Chương 4.
QUAN HỆ

2017

NỘI DUNG

Quan hệ

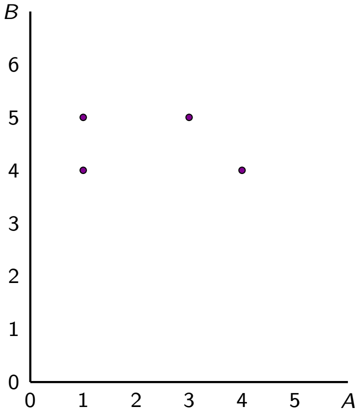
Định nghĩa 1

Một quan hệ giữa tập hợp A và tập hợp B là một tập con $\Re$. Nếu $(a, b) \in \Re$, ta viết $a\Re b$. Một quan hệ giữa A và A được gọi là một quan hệ hai ngôi trên A.

Quan hệ

Ví dụ 1

Cho hai tập hợp $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{4, 5\}$. Quan hệ $\Re$ được biểu diễn bởi $\Re = \{(1, 4), (1, 5), (3, 5), (4, 4)\}$



Quan hệ

Ví dụ 2

Quan hệ "$=$" trên một tập hợp A bất kỳ: $a\Re b \Leftrightarrow a = b$.

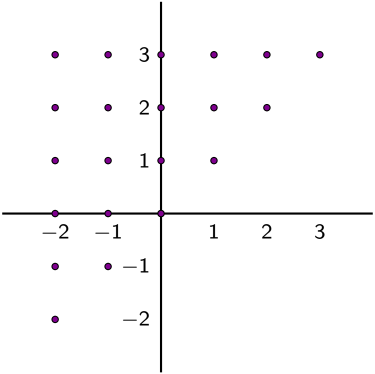
Ví dụ 3

Quan hệ $\leq$ trên $\mathcal{N}, \mathcal{Z}$ hay $\mathcal{R}$: $a\Re b \Leftrightarrow a \leq b$.

Quan hệ

Ví dụ 4

Quan hệ $\leq$ trên $\mathcal{N}, \mathcal{Z}$ hay $\mathcal{R}$: $a\Re b \Leftrightarrow a \leq b$.



Các tính chất của quan hệ

i) $\Re$ có tính *phản xạ (reflexive)* nếu

$$\forall x \in A, x \Re x.$$

ii) $\Re$ có tính *đối xứng (symmetric)* nếu

$$\forall x, y \in A, x \Re y \Rightarrow y \Re x.$$

iii) $\Re$ có tính *phản xứng (anti-symmetric)* nếu

$$\forall x, y \in A, x \Re y \wedge y \Re x \Rightarrow x = y.$$

iv) $\Re$ có tính chất *bắc cầu (transitive)* nếu

$$\forall x, y, z \in A, x \Re y \wedge y \Re z \Rightarrow x \Re z.$$

Các tính chất của quan hệ

Ví dụ 5

Cho tập hợp $A = \{1, 2, 3, 4\}$, xét các quan hệ trên tập A sau đây:

$\Re_1 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,4), (4,1), (4,4)\}$
$\Re_2 = \{(1,1), (1,2), (2,1)\}$
$\Re_3 = \{(1,1), (1,2), (1,4), (2,1), (2,2), (3,3), (4,1), (4,4)\}$
$\Re_4 = \{(2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3)\}$

$$\Re_5 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,3), (2,4), (3,3), (3,4), (4,4)\}$$

$\Re_6 = \{(3,4)\}$
Quan hệ nào có tính phản xạ, đối xứng, phản xứng, bắc cầu?

Các tính chất của quan hệ

Ví dụ 6

Cho tập hợp $A = \{1, 2, 3, 4\}$ và quan hệ
$\Re = \{(1, 1), (3, 3), (4, 4)\}$ trên tập A.
Xét tính phản xạ, đối xứng, phản xứng của $\Re$.

Ví dụ 7

Cho tập hợp $\mathcal{Z}$ là tập hợp các số nguyên. Quan hệ "chia hết" đối với tập hợp $\mathcal{Z}$ có tính phản xạ, đối xứng, phản xứng, bắc cầu không?

