LUỒNG TRONG MẠNG

Đặng Nguyễn Đức Tiến
Đặng Trần Minh Hậu
Nguyễn Ngọc Thảo

Nội dung bài giảng

- Luồng trong mạng
- Bài toán luồng cực đại
- Giải thuật Ford Fulkerson
- Một số ứng dụng của bài toán luồng cực đại

Giới thiệu vấn đề

- Luồng cực đại là một trong những bài toán tối ưu trên đồ thị, được ứng dụng rộng rãi trong cả thực tế và lý thuyết tổ hợp.
- Bài toán được đề xuất vào đầu những năm 1950 và gắn liền với tên tuổi của hai nhà toán học Mỹ, Lester Randolph Ford Jr. và Delbert Ray Fulkerson.

Lester Randolph Ford Jr.
(1927 – 2017)

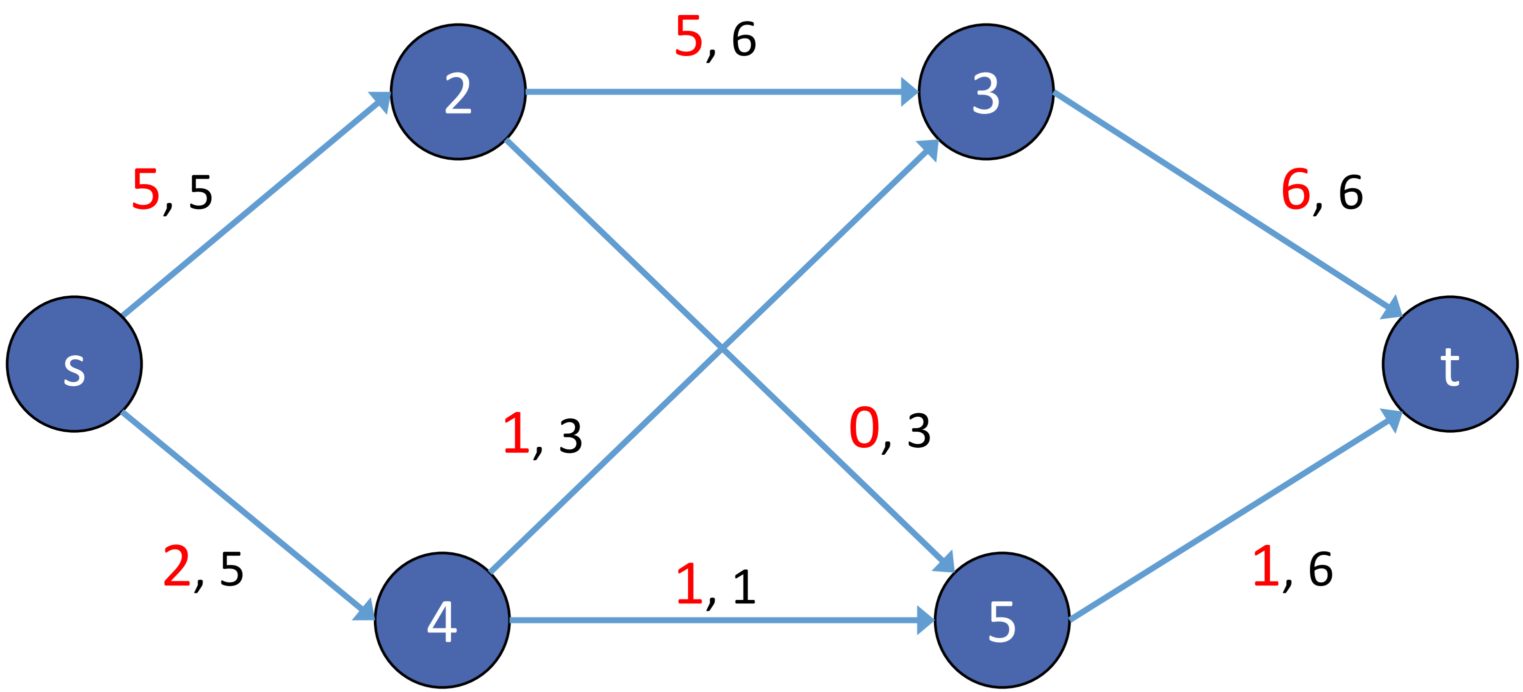
Delbert Ray Fulkerson
(1924 – 1976)

Định nghĩa về mạng

- Mạng (network) là đồ thị có hướng $\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{E})$, trong đó có duy nhất một đỉnh s không có cung đi vào và có duy nhất một đỉnh t không có cung đi ra.
- Đỉnh s là đỉnh phát (source), và đỉnh t là đỉnh thu (sink).
- Mỗi cạnh $e = (u, v) \in \boldsymbol{E}$ có một số nguyên không âm $c(e) = c[u, v]$, gọi là khả năng thông qua (capacity) của cung.

- **Quy ước:** Nếu mạng không có cung (u, v) thì ta thêm vào cung (u, v) với khả năng thông qua $c[u, v]$ bằng 0.

Ví dụ minh họa giá trị của luồng



Mỗi cung e được chú thích với một cặp số (v, c), trong đó v là luồng của cung e và c là khả năng thông qua của cung e.

