đá banh".
- Phép kéo theo của 2 mệnh đề p và q là mệnh đề:

$$p \to q : \text{"Nếu trời nắng, thì chúng tôi sẽ đá banh".}$$

Phép toán mệnh đề

Phép kéo theo *(Implication/If ... then ...)*

Ví dụ 5

Cho 2 mệnh đề p và q như sau:

- p: "Trời nắng".
- q: "Chúng tôi đá banh".
- Phép kéo theo của 2 mệnh đề p và q là mệnh đề:

$p \to q$: "Nếu trời nắng, thì chúng tôi sẽ đá banh".

- Mệnh đề $p \to q$ *chỉ sai* khi "trời nắng" nhưng "chúng tôi không đá banh".

Phép toán mệnh đề

Phép kéo theo *(Implication/If ... then ...)*

✍ Chú ý

- Các định lý toán học thường biểu diễn dưới dạng $p \to q$.
- Cấu trúc `If ... then ...` trong các ngôn ngữ lập trình *khác* với cách dùng trong logic.
  - Trong logic, p và q là một mệnh đề.
  - Trong các ngôn ngữ lập trình, p là một mệnh đề còn q là một đoạn chương trình.

Phép toán mệnh đề

Phép kéo theo *(Implication/If ... then ...)*

Ví dụ 6

- Cho hai mệnh đề p và q sau:
  - p : "$0 = 1$".
  - q : "Quang Trung và Trần Hưng Đạo là một người".
- "Nếu $0 = 1$ thì Quang Trung và Trần Hưng Đạo là một người".
- Xét đoạn chương trình sau

```
    if p = true then
        q ← true
```

Phép toán mệnh đề

Phép kéo theo *(Implication/If ... then ...)*

Cho mệnh đề $p \to q$, ta có

- Mệnh đề $q \to p$ được gọi là mệnh đề đảo của $p \to q$.
- Mệnh đề $\neg q \to \neg p$ được gọi là mệnh đề phản đảo của $p \to q$.

Ví dụ 7

- Định lý Pytago: "Nếu $\triangle ABC$ là $\triangle$ vuông tại A thì $AB^2 + AC^2 = BC^2$".
- Định lý Pytago đảo: "Nếu $\triangle ABC$ có $AB^2 + AC^2 = BC^2$ thì $\triangle ABC$ vuông tại A".

Phép toán mệnh đề

Phép kéo theo hai chiều *(Equivalence/If and only if)*

- Mệnh đề nếu p thì q và ngược lại được ký hiệu là $p \leftrightarrow q$.
  - p khi và chỉ khi q.
  - p nếu và chỉ nếu q.
  - p là điều kiện cần và đủ của q.

Phép toán mệnh đề

Phép kéo theo hai chiều *(Equivalence/If and only if)*

Bảng 6: Bảng chân trị phép kéo theo hai chiều.

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Phép toán mệnh đề

Phép kéo theo hai chiều *(Equivalence/If and only if)*

Dạng mệnh đề

Biểu thức đại số

Trong đại số, các biểu thức đại số được xây dựng từ

- Hằng số.
- Biến.
- Các phép thao tác trên các hằng số và các biến theo một thứ tự nhất định.

Ví dụ 8

- Cho các biểu thức đại số
  - $x + y - 10$.
  - $ax^2 + bx + c$.

Dạng mệnh đề

Dạng mệnh đề/biểu thức logic

Trong phép toán mệnh đề, các dạng mệnh đề được xây dựng từ

- Hằng mệnh đề.
- Các biến mệnh đề .
- Các phép nối thao tác trên các hằng mệnh đề và các biến mệnh đề theo một thứ tự nhất định.

Ví dụ 9

- $E(q, q, r) = (p \wedge q) \vee ((\neg r) \to p)$.

Dạng mệnh đề

Tính chân trị của một dạng mệnh đề

- Trong phép toán mệnh đề, chân trị của một dạng mệnh đề phụ thuộc vào chân trị các biến mệnh đề.