Ví dụ 8

Cho tập hợp $\mathcal{Z}$ là tập hợp các số nguyên. Quan hệ "$\leq$" đối với tập hợp $\mathcal{Z}$ có tính phản xạ, đối xứng, phản xứng, bắc cầu không?

Quan hệ và cơ sở dữ liệu

Định nghĩa 2

Cho trước các tập hợp $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Khi ấy ánh xạ chiếu lên thành phần thứ i là ánh xạ:

$$\begin{array}{rccc} \pi_i : & A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n & \mapsto & A_i \\ & (a_1, a_2, \ldots, a_n) & \mapsto & a_i \end{array}$$

Chú ý

1. Ánh xạ chiếu π_i là một toàn ánh.
2. Các ánh xạ chiếu π_A, π_B từ $A \times B$ lên A và B tương ứng là các toàn ánh.

Quan hệ và cơ sở dữ liệu

Định nghĩa 3

Quan hệ trên các tập hợp $A_1 \times A_2 \times \ldots A_n$ là một tập hợp con của

$$\prod_{i=1}^{n} A_i = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n.$$

Chú ý

1. Giả sử $\Re$ là một quan hệ trên $A_1 \times A_2 \times \ldots A_n$. Khi ấy các phần tử của $\Re$ là những bộ $n\,(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.
2. Xét m số nguyên $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_m \leq n$. Khi ấy ánh xạ chiếu được định nghĩa bởi:

$$\begin{array}{rccc} \pi_{i_1,i_1,\ldots,i_m}: & A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n & \mapsto & A_{i_1} \times A_{i_2} \times \cdots \times A_{i_m} \\ & (a_1, a_2, \ldots, a_n) & \mapsto & a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_m} \end{array}$$

Quan hệ và cơ sở dữ liệu

Định nghĩa 4

Nếu $\Re$ là một quan hệ trên $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ thì $\pi_{i_1, i_1, \ldots, i_m}(\Re)$ được gọi là quan hệ chiếu của $\Re$.

Chú ý

1. Quan hệ chiếu $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_m}(\Re)$ là một quan hệ trên $A_{i_1} \times A_{i_2} \times \cdots \times A_{i_m}$.
2. Trong *cơ sở dữ liệu quan hệ*, các tập hợp $A_1, A_2, \ldots A_n$ là *các thuộc tính*. Quan hệ chiếu là quan hệ ban đầu nhưng các thuộc tính không thuộc tập hợp $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ được bỏ đi.

Quan hệ và cơ sở dữ liệu

Ví dụ 9

Cho cơ sở dữ liệu của MÔN HỌC gồm các tập thuộc tính sau:

- A_1: các mã số môn học.
- A_2: các tên môn học.
- A_3: các giảng viên.

Quan hệ và cơ sở dữ liệu

Mã môn học	Tên môn học	Giảng viên
T001	Vi tích phân	Ông Bình
T002	Toán rời rạc	Ông An
T011	Đại số tuyến tính	Ông Minh
TH001	Cấu trúc dữ liệu	Cô Hà
TH002	Cơ sở dữ liệu	Cô Hà

Bảng 1: Bảng biểu diễn quan hệ Môn học - Giảng viên.

a) Quan hệ chiếu $\pi_{1,2}$ (Môn học - Giảng viên)?

b) Quan hệ chiếu π_3 (Môn học - Giảng viên)?

Quan hệ và cơ sở dữ liệu

a) Quan hệ chiếu $\pi_{1,2}$ (Môn học - Giảng viên)?

Quan hệ và cơ sở dữ liệu

a) Quan hệ chiếu $\pi_{1,2}$ (Môn học - Giảng viên)?

Mã môn học	Tên môn học
T001	Vi tích phân
T002	Toán rời rạc
T011	Đại số tuyến tính
TH001	Cấu trúc dữ liệu
TH002	Cơ sở dữ liệu

Quan hệ và cơ sở dữ liệu

b) Quan hệ chiếu π_3 (Môn học - Giảng viên)?

