

HƯỚNG DẪN BÀI TẬP TOÁN RỜI RẠC

CHƯƠNG 1: CƠ SỞ LOGIC

1/ a) $p(x)$ đúng $\Leftrightarrow x \in [-2, 4]$; $p(x)$ sai $\Leftrightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (4, +\infty)$; $q(x)$ đúng $\Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$; $q(x)$ sai $\Leftrightarrow x \in [-1, 2]$. Từ đó suy ra chân trị của các vị từ tùy theo giá trị của biến x .

b) Tương tự a). Để ý $(x^2 - 3x + 10) > 0 \quad \forall x \in \mathbf{R}$.

2/ b) Ta có thể viết $A = “(3a + 1) \neq 0 \text{ và } (2a - 5)(3a + 1)^{-1} > 0”$ rồi suy ra \bar{A} .

c) và d) Để ý miền xác định của biểu thức rồi thể hiện A tương tự như trong b). Từ đó suy ra \bar{A} .

e), f), g), h) và i) A nêu ra các tỉ lệ và dùng một trong các dấu $<, >, =, \leq, \geq$. Từ đó suy ra \bar{A} .

j), k), l), m) và n) A nêu ra các số lượng và dùng một trong các dấu $<, >, =, \leq, \geq$. Từ đó suy ra \bar{A} .

o) Mệnh đề kéo theo p) Không ai muốn = mọi người không muốn q) Cả lớp = mọi người trong lớp

s) Các cầu thủ = mọi cầu thủ t) $\rightarrow x$) Các từ nối đều có nghĩa là “và” y) Họ = mọi người trong số họ

z), α) Chúng tôi = mọi người trong chúng tôi ; các anh ấy, nhóm bác sĩ, nhóm kỹ sư được hiểu tương tự

3/ a) $p \vee q$

b) $\bar{p} \vee \bar{q}$

c) $p \vee q \vee r$

d) $\bar{p} \wedge \bar{q}$

e) $\bar{p} \vee \bar{q} \vee \bar{r} \vee \bar{s}$

4/ a) \rightarrow h) và j) Dùng các luật logic biến đổi tương đương về trái thành về phải.

i) Chiều (\Rightarrow) : dùng qui tắc suy diễn tam đoạn luận ; Chiều (\Leftarrow) : hiển nhiên

5/ a) \rightarrow g) Dùng các luật logic biến đổi thành **1**

h), i) và j) Dùng các luật logic biến đổi thành **0**

a), c), f) và g) Có thể dùng các qui tắc suy diễn để chứng minh hằng đúng.

6/ a) và b) Lần lượt gán $\gamma = \forall$ và $\gamma = \exists$ (mỗi câu xét 2 mệnh đề A_1 và A_2)

c), d), e), f) và g) Lần lượt gán $(\gamma = \forall, \delta = \forall)$, $(\gamma = \forall, \delta = \exists)$, $(\gamma = \exists, \delta = \forall)$, $(\gamma = \exists, \delta = \exists)$
(mỗi câu xét 4 mệnh đề A_1, A_2, A_3 và A_4).

g) Để ý $\forall a \in \mathbf{R}, \exists ! a' \in \mathbf{Z}$ thỏa $a' \leq a < a' + 1$. Ký hiệu $a' = [a]$ và gọi a' là phần nguyên của a .

7/ a) $x | y$ nghĩa là “ x là ước số của y ”

e) Để ý $\forall y \in \mathbf{Q}, 2^y + 2^{-y} \geq 2$ (Cauchy)

f) A sai

g) A đúng

8/ a) \rightarrow j) Dùng giả thiết qui nạp yếu

k) và l) Dùng giả thiết qui nạp mạnh

e) và f) Giải thích bất đẳng thức phụ (dễ dàng) trước khi chứng minh bất đẳng thức chính.

g) Tự giải thích $\forall n \geq 0, 2^{-1} \leq (2^n + 1)^{-1} + (2^n + 2)^{-1} + (2^n + 3)^{-1} + \dots + (2^n + 2^n)^{-1} < 1$ (*) và dùng bất đẳng thức phụ (*) để chứng minh bất đẳng thức chính.

h) Để ý $(3^{k+1} + 7^{k+1} - 2) = [7(3^k + 7^k - 2) - 4(3^k + 3)] \quad \forall k \geq 0$

i) Để ý $\forall n \geq 0, 2 | (3 \cdot 7^n - 3)$ và có thể chứng minh trực tiếp (không cần qui nạp).

j) Đặt $a = 2^{3^k}$ và $b = 1$ thì $(2^{3^{k+1}} + 1) = a^3 + b^3 = (a + b)[(a + b)^2 - 3ab]$ và giải thích $3^{k+2} | (2^{3^{k+1}} + 1)$

k) Ta có $(a^0 + a^{-0}) = 2 \in \mathbf{Z}$ và $(a^1 + a^{-1}) \in \mathbf{Z}$ (*). Xét $k \geq 1$ và giả sử $(a^n + a^{-n}) \in \mathbf{Z} \quad \forall n = 1, \dots, k$ (**).

