THỰC HÀNH ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

TÀI LIỆU PHỤC VỤ SINH VIÊN NGÀNH KHOA HỌC DỮ LIỆU

Nhóm Giảng viên biên soạn: TS. Hoàng Lê Minh – Khưu Minh Cảnh – Hoàng Thị Kiều Anh – Lê Công Hiếu – Trần Ngọc Việt – Nguyễn Công Nhựt – Đỗ Đình Thủ - Nguyễn Thị Thanh Bình – Trần Kim Mỹ Vân – Phạm Trọng Nghĩa – Nguyễn Hữu Trí Nhật – Lê Thị Ngọc Huyên – Nguyễn Thị Tuyết Mai – Nguyễn Viết Cường – Huỳnh Thái Học và các Giảng viên khác.

TP.HCM - Năm 2020

MỤC LỤC

CHƯƠNG 8: KHÔNG GIAN VECTOR VÀ ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH (PHẦN 2)

Mục tiêu:

- *Tính chất cơ bản của không gian vector và ánh xạ tuyến tính*
- *Tọa độ và ma trận chuyển cơ sở*
- *Nhân và ảnh của ánh xạ tuyến tính*

Nội dung chính:

1. Các bài toán cơ bản về không gian vector

1.1.Một số lưu ý

Các lưu ý trong biểu diễn:

Lưu ý 1: "Mặc định" trong không gian Euclide, các vector tọa độ là những vector cột, nghĩa là xếp đứng.

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Thông thường, để dễ biểu diễn, chúng ta thường viết ở dạng chuyển vị của vector: $v^T = (x, y, z)$

Lưu ý 2: Kí hiệu (x_1, x_2) có thể hiểu theo 2 cách: một là một điểm có tọa độ không gian (x_1, x_2), hai là một vector có gốc là $(0,0)$ và ngọn là điểm (x_1, x_2).

1.2.Các bài toán tính toán

Các phần sau đây sẽ là những bài tập tính toán có liên quan đến không gian vector. Sinh viên hãy sử dụng Python để tính toán:

Bài tập 1: Cho 3 vector $u = (2, -1, 5, 0), v = (4,3,1,-1)$ và $w = (-6,2,0,3)$ trong $\mathbb{R}^4$. Xác định các vector x như sau:

a. $x = 2u - (v + 3w)$
b. $3(x + w) = 2u - v + x$

Giải:

a. $x = 2u - (v + 3w)$. Sinh viên sử dụng Python để thực hiện các lệnh sau:

```
>>> import numpy as np
```

```
>>> u = np.array([2,-1,5,0])

>>> v = np.array([4,3,1,-1])

>>> w = np.array([-6,2,0,3])
```

>>> x = 2*u-(v+3*w)

```
>>> print (x)
```

……………………………………………… # Sinh viên ghi kết quả tính toán

b. $3(x + w) = 2u - v + x$

Sử dụng 3 vector $u, v\ w$ ở câu a bên trên. Sau đó, chuyển vế và đơn giản, chúng ta được phương trình:

$$x = u - \frac{1}{2}v - \frac{1}{2}w$$

```
>>> x = 0.5*(2*u-v-3*w)

>>> print (x)
```

……………………………………………… # Sinh viên ghi kết quả tính toán

Bài toán 2: Trong $\mathbb{R}^3$ cho vector $x = (-1, -2, -2)$ và 3 vector $u = (0,1,4), v = (-1,1,2)$ và $w = (3,1,2)$. Tìm a, b, c thỏa: $x = au + bv + cw$

Giải:

Từ yêu cầu trên, chúng ta có hệ sau:

$$\begin{cases} 0a - b + 3c = -1 \\ a + b + c = -2 \\ 4a + 2b + 2c = -2 \end{cases}$$

Sử dụng Python để giải hệ trên:

```
>>> from numpy import linalg

>>> A = np.matrix([[0, -1, 3],[1, 1, 1],[4, 2, 2]])

>>> B = np.array([-1, -2, -2])

>>> X = np.linalg.solve(A, B)
```

>>> print (X)

……………………………………………… # sinh viên ghi lại kết quả

Vậy kết luận, x là tổ hợp tuyến tính của u, v, w như sau (sinh viên điền vào):

$$x = \ldots u + \ldots v + \ldots w$$

Bài toán 3: [Chứng minh tập các ma trận không khả nghịch không phải là không gian con của không gian các ma trận $M_{2\times 2}$]

Gọi W là tập các ma trận cấp 2 không khả nghịch.

Giải: *(lưu ý: không gian con là tập con và các phần tử thỏa điều kiện trong tập và tổng của chúng cũng trong tập)*

Chứng minh bằng phản chứng. Nghĩa là đưa ra 1 ví dụ về tồn tại 2 ma trận không khả nghịch nhưng tổng hai ma trận là một ma trận khả nghịch. Cụ thể là:

>>> A = np.**matrix**([[1,0],[0,0]])

>>> B = np.**matrix**([[0,0],[0,1]])

>>> from numpy import linalg as LA

Sinh viên có thể thực hiện 2 phương pháp (lệnh) sau:

- Phương pháp 1: Lệnh **inv** trong thư viện **numpy.linalg** để chứng minh ma trận khả nghịch (kết quả là một ma trận) và không khả nghịch (kết quả là một thông báo exception: Singular matrix):
  >>> LA.inv(A)
  ……………………………….. # ← sinh viên ghi lại lỗi (**exception**) được Python bắt.
  >>> LA.inv(B)
  ……………………………….. # ← sinh viên ghi lại lỗi (**exception**) được Python bắt.
  >>> LA.inv(A+B)
  ………………………………...# ← Sinh viên ghi lại kết quả