Quan hệ và cơ sở dữ liệu

b) Quan hệ chiếu π_3 (Môn học - Giảng viên)?

Giảng viên
Ông Bình
Ông An
Ông Minh
Cô Hà
Cô Hà

Biểu diễn quan hệ

Biểu diễn bằng ma trận

Một quan hệ $\Re$ giữa các tập hợp hữu hạn có thể được biểu diễn bằng ma trận M chỉ chứa 0 hoặc 1.

$$M_{ij} = \begin{cases} 1 & ,(a_i, b_j) \in \Re \\ 0 & ,(a_i, b_j) \notin \Re \end{cases}$$

Biểu diễn quan hệ

Biểu diễn bằng ma trận

Ví dụ 10

Cho $A = \{1, 2, 3\}$ và $B = \{1, 2\}$. Cho $\Re$ là quan hệ từ A đến B chứa (a, b) nếu $a \in A, b \in B$ và $a > b$. Giả sử $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, b_1 = 1, b_2 = 2$ tìm ma trận biểu diễn quan hệ $\Re$?

Biểu diễn quan hệ

Biểu diễn bằng ma trận

Ví dụ 10

Cho $A = \{1, 2, 3\}$ và $B = \{1, 2\}$. Cho $\Re$ là quan hệ từ A đến B chứa (a, b) nếu $a \in A, b \in B$ và $a > b$. Giả sử $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, b_1 = 1, b_2 = 2$ tìm ma trận biểu diễn quan hệ $\Re$?

Quan hệ $\Re = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2)\}$ nên ma trận M biểu diễn quan hệ $\Re$

$$M_{i,j} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Biểu diễn quan hệ

Biểu diễn bằng ma trận

Ví dụ 11

Cho $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ và $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$. Cho ma trận M biểu diễn quan hệ

$$M_{i,j} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tìm các bộ thuộc quan hệ $\Re$?

Biểu diễn quan hệ

Biểu diễn bằng ma trận

Ví dụ 11

Cho $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ và $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$. Cho ma trận M biểu diễn quan hệ

$$M_{i,j} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tìm các bộ thuộc quan hệ $\Re$?

Vì $\Re$ gồm các bộ (a_i, b_j) tương ứng với $M_{i,j} = 1$ nên

$$\Re = \{(a_1, b_2), (a_2, b_1), (a_2, b_3), (a_2, b_4), (a_3, b_1), (a_3, b_3), (a_3, b_5)\}$$

Biểu diễn quan hệ

Biểu diễn bằng ma trận

Chú ý, ma trận biểu diễn của một quan hệ trên cùng một tập hợp là một ma trận vuông.

- $\Re$ là phản xạ nếu $M_{ij} = 1$.

$$M_{i,j} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & . & & \\ & & & . & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Biểu diễn quan hệ

Biểu diễn bằng ma trận

Chú ý, ma trận biểu diễn của một quan hệ trên cùng một tập hợp là một ma trận vuông.

- $\Re$ là đối xứng nếu $M_{ij} = M_{ji}$.

$$M_{i,j} = \begin{bmatrix} . & & 1 & & \\ & . & & 0 & \\ 1 & & . & & 1 \\ & 0 & & . & \\ & & 1 & & . \end{bmatrix}.$$

Biểu diễn quan hệ

Biểu diễn bằng ma trận

Chú ý, ma trận biểu diễn của một quan hệ trên cùng một tập hợp là một ma trận vuông.

- $\Re$ là phản xứng khi $i \neq j$ $M_{ij} = 0$ hoặc $M_{ji} = 0$.

$$M_{i,j} = \begin{bmatrix} . & & 1 & & \\ & . & & 0 & \\ 0 & & . & & 0 \\ & 0 & & . & \\ & & 1 & & . \end{bmatrix}.$$

Biểu diễn quan hệ

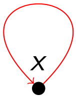
Biểu diễn bằng đồ thị có hướng

- Một quan hệ $\Re$ giữa các tập hợp hữu hạn có thể được biểu diễn bằng đồ thị có hướng. Đồ thị vô hướng gồm một tập V các đỉnh và tập E các cạnh.
- Mỗi phần tử của tập được biểu diễn bằng một điểm và mỗi cặp được biểu diễn bằng một cạnh có hướng.