Để ý $(a^{k+1} + a^{-k-1}) = (a^k + a^{-k})(a^1 + a^{-1}) - (a^{k-1} + a^{1-k})$ rồi dùng (*) và (**).

l) Thử $n = 0$ và $n = 1$. Xét $k \geq 1$ và giả sử $a_n = (\sqrt{5})^{-1}(\alpha^n - \beta^n) \quad \forall n = 0, 1, \dots, k$ (*).

Để ý $a_{k+1} = a_k + a_{k-1} = (\sqrt{5})^{-1}(\alpha^k + \alpha^{k-1} - \beta^{k-1} - \beta^k)$ để suy ra $a_{k+1} = (\sqrt{5})^{-1}(\alpha^{k+1} - \beta^{k+1})$.

9/ Dùng các qui tắc suy diễn phối hợp với các luật logic.

10/ Chọn các phân ví dụ (bằng cách gán cho mỗi biến mệnh đề chân trị 1 hoặc 0 tùy ý) sao cho

a), b) và f) Một vế đúng và một vế sai

c) và e) Vế trái sai

d) Vế trái đúng

g) \rightarrow n) Vế trái đúng và vế phải sai

11/ và 12/ Dùng định nghĩa của lượng từ, các qui tắc suy diễn phối hợp với các luật logic.

CHƯƠNG 2 : TẬP HỢP VÀ ÁNH XẠ

1/ C : $m \in \{0, \pm 1\}$ và $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ D : chỉ cần chọn $n \in \{0, 1, 2, \dots, 11\}$ và tính trực tiếp các phần tử
E : $\forall n \in \{5, 6, 7, 8\}$, tìm m thỏa $2^{-1} < (m/n) < 1$ F : xét nghiệm nguyên của $(x+5)(x-2)(x+4)^{-1} \leq 0$
G : $|x| \geq 4$ và $|x| \leq \sqrt{3} + \sqrt{2} < 4$

2/ Biểu diễn A và B trên trục x'Ox để xác định kết quả các phép toán tập hợp bù, giao, hội và hiệu.

3/ Rút gọn bằng các phép toán tập hợp a) $A \cup B$ b) $B \setminus A$ c) $\overline{A \cup B \cup C}$ d) B e) $\overline{A \cup B \cup C \cup D}$

4/ Dùng các phép toán tập hợp biến đổi về này thành về kia.

5/ Dùng các phép toán tập hợp rút gọn các về trước khi chứng minh các bao hàm thức.

7/ a), b) và c) Chứng minh “ $(x, y) \in$ về trái $\Leftrightarrow (x, y) \in$ về phải “

e) và f) Chứng minh “ $(x, y) \in$ về trái $\Rightarrow (x, y) \in$ về phải “

8/ a) Xét $f(1)$ b) Xét $f(\ln 3)$ c) Xét $f(0)$ d) Xét $f'(0)$ e) Có $a \in [1, 3]$ mà $f(a) = 0$ f) $(1/1) = (2/2) \in \mathbf{Q}$

9/ a) $f(2) = f(1/2)$ và $f(x) \leq (1/2) \quad \forall x \in X$ b) $f'(x) > 0$ và $f(x) = (x+3)^2 - 12 \geq -12 \quad \forall x \in X$

c) $f(1) = f(3)$ và $f(X) = Y$ d) $\forall x, t \in X, (f(x) = f(t) \Rightarrow x = t)$ và $f(X) = Y \setminus \{2\}$

e) $f(0) = f(2\pi)$ và $f(x) = 2\sin(x + \pi/3) \quad \forall x \in X$ thỏa $f(X) = Y$ f) $f'(x) < 0 \quad \forall x \in X$ và $f(X) = Y$

12/ a) $\forall y \in (-1, 0)$, phương trình $f(x) = y$ có nghiệm duy nhất trên X là $x = y / (1 + y) = y / (1 - |y|)$.

