

CHƯƠNG 3. DÃY SỐ- CẤP SỐ CỘNG – CẤP SỐ NHÂN

BÀI 1. PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP TOÁN HỌC

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

Để chứng minh những mệnh đề liên quan đến số tự nhiên $n \in \mathbb{N}^*$ là đúng với mọi n mà không thể thử trực tiếp thì có thể làm như sau:

- Bước 1. Kiểm tra rằng mệnh đề đúng với $n = 1$.
- Bước 2. Giả thiết mệnh đề đúng với một số tự nhiên bất kì $n = k \geq 1$ (gọi là giả thiết quy nạp), chứng minh rằng nó cũng đúng với $n = k + 1$.

Đó là phương pháp quy nạp toán học, hay còn gọi tắt là phương pháp quy nạp.

Một cách đơn giản, ta có thể hình dung như sau: Mệnh đề đã đúng khi $n = 1$ nên theo kết quả ở bước 2, nó cũng đúng với $n = 1 + 1 = 2$. Vì nó đúng với $n = 2$ nên lại theo kết quả ở bước 2, nó đúng với $n = 2 + 1 = 3, \dots$ Bằng cách ấy, ta có thể khẳng định rằng mệnh đề đúng với mọi số tự nhiên $n \in \mathbb{N}^*$.

Chú ý: Nếu phải chứng minh mệnh đề là đúng với mọi số tự nhiên $n \geq p$ (p là một số tự nhiên) thì:

- Bước 1, ta phải kiểm tra mệnh đề đúng với $n = p$;
- Bước 2, giả thiết mệnh đề đúng với số tự nhiên bất kì $n = k \geq p$ và phải chứng minh rằng nó cũng đúng với $n = k + 1$.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Chứng minh đẳng thức

Ví dụ 1. Chứng minh rằng: $1.2 + 2.5 + 3.8 + \dots + n(3n - 1) = n^2(n + 1)$, với $n \in \mathbb{N}^*$ (1)

Lời giải

- Bước 1: Với $n = 1$, vế trái bằng $1.2 = 2$, vế phải bằng 2. hệ thức (1) đúng
- Bước 2: Đặt vế trái bằng S_n .

Giả sử hệ thức (1) đúng với $n = k \geq 1$, tức là :

$$S_k = 1.2 + 2.5 + \dots + k(3k - 1) = k^2(k + 1) \text{ (giả thiết quy nạp)}$$

Ta phải chứng minh rằng (1) cũng đúng với $n = k + 1$, tức là :

$$S_{k+1} = (k + 1)^2(k + 2)$$

Thật vậy, từ giả thiết quy nạp ta có:

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + (k + 1)[3(k + 1 - 1)] = k^2(k + 1) + (k + 1)(3k + 2) \\ &= (k + 1)(k^2 + 3k + 2) = (k + 1)^2(k + 2) \end{aligned}$$

Vậy hệ thức (1) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$

Dạng 2. Chứng minh bất đẳng thức

Ví dụ 1. Chứng minh rằng với mọi $n \geq 3$ ta có: $3^n > n^2 + 4n + 5$ (1)

Lời giải

Với $n=3$, vế trái bằng 27, còn vế phải bằng 26.

Bất đẳng thức (4) đúng.

Giải sử bất đẳng thức (4) đúng với $n=k \geq 3$. tức là:

$$3^k > k^2 + 4k + 5. \quad (1')$$

Ta phải chứng minh nó cũng đúng với $n=k+1$, tức là:

$$3^{k+1} > (k+1)^2 + 4(k+1) + 5$$

Thật vậy, nhân hai vế của bất đẳng thức (1') với 3 ta có:

$$3^{k+1} > 3k^2 + 12k + 15 = (k+1)^2 + 4(k+1) + 5 + 2k^2 + 6k + 5$$

Vì $2k^2 + 6k + 5 > 0$ nên $3^{k+1} > (k+1)^2 + 4(k+1) + 5$

Đẳng thức (1) đã được chứng minh

Dạng 3. Chứng minh một tính chất

Ví dụ. Chứng minh rằng: $n^7 - n$ chia hết cho 7 với mọi $n \in \mathbb{N}^*$

Giải

Đặt $A_n = n^7 - n$.

Khi $n=1$ thì $A_1 = 0$ chia hết cho 7

Giả sử đã có: $A_k = (k^7 - k) : 7$

Thật vậy, áp dụng công thức nhị thức Niu-ton ta có:

$$\begin{aligned} A_{k+1} &= (k+1)^7 - (k+1) = k^7 + 7k^6 + 21k^5 + 35k^4 + 35k^3 + 21k^2 + 7k + 1 - k - 1 \\ &= k^7 - k + 7(k^6 + 3k^5 + 5k^4 + 5k^3 + 3k^2 + k) \end{aligned}$$

Theo giả thiết quy nạp thì $A_k = k^7 - k$ chia hết cho 7, do đó $A_{k+1} : 7$

Vậy $n^7 - n$ chia hết cho 7 với mọi $n \in \mathbb{N}^*$

Dạng 4. Một số bài toán khác

Ví dụ. Chứng minh rằng: $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}} = 2 \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}$

Giải

Đặt vế trái của hệ thức (1) bằng C_n .

Khi $n=1$, vế trái bằng $\sqrt{2}$, vế phải bằng $2 \cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$; hệ thức (1) đúng

Giả sử hệ thức (1) đúng với $n=k \geq 1$, tức là $C_k = 2 \cos \frac{\pi}{2^{k+1}}$

ta phải chứng minh: $C_{k+1} = 2 \cos \frac{\pi}{2^{k+2}}$

Thật vậy, từ giả thiết quy nạp ta có:

$$\begin{aligned} C_{k+1} &= \sqrt{2 + C_k} = \sqrt{2 + 2 \cos \frac{\pi}{2^{k+1}}} = \\ &= \sqrt{4 \cos^2 \frac{\pi}{2^{k+2}}} = 2 \cos \frac{\pi}{2^{k+2}} \quad (\text{vì } \cos \frac{\pi}{2^{k+2}}) \end{aligned}$$

Vậy hệ thức (1) đã được chứng minh

C. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Dùng quy nạp chứng minh mệnh đề chứa biến $A(n)$ đúng với mọi số tự nhiên $n \geq p$ (p là một số tự nhiên). Ở bước 1 (bước cơ sở) của chứng minh quy nạp, bắt đầu với n bằng:

- A. $n = 1$. B. $n = p$. C. $n > p$. D. $n \geq p$.

Lời giải.

Chọn B

Câu 2: Dùng quy nạp chứng minh mệnh đề chứa biến $A(n)$ đúng với mọi số tự nhiên $n \geq p$ (p là một số tự nhiên). Ở bước 2 ta giả thiết mệnh đề $A(n)$ đúng với $n = k$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $k > p$. B. $k \geq p$. C. $k = p$. D. $k < p$.

Lời giải.

Chọn B

Câu 3: Khi sử dụng phương pháp quy nạp để chứng minh mệnh đề chứa biến $A(n)$ đúng với mọi số tự nhiên $n \geq p$ (p là một số tự nhiên), ta tiến hành hai bước:

- Bước 1, kiểm tra mệnh đề $A(n)$ đúng với $n = p$.
- Bước 2, giả thiết mệnh đề $A(n)$ đúng với số tự nhiên bất kỳ $n = k \geq p$ và phải chứng minh rằng nó cũng đúng với $n = k + 1$.

Trong hai bước trên:

- A. Chỉ có bước 1 đúng. B. Chỉ có bước 2 đúng. C. Cả hai bước đều đúng. D. Cả hai bước đều sai.

Lời giải.

Chọn C

Câu 4: Một học sinh chứng minh mệnh đề " $8^n + 1$ chia hết cho 7, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ " (*) như sau:

- Giả sử (*) đúng với $n = k$, tức là $8^k + 1$ chia hết cho 7.
- Ta có: $8^{k+1} + 1 = 8(8^k + 1) - 7$, kết hợp với giả thiết $8^k + 1$ chia hết cho 7 nên suy ra được $8^{k+1} + 1$ chia hết cho 7. Vậy đẳng thức (*) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. Học sinh trên chứng minh đúng.
B. Học sinh chứng minh sai vì không có giả thiết qui nạp.
C. Học sinh chứng minh sai vì không dùng giả thiết qui nạp.
D. Học sinh không kiểm tra bước 1 (bước cơ sở) của phương pháp qui nạp.

Lời giải.

Chọn D

Thiếu bước 1 là kiểm tra với $n = 1$, khi đó ta có $8^1 + 1 = 9$ không chia hết cho 7.

Câu 5: Cho $S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)}$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $S_3 = \frac{1}{12}$.

B. $S_2 = \frac{1}{6}$.

C. $S_2 = \frac{2}{3}$.

D. $S_3 = \frac{1}{4}$.

Lời giải.

Chọn C

Lưu ý rằng S_n là tổng n số hạng đầu tiên nên.

Do đó với $n = 2$, ta có $S_2 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{2}{3}$.

Câu 6: Cho $S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)}$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $S_n = \frac{n-1}{n}$.

B. $S_n = \frac{n}{n+1}$.

C. $S_n = \frac{n+1}{n+2}$.

D. $S_n = \frac{n+2}{n+3}$.

Lời giải.

Chọn B

Cách trắc nghiệm: Ta tính được $S_1 = \frac{1}{2}$, $S_2 = \frac{2}{3}$, $S_3 = \frac{3}{4}$. Từ đó ta thấy quy luật là từ nhỏ hơn mẫu đúng 1 đơn vị.

Cách tự luận. Ta có $S_1 = \frac{1}{2}$, $S_2 = \frac{2}{3}$, $S_3 = \frac{3}{4} \longrightarrow$ dự đoán $S_n = \frac{n}{n+1}$.

• Với $n = 1$, ta được $S_1 = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{1+1}$: đúng.

• Giả sử mệnh đề đúng khi $n = k$ ($k \geq 1$), tức là $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}$.

• Ta có $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k^2 + 2k + 1}{(k+1)(k+2)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}. \text{ S}$$

uy ra mệnh đề đúng với $n = k+1$.

Câu 7: Cho $S_n = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)}$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $S_n = \frac{n-1}{2n-1}$.

B. $S_n = \frac{n}{2n+1}$.

C. $S_n = \frac{n}{3n-2}$.

D. $S_n = \frac{n+2}{2n+5}$.

Lời giải.

Chọn B

$$\text{Cho } \begin{cases} n=1 \longrightarrow S_1 = \frac{1}{3} \\ n=2 \longrightarrow S_2 = \frac{6}{15} \\ n=3 \longrightarrow S_3 = \frac{3}{7} \end{cases} \text{ Kiểm tra các đáp án chỉ cho B thỏa.}$$

Câu 8: Cho $P_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ với $n \geq 2$ và $n \in \mathbb{N}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $P = \frac{n+1}{n+2}$. **B.** $P = \frac{n-1}{2n}$. **C.** $P = \frac{n+1}{n}$. **D.** $P = \frac{n+1}{2n}$.

Lời giải.

Chọn D

$$\text{Vì } n \geq 2 \text{ nên ta cho } \begin{cases} n=2 \longrightarrow P_2 = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) = \frac{3}{4} \\ n=3 \longrightarrow P_3 = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Kiểm tra các đáp án chỉ cho D thỏa.

Câu 9: Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, hệ thức nào sau đây là sai?

A. $1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$
B. $1+3+5+\dots+(2n-1) = n^2$.
C. $1^2+2^2+\dots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
D. $2^2+4^2+6^2+\dots+(2n)^2 = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Lời giải.

Chọn D

Bằng cách thử với $n=1$, $n=2$, $n=3$ là ta kết luận được.

Câu 10: Xét hai mệnh đề sau:

I) Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, số n^3+3n^2+5n chia hết cho 3.

II) Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$.

Mệnh đề nào đúng?

A. Chỉ I. **B.** Chỉ II. **C.** Không có. **D.** Cả I và II.

Lời giải.

Chọn A

- Ta chứng minh I) đúng.

Với $n = 1$, ta có $u_1 = 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 = 9 : 3$: đúng.

Giả sử mệnh đề đúng khi $n = k$ ($k \geq 1$), tức là $u_k = k^3 + 3k^2 + 5k : 3$.

Ta có $u_{k+1} = (k^3 + 3k^2 + 5k) + 3k^2 + 9k + 9 = u_k + 3(k^2 + 3k + 3) : 3$. Kết thúc chứng minh.

- Mệnh đề II) sai vì với $n = 1$, ta có $VT = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} = \frac{12}{24} > \frac{13}{24}$: Vô lý.

BÀI 2. DÃY SỐ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I – ĐỊNH NGHĨA

1. Định nghĩa dãy số

Mỗi hàm số u xác định trên tập các số nguyên dương \mathbb{N}^* được gọi là một dãy số vô hạn (gọi tắt là dãy số). Kí hiệu:

$$\begin{aligned}u: \mathbb{N}^* &\rightarrow \mathbb{R} \\ n &\mapsto u(n).\end{aligned}$$

Người ta thường viết dãy số dưới dạng khai triển $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$,

trong đó $u_n = u(n)$ hoặc viết tắt là (u_n) , và gọi u_1 là số hạng đầu, u_n là số hạng thứ n và là số hạng tổng quát của dãy số.

2. Định nghĩa dãy số hữu hạn

Mỗi hàm số u xác định trên tập $M = \{1, 2, 3, \dots, m\}$ với $m \in \mathbb{N}^*$ được gọi là một dãy số hữu hạn.

Dạng khai triển của nó là $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$, trong đó u_1 là số hạng đầu, u_m là số hạng cuối.

II – CÁCH CHO MỘT DÃY SỐ

1. Dãy số cho bằng công thức của số hạng tổng quát

2. Dãy số cho bằng phương pháp mô tả

3. Dãy số cho bằng phương pháp truy hồi

Cách cho một dãy số bằng phương pháp truy hồi, tức là:

a) Cho số hạng đầu (hay vài số hạng đầu).

b) Cho hệ thức truy hồi, tức là hệ thức biểu thị số hạng thứ n qua số hạng (hay vài số hạng) đứng trước nó.

III – DÃY SỐ TĂNG, DÃY SỐ GIẢM VÀ DÃY SỐ BỊ CHẶN

1. Dãy số tăng, dãy số giảm

Định nghĩa 1

Dãy số (u_n) được gọi là dãy số tăng nếu ta có $u_{n+1} > u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Dãy số (u_n) được gọi là dãy số giảm nếu ta có $u_{n+1} < u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Chú ý: Không phải mọi dãy số đều tăng hoặc giảm. Chẳng hạn, dãy số (u_n) với $u_n = (-3)^n$ tức là dãy $-3, 9, -27, 81, \dots$ không tăng cũng không giảm.

2. Dãy số bị chặn

Định nghĩa 2

Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn trên nếu tồn tại một số M sao cho

$$u_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn dưới nếu tồn tại một số m sao cho

$$u_n \geq m, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn nếu nó vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới, tức là tồn tại các số m, M sao cho

$$m \leq u_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Tìm số hạng của dãy số

1. Phương pháp

2. Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho dãy số (u_n) , tìm u_n

$$a) (u_n): \begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = u_n + 3 \end{cases};$$

$$b) (u_n): \begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = 4u_n \end{cases}$$

Hướng dẫn giải

a) Ta có:

$$u_1 = 5$$

$$u_2 = 5 + 1.3$$

$$u_3 = 5 + 2.3$$

$$u_4 = 5 + 3.3$$

...

$$u_n = 5 + (n-1).3 (*)$$

b) Ta có

$$u_1 = 3$$

$$u_2 = 3.4$$

$$u_3 = 3.4^2$$

$$u_4 = 3.4^3$$

...

$$u_n = 3.4^{n-1} (*)$$

Ví dụ 2. Cho dãy số (u_n) , tìm u_n

$$a) (u_n): \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3 \end{cases};$$

$$b) (u_n): \begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n^2} \end{cases}$$

Hướng dẫn giải

a) Ta có:

$$u_1 = 1 = 2^2 - 3$$

$$u_2 = 5 = 2^3 - 3$$

$$u_3 = 13 = 2^4 - 3$$

$$u_4 = 29 = 2^5 - 3$$

...

$$u_n = 2^{n+1} - 3 (*)$$

b) Ta có

$$u_1 = 3 = \sqrt{3^2 + 0}$$

$$u_2 = \sqrt{10} = \sqrt{3^2 + 1}$$

$$u_3 = \sqrt{11} = \sqrt{3^2 + 2}$$

$$u_4 = \sqrt{12} = \sqrt{3^2 + 3}$$

...

$$u_n = \sqrt{3^3 + n - 1} (*)$$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = \frac{-n}{n+1}$. Năm số hạng đầu tiên của dãy số đó lần lượt là những số nào dưới đây?

A. $-\frac{1}{2}; -\frac{2}{3}; -\frac{3}{4}; -\frac{4}{5}; -\frac{5}{6}$. B. $-\frac{2}{3}; -\frac{3}{4}; -\frac{4}{5}; -\frac{5}{6}; -\frac{6}{7}$. C. $\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \frac{5}{6}$. D. $\frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \frac{5}{6}; \frac{6}{7}$.

Lời giải.

Chọn A

Ta có $u_1 = -\frac{1}{2}; u_2 = -\frac{2}{3}; u_3 = -\frac{3}{4}; u_4 = -\frac{4}{5}; u_5 = -\frac{5}{6}$.

Nhận xét: (i) Dùng MTCT chức năng CALC để kiểm tra (tính) nhanh.

(ii) Ta thấy dãy (u_n) là dãy số âm nên loại các phương án C, D. Đáp án đúng là A hoặc B.

Ta chỉ cần kiểm tra một số hạng nào đó mà cả hai đáp án khác nhau là được. Chẳng hạn kiểm tra u_1 thì thấy $u_1 = -\frac{1}{2}$

Câu 2: Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = \frac{n}{3^n - 1}$. Ba số hạng đầu tiên của dãy số đó lần lượt là những số nào dưới đây?

A. $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}$. B. $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{3}{26}$. C. $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{16}$. D. $\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}$.

Lời giải.

Chọn B

Dùng MTCT chức năng CALC: ta có

$$u_1 = \frac{1}{2}; u_2 = \frac{2}{3^2-1} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}; u_3 = \frac{3}{3^3-1} = \frac{3}{26}.$$

Câu 3: Cho dãy số (u_n) , biết $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = u_n + 3 \end{cases}$ với $n \geq 0$. Ba số hạng đầu tiên của dãy số đó là lần lượt là những số nào dưới đây?

- A. $-1; 2; 5$. B. $1; 4; 7$. C. $4; 7; 10$. D. $-1; 3; 7$.

Lời giải.

Chọn A

Ta có $u_1 = -1$; $u_2 = u_1 + 3 = 2$; $u_3 = u_2 + 3 = 5$.

Nhận xét: (i) Dùng chức năng “lập” của MTCT để tính:

Nhập vào màn hình: $X = X + 3$.

Bấm CALC và cho $X = -1$ (ứng với $u_1 = -1$)

Để tính u_n cần bấm “=” ra kết quả liên tiếp $n-1$ lần. Ví dụ để tính u_2 ta bấm “=” ra kết quả lần đầu tiên, bấm “=” ra kết quả thứ hai chính là u_3, \dots

(ii) Vì $u_1 = -1$ nên loại các đáp án B, C. Còn lại các đáp án A, D; để biết đáp án nào ta chỉ cần kiểm tra u_2 (vì u_2 ở hai đáp án là khác nhau): $u_2 = u_1 + 3 = 2$

Câu 4: Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = \frac{2n^2-1}{n^2+3}$. Tìm số hạng u_5 .

- A. $u_5 = \frac{1}{4}$. B. $u_5 = \frac{17}{12}$. C. $u_5 = \frac{7}{4}$. D. $u_5 = \frac{71}{39}$.

Lời giải.

Chọn C

Thế trực tiếp hoặc dùng chức năng CALC: $u_5 = \frac{2.5^2-1}{5^2+3} = \frac{49}{28} = \frac{7}{4}$.