- Phương pháp 2: Lệnh tính định thức **det** trong thư viện **numpy.linalg**. Ma trận không khả nghịch có định thức bằng 0; trong khi đó, ma trận khả nghịch có định thức khác 0:
  >>> LA.det(A)
  ………………………………...# ← Sinh viên ghi lại kết quả

  >>> LA.det(B)

………………………………...# ← Sinh viên ghi lại kết quả

>>> LA.det(A+B)
………………………………...# ← Sinh viên ghi lại kết quả

Bài toán 4: [Chứng minh tập W là tập các ma trận cấp 2 đối xứng (nghĩa là có tính chất $A^T = A$, với A^T là ma trận chuyển vị của A) là không gian con của không gian các ma trận $M_{2\times 2}$ đối với phép cộng ma trận và phép nhân một số thực]

Giải:

Điều 1: Tập W rõ ràng không phải là tập rỗng.

Điều 2: (kiểm chứng theo lí thuyết)

$A_1 \in W, A_2 \in W \Longrightarrow (A_1 + A_2)^T = A_1^T + A_2^T = A_1 + A_2$, được tính chất: $A_1 + A_2 \ \in W$.

$c \in \mathbb{R}, A \in W \Longrightarrow (cA)^T = cA^T = cA$, ta được thêm tính chất: $cA \in W$

Thể hiện các minh chứng trên bằng phần mềm, cụ thể gói phần mềm **sympy** hỗ trợ tính toán hình thức (**chỉ sử dụng các biến hình thức, không cần thay giá giá trị cụ thể vào biến**). Lưu ý: một ma trận bậc 2 có tính chất $A^T = A$, nghĩa là ma trận đối xứng như sau:

$$A = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}$$

Sinh viên thực hiện các lệnh trong gói thư viện sympy:

>>> import sympy as sp

>>> x, y = sp.symbols('x y') # khai báo 2 biến x và y

>>> A = **sp.Matrix**([[x, y],[y, x]]) # lưu ý: kiểu ma trận của sympy là 'Matrix' (viết hoa)

>>> x1, y1 = sp.symbols('x1 y1')

>>> A1 = **sp.Matrix**([[x1, y1],[y1, x1]])

>>> x2, y2 = sp.symbols('x2 y2')

>>> A2 = sp.Matrix([[x2, y2],[y2, x2]])

>>> A1.T

……………………………………………………# ← sinh viên điền kết quả

……………………………………………………

>>> (A1+A2).**T**

……………………………………………………# ← sinh viên điền kết quả

……………………………………………………

>>> ((A1+A2).T).**equals**(A1+A2)

……………………………………………………# ← sinh viên điền kết quả

>>> c = **sp.symbols**('c')

>>> print (c*A)

……………………………………………………# ← sinh viên điền kết quả

>>> ((c*A).T).**equals**(c*A)

……………………………………………………# ← sinh viên điền kết quả

Bài toán 5: [Tìm tổ hợp tuyến tính] Cho 3 vector $v_1 = (1,2,3), v_2 = (0,1,2)$ và $v_3 = (-1,0,1)$. Chứng minh rằng:

a. Vector $w = (1,1,1)$ là tổ hợp tuyến tính của 3 vector trên.
b. Vector $w = (1,-2,2)$ không là tổ hợp tuyến tính của 3 vector trên.

Giải: [Sinh viên tự giải]

Hướng dẫn: Giải hệ: $w = c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3$ để tìm ra c_1, c_2, c_3. Nếu không tìm ra được nghĩa là không phải tổ hợp tuyến tính.

Sinh viên tự viết các lệnh:

>>> ……………………………………………………………………

>>> ……………………………………………………………………

>>> ……………………………………………………………………

>>> ……………………………………………………………………

Bài toán 6: [Độc lập tuyến tính] Cho 3 vector $v_1 = (1,2,3), v_2 = (0,1,2)$ và $v_3 = (-2,0,1)$. Chứng minh rằng 3 vector trên tập lập tuyến tính trên không gian $\mathbb{R}^3$.

Hướng dẫn giải:

Giải hệ: $c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 = 0$

Nếu hệ có duy nhất 1 nghiệm $c = (c_1, c_2, c_3)$ thì các vector là độc lập tuyến tính; ngược lại là phụ thuộc tuyến tính. Một trong những cách giải được trình bày dưới đây:

```
>>> import sympy as sp

>>> c1, c2, c3 = sp.symbols('c1 c2 c3')

>>> sp.solve([c1-2*c3, 2*c1+c2, 3*c1+2*c2+c3], [c1, c2, c3])
```

{c3: 0, c2: 0, c1: 0}

Bài toán 7: [Cơ sở của không gian] Chứng minh rằng tập $S = \{v_1, v_2\} = \{(1,1), (1, -1)\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^2$.

Hướng dẫn: Cơ sở nghĩa là phải thỏa 2 tính chất: vừa là tập sinh và vừa độc lập tuyến tính. Nghĩa là phải kiểm 2 tính chất:

- Kiểm tính chất tập sinh: $\forall u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2, c_1v_1 + c_2v_2 = u \Longrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = u_1 \\ c_1 - c_2 = u_2 \end{cases}$ luôn có nghiệm duy nhất (định thức khác 0), nghĩa là luôn có nghiệm.
- Kiểm tính chất độc lập tuyến tính: kiểm hệ $c_1v_1 + c_2v_2 = 0 \; hay \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 - c_2 = 0 \end{cases}$ có định thức khác 0 (nghiệm duy nhất).

Sinh viên sử dụng các lệnh numpy để chứng minh các điều trên.