Biểu diễn quan hệ

Biểu diễn bằng đồ thị có hướng

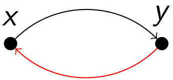
- Quan hệ phản xạ.



Biểu diễn quan hệ

Biểu diễn bằng đồ thị có hướng

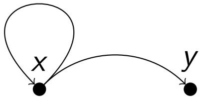
- Quan hệ đối xứng.

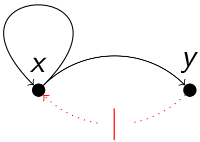


Biểu diễn quan hệ

Biểu diễn bằng đồ thị có hướng

- Quan hệ phản xứng.

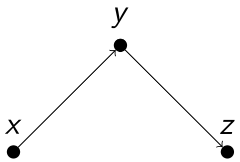


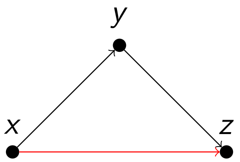


Biểu diễn quan hệ

Biểu diễn bằng đồ thị có hướng

- Quan hệ bắc cầu.





Quan hệ tương đương

Ví dụ 12

Cho tập hợp $S = \left\{\text{sinh viên của lớp}\right\}$ và quan hệ

$$\Re = \left\{(a, b)\,|\text{a có cùng họ với b}\right\}$$

Quan hệ $\Re$ có tính phản xạ, đối xứng, phản xứng, bắc cầu không ?

Quan hệ tương đương

Định nghĩa 5

Một quan hệ hai ngôi $\Re$ trên tập hợp A được gọi là *quan hệ tương đương* nếu nó có các tính chất *phản xạ, đối xứng và bắc cầu*.

Ví dụ 13

a) Cho $A = \{1, 2, 3, 4\}$ và quan hệ $\Re$ trên tập A như sau:

$$\Re = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$$

b) $\forall x, y \in \mathcal{Z}, x\Re y \Leftrightarrow x^2 = y^2$.

Quan hệ tương đương

Định nghĩa 6

Cho $\Re$ là một quan hệ tương đương trên A và $x \in A$. Khi ấy *lớp tương đương* chứa x, ký hiệu là $\overline{x}$ hay $[x]$, là tập hợp con của A sau đây:

$$\overline{x} = \{y \in A | y \Re x\}$$

Ví dụ 14

Cho quan hệ $\Re = \{(x, y) \, | x^2 = y^2\}$ trên tập hợp $\mathcal{R}$. Ta có một số lớp tương đương sau:

- $[0] = \{0\}$
- $[1] = \{1, -1\}$

Quan hệ tương đương

Định lý

Cho $\Re$ là một quan hệ tương đương trên A

a) $\forall x \in A, x \in \overline{x}$

b) $\forall x, y \in A, x\Re y \Leftrightarrow \overline{x} = \overline{y}$

c) Hai lớp tương đương $\overline{x}$ và $\overline{y}$ sao cho $\overline{x} \cap \overline{y}$ thì trùng nhau.

Quan hệ thứ tự

Ví dụ 15

Cho tập hợp $\mathcal{Z}$ là tập hợp các số nguyên và quan hệ

$$\Re = \{(a, b) \,|a \leq b\}$$

Quan hệ $\Re$ có tính phản xạ, đối xứng, phản xứng, bắc cầu?

Quan hệ thứ tự

Định nghĩa 7

Một quan hệ hai ngôi $\Re$ trên tập hợp A được gọi là *quan hệ thứ tự (hay thứ tự bộ phận/poset)* nếu nó có các tính chất *phản xạ, phản xứng và bắc cầu*.
Ký hiệu

- $\preccurlyeq$ là một quan hệ thứ tự.
- Cặp $(A, \preccurlyeq)$ được gọi là tập có thứ tự hay *poset*.

Ký hiệu $\preccurlyeq$ được sử dụng để biểu diễn tổng quát cho quan hệ thứ tự bộ phận $\leq$. Nghĩa là, $x \preccurlyeq y$ đọc là x nhỏ hơn hay bằng y (y lớn hơn hay bằng x).