Câu 5: Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = (-1)^n \cdot 2n$. Mệnh đề nào sau đây sai?

- A. $u_1 = -2$. B. $u_2 = 4$. C. $u_3 = -6$. D. $u_4 = -8$.

Lời giải.

Chọn D

Thay trực tiếp hoặc dùng chức năng CALC:

$$u_1 = -2.1 = -2; u_2 = (-1)^2 \cdot 2.2 = 4; u_3 = (-1)^3 \cdot 2.3 = -6; u_4 = (-1)^4 \cdot 2.4 = 8.$$

Nhận xét: Dễ thấy $u_n > 0$ khi n chẵn và ngược lại nên đáp án D sai.

Câu 6: Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = (-1)^n \cdot \frac{2^n}{n}$. Tìm số hạng u_3 .

A. $u_3 = \frac{8}{3}$.

B. $u_3 = 2$.

C. $u_3 = -2$.

D. $u_3 = -\frac{8}{3}$.

Lời giải.

Chọn D

Thay trực tiếp hoặc dùng chức năng CALC: $u_3 = (-1)^3 \cdot \frac{2^3}{3} = -\frac{8}{3}$.

Câu 7: Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 1) \end{cases}$. Tìm số hạng u_4 .

A. $u_4 = \frac{5}{9}$.

B. $u_4 = 1$.

C. $u_4 = \frac{2}{3}$.

D. $u_4 = \frac{14}{27}$.

Lời giải.

Chọn A

Ta có

$$u_2 = \frac{1}{3}(u_1 + 1) = \frac{1}{3}(2 + 1) = 1; u_3 = \frac{1}{3}(u_2 + 1) = \frac{2}{3}; u_4 = \frac{1}{3}(u_3 + 1) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3} + 1\right) = \frac{5}{9}.$$

Nhận xét: Có thể dùng chức năng “lặp” trong MTCT để tính nhanh.

Câu 8: Cho dãy (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + 2 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $u_2 = \frac{5}{2}$.

B. $u_3 = \frac{15}{4}$.

C. $u_4 = \frac{31}{8}$.

D. $u_5 = \frac{63}{16}$.

Lời giải.

Chọn A

$$\text{Ta có } \begin{cases} u_2 = \frac{u_1}{2} + 2 = \frac{3}{2} + 2 = \frac{7}{2}; u_3 = \frac{u_2}{2} + 2 = \frac{7}{4} + 2 = \frac{15}{4} \\ u_4 = \frac{u_3}{2} + 2 = \frac{15}{8} + 2 = \frac{31}{8}; u_5 = \frac{u_4}{2} + 2 = \frac{31}{16} + 2 = \frac{63}{16} \end{cases}$$

Nhận xét: Dùng chức năng “lặp” trong MTCT để tính nhanh.

Câu 9: Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = \frac{n+1}{2n+1}$. Số $\frac{8}{15}$ là số hạng thứ mấy của dãy số?

A. 8.

B. 6.

C. 5.

D. 7.

Lời giải.

Chọn D

$$\text{Ta cần tìm } n \text{ sao cho } u_n = \frac{n+1}{2n+1} = \frac{8}{15} \Leftrightarrow 15n+15 = 16n+8 \Leftrightarrow n = 7.$$

Nhận xét: Có thể dùng chức năng CALC để kiểm tra nhanh.

Câu 10: Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = \frac{2n+5}{5n-4}$. Số $\frac{7}{12}$ là số hạng thứ mấy của dãy số?

A. 8.

B. 6.

C. 9.

D. 10.

Lời giải.

Chọn A

Dùng chức năng “lập” để kiểm tra đáp án. Hoặc giải cụ thể như sau:

$$u_n = \frac{2n+5}{5n-4} = \frac{7}{12} \Leftrightarrow 24n+60 = 35n-28 \Leftrightarrow 11n = 88 \Leftrightarrow n = 8.$$

Câu 11: Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = 2^n$. Tìm số hạng u_{n+1} .

A. $u_{n+1} = 2^n \cdot 2$.

B. $u_{n+1} = 2^n + 1$.

C. $u_{n+1} = 2(n+1)$.

D. $u_{n+1} = 2^n + 2$.

Lời giải.

Chọn A

Thay n bằng $n+1$ trong công thức u_n ta được: $u_{n+1} = 2^{n+1} = 2 \cdot 2^n$.

Câu 12: Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = 3^n$. Tìm số hạng u_{2n-1} .

A. $u_{2n-1} = 3^2 \cdot 3^n - 1$.

B. $u_{2n-1} = 3^n \cdot 3^{n-1}$.

C. $u_{2n-1} = 3^{2n} - 1$.

D. $u_{2n-1} = 3^{2(n-1)}$.

Lời giải.

Chọn B

Ta có $u_n = 3^n \xrightarrow{n \leftrightarrow 2n-1} u_{2n-1} = 3^{2n-1} = 3^n \cdot 3^{n-1}$.

Câu 13: Cho dãy số (u_n) , với $u_n = 5^{n+1}$. Tìm số hạng u_{n-1} .

A. $u_{n-1} = 5^{n-1}$.

B. $u_{n-1} = 5^n$.

C. $u_{n-1} = 5 \cdot 5^{n+1}$.

D. $u_{n-1} = 5 \cdot 5^{n-1}$.

Lời giải.

Chọn B

$u_n = 5^{n+1} \xrightarrow{n \leftrightarrow n-1} u_{n-1} = 5^{(n-1)+1} = 5^n$.

Câu 14: Cho dãy số (u_n) , với $u_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2n+3}$. Tìm số hạng u_{n+1} .

A. $u_{n+1} = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2(n+1)+3}$.

B. $u_{n+1} = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2(n-1)+3}$.

C. $u_{n+1} = \left(\frac{n}{n+2}\right)^{2n+3}$.

D. $u_{n+1} = \left(\frac{n}{n+2}\right)^{2n+5}$.

Lời giải.

Chọn D

$$u_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2n+3} \xrightarrow{n \leftrightarrow n+1} u_{n+1} = \left(\frac{(n+1)-1}{(n+1)+1}\right)^{2(n+1)+3} = \left(\frac{n}{n+2}\right)^{2n+5}.$$

Câu 15: Dãy số có các số hạng cho bởi: $0; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \dots$. có số hạng tổng quát là công thức nào dưới đây?

A. $u_n = \frac{n+1}{n}$. B. $u_n = \frac{n}{n+1}$. C. $u_n = \frac{n-1}{n}$. D. $u_n = \frac{n^2-n}{n+1}$.

Lời giải.

Chọn C

Vì $u_1 = 0$ nên loại các đáp án A và B. Ta kiểm tra $u_2 = \frac{1}{2}$ ở các đáp án C, D:

Xét đáp án C: $u_n = \frac{n-1}{n} \longrightarrow u_2 = \frac{1}{2}$

Xét đáp án D: $u_n = \frac{n^2-n}{n+1} \longrightarrow u_2 = \frac{2}{3} \neq \frac{1}{2} \longrightarrow$ loại

Nhận xét: $u_1 = 0 = \frac{1-1}{1}$; $u_2 = \frac{1}{2} = \frac{2-1}{2}$; $u_3 = \frac{2}{3} = \frac{3-1}{3}$, ... nên đoán $u_n = \frac{n-1}{n}$.

Câu 16: Dãy số có các số hạng cho bởi: $-1; 1; -1; 1; -1; \dots$. có số hạng tổng quát là công thức nào dưới đây?

A. $u_n = 1$. B. $u_n = -1$. C. $u_n = (-1)^n$. D. $u_n = (-1)^{n+1}$.

Lời giải.

Chọn C

Vì dãy số đã cho không phải là dãy hằng nên loại các đáp án A và B. Ta kiểm tra $u_1 = -1$ ở các đáp án C, D:

Xét đáp án C: $u_n = (-1)^n \longrightarrow u_1 = -1$

Xét đáp án D: $u_n = (-1)^{n+1} \longrightarrow u_1 = (-1)^2 = 1 \neq -1 \longrightarrow$ loại D.

Câu 17: Cho dãy số có các số hạng đầu là: $-2; 0; 2; 4; 6; \dots$. Số hạng tổng quát của dãy số này là công thức nào dưới đây?

A. $u_n = -2n$. B. $u_n = n-2$. C. $u_n = -2(n+1)$. D. $u_n = 2n-4$.

Lời giải.

Chọn D

Kiểm tra $u_1 = -2$ ta loại các đáp án B, C. Ta kiểm tra $u_2 = 0$ ở các đáp án A, D:

Xét đáp án A: $u_n = 2n \Rightarrow u_2 = 4 \neq 0 \longrightarrow$ loại A.

Xét đáp án D: $u_n = 2n-4 = 2 \cdot 2 - 4 = 0$

Nhận xét: Dãy $2; 4; 6; \dots$ có công thức là $2n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) nên dãy $-2; 0; 2; 4; 6; \dots$ có được bằng cách “tịnh tiến” $2n$ sang trái 4 đơn vị, tức là $2n-4$.

Câu 18: Cho dãy số (u_n) , được xác định $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

- A. $u_n = n^{n-1}$. B. $u_n = 2^n$. C. $u_n = 2^{n+1}$. D. $u_n = 2$.

Lời giải.

Chọn B

$$\text{Từ công thức } \begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} u_1 = 2 \\ u_2 = 2u_1 = 2.2 = 4. \\ u_3 = 2u_2 = 2.4 = 8 \end{cases}$$

Xét đáp án A với $n = 1 \longrightarrow u_1 = 1^{1-1} = 1^0 = 1 \longrightarrow$ A loại.

Xét đáp án B, ta thấy đều thỏa mãn.

Xét đáp án C với $n = 1 \longrightarrow u_1 = 2^{1+1} = 2^2 = 4 \longrightarrow$ C loại.

Dễ thấy đáp án D không thỏa mãn.

Câu 19: Cho dãy số (u_n) , được xác định $\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = u_n - 2 \end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

- A. $u_n = \frac{1}{2} + 2(n-1)$. B. $u_n = \frac{1}{2} - 2(n-1)$. C. $u_n = \frac{1}{2} - 2n$. D. $u_n = \frac{1}{2} + 2n$.

Lời giải.

Chọn B

$$\text{Từ công thức } \begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = u_n - 2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_2 = u_1 - 2 = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2} \\ u_3 = u_2 - 2 = -\frac{3}{2} - 2 = -\frac{7}{2} \end{cases}$$

Xét đáp án A với $n = 2 \longrightarrow u_2 = \frac{1}{2} + 2(2-1) = \frac{5}{2} \longrightarrow$ A loại.

Xét đáp án B, ta thấy đều thỏa mãn.

Xét đáp án C với $n = 2 \longrightarrow u_2 = \frac{1}{2} - 2.2 = \frac{1}{2} - 4 = -\frac{7}{2} \longrightarrow$ C loại.

Xét đáp án D với $n = 1 \longrightarrow u_1 = \frac{1}{2} + 2.1 = \frac{5}{2} \longrightarrow$ D loại.

Câu 20: Cho dãy số (u_n) , được xác định $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} - u_n = 2n - 1 \end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

- A. $u_n = 2 + (n-1)^2$. B. $u_n = 2 + n^2$.

C. $u_n = 2 + (n+1)^2$.

D. $u_n = 2 - (n-1)^2$.

Lời giải.

Chọn A

Kiểm tra $u_1 = 2$ ta loại các đáp án B và C. Ta có $u_2 = u_1 + 2.1 - 1 = 3$.

Xét đáp án A: $u_n = 2 + (n-1)^2 \longrightarrow u_2 = 3$

Hoặc kiểm tra: $u_{n+1} - u_n = n^2 - (n-1)^2 = 2n - 1$.

Xét đáp án D: $u_n = 2 - (n-1)^2 \longrightarrow u_2 = 1 \longrightarrow$ loại D. Hoặc kiểm tra:

$$u_{n+1} - u_n = (n-1)^2 - n^2 = -2n + 1 \neq 2n - 1.$$

Câu 21: Cho dãy số (u_n) , được xác định $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + n^2 \end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

A. $u_n = 1 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

B.

$u_n = 1 + \frac{n(n-1)(2n+2)}{6}$.

C. $u_n = 1 + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$.

D.

$u_n = 1 + \frac{n(n+1)(2n-2)}{6}$.

Lời giải.

Chọn C

Kiểm tra $u_1 = 1$ ta loại đáp án A. Ta có $u_2 = u_1 + 1^2 = 2$.

Xét đáp án B: $u_n = 1 + \frac{n(n-1)(2n+2)}{6} \longrightarrow u_2 = 1 + \frac{2.1.6}{6} = 3 \neq 2 \longrightarrow$ B loại.

Xét đáp án C: $u_n = u_1 = 1 + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} \longrightarrow u_2 = 1 + \frac{2.1.3}{6} = 2$

Xét đáp án D: $u_n = 1 + \frac{n(n+1)(2n-2)}{6} \longrightarrow u_2 = 1 + \frac{2.3.2}{6} = 3 \neq 2 \longrightarrow$ D loại.

Câu 22: Cho dãy số (u_n) , được xác định $\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_{n+1} = -2 - \frac{1}{u_n} \end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

A. $u_n = \frac{-n+1}{n}$.

B. $u_n = \frac{n+1}{n}$.

C. $u_n = -\frac{n+1}{n}$.

D. $u_n = -\frac{n}{n+1}$.

Lời giải.

Chọn C

Kiểm tra $u_1 = -2$ ta loại các đáp án A, B. Ta có $u_2 = -2 - \frac{1}{u_1} = -\frac{3}{2}$.

Xét đáp án C: $u_n = -\frac{n+1}{n} \longrightarrow u_2 = -\frac{3}{2}$

Xét đáp án D: $u_n = -\frac{n}{n+1} \longrightarrow u_2 = -\frac{2}{3} \longrightarrow$ D loại.

Câu 23: Cho dãy số (u_n) , được xác định $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + (-1)^{2n} \end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

- A. $u_n = 1 + n$. B. $u_n = 1 - n$. C. $u_n = 1 + (-1)^{2n}$. D. $u_n = n$.

Lời giải.

Chọn D

Kiểm tra $u_1 = 1$ ta loại đáp án A, B và C

Câu 24: Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát là $u_n = 2(3^n)$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Công thức truy hồi của dãy số đó là:

- A. $\begin{cases} u_1 = 6 \\ u_n = 6u_{n-1}, n > 1 \end{cases}$. B. $\begin{cases} u_1 = 6 \\ u_n = 3u_{n-1}, n > 1 \end{cases}$.
C. $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_n = 3u_{n-1}, n > 1 \end{cases}$. D. $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_n = 6u_{n-1}, n > 1 \end{cases}$.

Lời giải.

Chọn B

Vì $u_1 = 2 \cdot 3^1 = 6$ nên ta loại các đáp án C và D. Ta có $u_2 = 2 \cdot 3^2 = 18$.

Xét đáp án A: $\begin{cases} u_1 = 6 \\ u_n = 6u_{n-1}, n > 1 \end{cases} \longrightarrow u_2 = 6u_1 = 6 \cdot 6 = 36 \longrightarrow$ A loại.

Xét đáp án B: $\begin{cases} u_1 = 6 \\ u_n = 3u_{n-1}, n > 1 \end{cases} \longrightarrow u_2 = 3u_1 = 3 \cdot 6 = 18$

Câu 25: Cho dãy số (a_n) , được xác định $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n, n \geq 1 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây sai?

- A. $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = \frac{93}{16}$. B. $a_{10} = \frac{3}{512}$.
C. $a_{n+1} + a_n = \frac{9}{2^n}$. D. $a_n = \frac{3}{2^n}$.

Lời giải.

Chọn D

Ta có $a_1 = 3; a_2 = \frac{u_1}{2}; a_3 = \frac{u_2}{2} = \frac{u_1}{2^2}; a_4 = \frac{u_3}{2} = \frac{u_1}{2^3}, \dots \longrightarrow u_n = \frac{u_1}{2^{n-1}} = \frac{3}{2^{n-1}}$ nên suy ra đáp án D sai.

Xét đáp án A:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 3 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} \right) = 3 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^5}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{93}{16} \longrightarrow \text{A đúng.}$$

Xét đáp án B: $a_{10} = \frac{3}{2^9} = \frac{3}{512} \longrightarrow \text{B đúng.}$

Xét đáp án C. $a_{n+1} + a_n = \frac{3}{2^n} + \frac{3}{2^{n-1}} = \frac{3+3 \cdot 2}{2^n} = \frac{9}{2^n} \longrightarrow \text{C đúng.}$

Dạng 2. Tính tăng giảm và bị chặn của dãy số

1. Phương pháp

Xét tính tăng giảm

• (u_n) là dãy số tăng $\Leftrightarrow u_{n+1} > u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*.$

$$\Leftrightarrow u_{n+1} - u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1, \forall n \in \mathbb{N}^* (u_n > 0).$$

• (u_n) là dãy số giảm $\Leftrightarrow u_{n+1} < u_n$ với $\forall n \in \mathbb{N}^*.$

$$\Leftrightarrow u_{n+1} - u_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1, \forall n \in \mathbb{N}^* (u_n > 0).$$

Dãy số bị chặn

- (u_n) là dãy số bị chặn trên $\Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}: u_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^*.$
- (u_n) là dãy số bị chặn dưới $\Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{R}: u_n \geq m, \forall n \in \mathbb{N}^*.$
- (u_n) là dãy số bị chặn $\Leftrightarrow \exists m, M \in \mathbb{R}: m \leq u_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^*.$

1. Phương pháp

2. Các ví dụ

Ví dụ 1. Xét tính tăng giảm của dãy số (u_n) biết

$$\text{a) } u_n = \frac{2n+1}{3n-2}; \quad \text{b) } u_n = \frac{2-n}{\sqrt{n}}$$

Hướng dẫn giải

$$\text{a) } u_n = \frac{2n+1}{3n-2} = \frac{2}{3} + \frac{\frac{7}{3}}{3(n+1)-2}; \quad u_{n+1} - u_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}^*. \text{ Vậy dãy giảm}$$

Lưu ý: Ta không cần phải chia như vậy, làm cũng rất nhanh.

b)

$$u_n = \frac{2-n}{\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{n}} - \sqrt{n}$$

$$u_{n+1} - u_n = (\sqrt{n} - \sqrt{n+1}) \left(\frac{2}{\sqrt{n(n+1)}} + 1 \right) < 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Vậy dãy giảm

Ví dụ 2. Xét tính tăng giảm của dãy số (u_n) biết

$$a) u_n = \frac{5^n}{3^{n+1}};$$

$$b) u_n = \frac{2^{n+2}}{\sqrt{n}}.$$

Hướng dẫn giải

$$a) \text{ Xét } u_{n+1} - u_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{2n+5}{(n+3)(n+2)} = \begin{cases} \frac{2n+5}{(n+3)(n+2)} > 0, n = 2k+1 \\ \frac{2n+5}{(n+3)(n+2)} < 0, n = 2k \end{cases}$$

Vậy dãy đã cho không tăng không giảm

$$b) \text{ Xét } u_{n+1} - u_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{(n+4)(n+5)} = \begin{cases} \frac{1}{(n+4)(n+5)} > 0, n = 2k+1 \\ \frac{1}{(n+4)(n+5)} < 0, n = 2k \end{cases}$$

Vậy dãy đã cho không tăng không giảm

Ví dụ 3. Xét tính bị chặn của dãy số (u_n)

$$a) u_n = \frac{n^2 + 2n}{n^2 + n + 1};$$

$$b) u_n = \frac{n}{\sqrt{n^2 + 2n + n}}$$

Hướng dẫn giải

$$a) u_n = \frac{n^2 + 2n}{n^2 + n + 1} = 1 + \frac{n-1}{n^2 + n + 1}$$

Ta có:

$$0 \leq \frac{n-1}{n^2 + n + 1} < 1, \forall n \in \mathbb{N}^*. \text{ Suy ra: } 1 \leq u_n < 2, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Vậy dãy số đã cho bị chặn

$$b) u_n = \frac{n}{\sqrt{n^2 + 2n + n}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + 1} \Rightarrow 0 < u_n < \frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Ví dụ 4. Xét tính bị chặn của dãy số (u_n)

$$a) u_n = (-1)^n \cos \frac{\pi}{2n};$$

$$b) u_n = \frac{4 \sin n + 4 \cos(3n^2 + 1)}{5n^2 + n}$$

Hướng dẫn giải

$$a) u_n = (-1)^n \cos \frac{\pi}{2n} \Rightarrow |u_n| = \left| (-1)^n \cos \frac{\pi}{2n} \right| = \left| \cos \frac{\pi}{2n} \right| \leq 1$$

$$\Rightarrow -1 \leq u_n \leq 1$$

Vậy dãy đã cho bị chặn.

$$b) u_n = \frac{4 \sin n + 4 \cos(3n^2 + 1)}{5n^2 + n} \Rightarrow |u_n| = \frac{|4 \sin n + 4 \cos(3n^2 + 1)|}{5n^2 + n} < \frac{5}{5n^2} < 1$$

Suy ra: $-1 < u_n < 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Vậy dãy đã cho bị chặn.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Cho các dãy số sau. Dãy số nào là dãy số tăng?

