Chương 5. ĐỒ THỊ PHẲNG

ThS. Nguyễn Chí Hiếu

2019

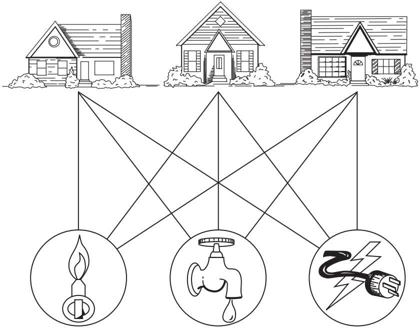
NỘI DUNG

1. Cái khái niệm cơ bản
2. Tô màu đồ thị
3. Ứng dụng của bài toán tô màu đồ thị

Các khái niệm cơ bản

Ví dụ 1

Cho 3 ngôi nhà được nối với 3 thiết bị sinh hoạt riêng rẽ. Có thể nối 3 ngôi nhà và 3 thiết bị sao cho *không có đường nào cắt nhau* hay không?



Hình 1: Sơ đồ nối 3 ngôi nhà và 3 thiết bị sinh hoạt.

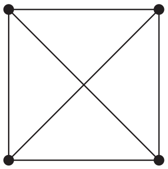
Các khái niệm cơ bản

Định nghĩa 1

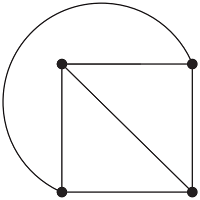
Đồ thị phẳng *(planar graph)* là đồ thị có thể vẽ được trên một mặt phẳng mà không có cạnh nào cắt nhau *(ngoại trừ tại đỉnh)*.

Ví dụ 2

Đồ thị đầy đủ K_4 với 2 cạnh cắt nhau như hình có phải đồ thị phẳng không?



Hình 2: Đồ thị K_4.

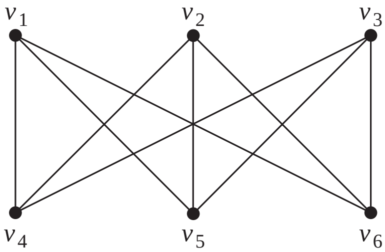


Hình 3: Đồ thị K_4 không có cạnh cắt nhau.

Các khái niệm cơ bản

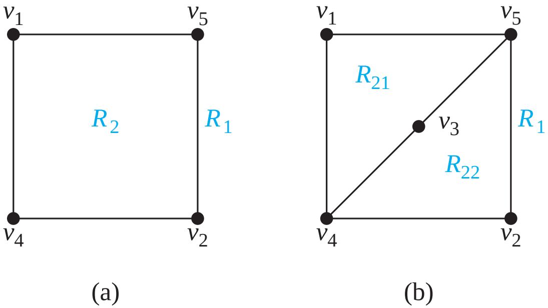
Ví dụ 3

Đồ thị đầy đủ $K_{3,3}$ trong [Ví dụ 1, trang 3] có phải đồ thị phẳng không?



Hình 4: Đồ thị $K_{3,3}$.

Các khái niệm cơ bản



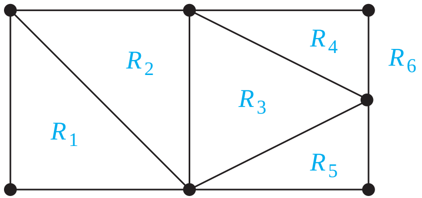
Hình 5: Các mặt phẳng chỉ ra $K_{3,3}$ không phải đồ thị phẳng.

Các khái niệm cơ bản

Định nghĩa 2

Đồ thị phẳng chia mặt phẳng thành các **mặt/miền** *(face/region) hữu hạn* và *vô hạn*.

Ví dụ 4

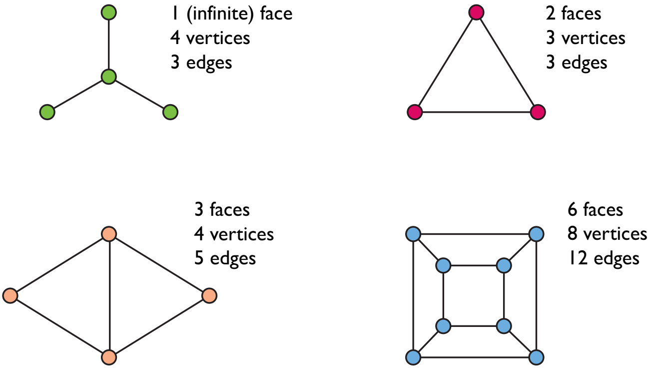


Hình 6: Đồ thị phẳng chia mặt phẳng thành 6 mặt.