$\forall y \in [0, 1)$, phương trình $f(x) = y$ có nghiệm duy nhất trên X là $x = y / (1 - y) = y / (1 - |y|)$.

b) $\forall y \in \mathbf{R}$, phương trình $g(x) = y \Leftrightarrow e^{2x} + (1 - y)e^x - 3 = 0 \Leftrightarrow t^2 + (1 - y)t - 3 = 0$ với $t = e^x > 0$

Như vậy $\forall y \in \mathbf{R}$, phương trình $g(x) = y$ có nghiệm duy nhất trên \mathbf{R} là

$$x = \ln \{ 2^{-1} [y - 1 + \sqrt{(y-1)^2 + 12}] \}$$

c) $\forall y \in [5, 7)$, phương trình $h(x) = y \Leftrightarrow 3x^2 - yx + 2 = 0$ có nghiệm duy nhất trên $[1, 2)$ là

$x = x_1 = 6^{-1}(y + \sqrt{y^2 - 24})$ vì $\sqrt{y^2 - 24} \in [1, 5)$ (loại nghiệm $x_2 = 6^{-1}(y - \sqrt{y^2 - 24}) \in (0, 1)$).

f) Xét $\varphi : (0, 3] \rightarrow (1, 4]$ với $\varphi(x) = x + 1 \quad \forall x \in (0, 3]$. φ là song ánh và $\varphi^{-1}(x) = x - 1 \quad \forall x \in (1, 4]$.

Xét $\psi : (1, 4] \rightarrow (2, 4^{-1} \cdot 17]$ với $\psi(x) = x + x^{-1} \quad \forall x \in (1, 4]$.

Ta có $r = \psi \circ \varphi$. Ta kiểm tra ψ là song ánh để có r là song ánh và $r^{-1} = \varphi^{-1} \circ \psi^{-1}$.

$\forall y \in (2, 4^{-1} \cdot 17]$, phương trình $\psi(x) = y \Leftrightarrow x^2 - yx + 1 = 0$ có nghiệm duy nhất trên $(1, 4]$ là

$x = x_1 = 2^{-1}(y + \sqrt{y^2 - 4})$ vì $\sqrt{y^2 - 4} \in (0, 15/4)$ (loại nghiệm $x_2 = (1/x_1) \in [1/4, 1)$).

g) Giải các phương trình ánh xạ, ta có $u = p \circ g$, $v = g \circ f^{-1}$, $w = f \circ g \circ p^{-1}$.

CHƯƠNG 3 : PHƯƠNG PHÁP ĐẾM

1/ Dùng $|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$ lần lượt cho

$(X = A, Y = B \cup C), (X = B, Y = C)$ và $(X = A \cap B, Y = A \cap C)$.

2/ b) Để ý $Y = B \cup H$ với H tùy ý $\subset (E \setminus A)$, $Z = (D \setminus A) \cup K$ với K tùy ý $\subset A$,

$T = (A \setminus B) \cup L$ với L tùy ý $\subset (E \setminus A)$ và $W = P \cup C$ với P tùy ý $\subset A$.

3/ $N = abcdef$ với $b, c, d, e \in \{0, 1, \dots, 9\}, f \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$, a, b, c, d, e, f khác nhau đôi một.

a) Trường hợp 1 (N là số nguyên dương) thì $a \in \{1, 2, \dots, 9\}$: dùng nguyên lý nhân và nguyên lý cộng.

* Khi $f = 0$: 9 cách chọn a , 8 cách chọn b , 7 cách chọn c , 6 cách chọn d và 5 cách chọn e .

* Khi $f \in \{2, 4, 6, 8\}$: $0 \in \{b, c, d, e\}$ nên ta có thể giả sử $b = 0$ (3 trường hợp còn lại cho cùng kết quả):
4 cách chọn f , 8 cách chọn a , 7 cách chọn c , 6 cách chọn d và 5 cách chọn e .

b) Trường hợp 2 (N là dãy số nguyên) thì $a \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$: làm tương tự như trường hợp 1.

4/ b) $A = \{3\} \cup A'$ với $|A'| = 4$ và $A' \subset \{4, 5, \dots, 10\}$: để ý số tập hợp A = số tập hợp A'

c) Xét $\min A = 3$, $\min A = 2$ hay $\min A = 1$: mỗi trường hợp tương tự như b) rồi dùng nguyên lý cộng

d) Cách 1: phối hợp kết quả a) và c); Cách 2: xét $\min A = 4$, $\min A = 5$ hay $\min A = 6$: tương tự như c)

5/ a) Trường hợp $n = 2k$ chẵn ($A_1 = \{1, 3, \dots, (2k-1)\}$, $A_2 = \{2, 4, \dots, 2k\}$ có $|A_1| = k$):

kết quả là $|\wp(A) \setminus \wp(A_1)| = |\wp(A)| \setminus |\wp(A_1)|$.

b) Trường hợp $n = (2k+1)$ lẻ ($A_1 = \{1, 3, \dots, (2k-1), (2k+1)\}$ có $|A_1| = k+1$): tương tự như a).