Ví dụ 10

- Xây dựng bảng chân trị của hai dạng mệnh đề $p \rightarrow q$ và $\neg p \vee q$.

Dạng mệnh đề

Tính chân trị của một dạng mệnh đề

- Trong phép toán mệnh đề, chân trị của một dạng mệnh đề phụ thuộc vào chân trị các biến mệnh đề.

Ví dụ 10

- Xây dựng bảng chân trị của hai dạng mệnh đề $p \to q$ và $\neg p \vee q$.

p	q	$\neg p$	$p \to q$	$\neg p \vee q$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	0	1	1

Dạng mệnh đề

Tính chân trị của một dạng mệnh đề

Ví dụ 11

Xây dựng bảng chân trị của các mệnh đề

(a) $p \vee \neg p$.

(b) $p \oplus \neg q$

(c) $(p \to q) \vee (\neg p \to q)$

(d) $(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$.

(e) $(\neg p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (p \leftrightarrow r)$.

Dạng mệnh đề

Định nghĩa 1

- Một dạng mệnh đề được gọi là một *hằng đúng* (chân lý) nếu nó luôn luôn có chân trị 1.
- Một dạng mệnh đề được gọi là một *hằng sai* (mâu thuẫn) nếu nó luôn luôn có chân trị 0.

Dạng mệnh đề

Định nghĩa 2 (Tương đương logic)

- Hai dạng mệnh đề E, F được gọi là *tương đương logic* nếu chúng có *cùng bảng chân trị*.
- Ký hiệu $E \Leftrightarrow F$.

Hai dạng mệnh đề E, F được gọi là tương đương logic khi và chỉ khi $E \leftrightarrow F$ là một hằng đúng.

Tương đương logic

Quy tắc thay thế thứ nhất

- Trong dạng mệnh đề E, nếu ta thay thế biểu thức con F bởi một dạng mệnh đề *tương đương logic* thì dạng mệnh đề thu được vẫn còn tương đương logic với E.

Tương đương logic

Quy tắc thay thế thứ hai

- Giả sử mệnh đề $E(p, q, r, \ldots)$ là một hằng đúng, nếu ta thay thế những nơi p xuất hiện trong E bởi một dạng mệnh đề tùy ý $F(p', q', r', \ldots)$ thì dạng mệnh đề nhận được theo các biến $p, q, r, \ldots$ vẫn còn là một hằng đúng.

Tương đương logic

Các quy luật logic

Cho p, q, r là các biến mệnh đề, ta có các tương đương logic sau:

(i) Phủ định của phủ định.
$\neg\neg p \Leftrightarrow p$

(ii) Quy tắc De Morgan.
$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$
$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

Tương đương logic

Các quy luật logic

(iii) Luật giao hoán.

$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$

$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$

(iv) Luật kết hợp.

$p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$

$p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$

(v) Luật phân phối.

$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

Tương đương logic

Các quy luật logic

(vi) Luật lũy đẳng.

$p \wedge p \Leftrightarrow p$

$p \vee p \Leftrightarrow p$

(vii) Luật trung hòa.

$p \wedge 1 \Leftrightarrow p$

$p \vee 0 \Leftrightarrow p$

Tương đương logic

Các quy luật logic

(viii) Luật về phần tử bù.

$p \wedge \neg p \Leftrightarrow 0$

$p \vee \neg p \Leftrightarrow 1$

(ix) Luật thống trị.

$p \wedge 0 \Leftrightarrow 0$

$p \vee 1 \Leftrightarrow 1$

(x) Luật hấp thụ.

$p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$

$p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$

Tương đương logic

Ví dụ 12

- Chứng minh

$$\neg\left(p \vee (\neg p \wedge q)\right) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q.$$

....

....

....

....

....

....

Tương đương logic

Ví dụ 13

- Chứng minh

$$(p \wedge q) \to (p \vee q)$$

là hằng đúng.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Tương đương logic

Phép chứng minh phản đảo *(contraposition)*

$$(p \to q) \Leftrightarrow (\neg q \to \neg p)\,. \qquad (1)$$

Ví dụ 14

(a) Chứng minh phát biểu: *"Nếu $n^2 + 1$ là số lẻ thì n là số chẵn"* là đúng.