Dễ thấy v không thể vượt khỏi c.

Định nghĩa tập cung vào ra

- Giả sử cho mạng $\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{c})$.
- $W^-(v) = \{(u, v) \in \boldsymbol{E} \mid u \in \boldsymbol{V}\}$: tập cung đi vào đỉnh v.
- $W^+(v) = \{(v, u) \in \boldsymbol{E} \mid u \in \boldsymbol{V}\}$: tập cung đi ra khỏi đỉnh v.

Định nghĩa luồng trên mạng

- Luồng $\boldsymbol{f}$ trong mạng $\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{c})$ là ánh xạ $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{E} \to \mathbb{R}_+$ gán mỗi cung $e = (u, v) \in \boldsymbol{E}$ một số thực không âm $f(e) = f[u, v]$, thoả mãn hai điều kiện.
- **Điều kiện 1** (Capacity constraint): Luồng trên mỗi cung $e \in \boldsymbol{E}$ không vượt quá khả năng thông qua của cung này.

$$\mathbf{0} \leq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}) \leq \boldsymbol{c}(\boldsymbol{e})$$

- **Điều kiện 2** (Flow conversion) – Điều kiện cân bằng luồng trên mỗi đỉnh của mạng: Tổng luồng trên các cung vào đỉnh v bằng tổng luồng trên các cung đi ra khỏi v, nếu $v \neq s, t$.

$$\mathbf{total}\left(\boldsymbol{W}^{-}(\boldsymbol{v})\right) = \mathbf{total}\left(\boldsymbol{W}^{+}(\boldsymbol{v})\right), \forall \boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}$$

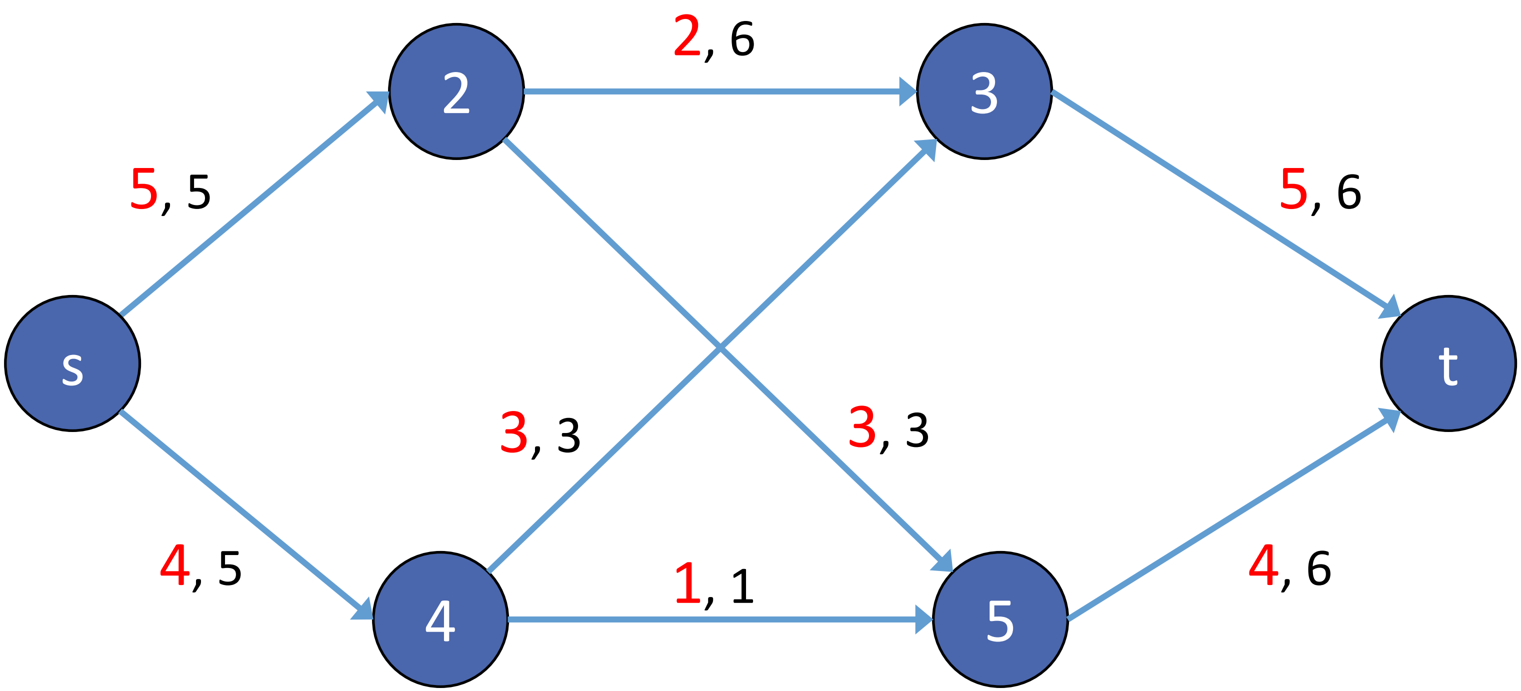
Giá trị của luồng

- Giá trị của luồng $\boldsymbol{f}$ bằng tổng giá trị trên các cung đi ra từ đỉnh phát s, hoặc tổng giá trị trên các cung đi vào đỉnh thu t.