A. 1; 1; 1; 1; 1; 1; ...

B. 1; $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $-\frac{1}{8}$; $\frac{1}{16}$; ...

C. 1; 3; 5; 7; 9; ...

D. 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{16}$; ...

Lời giải.

Chọn C

Xét đáp án A: 1; 1; 1; 1; 1; 1; ... đây là dãy hằng nên không tăng không giảm.

Xét đáp án B: 1; $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $-\frac{1}{8}$; $\frac{1}{16}$; ... $\longrightarrow u_1 > u_2 < u_3 \longrightarrow$ loại B

Xét đáp án C: 1; 3; 5; 7; 9; ... $\longrightarrow u_n < u_{n+1}, n \in \mathbb{N}^*$

Xét đáp án D: 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{16}$; ... $\longrightarrow u_1 > u_2 > u_3 > \dots > u_n > \dots \longrightarrow$ loại **D.**

Câu 2: Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là dãy số tăng?

A. $u_n = \frac{1}{2^n}$.

B. $u_n = \frac{1}{n}$.

C. $u_n = \frac{n+5}{3n+1}$.

D. $u_n = \frac{2n-1}{n+1}$.

Lời giải.

Chọn D

Vì $2^n; n$ là các dãy dương và tăng nên $\frac{1}{2^n}; \frac{1}{n}$ là các dãy giảm, do đó loại A, B.

$$\text{Xét đáp án C: } u_n = \frac{n+5}{3n+1} \longrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{3}{2} \\ u_2 = \frac{7}{6} \end{cases} \longrightarrow u_1 > u_2 \longrightarrow \text{loại C}$$

$$\text{Xét đáp án D: } u_n = \frac{2n-1}{n+1} = 2 - \frac{3}{n+1} \Rightarrow u_{n+1} - u_n = 3 \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) > 0$$

Câu 3: Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là dãy số tăng?

A. $u_n = \frac{2}{3^n}$.

B. $u_n = \frac{3}{n}$.

C. $u_n = 2^n$.

D. $u_n = (-2)^n$.

Lời giải.

Chọn C

Xét đáp án C: $u_n = 2^n \longrightarrow u_{n+1} - u_n = 2^{n+1} - 2^n = 2^n > 0 \longrightarrow$

Vì $2^n; n$ là các dãy dương và tăng nên $\frac{1}{2^n}; \frac{1}{n}$ là các dãy giảm, do đó loại các đáp án A và B.

Xét đáp án D: $u_n = (-2)^n \longrightarrow \begin{cases} u_2 = 4 \\ u_3 = -8 \end{cases} \longrightarrow u_2 > u_3 \longrightarrow \text{loại D.}$

Câu 4: Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là dãy số giảm?

A. $u_n = \frac{1}{2^n}$.

B. $u_n = \frac{3n-1}{n+1}$.

C. $u_n = n^2$.

D. $u_n = \sqrt{n+2}$.

Lời giải.

Chọn A

Vì 2^n là dãy dương và tăng nên $\frac{1}{2^n}$ là dãy giảm \longrightarrow

Xét B: $u_n = \frac{3n-1}{n+1} \longrightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_2 = \frac{5}{3} \end{cases} \longrightarrow u_1 < u_2 \longrightarrow \text{loại}$

B. Hoặc

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3n+2}{n+2} - \frac{3n-1}{n+1} = \frac{4}{(n+1)(n+2)} > 0 \text{ nên } (u_n) \text{ là dãy tăng.}$$

Xét C: $u_n = n^2 \longrightarrow u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n+1 > 0 \longrightarrow \text{loại C.}$

Xét D: $u_n = \sqrt{n+2} \longrightarrow u_{n+1} - u_n = \sqrt{n+3} - \sqrt{n+2} = \frac{1}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n+2}} > 0 \longrightarrow \text{loại D.}$

Câu 5: Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là dãy số giảm?

A. $u_n = \sin n$.

B. $u_n = \frac{n^2+1}{n}$.

C. $u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$.

D. $u_n = (-1)^n \cdot (2^n + 1)$.

Lời giải.

Chọn C

A. $u_n = \sin n \Rightarrow u_{n+1} - u_n = 2 \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) \sin \frac{1}{2}$ có thể dương hoặc âm phụ thuộc n nên đáp án A sai. Hoặc dễ thấy $\sin n$ có dấu thay đổi trên \mathbb{N}^* nên dãy $\sin n$ không tăng, không giảm.

B. $u_n = \frac{n^2+1}{n} = n + \frac{1}{n} \Rightarrow u_{n+1} - u_n = 1 + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n^2+n-1}{n(n+1)} > 0$ nên dãy đã cho tăng nên B sai.

C. $u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}$, dãy $\sqrt{n} + \sqrt{n-1} > 0$ là dãy tăng nên suy ra u_n giảm.

D. $u_n = (-1)^n (2^n + 1)$ là dãy thay dấu nên không tăng không giảm.

Cách trắc nghiệm.

A. $u_n = \sin n$ có dấu thay đổi trên \mathbb{N}^* nên dãy này không tăng không giảm.

B. $u_n = \frac{n^2 + 1}{n}$, ta có $\begin{cases} n=1 \rightarrow u_1 = 2 \\ n=2 \rightarrow u_2 = \frac{5}{2} \end{cases} \longrightarrow u_1 < u_2 \longrightarrow u_n = \frac{n^2 + 1}{n}$ không giảm.

C. $u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$, ta có $\begin{cases} n=1 \rightarrow u_1 = 1 \\ n=2 \rightarrow u_2 = \sqrt{2} - 1 \end{cases} \longrightarrow u_1 > u_2$ nên dự đoán dãy này giảm.

D. $u_n = (-1)^n (2^n + 1)$ là dãy thay dấu nên không tăng không giảm.

Cách CASIO.

● Các dãy $\sin n$; $(-1)^n (2^n + 1)$ có dấu thay đổi trên \mathbb{N}^* nên các dãy này không tăng không giảm nên loại các đáp án A, D.

● Còn lại các đáp án B, C ta chỉ cần kiểm tra một đáp án bằng chức năng TABLE.

Chẳng hạn kiểm tra đáp án B, ta vào chức năng TABLE nhập $F(X) = \frac{X^2 + 1}{X}$ với thiết lập Start = 1, End = 10, Step = 1.

Nếu thấy cột $F(X)$ các giá trị tăng thì loại B và chọn C, nếu ngược lại nếu thấy cột $F(X)$ các giá trị giảm dần thì chọn B và loại C.

Câu 6: Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số $u_n = \frac{1}{n} - 2$ là dãy tăng.

B. Dãy số $u_n = (-1)^n (2^n + 1)$ là dãy giảm.

C. Dãy số $u_n = \frac{n-1}{n+1}$ là dãy giảm.

D. Dãy số $u_n = 2n + \cos \frac{1}{n}$ là dãy tăng.

Lời giải.

Chọn D

Xét đáp án A: $u_n = \frac{1}{n} - 2 \longrightarrow u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} < 0 \longrightarrow$ loại A.

Xét đáp án B: $u_n = (-1)^n (2^n + 1)$ là dãy có dấu thay đổi nên không giảm nên loại B.

Xét đáp án C: $u_n = \frac{n-1}{n+1} = 1 - \frac{2}{n+1} \longrightarrow u_{n+1} - u_n = 2 \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) > 0 \longrightarrow$ loại C.

Xét đáp án D: $u_n = 2n + \cos \frac{1}{n} \longrightarrow u_{n+1} - u_n = \left(2 - \cos \frac{1}{n+1} \right) + \cos \frac{1}{n+2} > 0$ nên

Câu 7: Mệnh đề nào sau đây sai?

A. Dãy số $u_n = \frac{1-n}{\sqrt{n}}$ là dãy giảm.

B. Dãy số $u_n = 2n^2 - 5$ là dãy tăng.

C. Dãy số $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ là dãy giảm.

D. Dãy số $u_n = n + \sin^2 n$ là dãy tăng.

Lời giải.

Chọn C

Xét A: $u_n = \frac{1-n}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{n} \longrightarrow u_{n+1} - u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n}} + \sqrt{n} - \sqrt{n+1} < 0$ nên dãy (u_n) là dãy giảm nên C đúng.

Xét đáp án B: $u_n = 2n^2 - 5$ là dãy tăng vì n^2 là dãy tăng nên B đúng. Hoặc

$$u_{n+1} - u_n = 2(2n+1) > 0 \text{ nên } (u_n) \text{ là dãy tăng.}$$

Xét đáp án C: $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n > 0 \longrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+2}{n+1} \cdot \left(\frac{n+2}{n}\right)^n > 1 \longrightarrow (u_n)$ là dãy tăng nên

Xét đáp án D: $u_n = n + \sin^2 n \longrightarrow u_{n+1} - u_n = (1 - \sin^2(n+1)) + \sin^2 n > 0$ nên D đúng.

Câu 8: Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = \frac{3n-1}{3n+1}$. Dãy số (u_n) bị chặn trên bởi số nào dưới đây?

A. $\frac{1}{3}$.

B. 1.

C. $\frac{1}{2}$.

D. 0.

Lời giải.

Chọn B

Ta có $u_n = \frac{3n-1}{3n+1} = 1 - \frac{2}{3n+1} < 1$. Mặt khác: $u_2 = \frac{5}{7} > \frac{1}{2} > \frac{1}{2} > 0$ nên suy ra dãy (u_n) bị chặn trên bởi số 1.

Câu 9: Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào bị chặn trên?

A. $u_n = n^2$.

B. $u_n = 2^n$.

C. $u_n = \frac{1}{n}$.

D. $u_n = \sqrt{n+1}$.

Lời giải.

Chọn C

Các dãy số $n^2; 2^n; n+1$ là các dãy tăng đến vô hạn khi n tăng lên vô hạn nên chúng không bị chặn trên (có thể dùng chức năng TABLE của MTCT để kiểm tra).

Nhận xét: $u_n = \frac{1}{n} \leq 1$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ nên dãy (u_n) bị chặn trên bởi 1.

Câu 10: Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = \cos n + \sin n$. Dãy số (u_n) bị chặn trên bởi số nào dưới đây?

A. 0.

B. 1.

C. $\sqrt{2}$.

D. Không bị chặn trên.

Lời giải.

Chọn C

Ta có $u_n \xrightarrow{MTCT} u_1 = \sin 1 + \cos 1 > 1 > 0$ nên loại các đáp án A và B (dùng TABLE của MTCT để kiểm tra, chỉ cần 1 số hạng nào đó của dãy số lớn hơn α thì dãy số đó không thể bị chặn trên bởi α .)

$$\text{Ta có } u_n = \cos n + \sin n = \sqrt{2} \sin\left(n + \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2}$$

Câu 11: Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = \sin n - \cos n$. Dãy số (u_n) bị chặn dưới bởi số nào dưới đây?

- A. 0. B. -1. C. $-\sqrt{2}$. D. Không bị chặn dưới.

Lời giải.**Chọn C**

$u_n \xrightarrow{MTCT} u_5 = \sin 5 - \cos 5 < -1 < 0 \longrightarrow$ loại A và B (dùng TABLE của MTCT để kiểm tra, chỉ cần có một số hạng nào đó của dãy số nhỏ hơn α thì dãy số đó không thể bị chặn dưới với số α .)

$$\text{Ta có } u_n = \sqrt{2} \sin\left(n - \frac{\pi}{4}\right) \geq -\sqrt{2}$$

Câu 12: Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = \sqrt{3} \cos n - \sin n$. Dãy số (u_n) bị chặn dưới và chặn trên lần lượt bởi các số m và M nào dưới đây?

- A. $m = -2$; $M = 2$. B. $m = -\frac{1}{2}$; $M = \sqrt{3} + 1$.
C. $m = -\sqrt{3} + 1$; $M = \sqrt{3} - 1$. D. $m = -\frac{1}{2}$; $M = \frac{1}{2}$.

Lời giải.**Chọn A**

$$u_n \xrightarrow{MTCT(TABLE)} u_1 > \sqrt{3} - 1 > \frac{1}{2} \longrightarrow \text{loại C và D.}$$

$$u_n \xrightarrow{MTCT(TABLE)} u_4 < -\frac{1}{2} \longrightarrow \text{loại B. Vậy}$$

$$\text{Nhận xét: } u_n = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin n - \frac{1}{2} \cos n \right) = 2 \sin\left(n - \frac{\pi}{6}\right) \longrightarrow -2 \leq u_n \leq 2.$$

Câu 13: Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = (-1)^n \cdot 5^{2n+5}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Dãy số (u_n) bị chặn trên và không bị chặn dưới.
B. Dãy số (u_n) bị chặn dưới và không bị chặn trên.
C. Dãy số (u_n) bị chặn.
D. Dãy số (u_n) không bị chặn.

Lời giải.

Chọn D

Nếu n chẵn thì $u_n = 5^{2n+1} > 0$ tăng lên vô hạn (dương vô cùng) khi n tăng lên vô hạn nên dãy (u_n) không bị chặn trên.

Nếu n lẻ thì $u_n = -5^{2n+1} < 0$ giảm xuống vô hạn (âm vô cùng) khi n tăng lên vô hạn nên dãy (u_n) không bị chặn dưới.

Vậy dãy số đã cho không bị chặn.

Câu 14: Cho dãy số (u_n) , với $u_n = \frac{1}{1.4} + \frac{1}{2.5} + \dots + \frac{1}{n(n+3)}, \forall n = 1; 2; 3 \dots$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số (u_n) bị chặn trên và không bị chặn dưới.

B. Dãy số (u_n) bị chặn dưới và không bị chặn trên.

C. Dãy số (u_n) bị chặn.

D. Dãy số (u_n) không bị chặn.

Lời giải.

Chọn C

Ta có $u_n > 0 \longrightarrow (u_n)$ bị chặn dưới bởi 0. Mặt khác $\frac{1}{k(k+3)} < \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} (k \in \mathbb{N}^*)$ nên suy ra:

$$u_n < \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} < 1$$

nên dãy (u_n) bị chặn trên, do đó dãy (u_n) bị chặn.

Câu 15: Cho dãy số (u_n) , với $u_n = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}, \forall n = 2; 3; 4; \dots$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số (u_n) bị chặn trên và không bị chặn dưới.

B. Dãy số (u_n) bị chặn dưới và không bị chặn trên.

C. Dãy số (u_n) bị chặn.

D. Dãy số (u_n) không bị chặn.

Lời giải.

Chọn C

Ta có $u_n > 0 \longrightarrow (u_n)$ bị chặn dưới bởi 0. Mặt khác $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} (k \in \mathbb{N}^*, k \geq 2)$ nên suy ra:

$$u_n < \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} < 1$$

nên dãy (u_n) bị chặn trên, do đó dãy (u_n) bị chặn.

Câu 16: Trong các dãy số (u_n) sau đây, dãy số nào là dãy số bị chặn?

- A. $u_n = \sqrt{n^2 + 1}$. B. $u_n = n + \frac{1}{n}$. C. $u_n = 2^n + 1$. D. $u_n = \frac{n}{n+1}$.

Lời giải.

Chọn D

Các dãy số n^2 ; n ; 2^n dương và tăng lên vô hạn (dương vô cùng) khi n tăng lên vô hạn, nên các dãy $\sqrt{n^2 + 1}$; $n + \frac{1}{n}$; $2^n + 1$ cũng tăng lên vô hạn (dương vô cùng), suy ra các dãy này không bị chặn trên, do đó chúng không bị chặn.

Nhận xét: $0 < u_n = \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} < 1$.

Câu 17: Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào bị chặn?

- A. $u_n = \frac{1}{2^n}$. B. $u_n = 3^n$. C. $u_n = \sqrt{n+1}$. D. $u_n = n^2$.

Lời giải.

Chọn A

Các dãy số n^2 ; n ; 3^n dương và tăng lên vô hạn (dương vô cùng) khi n tăng lên vô hạn nên các dãy n^2 ; $\sqrt{n+1}$; 3^n cũng tăng lên vô hạn (dương vô cùng), suy ra các dãy này không bị chặn trên, do đó chúng không bị chặn.

Nhận xét: $0 < u_n = \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2}$.

Câu 18: Cho dãy số (u_n) , xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 6 \\ u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\sqrt{6} \leq u_n < \frac{5}{2}$. B. $\sqrt{6} \leq u_n < 3$.
C. $\sqrt{6} \leq u_n < 2$. D. $\sqrt{6} \leq u_n \leq 2\sqrt{3}$.

Lời giải.

Chọn D

Ta có $u_2 = \sqrt{12} > 3 > \frac{5}{2} > 2$ nên loại các đáp án A, B, C.

Nhận xét: Ta có

$$\begin{cases} u_1 = 6 \\ u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} u_1 = 6 \\ u_{n+1} \geq 0 \end{cases} \longrightarrow u_n \geq 0 \longrightarrow \begin{cases} u_1 = 6 \\ u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n} \geq \sqrt{6} \end{cases} \longrightarrow u_n \geq \sqrt{6}.$$

Ta chứng minh quy nạp $u_n \leq 2\sqrt{3}$.

$$u_1 \leq 2\sqrt{3}; u_k \leq 2\sqrt{3} \longrightarrow u_{k+1} = \sqrt{6+u_{k+1}} \leq \sqrt{6+2\sqrt{3}} < \sqrt{6+6} = 2\sqrt{3}.$$

Câu 19: Cho dãy số (u_n) , với $u_n = \sin \frac{\pi}{n+1}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Số hạng thứ $n+1$ của dãy là $u_{n+1} = \sin \frac{\pi}{n+1}$.

B. Dãy số (u_n) là dãy số bị chặn.

C. Dãy số (u_n) là một dãy số tăng.

D. Dãy số (u_n) không tăng không giảm.

Lời giải.

Chọn B

$$u_n = \sin \frac{\pi}{n+1} \longrightarrow u_{n+1} = \sin \frac{\pi}{(n+1)+1} = \sin \frac{\pi}{n+2} \longrightarrow \text{A sai.}$$

$$u_n = \sin \frac{\pi}{n+1} \longrightarrow -1 \leq u_n \leq 1 \longrightarrow \text{B đúng.}$$

$$u_{n+1} - u_n = \sin \frac{\pi}{n+2} - \sin \frac{\pi}{n+1} < 0 \left(0 < \frac{\pi}{n+2} < \frac{\pi}{n+1} \leq \frac{\pi}{2} \right) \longrightarrow \text{C, D sai.}$$

Câu 20: Cho dãy số (u_n) , với $u_n = (-1)^n$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số (u_n) là dãy số tăng.

B. Dãy số (u_n) là dãy số giảm.

C. Dãy số (u_n) là dãy số bị chặn.

D. Dãy số (u_n) là dãy số không bị chặn.

Lời giải.