(b) Chứng minh phát biểu: *"Nếu n^2 là số chẵn thì n cũng là số chẵn"* là đúng.

Tương đương logic

(a). Chứng minh phát biểu: *"Nếu $n^2 + 1$ là số lẻ thì n là số chẵn"* là đúng.

- p: "$n^2 + 1$ là số lẻ".
- q: "n là số chẵn".
- Ta chứng minh mệnh đề phản đảo $\neg q \to \neg p$: "Nếu n là số lẻ, thì $n^2 + 1$ là số chẵn" *đúng* như sau:
  - Nếu n là số lẻ, thì tồn tại số nguyên k sao cho $n = 2k + 1$.
  - Nên ta có $n^2 + 1 = (2k + 1)(2k + 1) + 1 = 2\left(2k^2 + 2k + 1\right)$
  - Do đó, $n^2 + 1$ là số chẵn.
  - Vì $\neg q \to \neg p$ đúng nên $p \to q$ đúng.

$\square$

Tương đương logic

(b). Chứng minh phát biểu: *"Nếu n^2 là số chẵn thì n cũng là số chẵn"* là đúng.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

.... □

Tương đương logic

Phép chứng minh phản ví dụ *(counterexample)*

$$\neg (p \to q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q)\,. \tag{2}$$

Ví dụ 15

(a) Chứng minh phát biểu: *"Nếu n^2 chia hết cho 4 thì n chia hết cho 4"* là sai.

(b) Chứng minh phát biểu: *"Tất cả số nguyên tố đều là số lẻ"* là sai.

Tương đương logic

Phép chứng minh phản chứng *(contradiction)*

$$p \Leftrightarrow (\neg p \rightarrow 0)\,. \qquad (3)$$

Ví dụ 16

(a) Chứng minh phát biểu: *"$\sqrt{2}$ là một số vô tỷ"*u là đúng.

(b) Chứng minh phát biểu: *"Nếu n^2+1 là số lẻ thì n là số chẵn"* là đúng.

Tương đương logic

(a). Chứng minh phát biểu: "$\sqrt{2}$ là một số vô tỷ" đúng.

- p: "$\sqrt{2}$ là một số vô tỷ, $\neg p$: "$\sqrt{2}$" không là số vô tỷ.
- Ta chứng minh mệnh đề $\neg q \to 0$: "Nếu n là số lẻ, thì $n^2 + 1$ là số chẵn" *đúng* như sau:
  - Nếu $\sqrt{2}$ không là số vô tỷ, thì tồn tại hai số nguyên m, n sao cho
$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2.$$
  - Giả sử $m, n \in \mathbb{N}$ và $gcd\,(m, n) = 1$.

□

Tương đương logic

(a). Chứng minh phát biểu: "$\sqrt{2}$ là một số vô tỷ" đúng.

- - Nên ta có
$$m^2 = 2n^2.$$
    Suy ra m là số chẵn.
  - Thay $m = 2k$, ta lại có
$$(2k)^2 = 2n^2.$$
    Suy ra n là số chẵn.
  - Vì m và n là số chẵn nên $gcd\,(m, n) \neq 1$. Mâu thuẫn.
- Do đó, theo phép chứng minh phản chứng $\sqrt{2}$ là một số vô tỷ.

Tương đương logic

(b). Chứng minh phát biểu: *"Nếu* $n^2 + 1$ *là số lẻ thì n là số chẵn"* là đúng.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

.... □

Dạng mệnh đề

Định nghĩa 3 (Hệ quả logic)

- Dạng mệnh đề F được gọi là hệ quả logic của mệnh đề E nếu $E \to F$ là một hằng đúng.
- Ký hiệu $E \Rightarrow F$.

Hai dạng mệnh đề E, F được gọi là hệ quả logic khi và chỉ khi $E \to F$ là một hằng đúng.