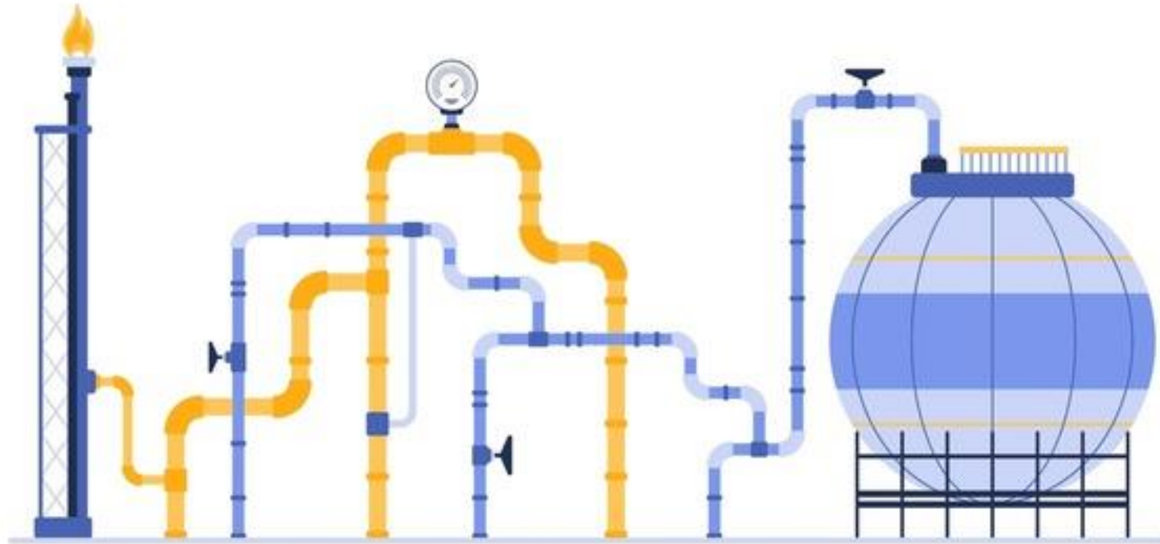
$$\mathrm{val}(\boldsymbol{f}) = \mathrm{total}\big(W^{+}(s)\big) = \mathrm{total}\big(W^{-}(t)\big)$$

Bài toán luồng cực đại

- Cho một mạng $\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{c})$.
- Luồng cực đại f^* là luồng có giá trị luồng $\mathrm{val}(f^*)$ lớn nhất.
- Bài toán luồng cực đại cần tìm một luồng f^* như thế.



Ứng dụng bài toán luồng cực đại



- Xét đồ thị tương ứng hệ thống ống dẫn dầu. Trong đó điểm phát là tàu chở dầu, điểm thu là bể chứa, các ống tương ứng với cung, các điểm nối của ống là nút của đồ thị. Khả năng thông qua của cung là tiết diện của ống tương ứng .
- Tìm luồng dầu lớn nhất có thể bơm từ tàu chở dầu vào bể chứa.