Chọn C

$$u_n = (-1)^n \text{ là dãy thay dấu nên không tăng, không giảm } \longrightarrow \text{A, B sai.}$$

$$\text{Tập giá trị của dãy } u_n = (-1)^n \text{ là } \{-1; 1\} \longrightarrow -1 \leq u_n \leq 1 \longrightarrow \text{C đúng.}$$

BÀI 3. CẤP SỐ CỘNG

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I – ĐỊNH NGHĨA

Cấp số cộng là một dãy số (hữu hạn hoặc vô hạn), trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng số hạng đứng ngay trước nó cộng với một số không đổi d .

Số d được gọi là công sai của cấp số cộng.

Nếu (u_n) là cấp số cộng với công sai d , ta có công thức truy hồi $u_{n+1} = u_n + d$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

Đặc biệt khi $d = 0$ thì cấp số cộng là một dãy số không đổi (tất cả các số hạng đều bằng nhau).

II – SỐ HẠNG TỔNG QUÁT

Định lý 1

Nếu cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu u_1 và công sai d thì số hạng tổng quát u_n được xác định bởi công thức:

$$u_n = u_1 + (n-1)d \quad \text{với } n \geq 2.$$

III – TÍNH CHẤT CÁC SỐ HẠNG CỦA CẤP SỐ CỘNG

Định lý 2

Trong một cấp số cộng, mỗi số hạng (trừ số hạng đầu và cuối) đều là trung bình cộng của hai số hạng đứng kề với nó, nghĩa là

$$u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2} \quad \text{với } k \geq 2.$$

IV – TỔNG n SỐ HẠNG ĐẦU CỦA MỘT CẤP SỐ CỘNG

Định lý 3

Cho cấp số cộng (u_n) . Đặt $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$. Khi đó $S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2}$.

Chú ý: Vì $u_n = u_1 + (n-1)d$ nên công thức trên có thể viết lại là $S_n = nu_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Xác định cấp số cộng, công sai và số hạng của cấp số cộng

1. Phương pháp

- Xác định một cấp số cộng là xác định số hạng đầu u_1 và công sai d
- Từ những giả thiết ta thường lập hệ phương trình theo ẩn số u_1 và d rồi giải hệ đó.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Trong các dãy số sau, dãy số nào là một cấp số cộng?

A. 1; -3; -7; -11; -15; ...

B. 1; -3; -6; -9; -12; ...

C. 1; -2; -4; -6; -8; ...

D. 1; -3; -5; -7; -9; ...

Lời giải

Chọn A

Ta lần lượt kiểm tra: $u_2 - u_1 = u_3 - u_2 = u_4 - u_3 = \dots?$

Xét đáp án A: 1; -3; -7; -11; -15; ... $\longrightarrow u_2 - u_1 = u_3 - u_2 = u_4 - u_3 = \dots$

Xét đáp án B: 1; -3; -6; -9; -12; ... $\longrightarrow u_2 - u_1 = -4 \neq -3 = u_3 - u_2 \longrightarrow$ loại

Xét đáp án C: 1; -2; -4; -6; -8; ... $\longrightarrow u_2 - u_1 = -3 \neq -2 = u_3 - u_2 \longrightarrow$ loại

Xét đáp án D: 1; -3; -5; -7; -9; ... $\longrightarrow u_2 - u_1 = -4 \neq -2 = u_3 - u_2 \longrightarrow$ loại

Ví dụ 2: Cho dãy số $\frac{1}{2}; 0; -\frac{1}{2}; -1; -\frac{3}{2}; \dots$ là cấp số cộng với:

A. Số hạng đầu tiên là $\frac{1}{2}$, công sai là $\frac{1}{2}$.

B. Số hạng đầu tiên là $\frac{1}{2}$, công sai là $-\frac{1}{2}$.

C. Số hạng đầu tiên là 0, công sai là $\frac{1}{2}$.

D. Số hạng đầu tiên là 0, công sai là $-\frac{1}{2}$.

Lời giải:

Chọn B

Nếu dãy số (u_n) là một cấp số cộng thì công sai d của nó là hiệu của một cặp số hạng liên tiếp bất kì (số hạng sau trừ cho số hạng trước) của dãy số đó.

Ta có $\frac{1}{2}; 0; -\frac{1}{2}; -1; -\frac{3}{2}; \dots$ là cấp số cộng $\longrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_2 - u_1 = -\frac{1}{2} = d \end{cases}$

Ví dụ 4: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = -5$ và $d = 3$. Số 100 là số hạng thứ mấy của cấp số cộng?

A. Thứ 15.

B. Thứ 20.

C. Thứ 35.

D. Thứ 36.

Lời giải.

Chọn D

Ví dụ 5: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_3 = 15$ và $d = -2$. Tìm u_n .

A. $u_n = -2n + 21$.

B. $u_n = -\frac{3}{2}n + 12$.

C. $u_n = -3n - 17$.

D. $u_n = \frac{3}{2}n^2 - 4$.

Lời giải.

Chọn A

$$\text{Ta có } \begin{cases} 15 = u_3 = u_1 + 2d \\ d = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 19 \\ d = -2 \end{cases} \rightarrow u_n = u_1 + (n-1)d = -2n + 21.$$

Ví dụ 6: Một cấp số cộng có 8 số hạng. Số hạng đầu là 5, số hạng thứ tám là 40. Khi đó công sai d của cấp số cộng đó là bao nhiêu?

A. $d = 4$.

B. $d = 5$.

C. $d = 6$.

D. $d = 7$.

Lời giải.

Chọn B

$$\begin{cases} u_1 = 5 \\ 40 = u_8 = u_1 + 7d \end{cases} \longrightarrow d = 5$$

Dạng 2. Tính tổng các số hạng trong một cấp số cộng

1. Phương pháp

Tính tổng n số hạng đầu tiên nhờ công thức: $S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} = \frac{n[2u_1 + (n-1)d]}{2}$

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1: Số hạng tổng quát của một cấp số cộng là $u_n = 3n + 4$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Gọi S_n là tổng n số hạng đầu tiên của cấp số cộng đã cho. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $S_n = \frac{3^n - 1}{2}$.

B. $S_n = \frac{7(3^n - 1)}{2}$.

C. $S_n = \frac{3n^2 + 5n}{2}$.

D. $S_n = \frac{3n^2 + 11n}{2}$.

Lời giải.

Chọn D

$$\text{Cấp số cộng } u_n = an + b \longrightarrow \begin{cases} u_1 = a + b \\ d = a \end{cases}.$$

$$u_n = 3n + 4 \rightarrow \begin{cases} u_1 = 7 \\ d = 3 \end{cases} \rightarrow S_n = nu_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = 7n + \frac{3(n^2 - n)}{2} = \frac{3n^2 + 11n}{2}.$$

Ví dụ 2: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 4$ và $d = -5$. Tính tổng 100 số hạng đầu tiên của cấp số cộng.

A. $S_{100} = 24350$.

B. $S_{100} = -24350$.

C. $S_{100} = -24600$.

D. $S_{100} = 24600$.

Lời giải.

Chọn B

$$S_n = nu_1 + \frac{n(n-1)}{2}d \longrightarrow S_{100} = 100u_1 + \frac{100 \cdot 99}{2}d = -24350$$

Ví dụ 3: Xét các số nguyên dương chia hết cho 3. Tổng số 50 số nguyên dương đầu tiên đó bằng:

A. 7650.

B. 7500.

C. 3900.

D. 3825.

Lời giải.

Chọn D

Số nguyên dương chia hết cho 3 có dạng $3n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) nên chúng lập thành cấp số cộng

$$u_n = 3n \longrightarrow \begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{50} = 150 \end{cases} \longrightarrow S_{50} = \frac{50}{2}(u_1 + u_{50}) = 3825$$

Chú ý: $S_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n) = nu_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$.

Ví dụ 4: Tính tổng $S = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \dots + (2n-1) - 2n$ với $n \geq 1$ và $n \in \mathbb{N}$.

A. $S = 0$.

B. $S = -1$.

C. $S = n$.

D. $S = -n$.

Lời giải.

Chọn D

Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ thì $(2n-1) - 2n = -1$.

Ta có $S = (1-2) + (3-4) + (5-6) + \dots + ((2n-1) - 2n)$. Do đó ta xem S là tổng của n số hạng, mà mỗi số hạng đều bằng -1 nên $S = -n$.

Nhận xét: Ta có $1; 3; 5; \dots; 2n-1$ và $2; 4; 6; \dots; 2n$ là các cấp số cộng có n số hạng nên

$$\begin{aligned} S &= (1 + 3 + 5 + \dots + 2n-1) - (2 + 4 + 6 + \dots + 2n) \\ &= \frac{n}{2}(1 + 2n-1) - \frac{n}{2}(2 + 2n) = n^2 - (n^2 + n) = -n. \end{aligned}$$

Ví dụ 5: Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $u_2 + u_8 + u_9 + u_{15} = 100$. Tính tổng 16 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đã cho.

A. $S_{16} = 100$.

B. $S_{16} = 200$.

C. $S_{16} = 300$.

D. $S_{16} = 400$.

Lời giải.

Chọn D

$$\text{Ta có } u_2 + u_8 + u_9 + u_{15} = 100 \Leftrightarrow 4u_1 + 30d = 100 \Leftrightarrow 2u_1 + 15d = 50.$$

$$\text{Khi đó } S_{16} = \frac{16}{2}(u_1 + u_{16}) = 8(2u_1 + 15d) = 8 \cdot 50 = 400$$

Dạng 3. Chứng minh một hệ thức trong cấp số cộng:

1. Phương pháp

Sử dụng các tính chất của cấp số cộng

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Nếu $a; b; c$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng thì dãy số nào sau đây lập thành cấp số cộng?

A. $2b^2; a^2; c^2$.

B. $-2b; -2a; -2c$.

C. $2b; a; c$.

D. $2b; -a; -c$.

Lời giải.

Chọn B

Ta có $c + a = 2b \Rightarrow -2(c + a) = -2(2b) \Leftrightarrow (-2c) + (-2a) = 2(-2b)$.

Ví dụ 2: Nếu $\frac{1}{b+c}; \frac{1}{c+a}; \frac{1}{a+b}$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng thì dãy số nào sau đây lập thành cấp số cộng?

A. $b^2; a^2; c^2$.

B. $c^2; a^2; b^2$.

C. $a^2; b^2; c^2$.

D. $a^2; c^2; b^2$.

Lời giải.

Chọn C

Theo giả thiết ta có $\frac{2}{c+a} = \frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+b} \Leftrightarrow \frac{c+a}{2} = \frac{(b+c)(b+a)}{2b+a+c}$

$\Leftrightarrow (a+c)^2 + 2b(c+a) = 2(b^2 + ab + bc + ac)$

$\Leftrightarrow a^2 + c^2 + 2ac + 2bc + 2bc = 2(b^2 + ab + bc + ac) \Leftrightarrow a^2 + c^2 = 2b^2$.

Ví dụ 3: Cho $a; b; c$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a^2 + c^2 + 2ac = 4b^2$.

B. $a^2 + c^2 = 2ab - 2bc$.

C. $a^2 - c^2 = ab - bc$.

D. $a^2 - c^2 = 2ab - 2bc$.

Lời giải.

Chọn A

Ta có: $a + c = 2b \Rightarrow (a + c)^2 = 4b^2 \Leftrightarrow a^2 + c^2 + 2ac = 4b^2$

Dạng 4. Giải phương trình (tìm x trong cấp số cộng)

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Cho các số $-4; 1; 6; x$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng. Tìm x .

A. $x = 7$.

B. $x = 10$.

C. $x = 11$.

D. $x = 12$.

Lời giải.

Chọn C

Vì các số $-4; 1; 6; x$ theo thứ tự u_1, u_2, u_3, u_4 lập thành cấp số cộng nên

$u_4 - u_3 = u_3 - u_2 \longrightarrow x - 6 = 6 - 1 \Leftrightarrow x = 11$

Ví dụ 2: Nếu các số $5 + m; 7 + 2m; 17 + m$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng thì m bằng bao nhiêu?

A. $m = 2$.

B. $m = 3$.

C. $m = 4$.

D. $m = 5$.

Lời giải.

Chọn C

Ba số $5 + m$; $7 + 2m$; $17 + m$ theo thứ tự u_1, u_2, u_3 lập thành cấp số cộng nên

$$u_1 + u_3 = 2u_2 \Leftrightarrow (5 + m) + (17 + m) = 2(7 + 2m) \Leftrightarrow m = 4$$

Nhận xét: Ta có thể dùng tính chất $u_3 - u_2 = u_2 - u_1$.

Ví dụ 3: Với giá trị nào của x và y thì các số -7 ; x ; 11 ; y theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng?

A. $x = 1; y = 21$.

B. $x = 2; y = 20$.

C. $x = 3; y = 19$.

D. $x = 4; y = 18$.

Lời giải.

Chọn B

Bốn số -7 ; x ; 11 ; y theo thứ tự u_1, u_2, u_3, u_4 lập thành cấp số cộng nên

$$\begin{cases} u_4 - u_3 = u_3 - u_2 \\ u_4 - u_3 = u_2 - u_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - 11 = 11 - x \\ y - 11 = x + 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 22 \\ x - y = -18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 20 \end{cases}$$

C. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Dãy số nào sau đây **không** phải là cấp số cộng?

A. $-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; 0; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 1; \frac{4}{3}; \dots$

B. $15\sqrt{2}; 12\sqrt{2}; 9\sqrt{2}; 6\sqrt{2}; \dots$

C. $\frac{4}{5}; 1; \frac{7}{5}; \frac{9}{5}; \frac{11}{5}; \dots$

D. $\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{2\sqrt{3}}{3}; \sqrt{3}; \frac{4\sqrt{3}}{3}; \frac{5}{\sqrt{3}}; \dots$

Lời giải.

Chọn C

Chỉ cần tồn tại hai cặp số hạng liên tiếp của dãy số có hiệu khác nhau: $u_{m+1} - u_m \neq u_{k+1} - u_k$ thì ta kết luận ngay dãy số đó không phải là cấp số cộng.

Xét đáp án A: $-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; 0; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 1; \frac{4}{3}; \dots \longrightarrow \frac{1}{3} = u_2 - u_1 = u_3 - u_2 = u_4 - u_3 = \dots \longrightarrow$ loại **A**

Xét đáp án B:

$$15\sqrt{2}; 12\sqrt{2}; 9\sqrt{2}; 6\sqrt{2}; \dots \longrightarrow -3\sqrt{2} = u_2 - u_1 = u_3 - u_2 = u_4 - u_3 = \dots \longrightarrow$$
 loại **B**

Xét đáp án C: $\frac{4}{5}; 1; \frac{7}{5}; \frac{9}{5}; \frac{11}{5}; \dots \longrightarrow \frac{1}{5} = u_2 - u_1 \neq u_3 - u_2 = \frac{2}{5} \longrightarrow$ **Chọn C**

Xét đáp án D: $\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{2\sqrt{3}}{3}; \sqrt{3}; \frac{4\sqrt{3}}{3}; \frac{5}{\sqrt{3}}; \dots \longrightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = u_2 - u_1 = u_3 - u_2 = u_4 - u_3 \longrightarrow$ loại **D**

Câu 2: Cho cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = -\frac{1}{2}$, công sai $d = \frac{1}{2}$. Năm số hạng liên tiếp đầu tiên của cấp số này là:

A. $-\frac{1}{2}; 0; 1; \frac{1}{2}; 1$.

B. $-\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}$.

C. $\frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}; 2; \frac{5}{2}$.

D. $-\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}$.

Lời giải:**Chọn D**

Ta dùng công thức tổng quát $u_n = u_1 + (n-1)d = -\frac{1}{2} + (n-1)\frac{1}{2} = -1 + \frac{n}{2}$, hoặc

$u_{n+1} = u_n + d = u_n + \frac{1}{2}$ để tính các số hạng của một cấp số cộng.

$$\text{Ta có } u_1 = -\frac{1}{2}; d = \frac{1}{2} \longrightarrow \begin{cases} u_1 = -\frac{1}{2} \\ u_2 = u_1 + d = 0 \\ u_3 - u_2 + d = \frac{1}{2} \\ u_4 = u_3 + d = 1 \\ u_5 = u_4 + d = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Nhận xét: Dùng chức năng “lặp” của MTCT để tính:

Nhập: $X = X + \frac{1}{2}$ (nhập $X = X + d$).

Bấm CALC: nhập $-\frac{1}{2}$ (nhập u_1).

Để tính 5 số hạng đầu ta bấm dấu “=” liên tiếp để ra kết quả 4 lần nữa!

Câu 3: Viết ba số hạng xen giữa các số 2 và 22 để được một cấp số cộng có năm số hạng.

- A.** 7; 12; 17, **B.** 6; 10; 14. **C.** 8; 13; 18. **D.** 6; 12; 18.

Lời giải.**Chọn A**

Giữa 2 và 22 có thêm ba số hạng nữa lập thành cấp số cộng, xem như ta có một cấp số cộng có 5 số hạng với $u_1 = 2$; $u_5 = 22$; ta cần tìm u_2, u_3, u_4 .

$$\text{Ta có } u_5 = u_1 + 4d \Leftrightarrow d = \frac{u_5 - u_1}{4} = \frac{22 - 2}{4} = 5 \longrightarrow \begin{cases} u_2 = u_1 + d = 7 \\ u_3 = u_1 + 2d = 12 \\ u_4 = u_1 + 3d = 17 \end{cases}$$

Câu 4: Cho hai số -3 và 23 . Xen kẽ giữa hai số đã cho n số hạng để tất cả các số đó tạo thành cấp số cộng có công sai $d = 2$. Tìm n .

- A.** $n = 12$. **B.** $n = 13$. **C.** $n = 14$. **D.** $n = 15$.

Lời giải.**Chọn A**

Theo giả thiết thì ta được một cấp số cộng có $n+2$ số hạng với $u_1 = -3$, $u_{n+2} = 23$.

$$\text{Khi đó } u_{n+2} = u_1 + (n+1)d \Leftrightarrow n+1 = \frac{u_{n+2} - u_1}{d} = \frac{23 - (-3)}{2} = 13 \Leftrightarrow n = 12 \longrightarrow A$$

Câu 5: Biết các số C_n^1, C_n^2, C_n^3 theo thứ tự lập thành một cấp số cộng với $n > 3$. Tìm n .

A. $n = 5$.

B. $n = 7$.

C. $n = 9$.

D. $n = 11$.

Lời giải.

Chọn B

Ba số $C_n^1; C_n^2; C_n^3$ theo thứ tự u_1, u_2, u_3 lập thành cấp số cộng nên

$$u_1 + u_3 = 2u_2 \Leftrightarrow C_n^1 + C_n^3 = 2C_n^2 \quad (n \geq 3) \Leftrightarrow n + \frac{(n-2)(n-1)n}{6} = 2 \cdot \frac{(n-1)n}{2}$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{n^2 - 3n + 2}{6} = n - 1 \Leftrightarrow n^2 - 9n + 14 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 2 \\ n = 7 \end{cases} \Leftrightarrow n = 7 \quad (n \geq 3).$$

Nhận xét: Nếu u_{k-1}, u_k, u_{k+1} là ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng thì ta có $u_{k-1} + u_{k+1} = 2u_k$.

Câu 6: Cho cấp số cộng (u_n) có các số hạng đầu lần lượt là 5; 9; 13; 17; Tìm số hạng tổng quát u_n của cấp số cộng.

A. $u_n = 5n + 1$.

B. $u_n = 5n - 1$.

C. $u_n = 4n + 1$.

D. $u_n = 4n - 1$.

Lời giải.

Chọn C

Các số 5; 9; 13; 17; ... theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng (u_n) nên

$$\begin{cases} u_1 = 5 \\ d = u_2 - u_1 = 4 \end{cases} \xrightarrow{CTTQ} u_n = u_1 + (n-1)d = 5 + 4(n-1) = 4n + 1$$

Câu 7: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = -3$ và $d = \frac{1}{2}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $u_n = -3 + \frac{1}{2}(n+1)$.