6/ $\Omega = \{A \subset S / |A| = 5\}$ và $\Delta = \{A \subset S / |A| = 5 \text{ và } 7 \in A\}$. Ta có $|\Omega| = 4|\Delta|$ là một phương trình theo ẩn số $n \geq 7$ mà ta cần giải. Việc tính $|\Delta|$ làm tương tự như b) của bài 4.

7/ $S_1 = \{1, 3, \dots, 15\}$, $S_2 = \{2, 4, \dots, 14\}$ có $|S_1| = 8$ và $|S_2| = 7$.

a) Đếm số tập A thỏa $\emptyset \neq A \subset S_1$ b) $A = A_1 \cup A_2$ với $A_1 \subset S_1, |A_1| = 3$ và $A_2 \subset S_2$: nguyên lý nhân

c) Như b) thêm $|A_2| = 5$: nguyên lý nhân d) Như b) thêm $|A_2| = 5, 6$ hay 7 : nguyên lý nhân và cộng

8/ a) Chỉ cần xác định đội học Anh văn: số cách chia $C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^{n-1} = 2^n - 2$.

b) Chỉ cần xác định đội nhỏ (có không quá 2^{n-1} sinh viên):

* Khi $n = 2k$ chẵn: số cách chia $C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^k = 2^{n-1} - 1 + 2^{-1}C_n^k$.

* Khi $n = (2k+1)$ lẻ: số cách chia $C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^k = 2^{n-1} - 1$

9/ Dùng tổ hợp, nguyên lý nhân và nguyên lý cộng: a) 6 nam và 6 nữ b) $(8+4)$ hay $(9+3)$ hay $(10+2)$

c) $(5+7)$ hay $(4+8)$ hay $(3+9)$ hay $(2+10)$ d) $(2+10)$ hay $(4+8)$ hay $(6+6)$ hay $(8+4)$ hay $(10+2)$

10/ Chỉ quan tâm sự xuất hiện các bit 1: dùng tổ hợp và nguyên lý cộng

a) chọn 3 trong 8

b) có từ 4 đến 8 bit 1

c) có từ 0 đến 5 bit 1

d) có từ 3 đến 5 bit 1

11/ Xem việc chia bút lần lượt cho 4 người chính là 4 việc liên tiếp: dùng tổ hợp và nguyên lý nhân.

12/ b) Đặt $x = u, y^3 = v, z^2 = w$ và $t^3 = h$. Ta tìm hệ số của $u^3v^3w^2h$ trong khai triển $(2u - v - 3w + 4h)^9$

13/ b) n c) $n(n-4)$ [mỗi cạnh của đa giác liên kết với $(n-4)$ đỉnh không liền kề] d) Dùng a), b) và c)

14/ Nhóm người xếp gần nhau (nhóm nam, nhóm nữ, nhóm đồng nghiệp) xem như là “một người” xếp

hàng với các người khác. Dùng phép hoán vị (đối nội và đối ngoại), nguyên lý cộng và nguyên lý nhân

a) $2.5!5!$ b) $6!5!$ c) $4!7!$ d) $2.4!6!$ e) dùng nguyên lý bù trừ phối hợp b), c) và d) f) $3!6!7!8!$