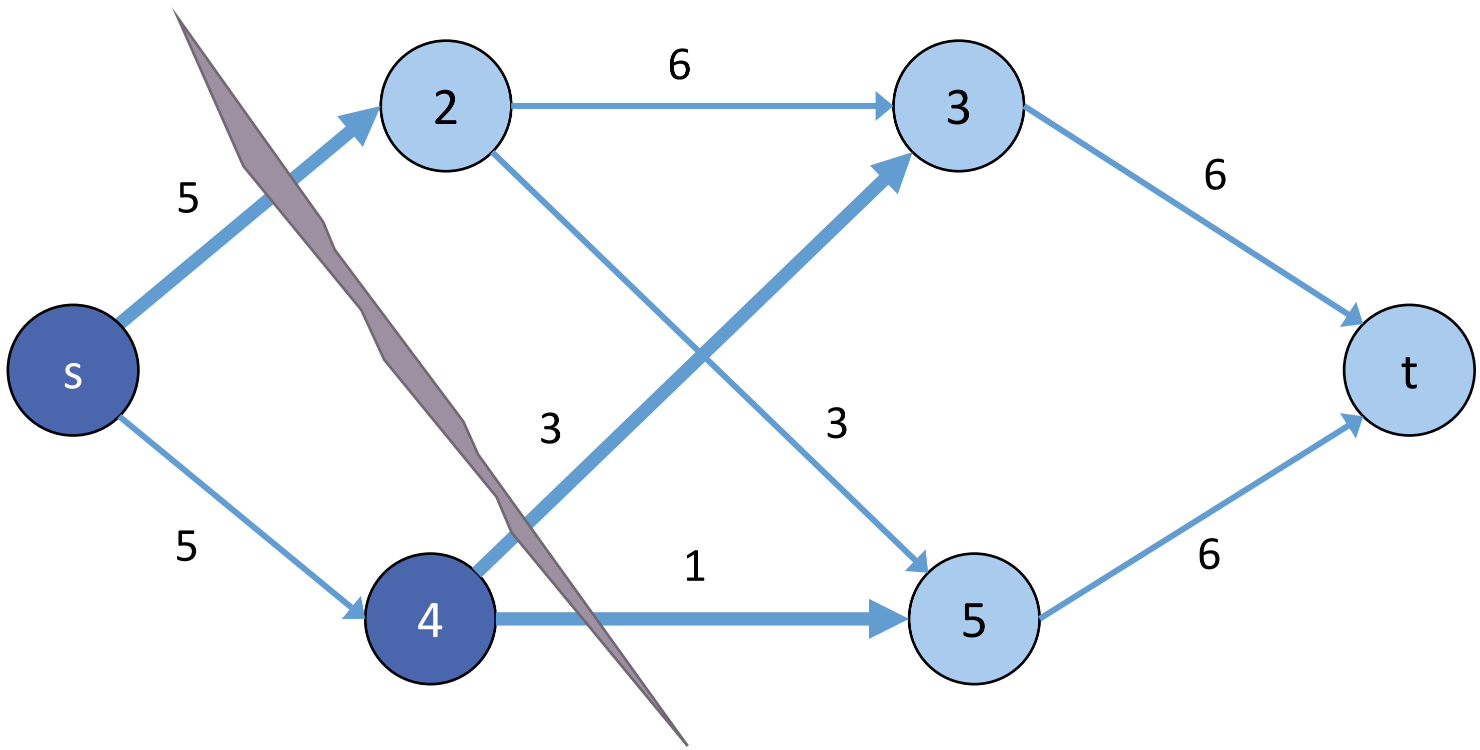
Lát cắt

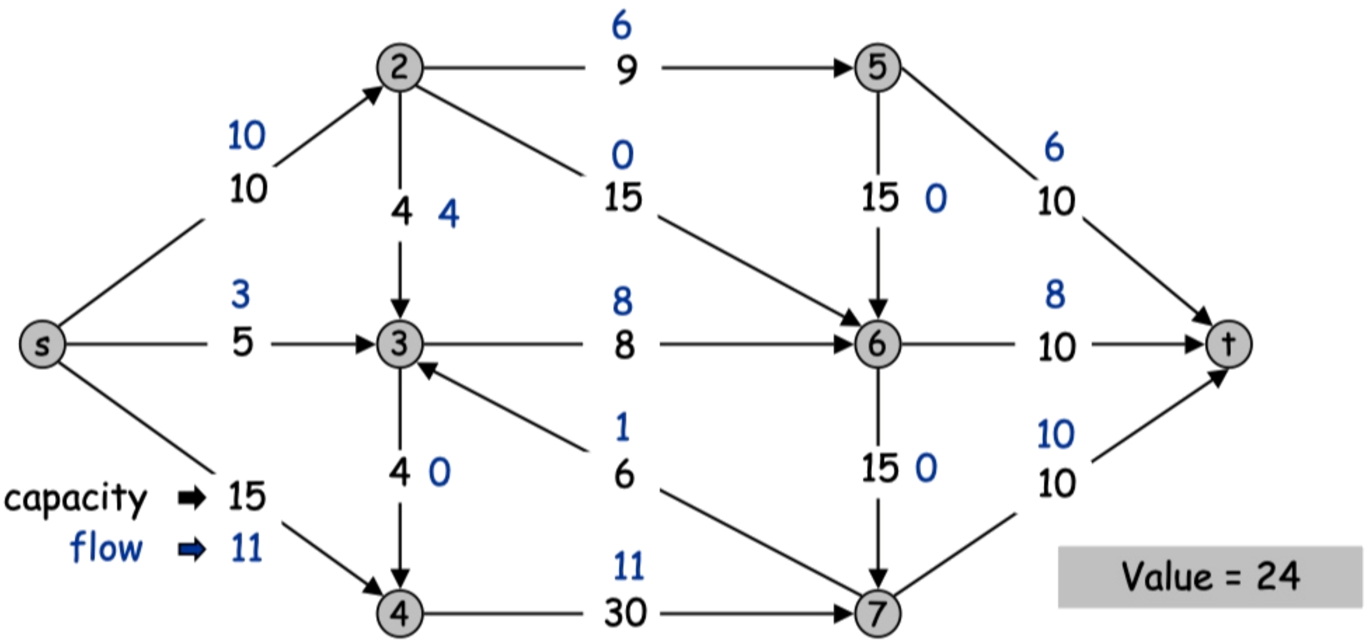
- Lát cắt (X, X^*) là một cách phân hoạch tập đỉnh V của mạng ra thành hai tập, X và $X^* = V\backslash\mathrm{X}$, trong đó $s \in X$ và $t \in X^*$.
- Khả năng thông qua của lát cắt (X, X^*) được định nghĩa là

$$\boldsymbol{c}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X}^*) = \sum_{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{X}, \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{X}^*} \boldsymbol{c}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})$$