Các khái niệm cơ bản

Ví dụ 5

Đồ thị phẳng chứa chu trình và không chứa chu trình (cây).



Hình 7: Một số đồ thị phẳng.

Các khái niệm cơ bản

Công thức Euler cho đồ thị phẳng

Cho G là đồ thị liên thông có $n = |V|$ đỉnh và $m = |E|$ cạnh. Gọi f là số lượng mặt biểu diễn của G. Khi đó, ta có công thức:

$$\boxed{n - m + f = 2.} \tag{1}$$

Các khái niệm cơ bản

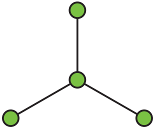
Chứng minh

Áp dụng chứng minh quy nạp dựa trên số lượng các cạnh của đồ thị.

- *Bước cơ sở: giả sử đồ thị phẳng chỉ chứa 1 đỉnh. Ta có,* $n = 1, m = 0$ *và* $f = 1$*. Do đó,* $n - m + f = 2$ *đúng.*
- *Bước quy nạp: giả sử [1] đúng với đồ thị phẳng có m cạnh. Ta cần phải chứng minh [1] đúng với đồ thị có* $m - 1$ *cạnh.*
  - *Trường hợp 1: G không chứa chu trình.*
  - *Trường hợp 2: G có chứa chu trình.*

Các khái niệm cơ bản

Chứng minh



Hình 8: Đồ thị G không chứa chu trình.

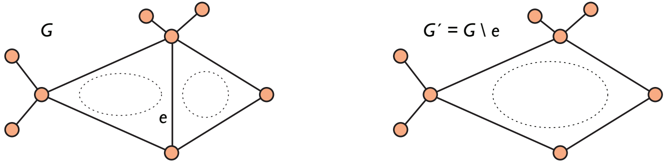
- *Trường hợp 1: G không chứa chu trình.*
  - *Ta có,*

$$\begin{aligned} n &= n \\ m &= n-1 \\ f &= 1 \end{aligned}$$

  - *Suy ra, $n - m + f = 2$ đúng.*

Các khái niệm cơ bản

Chứng minh



Hình 9: Đồ thị G và G'.

- *Trường hợp 2: G không phải cây và G có chứa chu trình.*
  - *Chọn e là một cạnh thuộc chu trình. Cho $G' = G \setminus e$ là đồ thị có $n' = n$ đỉnh, $m' = m - 1$ cạnh và $f' = f - 1$ mặt.*
  - *Theo giả thiết, ta có $n' - m' + f' = 2$ đúng. Do đó,*

$$\begin{aligned} n' - m' + f' &= 2 \\ n - (m-1) + (f-1) &= 2 \\ n - m + f &= 2. \end{aligned}$$

Các khái niệm cơ bản

Hệ quả 1

Nếu đồ thị phẳng có $n \geq 3$ *đỉnh và* m *cạnh thì ta có:*

$$\boxed{m \leq 3 \cdot n - 6.} \tag{2}$$

Các khái niệm cơ bản

Chứng minh

- *Gọi B là tổng số cạnh bao quanh của một mặt.*
- *Ta có, mỗi mặt chứa ít nhất 3 cạnh. Nên tổng số cạnh bao quanh tất cả các mặt thỏa điều kiện:*

$$\sum_{i=1}^{r} B\left(R_i\right) \geq 3 \cdot f \tag{3}$$

- *Ta lại có, mỗi cạnh thuộc nhiều nhất 2 mặt (mỗi cạnh được đếm 2 lần). Nên tổng số cạnh bao quanh tất cả các mặt thỏa điều kiện:*