- 15/** Ghi số thứ tự cho các ghế từ 1 đến 10 (theo chiều kim đồng hồ).
 Dùng phép hoán vị (đối nội và đối ngoại), nguyên lý cộng và nguyên lý nhân.
 a) Có 10 cách chia thành 2 khu : một khu cho 5 nam ngồi gần nhau, một khu cho 5 nữ ngồi gần nhau.
 b) Có 2 cách chia thành 5 khu : mỗi khu gồm 2 ghế liên tiếp dành cho một cặp vợ chồng ngồi gần nhau.
- 16/** Tương tự bài **14**. Tính chất “cùng màu” tương đồng với tính chất “đồng nghiệp” hay “ cùng giới tính”.
- 17/** Dùng phép hoán vị lặp. Ý tưởng như bài **16** nhưng không có hoán vị đối nội.
- 18/ → 21/** Dùng tổ hợp lặp, phép đổi biến và phép lấy bù để đưa về trường hợp các biến nguyên ≥ 0 .
 Nếu là bất phương trình thì tạo thêm một ẩn giả nguyên ≥ 0 để chuyển về dạng phương trình.
- 22/** Đây là 2 việc đồng thời. Dùng nguyên lý nhân, tổ hợp lặp và phép đổi biến để đưa về trường hợp các biến nguyên ≥ 0 .
- 23/** Đây là 2 việc liên tiếp. Dùng nguyên lý nhân, tổ hợp, tổ hợp lặp và phép đổi biến để đưa về trường hợp các biến nguyên ≥ 0 .
- 24/** Đây là 2 việc đồng thời. Dùng nguyên lý nhân, hoán vị lặp, chỉnh hợp, tổ hợp lặp và nguyên lý cộng.
- 25/** Dùng nguyên lý Dirichlet. Tạo 13 ô. Đưa các số hạng của A vào các ô và mỗi ô nhận không quá 2 số (ô 1 chỉ nhận 1 hay 25 ; ô 2 chỉ nhận 2 hay 24 ; ... ; ô 12 chỉ nhận 12 hay 14 ; ô 13 chỉ nhận 13)
- 26/** Dùng nguyên lý Dirichlet. Tạo 10 ô. Đưa các số hạng của A vào các ô (ô 1 chỉ nhận từ 1^2 đến $2^2 - 1$; ô 2 chỉ nhận từ 2^2 đến $3^2 - 1$; ... ; ô 9 chỉ nhận từ 9^2 đến $10^2 - 1$; ô 10 chỉ nhận 10^2)
- 27/** Dùng nguyên lý Dirichlet. Chia tam giác đều cạnh 3 thành 9 tam giác đều nhỏ cạnh 1. Để ý rằng hai điểm bất kỳ trong một tam giác nhỏ có khoảng cách không quá 1.
- 28/** Dùng nguyên lý Dirichlet. Có 3 dạng lịch học (2 buổi, 3 buổi, 4 buổi). Số lịch học có thể có < 782 .
- 29/** a) Xóa số 1. Khi đó 24 số còn lại trên đường tròn chia thành 8 nhóm rời nhau (mỗi nhóm gồm 3 số gần nhau). Tổng của 8 nhóm này $= (2 + 3 + \dots + 25) > (40 \times 8)$.
 b) Xóa số 25. Khi đó 24 số còn lại trên đường tròn chia thành 8 nhóm rời nhau (mỗi nhóm gồm 3 số gần nhau). Tổng của 8 nhóm này $= (1 + 2 + \dots + 24) < (38 \times 8)$.
- 30/** Dùng nguyên lý Dirichlet. A có ít nhất là $(C_6^1 + C_6^2 + \dots + C_6^5)$ tập hợp con khác \emptyset có ≤ 5 phần tử.
 Tổng các số hạng trong mỗi tập con đó có giá trị nằm trong khoảng từ 0 đến $(10 + 11 + \dots + 14)$.

CHƯƠNG 4 : HỆ THỨC ĐỆ QUI

1/ a) $a_n = 2(-3)^n \quad \forall n \geq 0$ b) $a_n = -5(8^{n-1}) \quad \forall n \geq 1$ c) $a_n = 3(2^n) + 4(-2)^n \quad \forall n \geq 2$
 d) $a_n = 3(2^n) - 2(3^n) \quad \forall n \geq 0$ e) $a_n = (4 - n)2^n \quad \forall n \geq 1$

2/ a) $a_n = 9n - 3 \quad \forall n \geq 0$ b) $a_n = 3^n - 5(-2)^n \quad \forall n \geq 1$ c) $a_n = 7(3^n) + 2(1 - n) \quad \forall n \geq 2$
 d) $a_n = (5n - n^2 - 7)(-4)^n \quad \forall n \geq 0$ e) $a_n = 5^n + 3 \quad \forall n \geq 3$

3/ a) $a_n = 2(3^n) - 3(2^n) + 2 \quad \forall n \geq 0$ b) $a_n = 2(4^n) - n - 11 \quad \forall n \geq 1$ c) $a_n = 4n + 7 - 5n^2 \quad \forall n \geq 2$
 d) $a_n = (4 - 2n)(-1)^n - 3^n \quad \forall n \geq 0$ e) $a_n = 4(-2)^n + (-5)^n + (n - 1)3^n \quad \forall n \geq 1$
 f) $a_n = 3n^2 + 5n - n^4 - 4n^3 - 2 \quad \forall n \geq 2$

4/ a) $S_1 = 1, S_{n+1} = S_n + (n + 1)^3 \quad \forall n \geq 1$ và $S_n = 4^{-1}n^2(n + 1)^2 \quad \forall n \geq 1$
 b) $S_1 = 1, S_{n+1} = S_n + (n + 1)^4 \quad \forall n \geq 1$ và $S_n = 30^{-1}n(n + 1)(6n^3 + 9n^2 + n - 1) \quad \forall n \geq 1$
 c) $S_1 = -1, S_{n+1} = S_n + (-1)^{n+1}(n + 1)^4 \quad \forall n \geq 1$ và $S_n = 2^{-1}(-1)^n n(n^3 + 2n^2 - 1) \quad \forall n \geq 1$
 d) $S_0 = 2, S_{n+1} = S_n + (n + 2)(n + 3) 2^{n+1} \quad \forall n \geq 0$ và $S_n = 2[2^n(n^2 + n + 2) - 1] \quad \forall n \geq 0$
 e) $S_0 = -1, S_{n+1} = S_n + (2n + 1)(-3)^{n+1} \quad \forall n \geq 0$ và $S_n = 8^{-1}[3(-3)^n(4n - 1) - 5] \quad \forall n \geq 0$
 f) $S_1 = -3, S_{n+1} = S_n + (-1)^{n+1}(n + 1)(n^2 + 3) \quad \forall n \geq 1$ và
 $S_n = 8^{-1}[(-1)^n(4n^3 - 2n^2 + 8n + 7) - 7] \quad \forall n \geq 1$