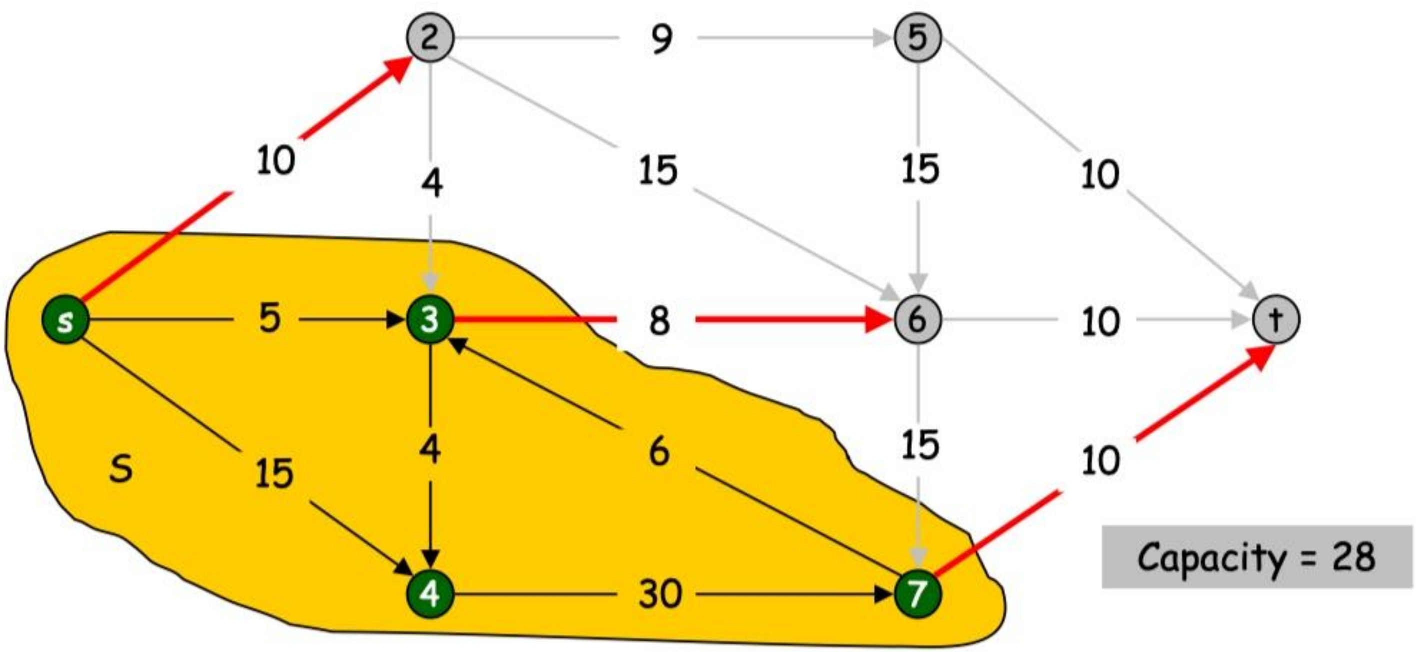
- Lát cắt có khả năng thông qua nhỏ nhất là lát cắt nhỏ nhất.

Ví dụ về lát cắt nhỏ nhất





Ví dụ về
luồng cực đại



Ví dụ về lát
cắt nhỏ nhất

Luồng cực đại – Lát cắt nhỏ nhất

- Giá trị của mọi luồng $\boldsymbol{f}$ trong mạng luôn nhỏ hơn hoặc bằng khả năng thông qua của lát cắt (X, X^*) bất kỳ trong nó.

$$\mathbf{val}(\boldsymbol{f}) \leq \mathbf{c}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X}^*)$$

- Như vậy, giá trị luồng cực đại trong mạng không vượt quá khả năng thông qua của lát cắt nhỏ nhất trong mạng.

- **Định lý:** Giá trị luồng cực đại trong mạng bằng khả năng thông qua của lát cắt nhỏ nhất.