Quan hệ thứ tự

Ví dụ 16

Xét n là một số nguyên dương. Cho tập hợp $A_n = \{a \in \mathcal{Z}^+ |\ a|n\}$ trong đó, $a|n$ để chỉ a là ước của n (n chia hết cho a).
Quan hệ được định nghĩa như sau

$$x \preccurlyeq y \Leftrightarrow x|y$$

Chứng minh $(A_n, \preccurlyeq)$ là một tập có thứ tự.

Quan hệ thứ tự

- Dễ dàng chứng minh $x \preccurlyeq y$ có tính phản xạ và bắc cầu.
- Giả sử

$$x|y \Rightarrow y = k_1 x$$

và

$$y|x \Rightarrow x = k_2 y$$

Suy ra $x = k_1 k_2 x \Rightarrow k_1 k_2 = 1$.
Vì $k_1 = k_2 = 1$ thì $x = y$ nên $x \preccurlyeq y$ có tính phản xứng.

Quan hệ thứ tự

Ví dụ 17

Xét n là một số *nguyên*. Cho tập hợp $B_n = \{b \in \mathcal{Z} |\ b|n\}$ trong đó, $b|n$ để chỉ b là ước của n hay n chia hết cho b. Quan hệ được định nghĩa như sau

$$x \preccurlyeq y \Leftrightarrow x|y$$

Cho biết $(B_n, \preccurlyeq)$ có phải tập có thứ tự không?

Quan hệ thứ tự

Định nghĩa 8

Cho $(A, \preccurlyeq)$ là tập có thứ tự và x, y là hai phần tử bất kỳ trong A

a) Nếu $x \preccurlyeq y$, ta nói y là trội của x hay x được trội bởi y.
b) y là trội trực tiếp của x nếu y là trội của x và không tồn tại một phần tử $z \in A$ nào sao cho $x \preccurlyeq z \preccurlyeq y$ và $x \neq y \neq z$.

Quan hệ thứ tự

Ví dụ 18

Xét tập hợp $(A_{12}, \preccurlyeq)$ trong ví dụ [**??**]

- Trội của 2 là 4, 6, 12.
- Trội trực tiếp của 2 là 4, 6.

Quan hệ thứ tự

Định nghĩa 9

Các phần tử a, b của tập $(A, \preccurlyeq)$ được gọi là *so sánh được* nếu $a \preccurlyeq b$ hay $b \preccurlyeq a$. Ngược lại, a và b được gọi *không so sánh được*.

Định nghĩa 10

Nếu $(A, \preccurlyeq)$ là một poset và hai phần tử tùy ý của A đều so sánh được với nhau thì ta gọi nó là *tập có thứ tự toàn phần*, và $\preccurlyeq$ được gọi là *thứ tự toàn phần* hay *thứ tự tuyến tính*. Nghĩa là, mệnh đề sau là đúng

$$\forall x, y \in A, (x \prec y) \vee (y \prec x)$$

Quan hệ thứ tự

Ví dụ 19

- Tập có thứ tự $(\mathcal{Z}, \leq)$ là tập có thứ tự toàn phần.
- Tập có thứ tự $(\mathcal{Z}^+, |)$ không phải tập có thứ tự toàn phần. Ví dụ, xét 5 và 7.

Quan hệ thứ tự

Định nghĩa 11 (Thứ tự từ điển)

Nếu $(A_1, \preccurlyeq_1)$ và $(A_2, \preccurlyeq_2)$ là một poset, thì thứ tự từ điển $\preccurlyeq$ trên $A = A_1 \times A_2$ được định nghĩa bởi mệnh đề đúng

$$(x_1, x_2) \prec (y_1, y_2) \Leftrightarrow x_1 \prec_1 y_1 \vee (x_1 = y_1 \wedge x_2 \prec_2 y_2)$$

Quan hệ thứ tự

Ví dụ 20

images/thu-tu-tu-dien.pdf

Quan hệ thứ tự

Thứ tự từ điển

Thứ tự từ điển được định nghĩa trên tích Descartes $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ của n tập poset $(A_1, \preccurlyeq_1), (A_2, \preccurlyeq_2, \ldots, (A_n, \preccurlyeq_n))$ như sau

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \prec (b_1, b_2, \ldots, b_n)$$

Quan hệ thứ tự

Thứ tự từ điển

Các từ trong từ điển được liệt kê theo thứ tự bảng chữ cái được gọi là thứ tự từ điển.