5/ $a_1 = 2, a_{n+1} = a_n + (n + 1) \quad \forall n \geq 1$ và $a_n = 2^{-1}(n^2 + n + 2) \quad \forall n \geq 1$
 (để ý đường thẳng thứ $(n + 1)$ bị n đường thẳng trước đó chia thành $(n + 1)$ đoạn thẳng)

6/ $a_{2000} = 7.10^9, a_{n+1} = (1 + 3.10^{-2})a_n \quad \forall n \geq 2000$ và $a_n = 7.10^9(1 + 3.10^{-2})^{n-2000} \quad \forall n \geq 2000$

7/ $a_1 = 3, a_2 = 8, a_{n+2} = 2a_{n+1} + 2a_n \quad \forall n \geq 1$ và $a_n = \frac{(5\sqrt{3}-2)}{\sqrt{3}}(\frac{1+\sqrt{3}}{2})^n + \frac{(5\sqrt{3}+2)}{\sqrt{3}}(\frac{1-\sqrt{3}}{2})^n$
 $\forall n \geq 1$ (Xét $A_{n+2} = u_1 u_2 \dots u_n u_{n+1} u_{n+2}$ trong 2 trường hợp $u_{n+2} = a$ hay $u_{n+2} \neq a$)

8/ $a_2 = 1, a_3 = 3, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n + 2 \quad \forall n \geq 2$ và $a_n = \frac{(3-\sqrt{5})}{2\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n - \frac{(3+\sqrt{5})}{2\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n$
 $\forall n \geq 2$ (Xét $A_{n+2} = u_1 u_2 \dots u_n u_{n+1} u_{n+2}$ trong 3 trường hợp
 $[u_{n+2} = 2]$ hay $[u_{n+2} = 1 = u_{n+1}]$ hay $[u_{n+2} = 1$ và $u_{n+1} = 2]$).

9/ Chứng minh bằng cách qui nạp (dùng giả thiết qui nạp mạnh) theo $n \geq 2$.

10/ Tìm $c, d \in \mathbf{R}$ thỏa $a_{n+1} + cb_{n+1} = d(a_n + cb_n) \quad \forall n \geq 0$ (*)

Mặt khác, từ giả thiết ta có $a_{n+1} + cb_{n+1} = (c + 3)a_n + (2c + 2)b_n \quad \forall n \geq 0$ (**)

Từ (*) và (**), ta có $c(c + 3) = 2c + 2$ và $d = (c + 3)$. Do đó $(c = 1, d = 4)$ hoặc $(c = -2, d = 1)$.

Đặt $u_n = (a_n + b_n)$ và $v_n = (a_n - 2b_n) \quad \forall n \geq 0$. Hãy chỉ ra hệ thức đệ qui cho mỗi dãy $u_n (n \geq 0)$

và $v_n (n \geq 0)$ để tính được u_n và v_n theo $n \geq 0$. Suy ra $a_n = 2.4^n - 1$ và $b_n = 4^n + 1 \quad \forall n \geq 0$.

CHƯƠNG 5 : QUAN HỆ TRÊN CÁC TẬP HỢP

1/ Liệt kê tập hợp $\mathfrak{R} = \{ (x,y) \in S^2 / x \mathfrak{R} y \}$ rồi xét các tính chất *phản xạ, đối xứng, phản xứng* và *truyền*.
a) $+-+-$ b) $-++-$ c) $----$ d) $-+--$ e) $+-+-$ f) $-----$ (+ : có ; - : không có)

2/ Xét các tính chất *phản xạ, đối xứng, phản xứng* và *truyền* của \mathfrak{R} :

a) $+----$ b) $-----$ c) $--++$ d) $+-+-$ e) $-+--$ f) $--+-$ (+ : có ; - : không có)

3/ $e) x \mathfrak{R} y \Leftrightarrow \sin x = \sin y \Leftrightarrow (x = y + k2\pi \text{ hay } x = \pi - y + k2\pi \text{ với } k \in \mathbf{Z})$

4/ a) $[a] = \{ x \in \mathbf{R} / (x-a)(x+a+3) = 0 \}$. Biện luận số phần tử của $[a]$ (là 1 hay 2) tùy theo $a \in \mathbf{R}$.

b) Tương tự a)

c) Trường hợp (-) : $[a] = \{ x \in \mathbf{R} / (x-a)(x^2 + ax + a^2 + 12) = 0 \} = \{ a \} \quad \forall a \in \mathbf{R}$.