Đồ thị tăng luồng

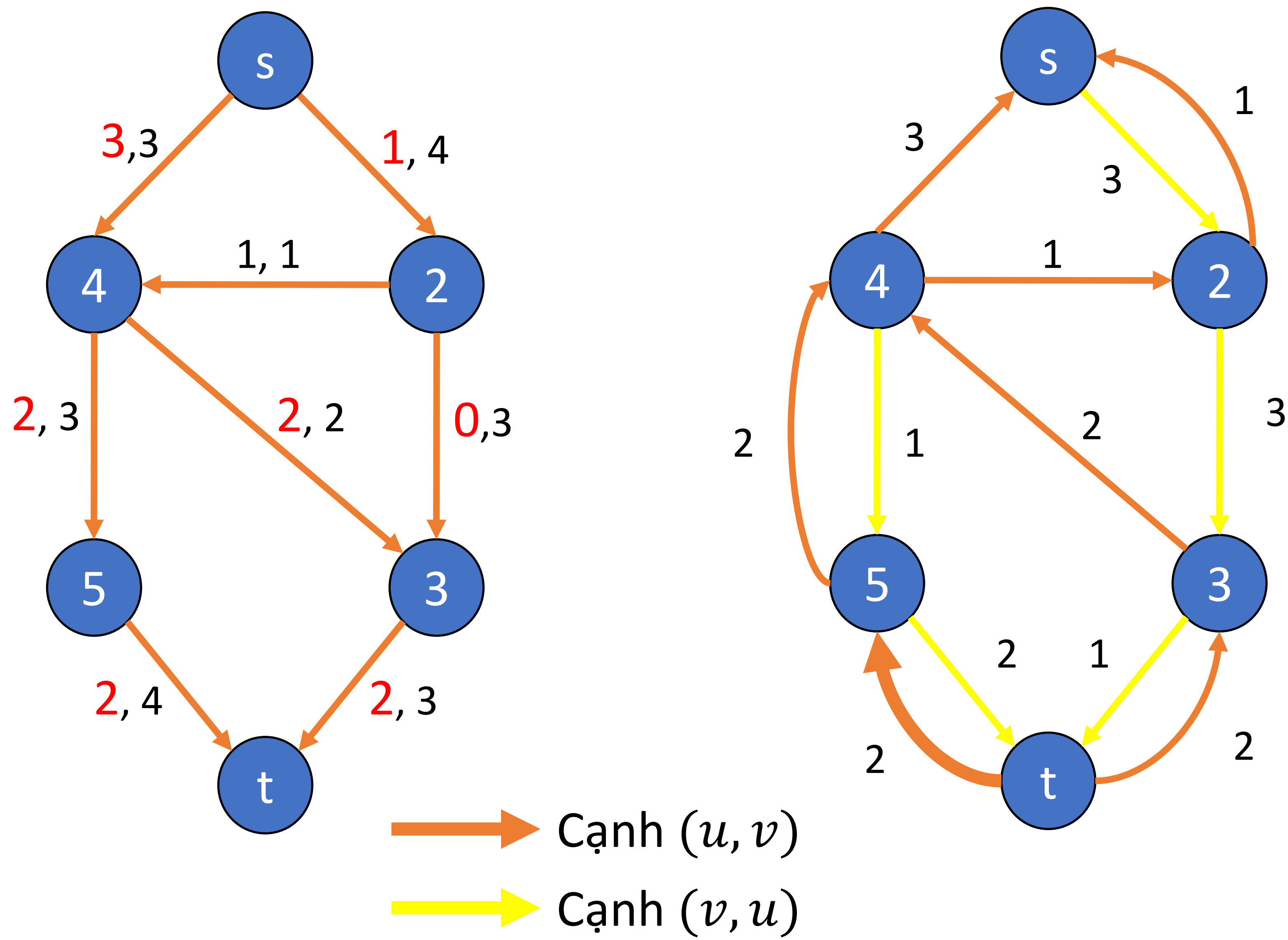
- Giả sử $\boldsymbol{f}$ là một luồng trên mạng $\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{c})$.
- Ta xây dựng đồ thị trọng số $\boldsymbol{G_f} = (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{E_f}, \boldsymbol{c_f})$ từ $\boldsymbol{G}$ với tập cung $\boldsymbol{E_f}$ và trọng số trên các cung $\boldsymbol{c_f}$ được xác định như sau.

- Với mỗi $e = (u, v) \in \boldsymbol{E}$ của mạng $\boldsymbol{G}$
  1. Nếu $f(u, v) = 0$ thì $(u, v) \in \boldsymbol{E_f}$ với trọng số $c(u, v)$.
  2. Nếu $f(u, v) = c(u, v)$ thì $(v, u) \in \boldsymbol{E_f}$ với trọng số $f(u, v)$.
  3. Nếu $0 < f(u, v) < c(u, v)$ thì $(u, v) \in \boldsymbol{E_f}$ với trọng số $c(u, v) - f(u - v)$ và $(v, u) \in \boldsymbol{E_f}$ với trọng số $f(u, v)$.

Đồ thị tăng luồng

- Các cung của $\boldsymbol{G_f}$, đồng thời cũng là cung của $\boldsymbol{G}$, được gọi là cung thuận.
- Các cung còn lại được gọi là cung nghịch.
- Đồ thị $\boldsymbol{G_f}$ được gọi là **đồ thị tăng luồng** (residual network).

Ví dụ về đồ thị tăng luồng



Tăng luồng

- Giả sử $P = (s = v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k = t)$ là một đường đi từ s đến t trên đồ thị tăng luồng $\boldsymbol{G_f}$.
- Gọi k là trọng số cung nhỏ nhất trên đường đi P.
- Xây dựng luồng f' theo quy tắc sau:
  - $f'(u, v) = f(u, v) + k$, nếu $(u, v) \in P$ là cung thuận.
  - $f'(u, v) = f(u, v) - k$, nếu $(u, v) \in P$ là cung nghịch.
  - $f'(u, v) = f(u, v)$ nếu $(u, v) \notin P$.
- Dễ dàng kiểm tra được rằng f' xây dựng như trên là luồng trong mạng và $val(f') = val(f) + k$.
- Đây gọi là thủ tục tăng luồng dọc theo đường P.

Đường tăng luồng

- Đường tăng luồng f là mọi đường đi từ s đến t trên đồ thị tăng luồng $\boldsymbol{G_f}$.
- Các mệnh đề dưới đây là tương đương:

1. f là luồng cực đại trong mạng.
2. Không tìm được đường tăng luồng f.
3. $\mathrm{val}(f) = c(X, X^*)$ với một lát cắt (X, X^*) nào đó.