Dạng mệnh đề

Dạng mệnh đề trong chương trình máy tính

Ví dụ 17

Xét hai đoạn chương trình sau

```
if a + b > c and a + c > b and b + c > a
    print "Tam giac hop le"
```

```
if a + b > c
    if a + c > b
        if b + c > a
            print "Tam giac hop le"
```

Các quy tắc suy diễn

Quy tắc suy diễn (inference rule)

- Trong chứng minh toán học, xuất phát từ một số khẳng định đúng $p_1, p_2, \ldots, p_n$ gọi là tiền đề *(premise)*, ta áp dụng các quy tắc suy diễn để suy ra chân lý của một khẳng định q mà ta gọi là kết luận *(conclusion)*.
- Quy tắc suy diễn áp dụng để suy ra hệ quả logic sau

$$(p_1, p_2, \ldots, p_n) \Rightarrow q. \tag{4}$$

hoặc nói cách khác dạng mệnh đề

$$(p_1, p_2, \ldots, p_n) \rightarrow q \tag{5}$$

là một hằng đúng.

Các quy tắc suy diễn

Quy tắc Modus Ponens (Phương pháp khẳng định)

Biểu diễn bởi hằng đúng

$$[(p \rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q \tag{6}$$

hoặc dưới dạng sơ đồ

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ p \\ \hline \therefore q \end{array}$$

Các quy tắc suy diễn

Quy tắc Modus Ponens (Phương pháp khẳng định)

Ví dụ 18

(nếu) là người thì phải chết
(mà) Socrate là người

$\therefore$ (vậy) Socrate phải chết

Các quy tắc suy diễn

Quy tắc Modus Tollens (Phương pháp phủ định)

Biểu diễn bởi hằng đúng

$$[(p \rightarrow q) \wedge \neg q] \Rightarrow \neg p. \tag{7}$$

hoặc dưới dạng sơ đồ

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \neg q \\ \hline \therefore \neg p \end{array}$$

Các quy tắc suy diễn

Quy tắc Modus Tollens (Phương pháp phủ định)

Ví dụ 19

$$\begin{array}{rl} & \text{(nếu) là người thì phải chết} \\ & \text{(mà) Zeus không chết} \\ \hline \therefore & \text{(vậy) Zeus không là người} \end{array}$$

Các quy tắc suy diễn

Tam đoạn luận (Syllogism)

Quy tắc được biểu diễn bởi hằng đúng:

$$[(p \to q) \wedge (q \to r)] \Rightarrow (p \to r)\,. \tag{8}$$

hoặc dưới dạng sơ đồ

$$\begin{array}{c} p \to q \\ q \to r \\ \hline \therefore\, p \to r \end{array}$$

Các quy tắc suy diễn

Tam đoạn luận (Syllogism)

Ví dụ 20

(nếu) hai $\triangle$ có cạnh đôi một bằng nhau
thì bằng nhau
(nếu) hai $\triangle$ bằng nhau
thì có các góc đôi một bằng nhau

$\therefore$ (nếu) hai $\triangle$ có cạnh đôi một bằng nhau
thì có các góc đôi một bằng nhau

Các quy tắc suy diễn

Tam đoạn luận rời *(Disjunctive Syllogism)*

Quy tắc được biểu diễn bởi hằng đúng:

$$[(p \vee q) \wedge \neg p] \Rightarrow q. \tag{9}$$

Hoặc dưới dạng sơ đồ

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ \neg p \\ \hline \therefore q \end{array}$$

Các quy tắc suy diễn

Tam đoạn luận rời *(Disjunctive Syllogism)*

Ví dụ 21

$$\begin{array}{l} \text{(ta có) a = 0 hay b = 0} \\ \text{(mà) } b \neq 0 \\ \hline \therefore \quad \text{(vậy)} \quad a = 0 \end{array}$$

Các quy tắc suy diễn

Quy tắc mâu thuẫn (chứng minh phản chứng)

Quy tắc này dựa trên tương đương logic sau:

$$[(p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n) \rightarrow q] \Leftrightarrow [(p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n \wedge \neg q) \rightarrow 0]$$

- Nếu chứng minh dạng mệnh đề bên phải là hằng đúng thì mệnh đề bên trái cũng là hằng đúng.
- Chứng minh phản chứng sẽ thêm một giả thiết $\neg q$ vào các tiền đề để dẫn đến mâu thuẫn.