Ví dụ chúng ta có thể sử dụng sympy để giải hệ trên:

```
>>> import sympy as sp

>>> c1, c2 = sp.symbols('c1 c2')

>>> u1, u2 = sp.symbols('u1 u2')

>>> sp.solve([c1+c2-u1,c1-c2-u2])
```

………………………………………………# ← sinh viên điền kết quả

Và giải cụ thể với u=0:

```
>>> u1 = 0

>>> u2 = 0
```

```
>>> sp.solve([c1+c2-u1,c1-c2-u2])
```

…………………………………………………….# ← sinh viên điền kết quả

2. Ánh xạ tuyến tính

Ánh xạ tuyến tính là nội dung quan trọng của toán học cũng như ứng dụng trong đời sống thực tiễn. Các ứng dụng dễ dàng thấy bao gồm: xử lý ảnh, trong tính toán khoa học, mô hình, mật mã học, đạo hàm/vi tích phân….

2.1.Định nghĩa, tính chất và biểu diễn ma trận ánh xạ tuyến tính

Ánh xạ tuyến tính (tiếng Anh gọi là linear transformation) là một ánh xạ $L: V_1 \dashrightarrow V_2$ từ không gian vector V_1 vào V_2 thỏa:

$$L(ax + y) = aL(x) + \ L(y) với\ mọi\ x, y\ \in V_1\ và\ a \in \mathbb{R}$$

Ví dụ:

$$f(x, y, z) = (3x + 3y, 3z, 8y + 2x, 4z)$$

Với:

$$X = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}; Y = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow X + Y = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Ta có:

$$f(2,3,5) = (15, 15, 28, 20)$$

$$f(4,1,2) = (15, 6, 16, 8)$$

$$f(6, 4, 7) = (30, 21, 44, 28)$$

Điều này có nghĩa là:

$$f(6, 4, 7) = f(2,3,5) + f(4,1,2)$$

Với $a = 2$, xét:

$$aX = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Ta dễ dàng thấy:

$$f(4, 6, 10) = 2 * f(2,3,5)$$

Từ đó, ta kết luận f bên trên là một ánh xạ tuyến tính.

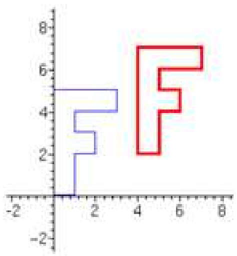
2.2.Bài toán ứng dụng: Ma trận biến đổi (ảnh/font chữ/…)

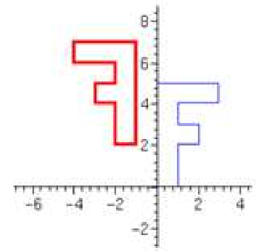
Trong ứng dụng thực tế, một ánh xạ tuyến tính $F(X) = AX$ với A là một ma trận có đặc tính cơ bản: $F(0) = A0 = 0$ có thể làm mất đi tất cả thông tin của cả F lẫn ma trận A. Do đó, thông thường người ta chọn cho ánh xạ một vector cố định V, nghĩa là:

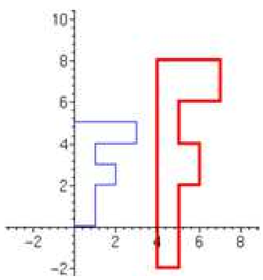
$$F(X) = V + AX$$

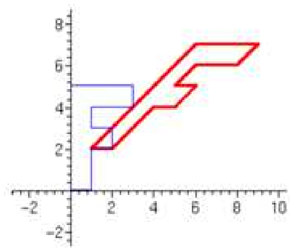
Với V là một vector và khi đó $F(0) = V$.

Bài toán: Hãy tìm vector V và ma trận A theo 4 biến đổi sau:

a. 

c. 

b. 

d. 

Bài hướng dẫn:

Chữ F gốc (ban đầu) trong các hình là tập các vector được hình thành từ tập điểm có thứ tự như sau: $P = \{(0,0), (0,5), (3,5), (3,4), (1,4), (1,3), (2,3), (2,2), (1,2), (1,0)\}$. Theo đó, các biến đổi trên lần lượt là:

a. Biến đổi tịnh tiến. Cụ thể: từ (x, y) thành $(x + a, y + b)$, nghĩa là ở dạng ma trận:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + a \\ y + b \end{pmatrix}$$

Với giá trị $a = 4$ và $b = 2$ (dời tọa độ $(0, 0)$ sang tọa độ $(4, 2)$.

Sinh viên thực hiện các lệnh sau:

```
>>> import numpy as np
>>> P = np.array([[0,0,3,3,1,1,2,2,1,1],[0,5,5,4,4,3,3,2,2,0]])
>>> vecdelta = np.array([4,2])
>>> P_caua = (P.T + vecdelta).T    # lệnh này sinh viên nên tách làm từng lệnh để hiểu
```

```
>>> print (P_caua)
………………………………………………………..
……………………………………………………….. # sinh viên kiểm tra so với hình
```

b. Biến đổi tịnh tiến và co giãn. Cụ thể từ (x, y) thành $(kx + a, ly + b), k, l > 0$. Nghĩa là ở dạng ma trận:

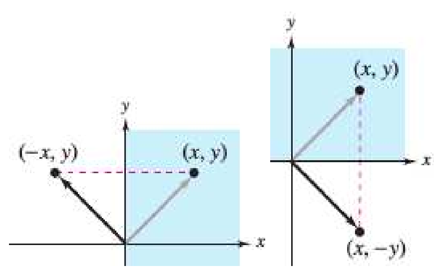
$$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & l \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx + a \\ ly + b \end{pmatrix}$$