Chứng minh mệnh đề 2 $\rightarrow$ 3

- Ký hiệu $\boldsymbol{X}$ là tập các đỉnh đến được từ s.
- Đặt $\boldsymbol{X}^* = \boldsymbol{V} \backslash \boldsymbol{X}$. Lúc đó $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X}^*)$ là lát cắt và $f(u, v) = 0$ với mọi $u \in \boldsymbol{X}^*$ và $v \in \boldsymbol{X}$.
- Do đó: $$val(f) = \sum_{\substack{u \in X \\ v \in X^*}} f(u,v) - \sum_{\substack{u \in X^* \\ v \in X}} f(u,v) = \sum_{\substack{u \in X \\ v \in X^*}} f(u,v)$$
  - Với $u \in X^*$ và $v \in X$, do $(u, v) \notin \boldsymbol{G_f}$ nên $f(u, v) = c(u, v)$.
- Vậy: $$val(f) = \sum_{\substack{u \in X \\ v \in X^*}} f(u,v) = \sum_{\substack{u \in X \\ v \in X^*}} c(u,v) = c(X, X^*)$$

Giải thuật Ford – Fulkerson

- Bước khởi tạo: Bắt đầu từ luồng với giá trị luồng trên tất cả các cung bằng 0 (ta gọi đó là luồng không), và lặp lại bước lặp sau đây cho đến khi thu được luồng mà đối với nó không còn đường tăng luồng.
- Bước lặp tăng luồng (Ford – Fulkerson): Tìm đường tăng luồng P đối với luồng hiện có. Tăng luồng dọc theo P.
- Khi đã có luồng cực đại, lát cắt hẹp nhất có thể tìm theo thủ tục mô tả trong chứng minh trước.

Cài đặt giải thuật Ford – Fulkerson

- Có cần xây dựng đồ thị tăng luồng?
  - Không cần xây dựng tường minh.
- Tìm đường tăng luồng theo giải thuật nào?
  - Tìm đường đi theo chiều sâu
  - Tìm đường theo chiều rộng
  - Tìm đường đi ngắn nhất

Giải thuật gán nhãn tìm đường tăng luồng

- Mỗi đỉnh sẽ thuộc một trong ba trạng thái: chưa có nhãn, có nhãn chưa xét, và có nhãn đã xét.
- Nhãn của một đỉnh v gồm có hai phần, $p(v)$ và $e(v)$.
- $p(v)$: Đỉnh trước của v trên đường tăng luồng tìm được.
- $e(v)$: Lượng lớn nhất có thể tăng (giảm).

Giải thuật gán nhãn tìm đường tăng luồng

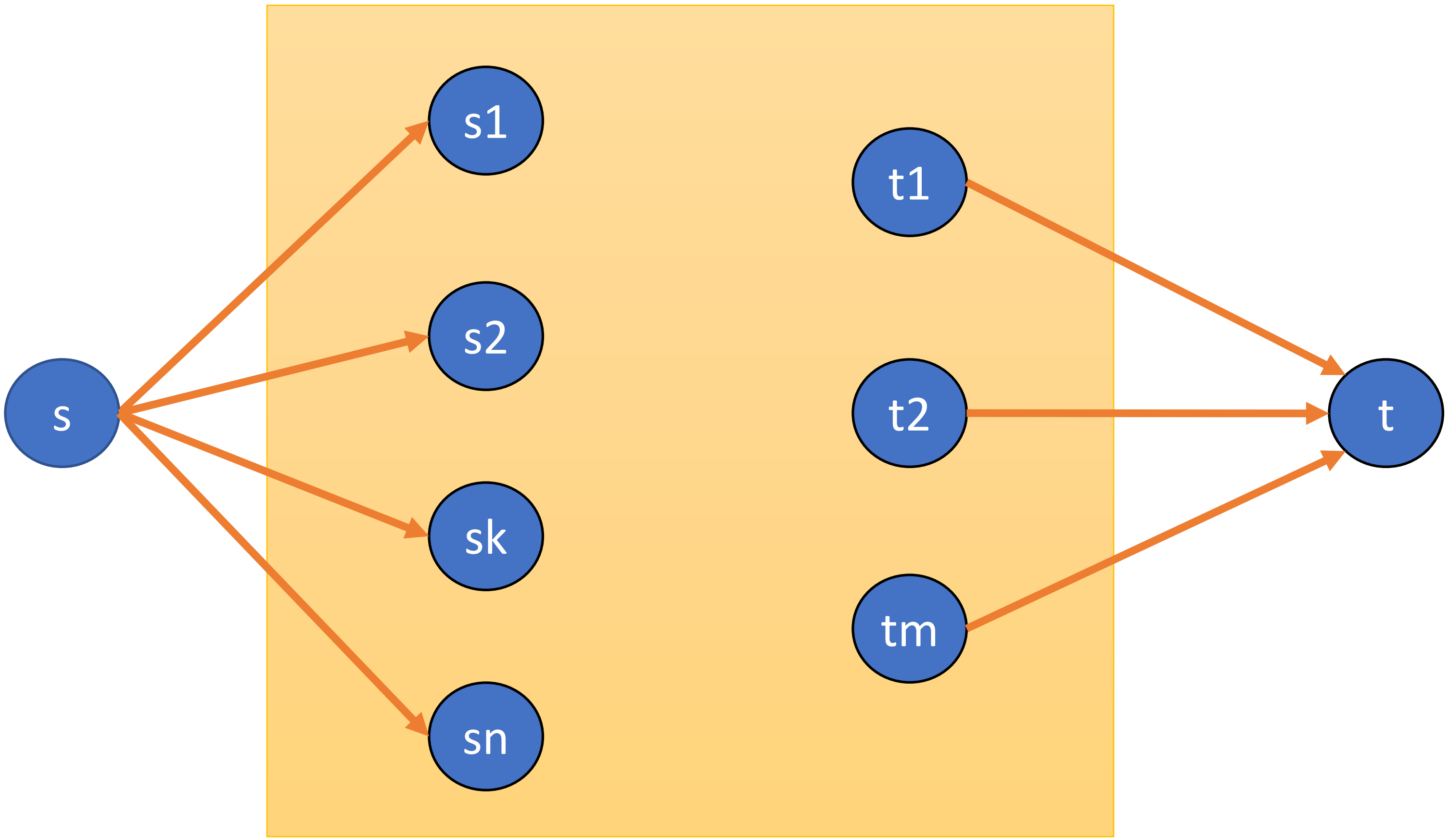
- Đầu tiên, khởi tạo bằng cách gán nhãn đỉnh s là chưa xét, các đỉnh khác chưa có nhãn.
- Từ mỗi đỉnh v có nhãn chưa xét, gán nhãn cho mọi đỉnh chưa có nhãn kề với nó và nhãn của v trở thành đã xét. (*)
- Kết thúc khi t được gán nhãn hoặc không đến được t.