$$\sum_{i=1}^{r} B\left(R_i\right) \leq 2 \cdot m \tag{4}$$

Các khái niệm cơ bản

Chứng minh

- *Từ [4] và [3],*

$$f \leq \frac{2}{3}m. \tag{5}$$

- *Dựa vào công thức Euler (trang 9) và [5], suy ra*

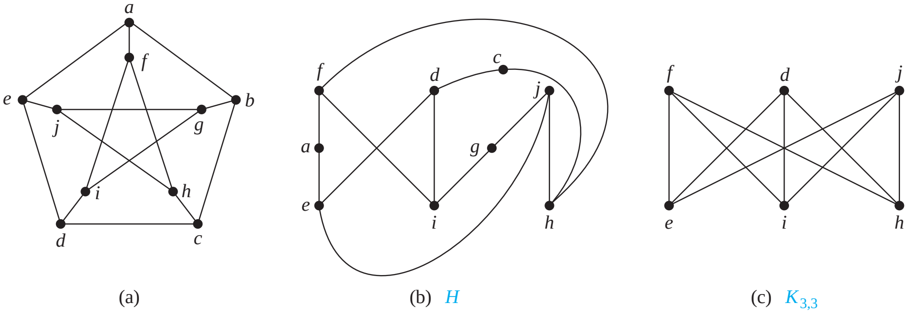
$$m \leq 3 \cdot n - 6.$$

Các khái niệm cơ bản

Định lý 1 (Định lý Kuratowski)

Đồ thị phẳng nếu và chỉ nếu nó không chứa đồ thị con đẳng cấu với $K_{3,3}$ và K_5.

Ví dụ 6



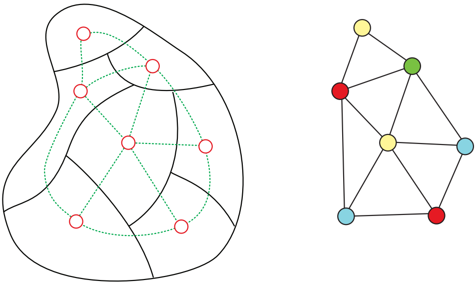
Hình 10: Đồ thị *Petersen*, đồ thị con H đẳng cấu với $K_{3,3}$.

Tô màu đồ thị

Giới thiệu bài toán tô màu đồ thị

Cho một bản đồ các vùng đất. Xác định *số lượng màu sắc tối tiểu* để tô màu các vùng đất sao cho hai vùng đất kề nhau màu khác nhau.

Ví dụ 7

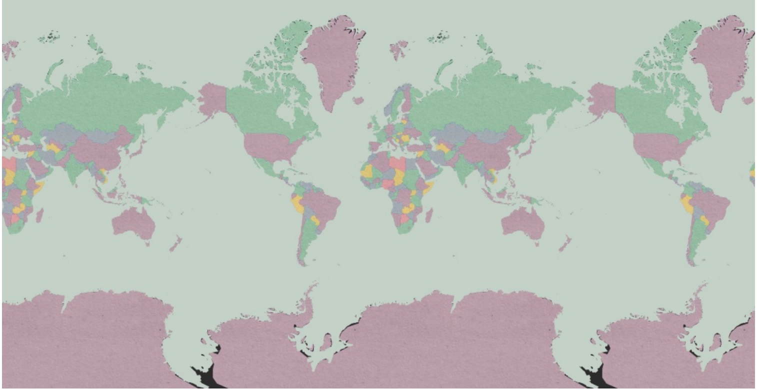


Hình 11: Bản đồ 7 vùng đất chỉ cần sử dụng 4 màu.

Tô màu đồ thị

Ví dụ 8

Bản đồ thế giới chỉ cần sử dụng 5 màu.



Hình 12: Bản đồ thế giới.

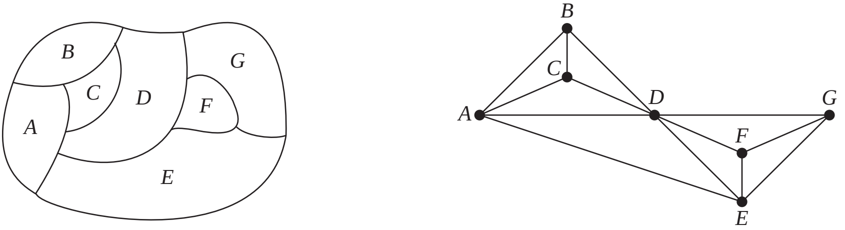
Tô màu đồ thị

Giới thiệu bài toán tô màu đồ thị

Bản đồ các vùng đất được biểu diễn bởi một đồ thị.

- Mỗi vùng đất là một *đỉnh* trong đồ thị.
- Hai vùng đất chung biên giới tương ứng với một *cạnh* trong đồ thị.

Ví dụ 9



Hình 13: Bản đồ và đồ thị phân đôi.