B. $u_n = -3 + \frac{1}{2}n - 1$.

C. $u_n = -3 + \frac{1}{2}(n-1)$.

D. $u_n = -3 + \frac{1}{4}(n-1)$.

Lời giải.

Chọn C

$$\text{Ta có } \begin{cases} u_1 = -3 \\ d = \frac{1}{2} \end{cases} \xrightarrow{CTTQ} u_n = u_1 + (n-1)d = -3 + \frac{1}{2}(n-1)$$

Câu 8: Trong các dãy số được cho dưới đây, dãy số nào là cấp số cộng?

A. $u_n = 7 - 3n$.

B. $u_n = 7 - 3^n$.

C. $u_n = \frac{7}{3n}$.

D. $u_n = 7 \cdot 3^n$.

Lời giải.

Chọn A

Dãy (u_n) là cấp số cộng $\Leftrightarrow u_n = an + b$ (a, b là hằng số).

Câu 9: Trong các dãy số được cho dưới đây, dãy số nào là cấp số cộng?

A. $u_n = (-1)^n (2n+1)$. **B.** $u_n = \sin \frac{\pi}{n}$. **C.** $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = u_{n-1} - 1 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = 2u_{n-1} \end{cases}$.

Lời giải.

Chọn C

Dãy (u_n) là một cấp số cộng $\Leftrightarrow u_n = u_{n-1} + d$ (d là hằng số).

Câu 10: Trong các dãy số được cho dưới đây, dãy số nào không phải là cấp số cộng?

A. $u_n = -4n + 9$. **B.** $u_n = -2n + 19$. **C.** $u_n = -2n - 21$. **D.** $u_n = -2^n + 15$.

Lời giải.

Chọn D

Dãy số $u_n = -2^n + 15$ không có dạng $an + b$ nên nó không phải là cấp số cộng.

Câu 11: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = -5$ và $d = 3$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $u_{15} = 34$. **B.** $u_{15} = 45$. **C.** $u_{13} = 31$. **D.** $u_{10} = 35$.

Lời giải.

Chọn C

$$\begin{cases} u_1 = -5 \\ d = 3 \end{cases} \longrightarrow u_n = 3n - 8 \longrightarrow \begin{cases} u_{15} = 37 \\ u_{13} = 31 \\ u_{10} = 22 \end{cases}$$

Câu 12: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = \frac{1}{4}$ và $d = -\frac{1}{4}$. Gọi S_5 là tổng 5 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đã cho. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $S_5 = -\frac{5}{4}$. **B.** $S_5 = \frac{4}{5}$. **C.** $S_5 = \frac{5}{4}$. **D.** $S_5 = -\frac{4}{5}$.

Lời giải.

Chọn A

$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{4} \\ d = -\frac{1}{4} \end{cases} \longrightarrow S_5 = 5u_1 + \frac{5 \cdot 4}{2}d = 5 \cdot \frac{1}{4} + 10 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{5}{4}$$

Câu 13: Cho cấp số cộng (u_n) có $d = -2$ và $S_8 = 72$. Tìm số hạng đầu tiên u_1 .

A. $u_1 = 16$. **B.** $u_1 = -16$. **C.** $u_1 = \frac{1}{16}$. **D.** $u_1 = -\frac{1}{16}$.

Lời giải.

Chọn A

$$\begin{cases} d = -2 \\ 72 = S_8 = 8u_1 + \frac{8 \cdot 7}{2}d \end{cases} \longrightarrow 72 = 8u_1 + 28 \cdot (-2) \Leftrightarrow u_1 = 16$$

Câu 14: Một cấp số cộng có số hạng đầu là 1, công sai là 4, tổng của n số hạng đầu là 561. Khi đó số hạng thứ n của cấp số cộng đó là u_n có giá trị là bao nhiêu?

A. $u_n = 57$.

B. $u_n = 61$.

C. $u_n = 65$.

D. $u_n = 69$.

Lời giải.

Chọn C

$$\begin{cases} u_1 = 1, d = 4 \\ 561 = S_n = nu_1 + \frac{n(n-1)}{2}d \end{cases} \longrightarrow 561 = n + \frac{n^2 - n}{2} \cdot 4 \Leftrightarrow 2n^2 - n - 561 = 0 \Leftrightarrow n = 17.$$

$$u_n = u_{17} = u_1 + 16d = 1 + 16 \cdot 4 = 65 \longrightarrow C$$

Câu 15: Một cấp số cộng có 12 số hạng. Biết rằng tổng của 12 số hạng đó bằng 144 và số hạng thứ mười hai bằng 23. Khi đó công sai d của cấp số cộng đã cho là bao nhiêu?

A. $d = 2$.

B. $d = 3$.

C. $d = 4$.

D. $d = 5$.

Lời giải.

Chọn A

$$\begin{cases} u_{12} = 23 \\ S_{12} = 144 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} u_1 + 11d = 23 \\ \frac{12}{2}(u_1 + u_{12}) = 144 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ d = \frac{23 - u_1}{11} = 2 \end{cases}$$

Câu 16: Tổng n số hạng đầu tiên của một cấp số cộng là $S_n = \frac{3n^2 - 19n}{4}$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Tìm số hạng đầu tiên u_1 và công sai d của cấp số cộng đã cho.

A. $u_1 = 2; d = -\frac{1}{2}$.

B. $u_1 = -4; d = \frac{3}{2}$.

C. $u_1 = -\frac{3}{2}; d = -2$.

D. $u_1 = \frac{5}{2}; d = \frac{1}{2}$.

Lời giải.

Chọn B

$$\text{Ta có } \frac{3n^2 - 19n}{4} = \frac{3}{4}n^2 - \frac{19}{4}n = S_n = nu_1 + \frac{n^2 - n}{2}d = \frac{d}{2}n^2 + \left(u_1 - \frac{d}{2}\right)n$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{d}{2} = \frac{3}{4} \\ u_1 - \frac{d}{2} = -\frac{19}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -4 \\ d = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Câu 17: Tổng n số hạng đầu tiên của một cấp số cộng là $S_n = n^2 + 4n$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Tìm số hạng tổng quát u_n của cấp số cộng đã cho.

- A. $u_n = 2n + 3$. B. $u_n = 3n + 2$. C. $u_n = 5 \cdot 3^{n-1}$. D. $u_n = 5 \cdot \left(\frac{8}{5}\right)^{n-1}$.

Lời giải.

Chọn A

$$\text{Ta có } n^2 + 4n = S_n = \frac{d}{2}n^2 + \left(u_1 - \frac{d}{2}\right)n \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{d}{2} = 1 \\ u_1 - \frac{d}{2} = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 5 \\ d = 2 \end{cases} \longrightarrow u_n = 2n + 3$$

Câu 18: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_2 = 2001$ và $u_5 = 1995$. Khi đó u_{1001} bằng:

- A. $u_{1001} = 4005$. B. $u_{1001} = 4003$. C. $u_{1001} = 3$. D. $u_{1001} = 1$.

Lời giải.

Chọn C

$$\begin{cases} 2001 = u_2 = u_1 + d \\ 1995 = u_5 = u_1 + 4d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 2003 \\ d = -2 \end{cases} \longrightarrow u_{1001} = u_1 + 1000d = 3$$

Câu 19: Cho cấp số cộng (u_n) , biết: $u_n = -1, u_{n+1} = 8$. Tính công sai d của cấp số cộng đó.

- A. $d = -9$. B. $d = 7$. C. $d = -7$. D. $d = 9$.

Lời giải.

Chọn D

$$d = u_{n+1} - u_n = 8 - (-1) = 9$$

Câu 20: Cho cấp số cộng (u_n) . Hãy chọn hệ thức đúng trong các hệ thức sau:

- A. $\frac{u_{10} + u_{20}}{2} = u_5 + u_{10}$. B. $u_{90} + u_{210} = 2u_{150}$. C. $u_{10} \cdot u_{30} = u_{20}$. D. $\frac{u_{10} \cdot u_{30}}{2} = u_{20}$.

Lời giải.

Chọn B

$$\text{Xét đáp án A: } \begin{cases} \frac{u_{10} + u_{30}}{2} = \frac{u_1 + 9d + u_1 + 29d}{2} = u_1 + 19d \longrightarrow \text{loại} \\ u_5 + u_{10} = u_1 + 4d + u_1 + 9d = 2u_1 + 13d \end{cases}$$

$$\text{Xét đáp án B: } \begin{cases} u_{90} + u_{210} = 2u_1 + 298d = 2(u_1 + 149d) \\ 2u_{150} = 2(u_1 + 149d) \end{cases}$$

Nhận xét: Có thể lấy một cấp số cộng cụ thể để kiểm tra, ví dụ $u_n = n$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

Câu 21: Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $u_2 + u_{23} = 60$. Tính tổng S_{24} của 24 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đã cho.

A. $S_{24} = 60$.

B. $S_{24} = 120$.

C. $S_{24} = 720$.

D. $S_{24} = 1440$.

Lời giải.

Chọn C

$$u_2 + u_{23} = 60 \Leftrightarrow (u_1 + d) + (u_1 + 22d) = 60 \Leftrightarrow 2u_1 + 23d = 60.$$

$$\text{Khi đó } S_{24} = \frac{24}{2}(u_1 + u_{24}) = 12(u_1 + (u_1 + 23d)) = 12(2u_1 + 23d) = 12.60 = 720.$$

Câu 22: Một cấp số cộng có 6 số hạng. Biết rằng tổng của số hạng đầu và số hạng cuối bằng 17; tổng của số hạng thứ hai và số hạng thứ tư bằng 14. Tìm công sai d của cấp số cộng đã cho.

A. $d = 2$.

B. $d = -3$.

C. $d = 4$.

D. $d = 5$.

Lời giải.

Chọn B

$$\begin{cases} u_1 + u_6 = 17 \\ u_2 + u_4 = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 5d = 17 \\ 2u_1 + 6d = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 16 \\ d = -3 \end{cases}$$

Câu 23: Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_7 - u_3 = 8 \\ u_2 u_7 = 75 \end{cases}$. Tìm công sai d của cấp số cộng đã cho.

A. $d = \frac{1}{2}$.

B. $d = \frac{1}{3}$.

C. $d = 2$.

D. $d = 3$.

Lời giải.

Chọn C

$$\begin{cases} u_7 - u_3 = 8 \\ u_2 u_7 = 75 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u_1 + 6d) - (u_1 + 2d) = 8 \\ (u_1 + d)(u_1 + 6d) = 75 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 2 \\ (u_1 + 2)(u_1 + 12) = 75 \end{cases}$$

Câu 24: Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_1 + u_7 = 26 \\ u_2^2 + u_6^2 = 466 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\begin{cases} u_1 = 13 \\ d = -3 \end{cases}$.

B. $\begin{cases} u_1 = 10 \\ d = -3 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} u_1 = 1 \\ d = 4 \end{cases}$.

D. $\begin{cases} u_1 = 13 \\ d = -4 \end{cases}$.

Lời giải.

Chọn C

$$\text{Ta có } \begin{cases} u_1 + u_7 = 26 \\ u_2^2 + u_6^2 = 466 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 6d = 26 \\ (u_1 + d)^2 + (u_1 + 5d)^2 = 466 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 13 - 3d & (1) \\ (u_1 + d)^2 + (u_1 + 5d)^2 = 466 & (2) \end{cases}$$

$$\text{Thay (1) và (2) ta được: } (13 - 2d)^2 + (13 + 2d)^2 = 466 \Leftrightarrow 8d^2 + 338 = 466$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} d = 4 \Rightarrow u_1 = 1 \\ d = -4 \Rightarrow u_1 = 25 \end{cases}$$

Câu 25: Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 15 \\ u_1 + u_6 = 27 \end{cases}$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

- A. $\begin{cases} u_1 = 21 \\ d = 3 \end{cases}$. B. $\begin{cases} u_1 = 21 \\ d = -3 \end{cases}$. C. $\begin{cases} u_1 = 18 \\ d = 3 \end{cases}$. D. $\begin{cases} u_1 = 21 \\ d = 4 \end{cases}$.

Lời giải.

Chọn B

$$\text{Ta có } \begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 15 \\ u_1 + u_6 = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 - (u_1 + 2d) + (u_1 + 4d) = 15 \\ u_1 + (u_1 + 5d) = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 2d = 15 \\ 2u_1 + 5d = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 21 \\ d = -3 \end{cases}$$

Câu 26: Cho cấp số cộng (u_n) thỏa $\begin{cases} u_2 + u_4 + u_6 = 36 \\ u_2 u_3 = 54 \end{cases}$. Tìm công sai d của cấp số cộng (u_n) biết $d < 10$.

- A. $d = 3$. B. $d = 4$. C. $d = 5$. D. $d = 6$.

Lời giải.

Chọn A

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \begin{cases} u_2 + u_4 + u_6 = 36 \\ u_2 u_3 = 54 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (u_1 + d) + (u_1 + 3d) + (u_1 + 5d) = 36 \\ (u_1 + d)(u_1 + 2d) = 54 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 3d = 12 \\ (u_1 + d)(u_1 + 2d) = 54 \end{cases} \quad (1) \quad (2) \quad \text{Từ (1) suy ra } u_1 = 12 - 3d. \text{ Thay vào (2), ta được} \\ (12 - 2d)(12 - d) = 54 &\Leftrightarrow d^2 - 18d + 45 = 0 \Leftrightarrow d = 3 \text{ hoặc } d = 15. \end{aligned}$$

Câu 27: Cho cấp số cộng (u_n) thỏa $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 27 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 275 \end{cases}$. Tính u_2 .

- A. $u_2 = 3$. B. $u_2 = 6$. C. $u_2 = 9$. D. $u_2 = 12$.

Lời giải.

Chọn C

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 27 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 275 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + (u_1 + d) + (u_1 + 2d) = 27 \\ u_1^2 + (u_1 + d)^2 + (u_1 + 2d)^2 = 275 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + d = 9 \\ u_1^2 + (u_1 + d)^2 + (u_1 + 2d)^2 = 275 \end{cases} \quad (1) \quad (2) \end{aligned}$$

Từ (1) suy ra $d = 9 - u_1$. Thay vào (2), ta được

$$u_1^2 + (u_1 + 9 - u_1)^2 + [u_1 + 2(9 - u_1)]^2 = 275 \Leftrightarrow u_1^2 - 18u_1 + 65 = 0 \Leftrightarrow u_1 = 13 \text{ hoặc } u_1 = 5.$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} u_1 = 13 \\ d = -4 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} u_1 = 5 \\ d = 4 \end{cases} \longrightarrow u_2 = u_1 + d = 9$$

Câu 28: Tính tổng $T = 15 + 20 + 25 + \dots + 7515$.

A. $T = 5651265$.

B. $T = 5651256$.

C. $T = 5651625$.

D. $T = 5651526$.

Lời giải.

Chọn A

Ta thấy các số hạng của tổng T tạo thành một cấp số cộng với số hạng đầu $u_1 = 15$ và công sai $d = 5$.

Giả sử tổng trên có n số hạng thì $u_n = 7515$

$$\Leftrightarrow u_1 + (n-1)d = 7515 \Leftrightarrow 15 + (n-1)5 = 7515 \Leftrightarrow n = 1501.$$

$$\text{Vậy } T = S_{1501} = \frac{(2u_1 + 1500d) \cdot 1501}{2} = \frac{(2 \cdot 15 + 1500 \cdot 5) \cdot 1501}{2} = 5651265$$

Câu 29: Tính tổng $T = 1000^2 - 999^2 + 998^2 - 997^2 + \dots + 2^2 - 1^2$.

A. $T = 500500$.

B. $T = 500005$.

C. $T = 505000$.

D. $T = 500050$.

Lời giải.

Chọn A

$$\text{Ta có } T = 1 \cdot (1000 + 999) + 1 \cdot (998 + 997) + \dots + 1 \cdot (2 + 1) = 1999 + 1995 + \dots + 3.$$

Ta thấy các số hạng của tổng T tạo thành một cấp số cộng với số hạng đầu $u_1 = 1999$ và công sai $d = -4$.

Giả sử tổng trên có n số hạng thì

$$u_n = 3 \Leftrightarrow u_1 + (n-1)d = 3 \Leftrightarrow 1999 + (n-1)(-4) = 3 \Leftrightarrow n = 500.$$

$$\text{Vậy } T = S_{500} = \frac{(u_1 + u_{500}) \cdot 500}{2} = \frac{(1999 + 3) \cdot 500}{2} = 500500$$

Câu 30: Cho cấp số cộng $u_1; u_2; u_3; \dots; u_n$ có công sai d , các số hạng của cấp số cộng đã cho đều khác 0. Với giá trị nào của d thì dãy số $\frac{1}{u_1}; \frac{1}{u_2}; \frac{1}{u_3}; \dots; \frac{1}{u_n}$ là một cấp số cộng?

A. $d = -1$.

B. $d = 0$.

C. $d = 1$.

D. $d = 2$.

Lời giải.

Chọn B

$$\text{Ta có } \begin{cases} u_2 - u_1 = d \\ u_3 - u_2 = d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1} = -\frac{d}{u_1 u_2} \\ \frac{1}{u_3} - \frac{1}{u_2} = -\frac{d}{u_2 u_3} \end{cases}.$$

$$\text{Theo yêu cầu bài toán thì ta phải có } \frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1} = \frac{1}{u_3} - \frac{1}{u_2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} d = 0 \\ \frac{1}{u_1} = \frac{1}{u_3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 0 \\ u_1 = u_3 = u_1 + 2d \end{cases} \Leftrightarrow d = 0$$

Câu 31: Ba góc của một tam giác vuông tạo thành cấp số cộng. Hai góc nhọn của tam giác có số đo (độ) là:

- A. 20° và 70° . B. 45° và 45° . C. 20° và 45° . D. 30° và 60° .

Lời giải.

Chọn D

Ba góc A, B, C của một tam giác vuông theo thứ tự đó ($A < B < C$) lập thành cấp số cộng nên $C = 90$, $C + A = 2B$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} A + B + C = 180 \\ A + C = 2B \\ C = 90 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3B = 180 \\ A + C = 2B \\ C = 90 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 60 \\ A = 30 \\ C = 90 \end{cases}$$

Câu 32: Ba góc A, B, C ($A < B < C$) của tam giác tạo thành cấp số cộng, biết góc lớn nhất gấp đôi góc bé nhất. Hiệu số đo độ của góc lớn nhất với góc nhỏ nhất bằng:

- A. 40° . B. 45° . C. 60° . D. 80° .

Lời giải.

Chọn A

Ba góc A, B, C của một tam giác theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng thỏa yêu cầu, thì $C = 2A$, $C + A = 2B$. Ta có

$$\begin{cases} A + B + C = 180^\circ \\ A + C = 2B \\ C = 2A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3B = 180^\circ \\ A + C = 2B \\ C = 2A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 60^\circ \\ A + C = 120^\circ \\ C = 2A \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} A = 40^\circ \\ B = 60^\circ \\ C = 80^\circ \end{cases} \longrightarrow C - A = 40^\circ.$$

Câu 33: Một tam giác vuông có chu vi bằng 3 và độ dài các cạnh lập thành một cấp số cộng. Độ dài các cạnh của tam giác đó là:

- A. $\frac{1}{2}$; 1; $\frac{3}{2}$. B. $\frac{1}{3}$; 1; $\frac{5}{3}$. C. $\frac{3}{4}$; 1; $\frac{5}{4}$. D. $\frac{1}{4}$; 1; $\frac{7}{4}$.

Lời giải.