Các quy tắc suy diễn

Quy tắc mâu thuẫn (chứng minh phản chứng)

Ví dụ 22

Chứng minh phản chứng cho hệ quả logic sau

$$[(p \to r) \wedge (\neg p \to q) \wedge (q \to s)] \Rightarrow (\neg r \to s)\,.$$

Các quy tắc suy diễn

Quy tắc mâu thuẫn (chứng minh phản chứng)

Chứng minh.

- Phủ định kết quả $\neg(\neg r \to s) \Leftrightarrow \neg(r \vee s) \Leftrightarrow \neg r \wedge \neg s$.
- Ta có thêm hai tiền đề $\neg r$ và $\neg s$.
- Chứng minh suy luận sau là đúng

$$
\begin{array}{ll}
 & p \to r \\
 & \neg p \to q \\
 & q \to s \\
 & \neg r \\
 & \neg s \\
\hline
\therefore & 0
\end{array}
$$

$\square$

Các quy tắc suy diễn

Quy tắc mâu thuẫn (chứng minh phản chứng)

Chứng minh.

- Suy luận qua các bước sau

$$
\begin{array}{ll}
 & \neg\, \mathrm{p} \to q \\
 & q \to s \\
\hline
\therefore & \neg p \to s \\
 & \neg s \\
\hline
\therefore & \mathrm{p} \\
 & p \to r \\
\hline
\therefore & r \\
 & \neg r \\
\hline
\therefore & 0
\end{array}
$$

(Luật De Morgan)

(Quy tắc phủ định)

(Quy tắc khẳng định)

$\square$

Các quy tắc suy diễn

Quy tắc chứng minh theo trường hợp

Quy tắc này dựa trên tương đương logic sau:

$$[(p_1 \to q) \land (p_2 \to q) \land \cdots \land (p_n \to q)]$$

$$\Leftrightarrow [(p_1 \lor p_2 \lor \cdots \lor p_n) \to q] \, .$$

- Giả thiết có thể tách thành n trường hợp $p_1 \to q$, $p_2 \to q$, ..., $p_n \to q$.
- Chứng minh từng trường hợp $p_i \to q$ đúng suy ra được $(p_1 \lor p_2 \lor \cdots \lor p_n) \to q$ đúng.

Các quy tắc suy diễn

Quy tắc chứng minh theo trường hợp

Ví dụ 23

(a) Chứng minh phát biểu: *"Nếu một số nguyên n không chia hết cho 3, thì* $n^2 = 3k + 1$ *với k là một số nguyên nào đó"* là đúng.

(b) Chứng minh phát biểu: *"*$f(x) = n^3 + 2n$ *luôn chia hết cho 3"* là đúng.

Các quy tắc suy diễn

Quy tắc chứng minh phản ví dụ

Quy tắc này dựa trên chứng minh dạng mệnh đề

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n \wedge \neg q) \rightarrow q$$

là hằng sai.

- Chứng minh phản ví dụ tìm các chân trị của biến mệnh đề làm cho các tiền đề đúng trong khi kết luận sai.

Tài liệu tham khảo

Đinh Ngọc Thanh.
Giáo trình Logic học.
Đại học Cửu Long, 2013.

Kenneth H. Rosen.
Discrete Mathematics and Its Applications, 7th Edition.
McGraw-Hill Publishing, 2012.

Nguyễn Hữu Anh.
Giáo trình Toán rời rạc.
NXB Lao động xã hội, 2007.

Nguyễn Viết Đông.
Bài giảng Toán rời rạc.
ĐH KHTN Tp Hồ Chí Minh.