Tô màu đồ thị

Định nghĩa 3

Sắc số *(chromatic numbe)* là số lượng màu sắc tối tiểu để tô màu đồ thị. Ký hiệu $\chi(G)$.

Định lý 2 (Định lý 4-màu [a])

[a] Kenneth Appel, Wolfgang Haken

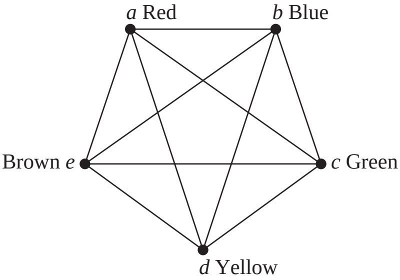
Sắc số của một đồ thị phẳng luôn nhỏ hơn hay bằng 4.

$$\boxed{\chi(G) \leq 4.} \tag{6}$$

Tô màu đồ thị

Ví dụ 10

Đồ thị đầy đủ K_5 không là đồ thị phẳng, tìm số màu của K_5?



Hình 14: Tô màu đồ thị với 5 màu.

Tô màu đồ thị

Chiến lược **Tham lam** *(Greedy)*

Giải bài toán bằng cách xác định lời giải tối ưu cục bộ ở mỗi bước với hy vọng tìm được tối ưu toàn cục.

Ý tưởng

Tô màu đồ thị áp dụng chiến lược tham lam. Tại mỗi đỉnh đang duyệt:

- Cập nhật màu đã sử dụng của các đỉnh kề với đỉnh đang duyệt.
- Chọn màu có *thứ tự nhỏ nhất* chưa sử dụng.

Thuật toán Bellman-Ford

Thuật toán 1: GreedyColoring(G)

- Đầu vào: đồ thị G.
- Đầu ra: tô màu các đỉnh trong đồ thị

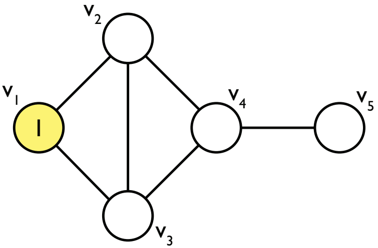
```
for i = 0 to n - 1
    c[0] ← false
    v[i] ← NO_COLOR // -1

c[0] ← true
v[0] ← 0
for i = 1 to n - 1
    for j = 0 to n - 1
        if m[i, j] = 0
            c[j] ← false
        else if v[j] ≠ NO_COLOR
            c[v[j]] ← true
    find min_color k and c[k] = false
    v[i] = k
```

Tô màu đồ thị

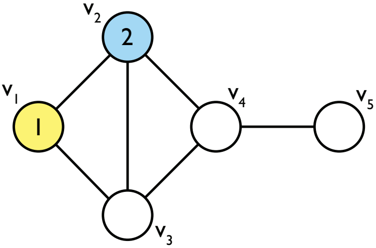
Ví dụ 11

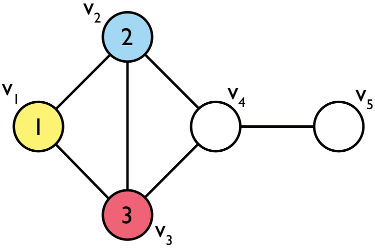
Cho đồ thị G gồm 5 đỉnh, tô màu đồ thị G.



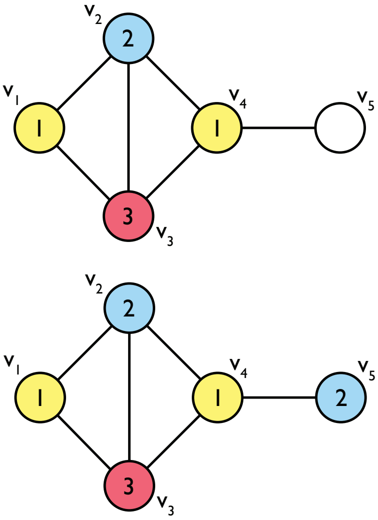
Hình 15: Đồ thị G.

Tô màu đồ thị





Tô màu đồ thị



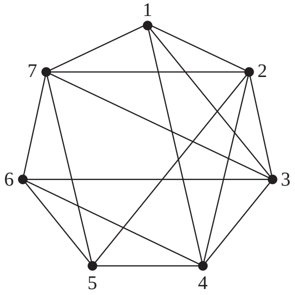
Hình 16: Đồ thị *G* sau khi tô màu.