Trường hợp (+) : $[a] = \{ x \in \mathbf{R} / (x-a)(x^2 + ax + a^2 - 12) = 0 \}$.

Biện luận số phần tử của $[a]$ (là 1, 2 hay 3) tùy theo $a \in \mathbf{R}$.

d) $[a] = \{ x \in \mathbf{R} / (x-a)(ax+7) = 0 \}$. Biện luận số phần tử của $[a]$ (là 1 hay 2) tùy theo $a \in \mathbf{R}$.

e) $[a] = \{ x \in \mathbf{R} / (x-a)(ax-4) = 0 \}$. Biện luận số phần tử của $[a]$ (là 1 hay 2) tùy theo $a \in \mathbf{R}$.

f) $[a] = \{ x \in \mathbf{R} / (\cos^2 x - \cos^2 a)(\sin x + 2) = 0 \} = \{ x \in \mathbf{R} / \cos 2x = \cos 2a \}$ có những phần tử nào?

5/ a) \mathfrak{R} có 14 cặp

b) $C_6^1 C_5^2 C_3^3$

c) $C_6^1 C_5^2 C_3^3 + C_6^2 C_4^2 C_2^2 + C_6^1 C_5^1 C_4^4$

6/ a) toàn phần, có min và max

b) bán phần, có min và các phần tử tối đại

c) bán phần, có max và các phần tử tối tiểu

d) bán phần, có min và max

e) bán phần, có các phần tử tối tiểu và các phần tử tối đại

f) toàn phần, có min và max

7/ Liệt kê 12 phần tử của S .

8/ a) Có 7 trường hợp khác nhau

b) Có 4 trường hợp khác nhau

10/ b) và d) Chọn thứ tự toàn phần mới không trùng với thứ tự \leq thông thường trên S .

c) Chọn thứ tự toàn phần mới không trùng với thứ tự \geq thông thường trên S .

CHƯƠNG 6 : HÀM BOOL

1/ Dùng các luật của hàm Bool để nhân ra dạng đa thức, rút gọn và nâng bậc các đơn thức.

2/ a) 8 tế bào lớn loại 1 ô, 1 phép phủ, 1 công thức đa thức tối tiểu.

b) 5 tế bào lớn (2 tế bào lớn loại 4 ô, còn lại là loại 2 ô), 1 phép phủ, 1 công thức đa thức tối tiểu.

c) 4 tế bào lớn loại 4 ô, 2 phép phủ tối tiểu, 2 công thức đa thức tối tiểu ngang nhau.

d) 5 tế bào lớn (1 tế bào lớn loại 4 ô, còn lại là loại 2 ô), 2 phép phủ tối tiểu, 1 công thức đa thức tối tiểu

e) 6 tế bào lớn loại 2 ô, 3 phép phủ tối tiểu, 3 công thức đa thức tối tiểu ngang nhau.

f) 6 tế bào lớn (5 tế bào lớn loại 4 ô, còn lại là loại 2 ô), 2 phép phủ tối tiểu, 1 công thức đa thức tối tiểu.

g) 7 tế bào lớn (2 tế bào lớn loại 4 ô, còn lại là loại 2 ô), 4 phép phủ tối tiểu, 2 công thức đa thức tối tiểu ngang nhau.

h) 8 tế bào lớn (5 tế bào lớn loại 4 ô, còn lại là loại 2 ô), 5 phép phủ tối tiểu, 1 công thức đa thức tối tiểu.

Dựa vào mỗi ô của $S = \text{Kar}(f)$ hay \bar{S} , ta viết được dạng nổi rồi chính tắc của f và \bar{f} .