Hệ số k, l sẽ được biện luận thêm như sau:
+ Co (contraction): $0 < k, l < 1$
+ Giãn (expansion): $k, l > 1$
Với giá trị $a = 4$ và $b = -2$ (dời tọa độ $(0, 0)$ sang tọa độ $(4, -2)$.
Sau đó thực hiện phép co giãn trục x vẫn giữ nguyên nhưng trục y gấp đôi, nghĩa là: $k = 1.0$ và $l = 2.0$

```
>>> import numpy as np
>>> P = np.array([[0,0,3,3,1,1,2,2,1,1],[0,5,5,4,4,3,3,2,2,0]])
>>> vecdelta = np.array([4,-2])
>>> matran_biendoi = np.array([[1.0, 0.0],
                               [0.0, 2.0]])
>>> P_caub = (P.T @ matran_biendoi + vecdelta).T
>>> print (P_caub)
………………………………………………………..
……………………………………………………….. # sinh viên kiểm tra so với hình
```

c. Biến đổi tịnh tiến và đối xứng theo trục y. Cụ thể từ (x, y) thành $(-x + a, y + b)$. Nghĩa là dạng ma trận tương ứng:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + a \\ y + b \end{pmatrix}$$



[Bài tập lấy điểm chuyên cần trên lớp]

Sinh viên tự xây dựng ma trận biến đổi và các lệnh thực thi:

………………………………………………………..
………………………………………………………..

…………………………………………………..
…………………………………………………..
…………………………………………………..

d. Biến đổi tịnh tiến và shearing. Cụ thể từ (x, y) thành $(x + py + a, qx + y + b)$, một trong hai giá trị p và q bằng 0. Nghĩa là ở dạng ma trận là:

$$\begin{pmatrix} 1 & p \\ q & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + py + a \\ qx + y + b \end{pmatrix}$$

[Bài tập lấy điểm chuyên cần trên lớp]

Sinh viên tự xây dựng ma trận biến đổi và các lệnh thực thi:

…………………………………………………..
…………………………………………………..
…………………………………………………..
…………………………………………………..
…………………………………………………..

Lưu ý, ngoài ra, chúng ta có các dạng biến đổi cơ bản khác như:

- Đối xứng qua đường thẳng y=0 (y không đổi, x bằng -x):

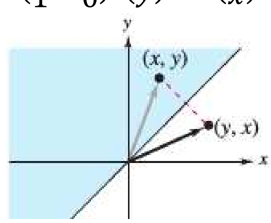
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$$

Sinh viên viết câu lệnh tính toán (xác định ma trận và biến đổi):

……………………………………………………
……………………………………………………

- Đối xứng qua đường thẳng y=x:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$



Sinh viên viết câu lệnh tính toán (xác định ma trận và biến đổi):

……………………………………………………
……………………………………………………

3. [Đọc thêm] Kiểm lý thuyết về ánh xạ tuyến tính

3.1.Kiểm tra một ánh xạ là ánh xạ tuyến tính

Nghĩa là kiểm tra theo định nghĩa của ánh xạ tuyến tính, cụ thể là công thức:

$$L(ax+y) = aL(x) + \ L(y) với\ mọi\ x, y\ \in V_1\ và\ a \in \mathbb{R}$$

Hoặc tách thành 2 tính chất đồng thời cùng thỏa:

$$L(ax) = aL(x)\ với\ mọi\ x\ \in V_1\ và\ a \in \mathbb{R}$$

$$L(x+y) = L(x) + \ L(y) với\ mọi\ x, y\ \in V_1$$

Ví dụ : Cho ánh xạ từ $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ được định nghĩa: $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + x_3; 2x_1 + 3x_2)$

Khi đó, 1 x hoặc y như định nghĩa sẽ là 1 bộ (x_1, x_2, x_3). Ta có phép biến đổi sau:

$$T(x) = T(x_1,\quad x_2,\quad x_3) = (x_1 \quad x_2 \quad x_3)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (s_1 \quad s_2)$$

$$T(y) = T(y_1,\quad y_2,\quad y_3) = (y_1 \quad y_2 \quad y_3)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (t_1 \quad t_2)$$

Với mọi $a \in \mathbb{R}$, ta cần chứng minh rằng:

$$T(ax+y) = T(ax_1 + y_1,\quad ax_2 + y_2,\quad ax_3 + y_3) =$$

$$= (ax_1 + y_1 \quad ax_2 + y_2 \quad ax_3 + y_3)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (as_1 + t_1 \quad as_2 + t_2) =$$

$$a(s_1 \quad s_2) + (t_1 + t_2) = af(x) + f(y)$$

Như vậy, ánh xạ trên là ánh xạ tuyến tính.

Vì ánh xạ từ $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ nên ta chứng minh từng biến đổi $T_1(x_1,\quad x_2,\quad x_3) = f_1 = x_1 - x_2 + x_3$ và $T_2(x_1,\quad x_2,\quad x_3) = f_2 = 2x_1 + 3x_2$ đều thỏa mãn điều kiện định nghĩa về tuyến tính.

Lưu ý: các hàm lượng giác (sinx, coxs,…), hàm mũ, lũy thừa, log không phải là hàm tuyến tính.