Ứng dụng của bài toán tô màu đồ thị

Lập lịch thi

Hãy lập lịch thi học kỳ của trường đại học sao cho không có sinh viên nào có hai môn thi cùng một lúc.

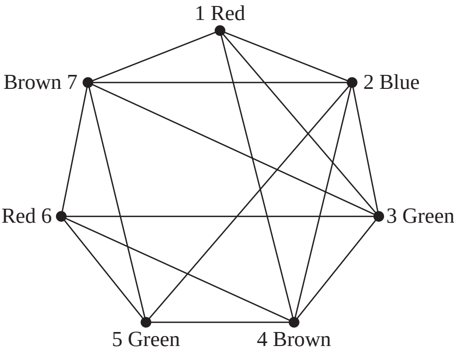
Ví dụ 12



Hình 17: Đồ thị biểu diễn lịch thi học kỳ.

Ứng dụng của bài toán tô màu đồ thị

- Đỉnh: khóa học
- Cạnh: sinh viên học chung 2 khóa học
- Màu: thời gian thi



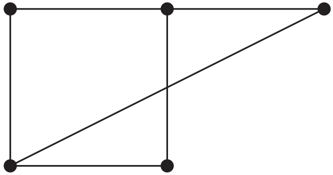
Time Period	Courses
I	1, 6
II	2
III	3, 5
IV	4, 7

Hình 18: Tô màu đồ thị biểu diễn lịch thi học kỳ.

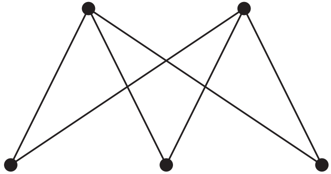
Bài tập

1. Vẽ các đồ thị phẳng sao cho các cạnh không cắt nhau.

a)



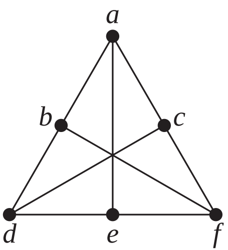
b)



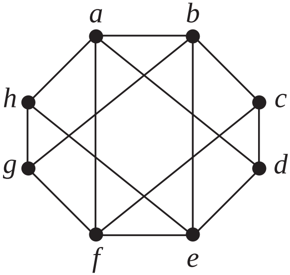
Bài tập

2. Xác định các đồ thị có phải đồ thị phẳng. Nếu có, hãy vẽ đồ thị phẳng sao cho các cạnh không cắt nhau.

a)



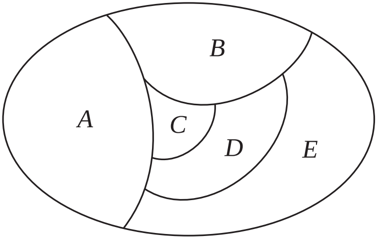
b)



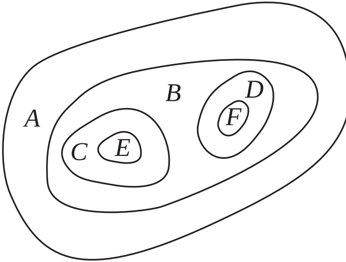
Bài tập

3. Vẽ đồ thị biểu diễn bản đồ các vùng đất.

a)

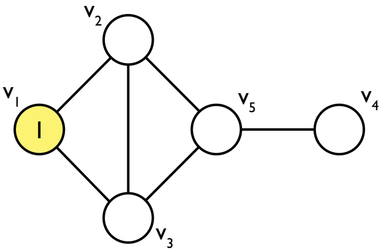


b)



Bài tập

4. Cho đồ thị G gồm 5 đỉnh, tô màu đồ thị G.



Hình 19: Đồ thị G.

Tài liệu tham khảo

- ADRIAN BONDY, U.S.R. MURTY, *Graph Theory*, Springer, 2008.
- KENNETH H. ROSEN, *Discrete Mathematics and its Applications, 7th Edidion*, McGraw-Hill, 2011.
- NGUYỄN ĐỨC NGHĨA, NGUYỄN TÔ THÀNH, *Toán rời rạc*, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội, 2003.
- NGUYỄN CAM, CHU ĐỨC KHÁNH, *Lý thuyết đồ thị*, NXB Đại học Quốc gia Tp Hồ Chí Minh, 2008.
- REINHARD DIESTEL, *Graph Theory*, Springer, 2005.