Ví dụ 21

Xét tập hợp các chuỗi chữ cái tiếng Anh. Khi đó,

- discreet $\prec$ discrete
- discreet $\prec$ discreetness

Biểu đồ Hasse

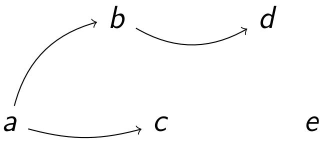
Định nghĩa 12

Biểu đồ Hasse của một poset $(A, \preccurlyeq)$ là một đồ thị có hướng

- Tập đỉnh là tập hợp các phần tử trong tập A.
- Tập cạnh là tập hợp các cạnh có hướng nối một số đỉnh (hai đỉnh x và y được nối bởi một cạnh có hướng từ x đến y nếu y là trội trực tiếp của x).

Ví dụ 22

- $a \prec b \prec d$
- $a \prec c$



Biểu đồ Hasse

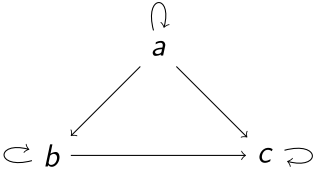
Ví dụ 23

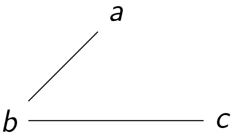
Cho quan hệ $\{(a, a), (a, b), (a, c), (b, b), (b, c), (c, c)\}$.
Vẽ biểu đồ Hasse.

Biểu đồ Hasse

Ví dụ 23

Cho quan hệ $\{(a, a), (a, b), (a, c), (b, b), (b, c), (c, c)\}$.
Vẽ biểu đồ Hasse.

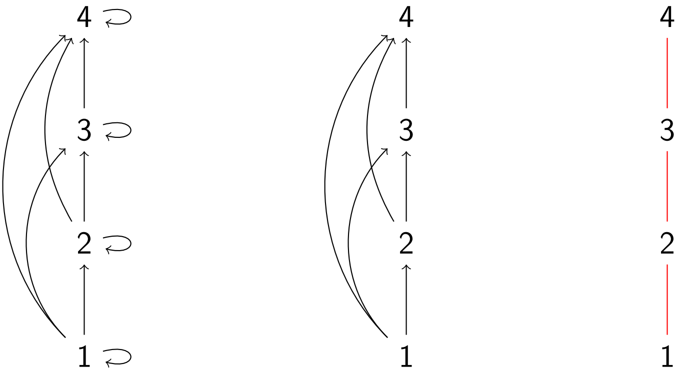




Biểu đồ Hasse

Ví dụ 24

Cho tập hợp $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Biểu đồ Hasse của poset $(A, \leq)$ được biểu diễn như hình



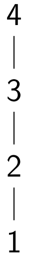
Biểu đồ Hasse

Dây chuyền

Biểu đồ Hasse của poset $(A, \preccurlyeq)$ là một *dây chuyền* khi và chỉ khi $\preccurlyeq$ là một thứ tự toàn phần.

Ví dụ 25

Cho tập hợp $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Biểu đồ Hasse của poset $(A, \leq)$ được biểu diễn như hình



Phần tử tối đại, phần tử tối tiểu

Trong tập poset $(A, \preccurlyeq)$, một phần tử m được gọi là *tối đại* (tương ứng *tối tiểu*) nếu m *không có trội trực tiếp* (tương ứng m *không là trội trực tiếp của phần tử* nào cả).
Biểu diễn bởi hai mệnh đề đúng như sau:

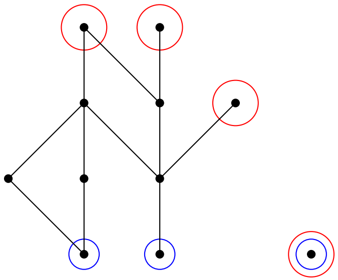
$$\forall x \in A, (x \prec m) \Rightarrow (x = m).$$

$$\forall x \in A, (m \prec x) \Rightarrow (m = x).$$

Phần tử tối đại, phần tử tối tiểu

Xét poset có biểu đồ Hasse như dưới đây

- Mỗi đỉnh màu đỏ là tối đại.
- Mỗi đỉnh màu xanh là tối tiểu.
- Không có cung nào xuất phát từ điểm tối đại.
- Không có cung nào kết thúc ở điểm tối tiểu.

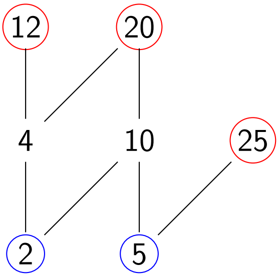


Phần tử tối đại, phần tử tối tiểu

Ví dụ 26

Tìm phần tử tối đại, tối tiểu của poset sau đây

$$(\{2, 4, 5, 10, 12, 20, 25\}, |)$$



Phần tử lớn nhất, phần tử nhỏ nhất

Định nghĩa 13

Trong một poset $(A, \preccurlyeq)$ hữu hạn thì

- Mọi phần tử được trội bởi một phần tử tối đại (tương ứng tối tiểu).
- Nếu m là phần tử tối đại (tương ứng tối tiểu) duy nhất của A thì m là *phần tử lớn nhất (phần tử nhỏ nhất)* .

Phần tử lớn nhất, phần tử nhỏ nhất

Ví dụ 27

Cho $(A, \leq)$ với A là tập các chuỗi nhị phân có chiều dài bằng 3. Quan hệ $\leq$ có nghĩa *"nhỏ hơn hay bằng"*.

a) Vẽ biểu đồ Hasse cho $(A, \leq)$.

b) Tìm phần tử cực đại, cực tiểu của $(A, \leq)$.

c) Tìm phần tử lớn nhất, nhỏ nhất của $(A, \leq)$.

Phần tử lớn nhất, phần tử nhỏ nhất

a) Vẽ biểu đồ Hasse cho $(A, \leq)$.

Phần tử lớn nhất, phần tử nhỏ nhất

a) Vẽ biểu đồ Hasse cho $(A, \leq)$.

images/000.pdf

Phần tử lớn nhất, phần tử nhỏ nhất

b) Tìm phần tử cực đại, cực tiểu của $(A, \leq)$.
   - Phần tử cực đại: 111
   - Phần tử cực tiểu: 000

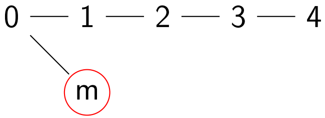
c) Tìm phần tử lớn nhất, nhỏ nhất của $(A, \leq)$.
   - Phần tử lớn nhất: 111
   - Phần tử nhỏ nhất: 000

Phần tử lớn nhất, phần tử nhỏ nhất

Định lý

Trong một poset $(A, \preccurlyeq)$ *không hữu hạn* thì

- A không có phần tử tối đại.
  Ví dụ, $A = \mathcal{Z}$
- A có thể có phần tử tối đại nhưng không có phần tử lớn nhất.
  Ví dụ



Chặn trên, chặn dưới

Định nghĩa 14

Giả sử B là một tập hợp con của poset $(A, \preccurlyeq)$. Khi ấy,

i) Một phần tử c được gọi là *chặn trên* (tương ứng *chặn dưới*) *chung* của B nếu

$$\forall b \in B, b \prec c$$

$$\forall b \in B, c \prec b$$

ii) Phần tử *nhỏ nhất* (tương ứng *lớn nhất*) của tập hợp $\left\{c \in A, \text{c là chặng trên chung của B}\right\}$ (tương ứng $\left\{c \in A, \text{c là chặng dưới chung của B}\right\}$) được ký hiệu bởi *sup* B (tương ứng *inf* B)

Tài liệu tham khảo