- 3/ a) 5 tế bào lớn (1 tế bào lớn loại 4 ô, còn lại là loại 2 ô), 1 phép phủ, 1 công thức đa thức tối thiểu.
 b) 5 tế bào lớn (2 tế bào lớn loại 4 ô, còn lại là loại 2 ô), 2 phép phủ tối thiểu, 2 công thức đa thức tối thiểu ngang nhau.
 c) 6 tế bào lớn (3 tế bào lớn loại 4 ô, còn lại là loại 2 ô), 2 phép phủ tối thiểu, 1 công thức đa thức tối thiểu
 d) 6 tế bào lớn (3 tế bào lớn loại 4 ô, còn lại là loại 2 ô), 2 phép phủ tối thiểu, 1 công thức đa thức tối thiểu
 e) 6 tế bào lớn (2 tế bào lớn loại 4 ô, còn lại là loại 2 ô), 3 phép phủ tối thiểu, 3 công thức đa thức tối thiểu ngang nhau.
 f) 6 tế bào lớn (1 tế bào lớn loại 4 ô, còn lại là loại 2 ô), 2 phép phủ tối thiểu, 1 công thức đa thức tối thiểu.
 g) 7 tế bào lớn (1 tế bào lớn loại 4 ô, còn lại là loại 2 ô), 4 phép phủ tối thiểu, 2 công thức đa thức tối thiểu ngang nhau.
 h) 8 tế bào lớn (1 tế bào lớn loại 4 ô, còn lại là loại 2 ô), 5 phép phủ tối thiểu, 1 công thức đa thức tối thiểu

Dựa vào mỗi ô của $S = \text{Kar}(f)$, ta viết được dạng nổi rời chính tắc của f và \bar{f} .

4/ Chọn một công thức đa thức tối thiểu của f để vẽ mạng các cổng tổng hợp f .

- 5/ a) Có tất cả $2^6 = 64$ vector Bool. Có $C_6^2 = 15$ vector Bool có đúng 2 biến nhận giá trị 1.
 Số hàm Bool cần tính là $2^{64-15} = 2^{49}$
 b) Có $C_6^2 + C_6^3 + \dots + C_6^6 = 2^6 - (C_6^0 + C_6^1) = 57$ vector Bool có ít nhất 2 biến nhận giá trị 1.
 Số hàm Bool cần tính là $2^{64-57} = 2^7 = 128$
 c) Số hàm Bool cần tính = số hàm Bool của $F_5 = 2^{2^5} = 2^{32}$
 d) Số hàm Bool cần tính = số hàm Bool của $F_3 = 2^{2^3} = 2^8 = 256$

CHƯƠNG 7 : ĐẠI CƯƠNG VỀ ĐỒ THỊ :

2/ Đặt $|V| = k$. Dùng công thức $\sum \text{bậc} = 2|E|$ để lập phương trình rồi tính toán và suy luận.

- a) $2k = 2 \times 12$ b) $(3 \times 4) + 5(k - 3) = 2 \times 21$ c) $kr = 2 \times 6$ với $r \geq 1$ và $k \geq 2$ ($r = \text{bậc của mỗi đỉnh}$)
 d) p đỉnh bậc 3, q đỉnh bậc 4 thì $k = p + q + 3$ và $(3 \times 5) + 3p + 4q = 2 \times 16$. Từ đó tính được p và q .

3/ Đặt $|V| = k$. Dùng công thức $\sum \text{bậc} = 2|E|$ để lập phương trình rồi tính toán và suy luận.

- a) $9 \times 5 = 2|E|$: vô lý b) 6 đỉnh bậc $a, a + 1, \dots, a + 5 \Rightarrow a + (a + 1) + \dots + (a + 5) = 2|E|$: vô lý
 c) $kr = 2|E| \Rightarrow k = 2m$ chẵn $\Rightarrow mr = |E|$ d) $2 \times 19 = 2|E| = \sum \text{bậc} \geq 3k \Rightarrow 3k \leq 38$ và k nguyên

4/ a) Không có chu trình Euler và đường Euler b), d), f) Có chu trình Euler c), e), g) Có đường Euler

6/ (G và G') : tính số đỉnh bậc 2 của mỗi đồ thị.

(H và H') : lập ma trận của mỗi đồ thị theo các tập hợp đỉnh có thứ tự $V = \{a, b, c, p, q, r\}$ (của H) và $V' = \{x, m, j, n, s, t\}$ (của H').

(K và K') : xét tính liên thông của mỗi đồ thị.

(L và L') : tính số chu trình tứ giác của mỗi đồ thị.

(P và P') : lập ma trận của mỗi đồ thị theo các tập hợp đỉnh có thứ tự $V = \{a, b, c, u, v, w, x\}$ (của P) và $V' = \{m, q, s, n, p, t, r\}$ (của P').

(Q và Q') : lập ma trận của mỗi đồ thị theo các tập hợp đỉnh có thứ tự $V = \{a, b, c, u, v, w, p, q, h, k\}$ (của Q) và $V' = \{m, s, z, i, j, x, t, y, r, n\}$ (của Q')

(S và S') : tính số chu trình tam giác của mỗi đồ thị.

(T và T') : mỗi đồ thị có đúng 4 chu trình tam giác. T' có 1 chu trình tứ giác mà mỗi cạnh của nó lấy từ 1 chu trình tam giác. Tuy nhiên T không có tính chất này.