Giải thuật gán nhãn tìm đường tăng luồng

- Cập nhật như thế nào ở phần (*)?
- Nếu c[u, v]>0 và f[u, v] < c[u, v] // còn có thể tăng!
  - p[v] = u.
  - e[v] = min{e[u], c[u, v] – f[u, v]}
- Nếu c[v, u] > 0 và f[v, u] > 0 // thử quay ngược lại
  - p[v] = -u. // để xác định cung thuận/nghịch
  - e[v] = min{e[u], f[v, u]}

Một số ứng dụng bài toán luồng

- Mạng với nhiều điểm phát và điểm thu



Một số ứng dụng bài toán luồng

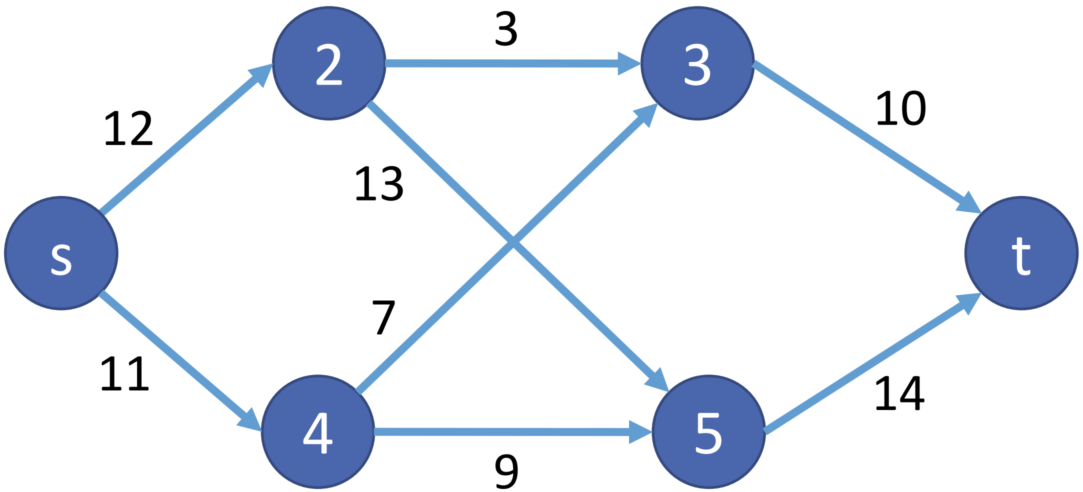
- **Bài toán hệ thống đại diện chung – Ví dụ**
- Một giải vô địch bóng đá có M cầu thủ đăng ký thi đấu. Mỗi cầu thủ của giải bắt buộc phải thuộc ít nhất một câu lạc bộ bóng đá và một hội lao động.
- Có N câu lạc bộ A_1, A_2.. A_n và N hội B_1, B_2… B_n.
- Ban tổ chức giải và liên đoàn lao động cần chọn ra một ban đại diện gồm N cầu thủ sao cho mỗi câu lạc bộ và mỗi hội lao động đều có ít nhất một thành viên của mình trong ban đại diện này.
- Hãy tìm một ban đại diện như vậy.

Một số ứng dụng bài toán luồng

- Cho một mạng có n đỉnh. Mỗi cạnh của mạng có một khả năng thông qua c(u, v) và một cước phí vận chuyển p(u, v) nhất định ứng với một đơn vị hàng.
- Cho trước một lượng hàng S cần vận chuyển từ đỉnh nguồn đến đỉnh đích, tìm phương án tối ưu để chi phí vận chuyển hết lượng hàng S là nhỏ nhất.

Bài tập rèn luyện

Tìm luồng cực đại cho mạng bên dưới.




...the end.