Với gói sympy, chúng ta có thể kiểm tra điều này một cách **hình thức** như sau:

>>> import sympy as sp

>>> from **sympy** import **lambdify**

```
>>> x1, x2, x3 = sp.symbols('x1 x2 x3')
```

>>> bieuthuc1 = x1 - x2 + x3

>>> f1 = lambdify([x1, x2, x3], bieuthuc1, 'numpy')

```
>>> a, b, c = sp.symbols('a b c')          # khai báo thêm 3 biến a, b, c giả định X = (a, b, c)
>>> d, e, f = sp.symbols('d e f')          # khai báo thêm 3 biến d, e, f giả định Y = (e, d, f)
>>> f1(a, b, c)
```

……………………………………………………. # sinh viên ghi kết quả

```
>>> f1(d, e, f)
```

……………………………………………………. # sinh viên ghi kết quả

```
>>> f1(a+d, b+e, c+f)
```

……………………………………………………. # sinh viên ghi kết quả

>>> f1(a,b,c) + f1(d,e,f) == f1(a+d, b+e, c+f)

……………………………………………………. # sinh viên ghi kết quả (đúng hoặc sai)

Nên so sánh bằng hàm equals:

>>> (f1(a,b,c) + f1(d,e,f)).equals(f1(a+d, b+e, c+f))

……………………………………………………. # sinh viên ghi kết quả (đúng hoặc sai)

Lưu ý: Sympy hỗ trợ hàm **expand()** để khai triển các đa thức và sử dụng như sau:

```
>>> q = sp.symbols('q')
```

>>> (q*f1(a,b,c) + f1(d,e,f)).equals(f1(q*a+d, q*b+e, q*c+f).expand())

……………………………………………………. # sinh viên ghi kết quả (đúng hoặc sai)

Tương tự, sinh viên có thể kiểm tra với thành phần f2 còn lại $f_2 = 2x_1 + 3x_2$

>>> bieuthuc2 = 2*x2 + 3* x3

>>> f2 = lambdify([x1, x2, x3], bieuthuc2, 'numpy')

>>> (q*f2(a,b,c) + f2(d,e,f)).equals(f2(q*a+d, q*b+e, q*c+f).expand())

………………………………………………. # sinh viên ghi kết quả (đúng hoặc sai)

3.2.Tìm tổ hợp tuyến tính cho một ánh xạ tuyến tính

Để tìm tổ hợp tuyến tính để tính ánh xạ tuyến tính với các giá trị có sẵn, chúng ta giải phương trình để tìm ra các hệ số của tổ hợp tuyến tính, sau đó chúng ta tính ánh xạ tuyến tính đó.

Ví dụ: Cho $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ có cơ sở của $\mathbb{R}^2$ là $B = \{u_1 = (1,2); u_2 = (3,5)\}$ và $f(u_1) = (1,1,2)$, $f(u_2) = (4,2,1)$. Tìm $f(u_3) = f(4,5)$

Giải:

Tìm tổ hợp tuyến tính: $u_3 = \alpha u_1 + \beta u_2$, nghĩa là giải ra α và β (đáp án: $\alpha = -5, \beta = 3$?). Hệ:

$$\begin{bmatrix} 1\alpha & 3\beta & 4 \\ 2\alpha & 5\beta & 5 \end{bmatrix}$$

Sau đó, chúng ta tính toán theo công thức $f(u_3) = \alpha f(u_1) + \beta f(u_2)$. (*đáp án:* (7,1,-7)?)

Sinh viên tự viết các câu lệnh giải:

…………………………………………………………………………….

3.3.Tìm ánh xạ tuyến tính

Để tìm ánh xạ tuyến tính với các giá trị có sẵn, chúng ta giải phương trình để tìm ra các hệ số của ánh xạ. Ví dụ: Tương tự như trên, chúng ta hãy tìm ánh xạ tuyến tính của f khi biết $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ có cơ sở của $\mathbb{R}^2$ là $B = \{u_1 = (1,2); u_2 = (3,5)\}$ và $f(u_1) = (1,1,2)$, $f(u_2) = (4,2,1)$.

Giải hệ với $u = (x, y)$ bất kỳ để tìm ra α và β. Hệ:

$$\begin{bmatrix} 1\alpha & 3\beta & x \\ 2\alpha & 5\beta & y \end{bmatrix}$$

Giải ra ta được:

```
>>> import sympy as sp

>>> a, b = sp.symbols('a b')

>>> x, y = sp.symbols('x y')
```

>>> sp.solve([a+3*b-x, 2*a+5*b-y],[a,b])

………………………………………………………….. # sinh viên ghi nghiệm vào

$$\begin{cases} \alpha = -5x + 3y \\ \beta = 2x - y \end{cases}$$

Từ công thức $u = \alpha u_1 + \beta u_2$, thay thế vào công thức $f(u) = \alpha f(u_1) + \beta f(u_2)$ để tìm được ánh xạ tuyến tính.

Sinh viên thực hiện code sau:

>>> fu1 = np.array([1,1,2])

>>> fu2 = np.array([4,2,1])

>>> fu = a*fu1 + b*fu2

>>> print (fu)

………..………………………………………….. # sinh viên điền kết quả

>>> fu = **a.subs**(a, -5*x + 3*y)*fu1 + **b.subs**(b, 2*x - y)*fu2 # thay giá trị tìm được ở trên vào

>>> print (fu)

………..………………………………………….. # sinh viên điền kết quả

[Đáp án: $f(x,y) = (3x - y, -x + y, -8x + 5y)$?(*sinh viên kiểm đáp án này*)]

3.4.Tìm nhân của ánh xạ tuyến tính

Theo định nghĩa, $Kerf = \{x \in V | f(x) = 0\}$. Như vậy, tìm Ker(f) là giải phương trình $f(x) = 0$.