Chọn C

Ba cạnh a, b, c ($a < b < c$) của một tam giác theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng thỏa

$$\text{yêu cầu thì } \begin{cases} a^2 + b^2 = c^2 \\ a + b + c = 3 \\ a + c = 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = c^2 \\ 3b = 3 \\ a + c = 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = c^2 \\ b = 1 \\ a = 2b - c = 2 - c \end{cases}.$$

$$\text{Ta có } a^2 + b^2 = c^2 \xrightarrow[a=2-c]{b=1} (2-c)^2 + 1 = c^2 \Leftrightarrow -4c + 5 = 0 \Leftrightarrow c = \frac{5}{4} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{4} \\ b = 1 \\ c = \frac{5}{4} \end{cases}.$$

Câu 34: Một rạp hát có 30 dãy ghế, dãy đầu tiên có 25 ghế. Mỗi dãy sau có hơn dãy trước 3 ghế. Hỏi rạp hát có tất cả bao nhiêu ghế?

A. 1635.

B. 1792.

C. 2055.

D. 3125.

Lời giải.

Chọn C

Số ghế của mỗi dãy (bắt đầu từ dãy đầu tiên) theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng có 30 số hạng có công sai $d = 3$ và $u_1 = 25$.

$$\text{Tổng số ghế là } S_{30} = u_1 + u_2 + \dots + u_{30} = 30u_1 + \frac{30 \cdot 29}{2}d = 2055$$

Câu 35: Người ta trồng 3003 cây theo một hình tam giác như sau: hàng thứ nhất trồng 1 cây, hàng thứ hai trồng 2 cây, hàng thứ ba trồng 3 cây,... Hỏi có tất cả bao nhiêu hàng cây?

A. 73.

B. 75.

C. 77.

D. 79.

Lời giải.

Chọn C

Số cây mỗi hàng (bắt đầu từ hàng thứ nhất) lập thành một cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 1, d = 1$. Giả sử có n hàng cây thì $u_1 + u_2 + \dots + u_n = 3003 = S_n$.

$$\text{Ta có } 3003 = S_n = nu_1 + \frac{n(n-1)}{2}d \Leftrightarrow n^2 + n - 6006 = 0 \Leftrightarrow n = 77$$

Câu 36: Một chiếc đồng hồ đánh chuông, kể từ thời điểm 0 (giờ) thì sau mỗi giờ thì số tiếng chuông được đánh đúng bằng số giờ mà đồng hồ chỉ tại thời điểm đánh chuông. Hỏi một ngày đồng hồ đó đánh bao nhiêu tiếng chuông?

A. 78.

B. 156.

C. 300.

D. 48.

Lời giải.

Chọn C

Kể từ lúc 1 (giờ) đến 24 (giờ) số tiếng chuông được đánh lập thành cấp số cộng có 24 số hạng với $u_1 = 1$, công sai $d = 1$. Vậy số tiếng chuông được đánh trong 1 ngày là:

$$S = S_{24} = \frac{24}{2}(u_1 + u_{24}) = 12(1 + 24) = 300$$

Câu 37: Trên một bàn cờ có nhiều ô vuông, người ta đặt 7 hạt dẻ vào ô đầu tiên, sau đó đặt tiếp vào ô thứ hai số hạt nhiều hơn ô thứ nhất là 5, tiếp tục đặt vào ô thứ ba số hạt nhiều hơn ô thứ hai là 5,... và cứ thế tiếp tục đến ô thứ n . Biết rằng đặt hết số ô trên bàn cờ người ta phải sử dụng 25450 hạt. Hỏi bàn cờ đó có bao nhiêu ô vuông?

A. 98.

B. 100.

C. 102.

D. 104.

Lời giải.

Chọn B

Số hạt dẻ trên mỗi ô (bắt đầu từ ô thứ nhất) theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 7, d = 5$. Gọi n là số ô trên bàn cờ thì $u_1 + u_2 + \dots + u_n = 25450 = S_n$. Ta có

$$25450 = S_n = nu_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = 7n + \frac{n^2 - n}{2} \cdot 5$$

$$\Leftrightarrow 5n^2 + 9n - 50900 = 0 \Leftrightarrow n = 100$$

Câu 38: Một gia đình cần khoan một cái giếng để lấy nước. Họ thuê một đội khoan giếng nước đến để khoan giếng nước. Biết giá của mét khoan đầu tiên là 80.000 đồng, kể từ mét khoan thứ 2 giá của mỗi mét khoan tăng thêm 5000 đồng so với giá của mét khoan trước đó. Biết cần phải khoan sâu xuống 50m mới có nước. Vậy hỏi phải trả bao nhiêu tiền để khoan cái giếng đó?

A. 5.2500.000 đồng. B. 10.125.000 đồng. C. 4.000.000 đồng. D. 4.245.000 đồng.

Lời giải.

Chọn B

Giá tiền khoan mỗi mét (bắt đầu từ mét đầu tiên) lập thành cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 80000, d = 5000$. Do cần khoan 50 mét nên tổng số tiền cần trả là

$$u_1 + u_2 + \dots + u_{50} = S_{50} = 50u_1 + \frac{50 \cdot 49}{2}d = 50 \cdot 80000 + 1225 \cdot 5000 = 10125000$$

BÀI 4. CẤP SỐ NHÂN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I – ĐỊNH NGHĨA

Cấp số nhân là một dãy số (hữu hạn hoặc vô hạn), trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều là tích của số hạng đứng ngay trước nó với một số không đổi q .

Số q được gọi là công bội của cấp số nhân.

Nếu (u_n) là cấp số nhân với công bội q , ta có công thức truy hồi:

$$u_{n+1} = u_n q \text{ với } n \in \mathbb{N}^*.$$

Đặc biệt:

- Khi $q = 0$, cấp số nhân có dạng $u_1, 0, 0, \dots, 0, \dots$
- Khi $q = 1$, cấp số nhân có dạng $u_1, u_1, u_1, \dots, u_1, \dots$
- Khi $u_1 = 0$ thì với mọi q , cấp số nhân có dạng $0, 0, 0, \dots, 0, \dots$

II - SỐ HẠNG TỔNG QUÁT

Định lý 1

Nếu cấp số nhân có số hạng đầu u_1 và công bội q thì số hạng tổng quát u_n được xác định bởi công thức

$$u_n = u_1 \cdot q^{n-1} \text{ với } n \geq 2.$$

III – TÍNH CHẤT CÁC SỐ HẠNG CỦA CẤP SỐ NHÂN

Định lý 2

Trong một cấp số nhân, bình phương của mỗi số hạng (trừ số hạng đầu và cuối) đều là tích của hai số hạng đứng kề với nó, nghĩa là

$$u_k^2 = u_{k-1} \cdot u_{k+1} \text{ với } k \geq 2.$$

IV – TỔNG n SỐ HẠNG ĐẦU TIÊN CỦA MỘT CẤP SỐ NHÂN

Định lý 3

Cho cấp số nhân (u_n) với công bội $q \neq 1$. Đặt $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$. Khi đó

$$S_n = \frac{u_1(1 - q^n)}{1 - q}.$$

Chú ý: Nếu $q = 1$ thì cấp số nhân là $u_1, u_1, u_1, \dots, u_1, \dots$ khi đó $S_n = nu_1$.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Xác định cấp số nhân, số hạng, công bội của cấp số nhân

1. Phương pháp

- Xác định một cấp số nhân là xác định số hạng đầu u_1 và công bội q
- Từ những giả thiết ta thường lập hệ phương trình theo ẩn số u_1 và q rồi giải hệ đó.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Trong các dãy số sau, dãy số nào là một cấp số nhân?

A. 128; -64; 32; -16; 8; ...

B. $\sqrt{2}$; 2; 4; $4\sqrt{2}$;

C. 5; 6; 7; 8; ...

D. 15; 5; 1; $\frac{1}{5}$; ...

Lời giải.

Chọn A

Dãy (u_n) là cấp số nhân $\Leftrightarrow u_n = qu_{n-1} (n \in \mathbb{N}^*) \Leftrightarrow \frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_2} = \frac{u_4}{u_3} = \dots = q (u_n \neq 0)$, q gọi là công bội.

Xét đáp án A: 128; -64; 32; -16; 8; ... $\longrightarrow \frac{u_2}{u_1} = -\frac{1}{2} = \frac{u_3}{u_2} = \frac{u_4}{u_3}$

Xét đáp án B: $\sqrt{2}$; 2; 4; $4\sqrt{2}$; $\longrightarrow \frac{u_2}{u_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 2 = \frac{u_3}{u_2} \longrightarrow$ loại B.

Tương tự, ta cũng loại các đáp án C, D.

Ví dụ 2: Với giá trị x nào dưới đây thì các số -4; x ; -9 theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân?

A. $x = 36$.

B. $x = -\frac{13}{2}$.

C. $x = 6$.

D. $x = -36$.

Lời giải.

Chọn C

Nhận xét: ba số $a; b; c$ theo thứ tự đó lập thành cấp số nhân $\Leftrightarrow ac = b^2$.

Ví dụ 3: Tìm $b > 0$ để các số $\frac{1}{\sqrt{2}}$; \sqrt{b} ; $\sqrt{2}$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân.

A. $b = -1$.

B. $b = 1$.

C. $b = 2$.

D. $b = -2$.

Lời giải.

Chọn B

Cấp số nhân $\frac{1}{\sqrt{2}}$; \sqrt{b} ; $\sqrt{2} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} = (\sqrt{b})^2 \Leftrightarrow b = 1$

Ví dụ 4: Cho cấp số nhân $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \dots; \frac{1}{4096}$. Hỏi số $\frac{1}{4096}$ là số hạng thứ mấy trong cấp số nhân đã cho?

A. 11.

B. 12.

C. 10.

D. 13.

Lời giải.

Chọn B

$$\text{Cấp số nhân: } \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \dots; \frac{1}{4096} \longrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow u_n = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2^n}.$$

$$u_n = \frac{1}{4096} \Leftrightarrow \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{12}} \Leftrightarrow n = 12$$

Ví dụ 5: Cho cấp số nhân (u_n) thỏa $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 14 \\ u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 = 64 \end{cases}$. Tính u_2 .

A. $u_2 = 4$.

B. $u_2 = 6$.

C. $u_2 = 8$.

D. $u_2 = 10$.

Lời giải.

Chọn A

$$\text{Từ } u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 = 64 \Leftrightarrow u_1 \cdot u_1 q \cdot u_1 q^2 = 64 \Leftrightarrow (u_1 q)^3 = 64 \Leftrightarrow u_1 q = 4 \text{ hay } u_2 = 4.$$

$$\text{Thay vào hệ ban đầu ta được } \begin{cases} u_1 + 4 + u_3 = 14 \\ u_1 \cdot 4 \cdot u_3 = 64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_3 = 10 \\ u_1 \cdot u_3 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 8 \\ u_3 = 2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} u_1 = 2 \\ u_3 = 8 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} u_1 = 8 \\ q = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} u_1 = 2 \\ q = 2 \end{cases} \longrightarrow u_2 = u_1 q = 4.$$

Ví dụ 6: Cho cấp số nhân (u_n) thỏa $\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 65 \\ u_1 + u_7 = 325 \end{cases}$. Tính u_3 .

A. $u_3 = 10$.

B. $u_3 = 15$.

C. $u_3 = 20$.

D. $u_3 = 25$.

Lời giải.

Chọn C

$$\text{Ta có } \begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 65 \\ u_1 + u_7 = 325 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 - u_1 q^2 + u_1 q^4 = 65 \\ u_1 + u_1 q^6 = 325 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 (1 - q^2 + q^4) = 65 & (1) \\ u_1 (1 + q^6) = 325 & (2) \end{cases}.$$

$$\text{Lấy (2) chia (1), ta được } \frac{1 + q^6}{1 - q^2 + q^4} = \frac{325}{65} \Leftrightarrow 1 + q^2 = 5 \Leftrightarrow q = \pm 2.$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} u_1 = 5 \\ q = 2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} u_1 = 5 \\ q = -2 \end{cases} \longrightarrow u_3 = u_1 q^2 = 5 \cdot 4 = 20.$$

Dạng 2. Tính tổng của cấp số nhân

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Cho cấp số nhân (u_n) có $u_2 = -2$ và $u_5 = 54$. Tính tổng 1000 số hạng đầu tiên của cấp số nhân đã cho.

A. $S_{1000} = \frac{1-3^{1000}}{4}$. B. $S_{1000} = \frac{3^{1000}-1}{2}$. C. $S_{1000} = \frac{3^{1000}-1}{6}$. D. $S_{1000} = \frac{1-3^{1000}}{6}$.

Lời giải.

Chọn D

$$\text{Ta có } \begin{cases} -2 = u_2 = u_1 q \\ 54 = u_5 = u_1 q^4 = u_1 q \cdot q^3 = -2q^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{2}{3} \\ q = -3 \end{cases}. \text{ Khi đó}$$

$$S_{1000} = u_1 \cdot \frac{1-q^{1000}}{1-q} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1-(-3)^{1000}}{1-(-3)} = \frac{1-3^{1000}}{6}$$

Ví dụ 2: Cho cấp số nhân có các số hạng lần lượt là $\frac{1}{4}; \frac{1}{2}; 1; \dots; 2048$. Tính tổng S của tất cả các số hạng của cấp số nhân đã cho.

A. $S = 2047,75$. B. $S = 2049,75$. C. $S = 4095,75$. D. $S = 4096,75$.

Lời giải.

Chọn A

Cấp số nhân đã cho có

$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{4} \longrightarrow 2048 = 2^{11} = u_1 q^{n-1} = \frac{1}{4} \cdot 2^{n-1} = 2^{n-2} \Leftrightarrow n = 13. \\ q = 2 \end{cases}$$

Vậy cấp số nhân đã cho có tất cả 13 số hạng. Vậy

$$S_{13} = u_1 \cdot \frac{1-q^{13}}{1-q} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1-2^{13}}{1-2} = 2047,75$$

Ví dụ 3: Tính tổng $S = -2 + 4 - 8 + 16 - 32 + 64 - \dots + (-2)^{n-1} + (-2)^n$ với $n \geq 1, n \in \mathbb{N}$.

A. $S = 2n$. B. $S = 2^n$.
C. $S = \frac{-2(1-2^n)}{1-2}$. D. $S = -2 \cdot \frac{1-(-2)^n}{3}$.

Lời giải.

Chọn D

Các số hạng $-2; 4; -8; 16; -32; 64; \dots; (-2)^{n-1}; (-2)^n$ trong tổng S gồm có n số hạng theo thứ tự đó lập thành cấp số nhân có $u_1 = -2, q = -2$. Vậy

$$S = S_n = u_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = -2 \cdot \frac{1-(-2)^n}{1-(-2)} = -2 \cdot \frac{1-(-2)^n}{3}$$

Ví dụ 4: Gọi $S = 9 + 99 + 999 + \dots + 999\dots 9$ (n số 9) thì S nhận giá trị nào sau đây?

A. $S = \frac{10^n - 1}{9}$.

B. $S = 10 \left(\frac{10^n - 1}{9} \right)$.

C. $S = 10 \left(\frac{10^n - 1}{9} \right) - n$.

D. $S = 10 \left(\frac{10^n - 1}{9} \right) + n$.

Lời giải.

Chọn C

$$\begin{aligned} \text{Ta có } S &= 9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{99\dots 9}_{n \text{ số } 9} = (10-1) + (10^2-1) + \dots + (10^n-1) \\ &= 10 + 10^2 + \dots + 10^n - n = 10 \cdot \frac{1-10^n}{1-10} - n. \end{aligned}$$

Ví dụ 5 : Cho cấp số nhân (u_n) có tổng của hai số hạng đầu tiên bằng 4, tổng của ba số hạng đầu tiên bằng 13. Tính tổng của năm số hạng đầu tiên của cấp số nhân đã cho, biết công bội của cấp số nhân là một số dương.

A. $S_5 = \frac{181}{16}$.

B. $S_5 = 141$.

C. $S_5 = 121$.

D. $S_5 = \frac{35}{16}$.

Lời giải.

Chọn C

$$\begin{cases} 4 = S_2 = u_1 + u_2 = u_1(1+q) \\ 13 = S_3 = u_1(1+q+q^2) \end{cases} \Leftrightarrow 4(1+q+q^2) = 13(1+q) \Leftrightarrow q = 3 \ (q > 0) \Rightarrow u_1 = 1.$$

$$\text{Khi đó } S_5 = u_1 \cdot \frac{1-q^5}{1-q} = 1 \cdot \frac{1-3^5}{1-3} = 121$$

Dạng 3. Các bài toán thực tế

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Người ta thiết kế một cái tháp gồm 11 tầng. Diện tích bề mặt trên của mỗi tầng bằng nửa diện tích của mặt trên của tầng ngay bên dưới và diện tích mặt trên của tầng 1 bằng nửa diện tích của đế tháp (có diện tích là $12\,288\,m^2$). Tính diện tích mặt trên cùng.

A. $6m^2$.

B. $8m^2$.

C. $10m^2$.

D. $12m^2$.

Lời giải.

Chọn A

Diện tích bề mặt của mỗi tầng (kể từ 1) lập thành một cấp số nhân có công bội $q = \frac{1}{2}$ và

$$u_1 = \frac{12288}{2} = 6144. \text{ Khi đó diện tích mặt trên cùng là}$$

$$u_{11} = u_1 q^{10} = \frac{6144}{2^{10}} = 6$$

Ví dụ 2: Một du khách vào chuồng đua ngựa đặt cược, lần đầu đặt 20000 đồng, mỗi lần sau tiền đặt gấp đôi lần tiền đặt cược trước. Người đó thua 9 lần liên tiếp và thắng ở lần thứ 10. Hỏi du khách trên thắng hay thua bao nhiêu?

- A. Hòa vốn. B. Thua 20000 đồng.
C. Thắng 20000 đồng. D. Thua 40000 đồng.

Lời giải.

Chọn C

Số tiền du khách đặt trong mỗi lần (kể từ lần đầu) là một cấp số nhân có $u_1 = 20\,000$ và công bội $q = 2$.

Du khách thua trong 9 lần đầu tiên nên tổng số tiền thua là:

$$S_9 = u_1 + u_2 + \dots + u_9 = \frac{u_1(1 - p^9)}{1 - p} = 10220000$$

Số tiền mà du khách thắng trong lần thứ 10 là $u_{10} = u_1 \cdot p^9 = 10240000$

Ta có $u_{10} - S_9 = 20\,000 > 0$ nên du khách thắng 20 000.

C. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Trong các dãy số sau, dãy số nào **không** phải là một cấp số nhân?

- A. 2; 4; 8; 16; ... B. 1; -1; 1; -1; ...
C. 1^2 ; 2^2 ; 3^2 ; 4^2 ; ... D. a ; a^3 ; a^5 ; a^7 ; ... ($a \neq 0$).

Lời giải.

Chọn C

$$\text{Xét đáp án C: } 1^2; 2^2; 3^2; 4^2; \dots \longrightarrow \frac{u_2}{u_1} = 4 \neq \frac{9}{4} = \frac{u_3}{u_2}$$

Các đáp án A, B, D đều là các cấp số nhân.

Nhận xét: Dãy (u_n) với $u_n \neq 0$ là cấp số nhân $\Leftrightarrow u_n = a \cdot q^n$, tức là các số hạng của nó đều được biểu diễn dưới dạng lũy thừa của cùng một cơ số q (công bội), các số hạng liên tiếp (kể từ số hạng thứ hai) thì số mũ của chúng cách đều nhau. Ví dụ

2; 4; 8; 16; ... \longrightarrow là cấp số nhân và $u_n = 2^n$.

1; -1; 1; -1; ... \longrightarrow là cấp số nhân và $u_n = (-1)^n$.

$a; a^3; a^5; a^7; \dots (a \neq 0) \longrightarrow$ là cấp số nhân và $u_n = a^{2n-1} = \frac{1}{a} \cdot (a^2)^n$.

Câu 2: Dãy số nào sau đây không phải là cấp số nhân?

A. 1; 2; 4; 8; ...

B. 3; 3²; 3³; 3⁴; ...

C. 4; 2; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; ...

D. $\frac{1}{\pi}$; $\frac{1}{\pi^2}$; $\frac{1}{\pi^4}$; $\frac{1}{\pi^6}$; ...

Lời giải.

Chọn D

Các đáp án A, B, C đều là các cấp số nhân công bội lần lượt là 2; 3; $\frac{1}{2}$.