Ví dụ: Cho ánh xạ f từ $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 - x_3; 2x_1 + 3x_2 - x_3, 3x_1 + 5x_2 - x_3)$$

Tìm Kerf bằng việc giải hệ phương trình:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \vec{0}$$

$$(x_1 + x_2 - x_3; 2x_1 + 3x_2 - x_3, 3x_1 + 5x_2 - x_3) = (0,0,0)$$

Sinh viên thực hiện các lệnh Python:

```
>>> x1, x2, x3 = sp.symbols('x1 x2 x3')

>>> sp.solve([x1+x2-x3, 2*x1+3*x2-x3, 3*x1+5*x2-x3],[x1, x2, x3])

{x2: -x3, x1: 2*x3}
```

Như vậy, chúng ta có thể chọn 1 tham số x3 = 1 và suy ra: x2 = -1, x1 = 2. Nghĩa là cơ sở không gian nghiệm là $Kerf = \{(2t, -t, t), t \in \mathbb{R}\}$.

3.5.Tìm ảnh của ánh xạ tuyến tính

Theo định nghĩa: cho ánh xạ tuyến tính $f: V \rightarrow W$ thì $Imf = \{y \in W | \exists x \in V: y = f(x)\}$, nghĩa là ảnh của một ánh xạ tuyến tính là không gian con được sinh ra bởi ảnh của một tập sinh trong V. Như vậy, để tìm được Imf, chúng ta phải thực hiện các bước sau:

Bước 1: Chọn 1 cơ sở của V, gọi là $B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$

+ Xác định/tìm kiếm một cơ sở cho V.

Bước 2: Tìm $f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_n)$

+ Tính các giá trị.

Bước 3: $Imf =< f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_n) >$

+ Tạo tập sinh, đó là Imf.

3.6. Ma trận của ánh xạ tuyến tính trong cặp cơ sở

Cho ánh xạ tuyến tính $f: V \rightarrow W$. Trong V có một cơ sở là $B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ và trong W có một cơ sở là $F = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$. A được gọi là ma trận của ánh xạ tuyến tính trong cặp cơ sở $\{B, F\}$

$$A = [f]_B^F = \begin{bmatrix} [f(u_1)]_F & \dots & [f(u_n)]_F \\ . & . & . \\ . & . & . \end{bmatrix}$$

Cột thứ i của ma trận A chính là tọa độ của vector thứ u_i theo cơ sở F, nghĩa là giải hệ sau để được m nghiệm:

$$f(u_i) = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_m v_m$$

Ví dụ: Cho ánh xạ f từ $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$: $f(x, y) = (x - y, x)$

Với 2 cơ sở $B = \{u_1 = (-1; 1), u_2 = (1; 0)\}$ và F= $\{v_1 = (1; 2), v_2 = (1; 3)\}$.

Ma trận $A = [f]_B^F$ được xác định như sau:

(Giải):

Bước 1: Tính các $f(u_i)$

$$f(u_1) = f(-1; 1) = (-2; -1);\ f(u_2) = f(1; 0) = (1; 1)$$

Bước 2: Xác định các giá trị $[f(u_i)]_F$, nghĩa là giải hệ:

$$[f(u_1)]_F = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} \leftrightarrow f(u_1) = a_1 v_1 + b_1 v_2 \leftrightarrow a_1(1; 2) + b_1(1; 3) = (-2; -1) \to \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$[f(u_2)]_F = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} \leftrightarrow f(u_2) = a_2 v_1 + b_2 v_2 \leftrightarrow a_2(1; 2) + b_2(1; 3) = (1; 1) \to \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Bước 3: Trả về ma trận $A = [f]_B^F$ bằng cách dựng đứng các vector tìm được ở bước 2.

$$A = [f]_B^F = [[f(u_1)]_F \quad [f(u_2)]_F] = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Bài tập: Sinh viên thực hiện bằng Python các xử lý toán học bên trên.

…………………………………………………………………………………….

…………………………………………………………………………………….

…………………………………………………………………………………….

…………………………………………………………………………………….

…………………………………………………………………………………….

…………………………………………………………………………………….

Lưu ý: Cách tìm cơ sở trực giao của ma trận bằng numpy:

```
>>> import numpy as np
>>> import math
>>> from scipy import linalg as LA
```

```
>>> B = np.matrix([[1.0/math.sqrt(2), 1.0/math.sqrt(2)],
                  [-1.0/math.sqrt(2),1.0/math.sqrt(2)]])  # cos(pi/4)
>>> LA.orth(B)
array([[-0.70710678,  0.70710678],
       [ 0.70710678,  0.70710678]])
```

 # Lưu ý:

```
>>> 1.0/math.sqrt(2)
0.7071067811865475
```

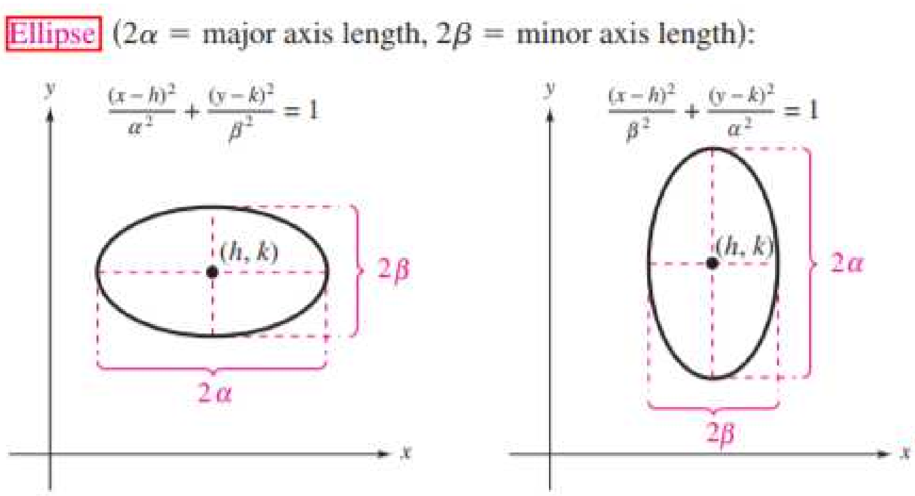
4. Bài toán ứng dụng: Đường conic và các phép biến đổi

Đường conic bao gồm các loại sau: đường tròn (circle), ellip (ellipse), hyperbola, parabola.

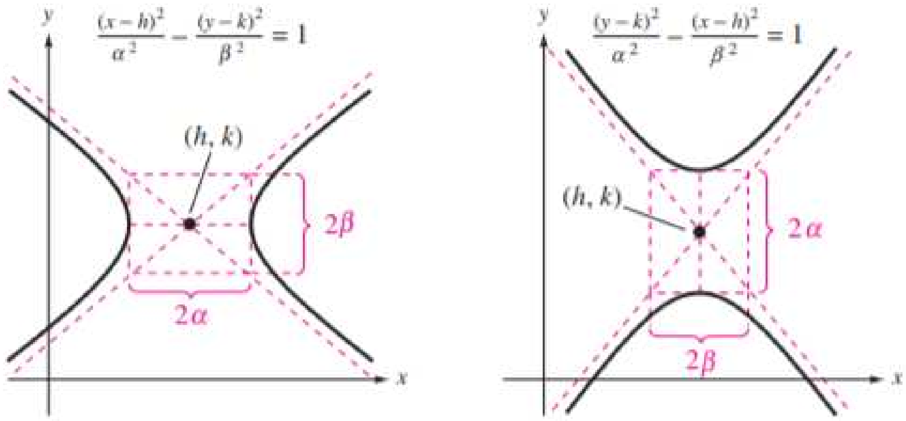
- Đường tròn với phương trình chuẩn tắc: $(x-a)^2+(x-b)^2=r^2$, với r là bán kính.
- Các conic còn lại: bao gồm Ellipse, Hyperbola, Parabola

Những công thức bên dưới được thể hiện trên cơ sở chuẩn của $\mathbb{R}^2$, nghĩa là cơ sở:

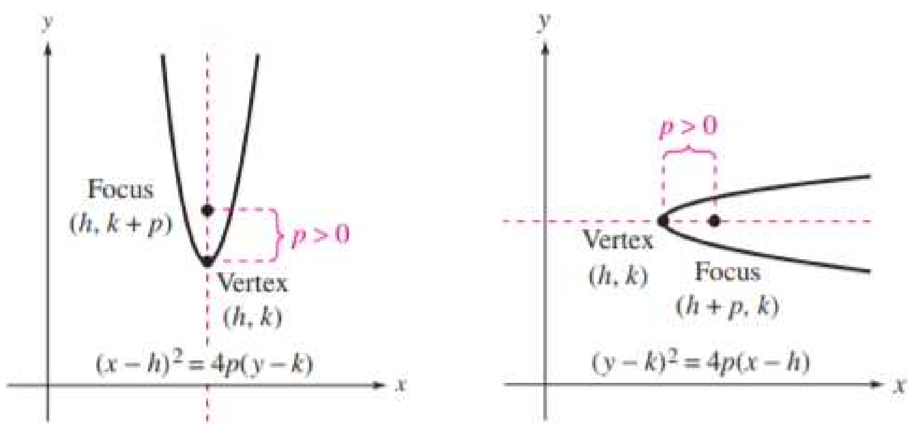
$$\mathcal{B}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$



Hyperbola (2α = transverse axis length, 2β = conjugate axis length):

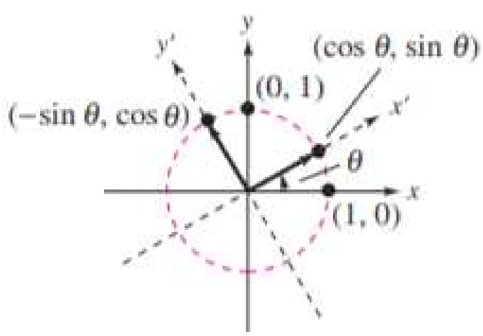


Parabola (p = directed distance from vertex to focus):



Xét ở một cơ sở khác, ví dụ cơ sở xoay đi một góc θ cũng trong $\mathbb{R}^2$:

$$\mathcal{B}_\theta = \begin{pmatrix} cos\theta & sin\theta \\ -sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}$$



Bài toán cần giải quyết: Tìm các tọa độ (phương trình) của đường conic trong cơ sở mới.

Theo định lý, ta có:

$$[\mathcal{B}_\theta \quad \mathcal{B}] = \begin{bmatrix} cos\theta & sin\theta & 1 & 0 \\ -sin\theta & cos\theta & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Thực hiện biến đổi:

$$[I \quad P^{-1}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & cos\theta & sin\theta \\ 0 & 1 & -sin\theta & cos\theta \end{bmatrix}$$

[Sinh viên tự giải thích biến đổi trên bằng lý thuyết được học. Gợi ý: $P^{-1} = \mathcal{B}_\theta{}^{-1}$]

Từ đó, gọi (x', y') là tọa độ của (x, y) trong cơ sở $\mathcal{B}_\theta$, ma trận chuyển tọa độ sẽ là:

$$\begin{bmatrix} cos\theta & sin\theta \\ -sin\theta & cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

Như vậy, ta đã tính toán được tọa độ của điểm (x, y) trong cơ sở $\mathcal{B}_\theta$ theo công thức trên. Cụ thể:

$$\begin{cases} x' = xcos\theta + ysin\theta \\ y' = -xsin\theta + ycos\theta \end{cases}$$