Xét đáp án D: $\frac{1}{\pi}; \frac{1}{\pi^2}; \frac{1}{\pi^4}; \frac{1}{\pi^6}; \dots \longrightarrow \frac{u_2}{u_1} = \frac{1}{\pi} \neq \frac{1}{\pi^2} = \frac{u_3}{u_2}$

Câu 3: Dãy số 1; 2; 4; 8; 16; 32; ... là một cấp số nhân với:

A. Công bội là 3 và số hạng đầu tiên là 1.

B. Công bội là 2 và số hạng đầu tiên là 1.

C. Công bội là 4 và số hạng đầu tiên là 2.

D. Công bội là 2 và số hạng đầu tiên là 2.

Lời giải.

Chọn B

Cấp số nhân: 1; 2; 4; 8; 16; 32; ... $\longrightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ q = \frac{u_2}{u_1} = 2 \end{cases}$

Câu 4: Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = -2$ và $q = -5$. Viết bốn số hạng đầu tiên của cấp số nhân.

A. -2; 10; 50; -250.

B. -2; 10; -50; 250.

C. -2; -10; -50; -250.

D. -2; 10; 50; 250.

Lời giải.

Chọn B

$\begin{cases} u_1 = -2 \\ q = -5 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} u_1 = -2 \\ u_2 = u_1 q = 10 \\ u_3 = u_2 q = -50 \\ u_4 = u_3 q = 250 \end{cases}$

Câu 5: Một cấp số nhân có hai số hạng liên tiếp là 16 và 36. Số hạng tiếp theo là:

A. 720.

B. 81.

C. 64.

D. 56.

Lời giải.

Chọn B

Ta có cấp số nhân (u_n) có:

$$\begin{cases} u_k = 16 \\ u_{k+1} = 36 \end{cases} \Rightarrow q = \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{9}{4} \longrightarrow u_{k+2} = u_{k+1}q = 81$$

Câu 6: Tìm x để các số 2; 8; x ; 128 theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân.

A. $x = 14$.

B. $x = 32$.

C. $x = 64$.

D. $x = 68$.

Lời giải.

Chọn B

Cấp số nhân 2; 8; x ; 128 theo thứ tự đó sẽ là $u_1; u_2; u_3; u_4$, ta có

$$\begin{cases} \frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_2} \\ \frac{u_3}{u_2} = \frac{u_4}{u_3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{8}{2} = \frac{x}{8} \\ \frac{128}{x} = \frac{x}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 32 \\ x^2 = 1024 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 32 \\ x = 32 \text{ hoặc } x = -32 \end{cases}$$

Câu 7: Tìm tất cả giá trị của x để ba số $2x-1$; x ; $2x+1$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân.

A. $x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$.

B. $x = \pm \frac{1}{3}$.

C. $x = \pm \sqrt{3}$.

D. $x = \pm 3$.

Lời giải.

Chọn A

Cấp số nhân $2x-1$; x ; $2x+1 \longrightarrow (2x-1)(2x+1) = x^2 \Leftrightarrow 3x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Câu 8: Tìm x để ba số $1+x$; $9+x$; $33+x$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân.

A. $x = 1$.

B. $x = 3$.

C. $x = 7$.

D. $x = 3$; $x = 7$.

Lời giải.

Chọn B

Cấp số nhân $1+x$; $9+x$; $33+x \longrightarrow (1+x)(33+x) = (9+x)^2 \Leftrightarrow x = 3$.

Câu 9: Với giá trị x, y nào dưới đây thì các số hạng lần lượt là -2 ; x ; -18 ; y theo thứ tự đó lập thành cấp số nhân?

A. $\begin{cases} x = 6 \\ y = -54 \end{cases}$.

B. $\begin{cases} x = -10 \\ y = -26 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} x = -6 \\ y = -54 \end{cases}$.

D. $\begin{cases} x = -6 \\ y = 54 \end{cases}$.

Lời giải.

Chọn C

Cấp số nhân: -2 ; x ; -18 ; $y \longrightarrow \begin{cases} \frac{x}{-2} = \frac{-18}{x} \\ \frac{-18}{x} = \frac{y}{-18} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 6 \\ y = \frac{324}{x} = \pm 54 \end{cases}$. Vậy

$(x, y) = (6; 54)$ hoặc $(x, y) = (-6; -54)$

Câu 10: Cho cấp số nhân có các số hạng lần lượt là x ; 12; y ; 192. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $x = 1; y = 144$. B. $x = 2; y = 72$. C. $x = 3; y = 48$. D. $x = 4; y = 36$.

Lời giải.

Chọn C

$$\text{Cấp số nhân: } x; 12; y; 192 \longrightarrow \begin{cases} \frac{12}{x} = \frac{y}{12} \\ \frac{y}{12} = \frac{192}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{144}{y} \\ y^2 = 2304 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 3 \\ y = \pm 48 \end{cases}$$

Câu 11: Thêm hai số thực dương x và y vào giữa hai số 5 và 320 để được bốn số 5; x ; y ; 320 theo thứ tự đó lập thành cấp số nhân. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $\begin{cases} x = 25 \\ y = 125 \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = 20 \\ y = 80 \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = 15 \\ y = 45 \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = 30 \\ y = 90 \end{cases}$.

Lời giải.

Chọn B

$$\text{Cấp số nhân: } 5; x; y; 320 \longrightarrow \begin{cases} u_1 = 5 \\ q = \frac{x}{5} \\ y = u_3 = u_1 q^2 = \frac{x^2}{5} \\ 320 = u_4 = u_1 q^3 = \frac{x^3}{25} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 20 \\ y = 80 \end{cases}$$

Câu 12: Ba số hạng đầu của một cấp số nhân là $x - 6$; x và y . Tìm y , biết rằng công bội của cấp số nhân là 6.

- A. $y = 216$. B. $y = \frac{324}{5}$. C. $y = \frac{1296}{5}$. D. $y = 12$.

Lời giải.

Chọn C

Cấp số nhân $x - 6$; x và y có công bội $q = 6$ nên ta có

$$\begin{cases} u_1 = x - 6, q = 6 \\ x = u_2 = u_1 q = 6(x - 6) \\ y = u_3 = u_2 q^2 = 36x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{36}{5} \\ y = 36 \cdot \frac{36}{5} = \frac{1296}{5} \end{cases}$$

Câu 13: Hai số hạng đầu của của một cấp số nhân là $2x + 1$ và $4x^2 - 1$. Số hạng thứ ba của cấp số nhân là:

- A. $2x - 1$. B. $2x + 1$.
C. $8x^3 - 4x^2 - 2x + 1$. D. $8x^3 + 4x^2 - 2x - 1$.

Lời giải.

Chọn C

Công bội của cấp số nhân là: $q = \frac{4x^2 - 1}{2x + 1} = 2x - 1$. Vậy số hạng thứ ba của cấp số nhân là:

$$(4x^2 - 1)(2x - 1) = 8x^3 - 4x^2 - 2x + 1$$

Câu 14: Dãy số nào sau đây là cấp số nhân?

A. $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 1, n \geq 1 \end{cases}$

B. $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = -3u_n, n \geq 1 \end{cases}$

C. $\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3, n \geq 1 \end{cases}$

D. $\begin{cases} u_1 = \frac{\pi}{2} \\ u_n = \sin\left(\frac{\pi}{n-1}\right), n \geq 1 \end{cases}$

Lời giải.

Chọn B

(u_n) là cấp số nhân $\Leftrightarrow u_{n+1} = qu_n \longrightarrow$

Câu 15: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{3}{2} \cdot 5^n$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. (u_n) không phải là cấp số nhân.

B. (u_n) là cấp số nhân có công bội $q = 5$ và số hạng đầu $u_1 = \frac{3}{2}$.

C. (u_n) là cấp số nhân có công bội $q = 5$ và số hạng đầu $u_1 = \frac{15}{2}$.

D. (u_n) là cấp số nhân có công bội $q = \frac{5}{2}$ và số hạng đầu $u_1 = 3$.

Lời giải.

Chọn C

$u_n = \frac{3}{2} \cdot 5^n$ là cấp số nhân công bội $q = 5$ và $u_1 = \frac{15}{2}$

Câu 16: Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là một cấp số nhân?

A. $u_n = \frac{1}{3^{n-2}}$.

B. $u_n = \frac{1}{3^n} - 1$.

C. $u_n = n + \frac{1}{3}$.

D. $u_n = n^2 - \frac{1}{3}$.

Lời giải.

Chọn A

Dãy $u_n = \frac{1}{3^{n-2}} = 9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$ là cấp số nhân có $\begin{cases} u_1 = 3 \\ q = \frac{1}{3} \end{cases}$

Câu 17: Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là một cấp số nhân?

A. $u_n = 7 - 3n$.

B. $u_n = 7 - 3^n$.

C. $u_n = \frac{7}{3n}$.

D. $u_n = 7 \cdot 3^n$.

Lời giải.

Chọn D

Dãy $u_n = 7.3^n$ là cấp số nhân có $\begin{cases} u_1 = 21 \\ q = 3 \end{cases} \longrightarrow$

Câu 18: Cho dãy số (u_n) là một cấp số nhân với $u_n \neq 0, n \in \mathbb{N}^*$. Dãy số nào sau đây không phải là cấp số nhân?

A. $u_1; u_3; u_5; \dots$

B. $3u_1; 3u_2; 3u_3; \dots$

C. $\frac{1}{u_1}; \frac{1}{u_2}; \frac{1}{u_3}; \dots$

D. $u_1 + 2; u_2 + 2; u_3 + 2; \dots$

Lời giải.

Chọn D

Giả sử (u_n) là cấp số nhân công bội q , thì

Dãy $u_1; u_3; u_5; \dots$ là cấp số nhân công bội q^2 .

Dãy $3u_1; 3u_2; 3u_3; \dots$ là cấp số nhân công bội $2q$.

Dãy $\frac{1}{u_1}; \frac{1}{u_2}; \frac{1}{u_3}; \dots$ là cấp số nhân công bội $\frac{1}{q}$.

Dãy $u_1 + 2; u_2 + 2; u_3 + 2; \dots$ không phải là cấp số nhân.

Nhận xét: Có thể lấy một cấp số nhân cụ thể để kiểm tra, ví dụ $u_n = 2^n$.

Câu 19: Cho cấp số nhân có các số hạng lần lượt là 3; 9; 27; 81; Tìm số hạng tổng quát u_n của cấp số nhân đã cho.

A. $u_n = 3^{n-1}$.

B. $u_n = 3^n$.

C. $u_n = 3^{n+1}$.

D. $u_n = 3 + 3^n$.

Lời giải.

Chọn B

Cấp số nhân 3; 9; 27; 81; ... $\longrightarrow \begin{cases} u_1 = 3 \\ q = \frac{9}{3} = 3 \end{cases} \Rightarrow u_n = u_1 q^{n-1} = 3.3^{n-1} = 3^n$.

Câu 20: Một cấp số nhân có 6 số hạng, số hạng đầu bằng 2 và số hạng thứ sáu bằng 486. Tìm công bội q của cấp số nhân đã cho.

A. $q = 3$.

B. $q = -3$.

C. $q = 2$.

D. $q = -2$.

Lời giải.

Chọn A

Theo giả thiết ta có: $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_6 = 486 \end{cases} \longrightarrow 486 = u_6 = u_1 q^5 = 2q^5 \Leftrightarrow q^5 = 243 \Leftrightarrow q = 3$.

Câu 21: Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = -3$ và $q = \frac{2}{3}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $u_5 = -\frac{27}{16}$. B. $u_5 = -\frac{16}{27}$. C. $u_5 = \frac{16}{27}$. D. $u_5 = \frac{27}{16}$.

Lời giải.

Chọn B

$$\begin{cases} u_1 = -3 \\ q = \frac{2}{3} \end{cases} \longrightarrow u_5 = u_1 q^4 = -3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 = -3 \cdot \frac{16}{81} = -\frac{16}{27}.$$

Câu 22: Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 2$ và $u_2 = -8$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $S_6 = 130$. B. $u_5 = 256$. C. $S_5 = 256$. D. $q = -4$.

Lời giải.

Chọn D

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_2 = -8 = u_1 q = 2q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 2 \\ q = -4 \\ S_5 = u_1 \cdot \frac{1-q^5}{1-q} = 2 \cdot \frac{1-(-4)^5}{1+4} = 410 \\ S_6 = 2 \cdot \frac{1-(-4)^6}{1+4} = -1638 \\ u_5 = u_1 q^4 = 2 \cdot (-4)^4 = 512. \end{cases}$$

Câu 23: Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 3$ và $q = -2$. Số 192 là số hạng thứ mấy của cấp số nhân đã cho?

- A. Số hạng thứ 5. B. Số hạng thứ 6.
C. Số hạng thứ 7. D. Không là số hạng của cấp số đã cho.

Lời giải.

Chọn C

$$192 = u_n = u_1 q^{n-1} = 3 \cdot (-2)^{n-1} \Leftrightarrow (-1)^{n-1} \cdot 2^{n-1} = 64 = (-1)^6 \cdot 2^6 \Leftrightarrow n = 7.$$

Câu 24: Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = -1$ và $q = -\frac{1}{10}$. Số $\frac{1}{10^{103}}$ là số hạng thứ mấy của cấp số nhân đã cho?

- A. Số hạng thứ 103. B. Số hạng thứ 104.
C. Số hạng thứ 105. D. Không là số hạng của cấp số đã cho.

Lời giải.

Chọn B

$$\frac{1}{10^{103}} = u_n = u_1 q^{n-1} = -1 \cdot \left(-\frac{1}{10}\right)^{n-1} = \frac{(-1)^n}{10^{n-1}} \Leftrightarrow \begin{cases} n \text{ chẵn} \\ n-1 = 103 \end{cases} \Leftrightarrow n = 104.$$

Câu 25: Một cấp số nhân có công bội bằng 3 và số hạng đầu bằng 5. Biết số hạng chính giữa là 32805. Hỏi cấp số nhân đã cho có bao nhiêu số hạng?

- A. 18. B. 17. C. 16. D. 9.

Lời giải.

Chọn B

$32805 = u_n = u_1 q^{n-1} = 5 \cdot 3^{n-1} \Leftrightarrow 3^{n-1} = 6561 = 3^8 \Leftrightarrow n = 9$. Vậy u_9 là số hạng chính giữa của cấp số nhân, nên cấp số nhân đã cho có 17 số hạng.

Câu 26: Cho cấp số nhân (u_n) có $u_n = 81$ và $u_{n+1} = 9$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $q = \frac{1}{9}$. B. $q = 9$. C. $q = -9$. D. $q = -\frac{1}{9}$.

Lời giải.

Chọn A

$$\text{Công bội } q = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{9}{81} = \frac{1}{9}$$

Câu 27: Một dãy số được xác định bởi $u_1 = -4$ và $u_n = -\frac{1}{2}u_{n-1}$, $n \geq 2$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số đó là:

- A. $u_n = 2^{n-1}$. B. $u_n = (-2)^{n-1}$.
C. $u_n = -4(2^{-n+1})$. D. $u_n = -4\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

Lời giải.

Chọn D

$$\begin{cases} u_1 = -4 \\ u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} u_1 = -4 \\ q = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow u_n = u_1 q^{n-1} = -4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

Câu 28: Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = -3$ và $q = -2$. Tính tổng 10 số hạng đầu tiên của cấp số nhân đã cho.

- A. $S_{10} = -511$. B. $S_{10} = -1025$. C. $S_{10} = 1025$. D. $S_{10} = 1023$.

Lời giải.

Chọn D

$$\begin{cases} u_1 = -3 \\ q = -2 \end{cases} \longrightarrow S_{10} = u_1 \cdot \frac{1-q^{10}}{1-q} = -3 \cdot \frac{1-(-2)^{10}}{1-(-2)} = 1023.$$

Câu 29: Cho cấp số nhân có các số hạng lần lượt là 1; 4; 16; 64; ... Gọi S_n là tổng của n số hạng đầu tiên của cấp số nhân đó. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $S_n = 4^{n-1}$. B. $S_n = \frac{n(1+4^{n-1})}{2}$. C. $S_n = \frac{4^n - 1}{3}$. D. $S_n = \frac{4(4^n - 1)}{3}$.

Lời giải.

Chọn C

Cấp số nhân đã cho có $\begin{cases} u_1 = 1 \\ q = 4 \end{cases} \longrightarrow S_n = u_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = 1 \cdot \frac{1-4^n}{1-4} = \frac{4^n - 1}{3}$.

Câu 30: Một cấp số nhân có 6 số hạng với công bội bằng 2 và tổng số các số hạng bằng 189. Tìm số hạng cuối u_6 của cấp số nhân đã cho.

A. $u_6 = 32$. B. $u_6 = 104$. C. $u_6 = 48$. D. $u_6 = 96$.

Lời giải.

Chọn D

Theo giả thiết: $\begin{cases} q = 2 \\ S_6 = 189 = u_1 \frac{1-q^6}{1-q} = u_1 \cdot \frac{1-2^6}{1-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 2 \\ u_1 = 3 \end{cases} \Rightarrow u_6 = u_1 q^5 = 3 \cdot 2^5 = 96$.

Câu 31: Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = -6$ và $q = -2$. Tổng n số hạng đầu tiên của cấp số nhân đã cho bằng 2046. Tìm n .

A. $n = 9$. B. $n = 10$. C. $n = 11$. D. $n = 12$.

Lời giải.

Chọn B

Ta có $2046 = S_n = u_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = -6 \cdot \frac{1-(-2)^n}{1-(-2)} = 2((-2)^n - 1) \Rightarrow (-2)^n = 1024 \Leftrightarrow n = 10$.

Câu 32: Cho cấp số nhân (u_n) có tổng n số hạng đầu tiên là $S_n = 5^n - 1$. Tìm số hạng thứ 4 của cấp số nhân đã cho.

A. $u_4 = 100$. B. $u_4 = 124$. C. $u_4 = 500$. D. $u_4 = 624$.

Lời giải.

Chọn C

Ta có $5^{n-1} - 1 = S_n = u_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{u_1}{q-1}(q^n - 1) \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = q-1 \\ q = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 4 \\ q = 5 \end{cases}$. Khi đó

$u_4 = u_1 q^3 = 4 \cdot 5^3 = 500$

Câu 33: Cho cấp số nhân (u_n) có tổng n số hạng đầu tiên là $S_n = \frac{3^n - 1}{3^{n-1}}$. Tìm số hạng thứ 5 của cấp số nhân đã cho.

A. $u_5 = \frac{2}{3^4}$.

B. $u_5 = \frac{1}{3^5}$.

C. $u_5 = 3^5$.

D. $u_5 = \frac{5}{3^5}$.

Lời giải.

Chọn A

Ta có $\frac{3^n - 1}{3^{n-1}} = 3 \left(1 - \left(\frac{1}{3} \right)^n \right) = S_n = \frac{u_1}{1-q} (1-q^n) \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3(1-q) \\ q = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 2 \\ q = \frac{1}{3} \end{cases}$. Khi đó

$$u_5 = u_1 q^4 = \frac{2}{3^4}$$

Câu 34: Một cấp số nhân có số hạng thứ bảy bằng $\frac{1}{2}$, công bội bằng $\frac{1}{4}$. Hỏi số hạng đầu tiên của cấp số nhân bằng bao nhiêu?

A. 4096.

B. 2048.

C. 1024.

D. $\frac{1}{512}$.

Lời giải.

Chọn B

Ta có $\begin{cases} q = \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} = u_7 = u_1 q^6 = \frac{u_1}{4^6} \end{cases} \Rightarrow u_1 = \frac{4^6}{2} = 2048$

Câu 35: Cho cấp số nhân (u_n) có $u_2 = -6$ và $u_6 = -486$. Tìm công bội q của cấp số nhân đã cho, biết rằng $u_3 > 0$.

A. $q = -3$.

B. $q = -\frac{1}{3}$.

C. $q = \frac{1}{3}$.

D. $q = 3$.

Lời giải.