Hiển nhiên, chúng ta có thể giải ngược lại để tìm vị trí tọa độ (x, y) theo (x', y') như sau:

$$\begin{cases} x = x'cos\theta - y'sin\theta \\ y = x'sin\theta + y'cos\theta \end{cases}$$

Từ đó, một cách tổng quát, phương trình $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ có thể viết ở dạng:

$$a'(x')^2 + b'x'y' + c'(y')^2 + d'x' + e'y' + f' = 0$$

Với trục được xoay 1 góc θ ngược chiều kim đồng hồ và θ được xác định bởi công thức:

$$cos2\theta = \frac{a - c}{b}$$

Ví dụ: [Chuyển đổi từ cơ sở chuẩn tắc $\mathcal{B}_\theta$ sang cơ sở $\mathcal{B}$ nào đó]Thực hiện phép xoay để loại bỏ số hạng xy trong phương trình conic dưới đây:

$$5x^2 - 6xy + 5y^2 + 14\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}y + 18 = 0$$

Giải:

Góc xoay được xác định bởi công thức: $cos2\theta = \frac{a-c}{b} = \frac{5-5}{6} = 0 \implies \theta = \frac{\pi}{4}$. Do đó, ta có các giá trị sau:

$$cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}, sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Thay thế:

$$x = x'cos\theta - y'sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y')$$

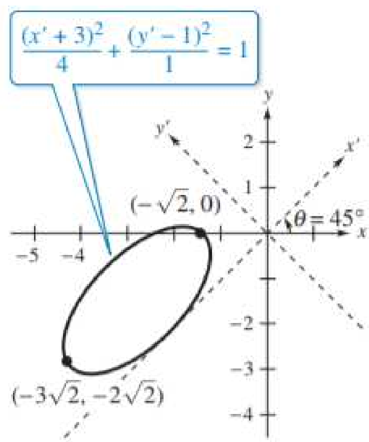
$$y = x'sin\theta + y'cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y')$$

Phương trình ban đầu được cho sẽ trở thành:

$$(x')^2 + 4(y')^2 + 6x' - 8y' + 9 = 0$$

Hoặc:

$$\frac{(x'+3)^2}{2^2} + \frac{(y'-1)^2}{1^2} = \frac{(x'+3)^2}{4} + \frac{(y'-1)^2}{1} = 1$$



Sinh viên hãy thực hiện các biến đổi trên bằng gói thư viện numpy:

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

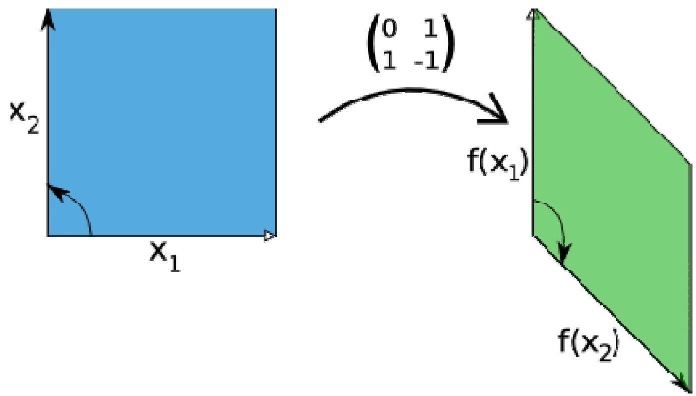
……………………………………………………………………………………………

BÀI TẬP CHƯƠNG 8

Câu 1: Kiểm xem ánh xạ sau có phải là ánh xạ tuyến tính hay không?

$$g(x, y, z) = (x + y, z + 2, 0)$$

Câu 2: Cho một biến đổi:



Biến đổi này thay đổi x thành y và thay đổi y thành x-y.

Hãy viết các câu lệnh bằng Python để mô tả biến đổi trên (Gợi ý: sinh viên có thể minh họa bằng việc lấy tập điểm F và tính toán biến đổi trên tập điểm đó với ma trận biến đổi trên).

Câu 3: Sử dụng tính toán hình thức sympy, chứng minh ánh xạ sau là ánh xạ tuyến tính:

$$T(v_1, v_2) = (v_1 - v_2, v_1 + 2v_2)$$

Câu 4: Dạng quadratic form của phương trình conic là: $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$. Dạng ma trận thể hiện là:

$$X^T AX + [d \quad e]X + f$$

Với: A là ma trận 2x2 đối xứng;

$$A = \begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Khi đó, ta có các tính chất sau:

- Nếu b = 0 thì conic không có góc quay.
- Nếu b <> 0: Gọi P là ma trận trực giao của A, nghĩa là $P^T AP = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$

$$P = \begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{bmatrix}, với\ \theta\ \text{là}\ góc\ xoay\ của\ conic$$

Gọi λ_1 và λ_2 là các giá trị riêng của A. Khi đó, phương trình conic sẽ là:

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 - f = 0$$

Bài toán: Cho phương trình ellipse sau:

$$13x^2 - 10xy + 13y^2 - 72 = 0$$

Hãy tìm góc xoay và phương trình chính tắc (loại bỏ hạng số xy).

Đáp án gợi ý: $\frac{(x')^2}{3^2} + \frac{(y')^2}{2^2} = 1$; $A = \begin{bmatrix} 13 & -5 \\ -5 & 13 \end{bmatrix}$; góc quay θ có thể là 45^o, 135^o hoặc 315^o

Phương trình trên có 2 giá trị đặc trưng: $\lambda_1 = 8;\ \lambda_2 = 18$.