Chọn D

$$\begin{cases} -6 = u_2 = u_1 q \\ -486 = u_6 = u_1 q^5 = u_1 q \cdot q^4 = -6 \cdot q^4 \end{cases} \Rightarrow q^4 = 81 = 3^4 \Rightarrow q = 3.$$

Câu 36: Cho cấp số nhân $u_1; u_2; u_3; \dots$ với $u_1 = 1$. Tìm công bội q để $4u_2 + 5u_3$ đạt giá trị nhỏ nhất?

A. $q = -\frac{2}{5}$.

B. $q = 0$.

C. $q = \frac{2}{5}$.

D. $q = 1$.

Lời giải.

Chọn A

Ta có $4u_2 + 5u_3 = 4u_1 q + 5u_1 q^2 = 5q^2 + 4q = 5 \left(q + \frac{2}{5} \right)^2 - \frac{4}{5} \geq -\frac{4}{5}$. Vậy

$$\min(4u_2 + 5u_3) = -\frac{4}{5} \text{ khi } q = -\frac{2}{5}$$

Câu 37: Một cấp số nhân có số hạng thứ hai bằng 4 và số hạng thứ sáu bằng 64, thì số hạng tổng quát của cấp số nhân đó có thể tính theo công thức nào dưới đây?

- A. $u_n = 2^{n-1}$. B. $u_n = 2^n$ C. $u_n = 2^{n+1}$. D. $u_n = 2n$.

Lời giải.

Chọn B

$$\text{Ta có } \begin{cases} 4 = u_2 = u_1 q \\ 64 = u_6 = u_1 q^5 = u_1 q \cdot q^4 = 4q^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 2 \\ q = 2 \end{cases} \Rightarrow u_n = u_1 q^{n-1} = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n.$$

Câu 38: Cho cấp số nhân (u_n) có công bội q . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $u_k = u_1 \cdot q^{k-1}$. B. $u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2}$.
C. $u_k = \sqrt{u_{k+1} \cdot u_{k+2}}$. D. $u_k = u_1 + (k-1)q$.

Lời giải.

Chọn A

Câu 39: Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 \neq 0$ và $q \neq 0$. Đẳng thức nào sau đây là đúng?

- A. $u_7 = u_4 \cdot q^3$. B. $u_7 = u_4 \cdot q^4$. C. $u_7 = u_4 \cdot q^5$. D. $u_7 = u_4 \cdot q^6$.

Lời giải.

Chọn A

$$\begin{cases} u_4 = u_1 q^3 \\ u_7 = u_1 q^6 \end{cases} \longrightarrow u_7 = (u_1 q^3) \cdot q^3 = u_4 q^3$$

Câu 40: Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 \neq 0$ và $q \neq 0$. Với $1 < k < m$, đẳng thức nào dưới đây là đúng?

- A. $u_m = u_k \cdot q^k$. B. $u_m = u_k \cdot q^m$. C. $u_m = u_k \cdot q^{m-k}$. D. $u_m = u_k \cdot q^{m+k}$.

Lời giải.

Chọn C

$$u_k = u_1 q^{k-1} \longrightarrow u_m = u_1 q^{m-1} = (u_1 q^{k-1}) \cdot q^{m-k} = u_k q^{m-k}$$

Câu 41: Cho một cấp số nhân có n số hạng ($n > k > 55$). Đẳng thức nào sau đây sai?

- A. $u_1 \cdot u_n = u_2 \cdot u_{n-1}$. B. $u_1 \cdot u_n = u_5 \cdot u_{n-4}$.
C. $u_1 \cdot u_n = u_{55} \cdot u_{n-55}$. D. $u_1 \cdot u_n = u_k \cdot u_{n-k+1}$.

Lời giải.

Chọn C

$$u_1 u_n = u_1 u_1 q^{n-1} = (u_1 q^{k-1}) \cdot (u_1 q^{n-1}) = u_k u_m \text{ với } k+m=n+1.$$

Câu 42: Tìm số hạng đầu u_1 và công bội q của cấp số nhân (u_n) , biết $\begin{cases} u_6 = 192 \\ u_7 = 384 \end{cases}$.

A. $\begin{cases} u_1 = 5 \\ q = 2 \end{cases}$.

B. $\begin{cases} u_1 = 6 \\ q = 2 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} u_1 = 6 \\ q = 3 \end{cases}$.

D. $\begin{cases} u_1 = 5 \\ q = 3 \end{cases}$.

Lời giải.

Chọn B

$$\begin{cases} 192 = u_6 = u_1 q^5 \\ 384 = u_7 = u_1 q^6 = (u_1 q^5) q = 192q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 2 \\ u_1 = \frac{192}{q^5} = 6 \end{cases}.$$

Câu 43: Cho cấp số nhân (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_4 - u_2 = 36 \\ u_5 - u_3 = 72 \end{cases}$. Chọn khẳng định đúng?

A. $\begin{cases} u_1 = 4 \\ q = 2 \end{cases}$.

B. $\begin{cases} u_1 = 6 \\ q = 2 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} u_1 = 9 \\ q = 2 \end{cases}$.

D. $\begin{cases} u_1 = 9 \\ q = 3 \end{cases}$.

Lời giải.

Chọn B

$$\begin{cases} 36 = u_4 - u_2 = u_1 q (q^2 - 1) \\ 72 = u_5 - u_3 = u_1 q^2 (q^2 - 1) = [u_1 q (q^2 - 1)] q = 36q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 2 \\ u_1 = \frac{36}{q(q^2 - 1)} = 6 \end{cases}.$$

Câu 44: Cho cấp số nhân (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_{20} = 8u_{17} \\ u_1 + u_5 = 272 \end{cases}$. Chọn khẳng định đúng?

A. $q = 2$.

B. $q = -4$.

C. $q = 4$.

D. $q = -2$.

Lời giải.

Chọn A

$$\begin{cases} u_{20} = 8u_{17} \\ u_1 + u_5 = 272 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 q^{19} = 8u_1 q^{16} \\ u_1 (1 + q^4) = 272 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q^3 = 8 \\ u_1 = \frac{272}{1 + q^4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 2 \\ u_1 = 16 \end{cases}.$$

Câu 45: Một cấp số nhân có năm số hạng mà hai số hạng đầu tiên là các số dương, tích của số hạng đầu và số hạng thứ ba bằng 1, tích của số hạng thứ ba và số hạng cuối bằng $\frac{1}{16}$. Tìm số hạng đầu u_1 và công bội q của cấp số nhân đã cho.

A. $\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ q = 2 \end{cases}$.

B. $\begin{cases} u_1 = 2 \\ q = \frac{1}{2} \end{cases}$.

C. $\begin{cases} u_1 = -2 \\ q = -\frac{1}{2} \end{cases}$.

D. $\begin{cases} u_1 = -\frac{1}{2} \\ q = -2 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn B

$$\begin{cases} u_1, \\ u_2 > 0 \\ u_1 u_3 = 1 \\ u_3 u_5 = \frac{1}{16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 > 0, \\ q > 0 \\ u_1^2 q^2 = 1 \\ \frac{1}{16} = u_1^2 q^6 = (u_1^2 q^2) q^4 = q^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = \frac{1}{2} \\ u_1 = \frac{1}{q} = 2 \end{cases}.$$

Câu 46: Cho cấp số nhân (u_n) có công bội q và thỏa

$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 = 49 \left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \frac{1}{u_4} + \frac{1}{u_5} \right) \\ u_1 + u_3 = 35 \end{cases}$$

Tính $P = u_1 + 4q^2$.

A. $P = 24$.

B. $P = 29$.

C. $P = 34$.

D. $P = 39$.

Lời giải.

Chọn B

Nhận xét: Nếu u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 là một cấp số nhân với công bội q thì $\frac{1}{u_1}, \frac{1}{u_2}, \frac{1}{u_3}, \frac{1}{u_4}, \frac{1}{u_5}$ cũng tạo thành cấp số nhân với công bội $\frac{1}{q}$.

$$\text{Do đó từ giả thiết ta có } \begin{cases} u_1 \cdot \frac{q^5 - 1}{q - 1} = 49 \left(\frac{1}{u_1} \cdot \frac{\frac{1}{q^5} - 1}{\frac{1}{q} - 1} \right) & (1) \\ u_1 + u_1 q^2 = 35 & (2) \end{cases}$$

$$\text{Phương trình (1)} \Leftrightarrow u_1 \cdot \frac{q^5 - 1}{q - 1} = \frac{49}{u_1} \left(\frac{q^5 - 1}{q^4 (q - 1)} \right) \Leftrightarrow u_1^2 q^4 = 49 \Leftrightarrow u_1 q^2 = \pm 7.$$

Với $u_1 q^2 = -7$. Thay vào (2), ta được $u_1 - 7 = 35 \Leftrightarrow u_1 = 42$. Suy ra $q^2 = -\frac{7}{42}$: vô lý.

Với $u_1 q^2 = 7$. Thay vào (2), ta được $u_1 + 7 = 35 \Leftrightarrow u_1 = 28$. Vậy $\begin{cases} u_1 = 28 \\ q = \frac{1}{2} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u_1 = 28 \\ q = -\frac{1}{2} \end{cases}$. Khi

đó $u_1 + 4q^2 = 29$.

Câu 47: Cho cấp số nhân (u_n) có công bội q và thỏa $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 26 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 364 \end{cases}$. Tìm q biết rằng $q > 1$.

A. $q = \frac{5}{4}$.

B. $q = 4$.

C. $q = \frac{4}{3}$.

D. $q = 3$.

Lời giải.

Chọn D

$$\text{Ta có } \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 26 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 364 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1 + q + q^2) = 26 \\ u_1^2(1 + q^2 + q^4) = 364 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1^2(1 + q + q^2)^2 = 26^2 & (1) \\ u_1^2(1 + q^2 + q^4) = 364 & (2) \end{cases}$$

Lấy (1) chia (2), ta

$$\text{được } \frac{(1 + q + q^2)^2}{1 + q^2 + q^4} = \frac{26^2}{364} \Leftrightarrow 3q^4 - 7q^3 - 4q^2 - 7q + 3 = 0 \Leftrightarrow 3\left(q^2 + \frac{1}{q^2}\right) - 7\left(q + \frac{1}{q}\right) - 4 = 0.$$

Đặt $t = q + \frac{1}{q}$, $|t| \geq 2$. Phương trình trở thành $3t^2 - 7t - 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \text{ (loại)} \\ t = -\frac{10}{3} \end{cases}$.

Với $t = -\frac{10}{3}$, suy ra $q + \frac{1}{q} = -\frac{10}{3} \Leftrightarrow 3q^2 - 10q + 3 = 0 \Leftrightarrow q = 3$ hoặc $q = \frac{1}{3}$. Vì $q > 1$ nên $q = 3$.

Câu 48: Các số $x + 6y$, $5x + 2y$, $8x + y$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng; đồng thời các số $x - 1$, $y + 2$, $x - 3y$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân. Tính $x^2 + y^2$.

- A. $x^2 + y^2 = 40$. B. $x^2 + y^2 = 25$. C. $x^2 + y^2 = 100$. D. $x^2 + y^2 = 10$.

Lời giải.

Chọn A

$$\begin{aligned} \text{Theo giả thiết ta có } \begin{cases} (x + 6y) + (8x + y) = 2(5x + 2y) \\ (x - 1)(x - 3y) = (y + 2)^2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y \\ (3y - 1)(3y - 3y) = (y + 2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y \\ 0 = (y + 2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -6 \\ y = -2 \end{cases}. \end{aligned}$$

Suy ra $x^2 + y^2 = 40$.

Câu 49: Ba số x ; y ; z theo thứ tự lập thành một cấp số nhân với công bội q khác 1; đồng thời các số x ; $2y$; $3z$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng với công sai khác 0. Tìm giá trị của q .

- A. $q = \frac{1}{3}$. B. $q = \frac{1}{9}$. C. $q = -\frac{1}{3}$. D. $q = -3$.

Lời giải.

Chọn A

$$\begin{cases} y = xq; z = xq^2 \\ x + 3z = 2(2y) \end{cases} \Rightarrow x + 3xq^2 = 4xq \Rightarrow x(3q^2 - 4q + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 3q^2 - 4q + 1 = 0 \end{cases}.$$

Nếu $x = 0 \Rightarrow y = z = 0 \Rightarrow$ công sai của cấp số cộng: x ; $2y$; $3z$ bằng 0 (vô lí).

$$\text{Nếu } 3q^2 - 4q + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} q = 1 \\ q = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow q = \frac{1}{3} \text{ (} q \neq 1 \text{)}.$$

Câu 50: Cho dãy số tăng a , b , c ($c \in \mathbb{Z}$) theo thứ tự lập thành cấp số nhân; đồng thời a , $b + 8$, c theo thứ tự lập thành cấp số cộng và a , $b + 8$, $c + 64$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân. Tính giá trị biểu thức $P = a - b + 2c$.

- A. $P = \frac{184}{9}$. B. $P = 64$. C. $P = \frac{92}{9}$. D. $P = 32$.

Lời giải.

Chọn B

$$\text{Ta có } \begin{cases} ac = b^2 \\ a + c = 2(b+8) \\ a(c+64) = (b+8)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ac = b^2 \\ a - 2b = 16 - c \\ ac + 64a = (b+8)^2 \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix}$$

Thay (1) vào (3) ta được: $b^2 + 64a = b^2 + 16b + 64 \Leftrightarrow 4a - b = 4$ (4).

$$\text{Kết hợp (2) với (4) ta được: } \begin{cases} a - 2b = 16 - c \\ 4a - b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{c-8}{7} \\ b = \frac{4c-60}{7} \end{cases} \quad (5)$$

Thay (5) vào (1) ta được:

$$7(c-8)c = (4c-60)^2 \Leftrightarrow 9c^2 - 424c + 3600 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} c = 36 \\ c = \frac{100}{9} \end{cases} \Leftrightarrow c = 36 \quad (c \in \mathbb{Z}).$$

Với $c = 36 \Rightarrow a = 4, b = 12 \Rightarrow P = 4 - 12 + 72 = 64$.

Câu 51: Số hạng thứ hai, số hạng đầu và số hạng thứ ba của một cấp số cộng với công sai khác 0 theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân với công bội q . Tìm q .

- A. $q = 2$. B. $q = -2$. C. $q = -\frac{3}{2}$. D. $q = \frac{3}{2}$.

Lời giải.

Chọn B

Giả sử ba số hạng $a; b; c$ lập thành cấp số cộng thỏa yêu cầu, khi đó $b; a; c$ theo thứ tự đó lập thành cấp số nhân công bội q . Ta có

$$\begin{cases} a + c = 2b \\ a = bq; c = bq^2 \end{cases} \Rightarrow bq + bq^2 = 2b \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ q^2 + q - 2 = 0 \end{cases}$$

Nếu $b = 0 \Rightarrow a = b = c = 0$ nên $a; b; c$ là cấp số cộng công sai $d = 0$ (vô lí).

Nếu $q^2 + q - 2 = 0 \Leftrightarrow q = 1$ hoặc $q = -2$. Nếu $q = 1 \Rightarrow a = b = c$ (vô lí), do đó $q = -2$.

Câu 52: Cho bốn số a, b, c, d biết rằng a, b, c theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân công bội $q > 1$; còn b, c, d theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng. Tìm q biết rằng $a + d = 14$ và $b + c = 12$.

- A. $q = \frac{18 + \sqrt{73}}{24}$. B. $q = \frac{19 + \sqrt{73}}{24}$. C. $q = \frac{20 + \sqrt{73}}{24}$. D. $q = \frac{21 + \sqrt{73}}{24}$.

Lời giải.

Chọn B

Giả sử a, b, c lập thành cấp số cộng công bội q . Khi đó theo giả thiết ta có:

$$\begin{cases} b = aq, c = aq^2 \\ b + d = 2c \\ a + d = 14 \\ b + c = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} aq + d = 2aq^2 & (1) \\ a + d = 14 & (2) \\ a(q + q^2) = 12 & (3) \end{cases}$$

Nếu $q = 0 \Rightarrow b = c = 0 = d$ (vô lí)

Nếu $q = -1 \Rightarrow b = -a; c = a \Rightarrow b + c = 0$ (vô lí).

Vậy $q \neq 0, q \neq -1$, từ (2) và (3) ta có: $d = 14 - a$ và $a = \frac{12}{q + q^2}$ thay vào (1) ta được:

$$\begin{aligned} \frac{12q}{q + q^2} + \frac{14q^2 + 14q - 12}{q + q^2} &= \frac{24q^3}{q + q^2} \Leftrightarrow 12q^3 - 7q^2 - 13q + 6 = 0 \\ \Leftrightarrow (q + 1)(12q^2 - 19q + 6) &= 0 \Leftrightarrow q = \frac{19 \pm \sqrt{73}}{24} \end{aligned}$$

Vì $q > 1$ nên $q = \frac{19 + \sqrt{73}}{24}$.

Câu 53: Gọi $S = 1 + 11 + 111 + \dots + 111\dots 1$ (n số 1) thì S nhận giá trị nào sau đây?

A. $S = \frac{10^n - 1}{81}$.

B. $S = 10 \left(\frac{10^n - 1}{81} \right)$.

C. $S = 10 \left(\frac{10^n - 1}{81} \right) - n$.

D. $S = \frac{1}{9} \left[10 \left(\frac{10^n - 1}{9} \right) - n \right]$.

Lời giải.

Chọn D

$$\text{Ta có } S = \frac{1}{9} \left(9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{99\dots 9}_{\text{n số 9}} \right) = \frac{1}{9} \left[10 \cdot \frac{1 - 10^n}{1 - 10} - n \right].$$

Câu 54: Biết rằng $S = 1 + 2.3 + 3.3^2 + \dots + 11.3^{10} = a + \frac{21.3^b}{4}$. Tính $P = a + \frac{b}{4}$.

A. $P = 1$.

B. $P = 2$.

C. $P = 3$.

D. $P = 4$.

Lời giải.

Chọn C

Từ giả thiết suy ra $3S = 3 + 2.3^2 + 3.3^3 + \dots + 11.3^{11}$. Do đó

$$-2S = S - 3S = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{10} - 10.3^{11} = \frac{1 - 3^{11}}{1 - 3} - 10.3^{11} = -\frac{1}{2} - \frac{21.3^{11}}{2} \Rightarrow S = \frac{1}{4} + \frac{21}{4}.3^{11}.$$

$$\text{Vì } S = \frac{1}{4} + \frac{21.3^{11}}{4} = a + \frac{21.3^b}{4} \Rightarrow a = \frac{1}{4}, b = 11 \longrightarrow P = \frac{1}{4} + \frac{11}{4} = 3.$$

Câu 55: Một cặp số nhân có ba số hạng là a, b, c (theo thứ tự đó) trong đó các số hạng đều khác 0 và công bội $q \neq 0$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $\frac{1}{a^2} = \frac{1}{bc}$.

B. $\frac{1}{b^2} = \frac{1}{ac}$.

C. $\frac{1}{c^2} = \frac{1}{ba}$.

D. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{c}$.

Lời giải.

Chọn B

$$\text{Ta có } ac = b^2 \Rightarrow \frac{1}{b^2} = \frac{1}{ac}$$

Câu 56: Bốn góc của một tứ giác tạo thành cấp số nhân và góc lớn nhất gấp 27 lần góc nhỏ nhất. Tổng của góc lớn nhất và góc bé nhất bằng:

A. 56° .

B. 102° .

C. 252° .

D. 168° .

Lời giải.

Chọn C

Giả sử 4 góc A, B, C, D (với $A < B < C < D$) theo thứ tự đó lập thành cấp số nhân thỏa yêu cầu với công bội q . Ta có

$$\begin{cases} A + B + C + D = 360 \\ D = 27A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A(1 + q + q^2 + q^3) = 360 \\ Aq^3 = 27A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 3 \\ A = 9 \\ D = Aq^3 = 243 \end{cases} \Rightarrow A + D = 252.$$