ĐƯỜNG ĐI TRONG ĐỒ THỊ

Đặng Nguyễn Đức Tiến
Đặng Trần Minh Hậu
Nguyễn Ngọc Thảo

Nội dung bài giảng

- Khái niệm về đường đi trong lý thuyết đồ thị
- Chu trình Euler
- Chu trình Hamilton
- Bài toán tìm đường đi ngắn nhất
  - Tìm đường đi ngắn nhất bằng giải thuật Dijkstra
  - Tìm đường đi ngắn nhất bằng giải thuật Bellman-Ford

Khái niệm về đường đi

Các khái niệm về đường đi

- Đường đi (walk) từ u tới v trong đồ thị vô hướng là một dãy các cạnh $e_1, e_2, \dots, e_n$ của đồ thị sao cho $f(e_1) = \{x_0, x_1\}$, $f(e_2) = \{x_1, x_2\}, \dots, f(e_n) = \{x_{n-1}, x_n\}$, với $x_0 = u$ và $x_n = v$.
- Đường đi có độ dài n khi nó đi qua n cạnh và $n + 1$ đỉnh.
- Đối với đơn đồ thị, ta có thể đơn giản hóa ký hiệu đường đi bằng dãy các đỉnh $x_0, x_1, \dots, x_n$.

- Đường đi có hướng và các khái niệm liên quan cũng được định nghĩa tương tự cho đồ thị có hướng.

Các khái niệm về đường đi

- Đường đi mở (open walk) bắt đầu và kết thúc tại hai đỉnh khác nhau.
- Đường đi đóng (closed walk) có đỉnh bắt đầu và đỉnh kết thúc giống nhau.

- Đường đi mở không lặp lại cạnh, nhưng có thể lặp lại đỉnh, được gọi là trail.
- Đường đi mở không lặp lại cạnh, cũng không lặp lại đỉnh, được gọi là path.

- Đường đi đơn không đi qua cùng một cạnh quá một lần.

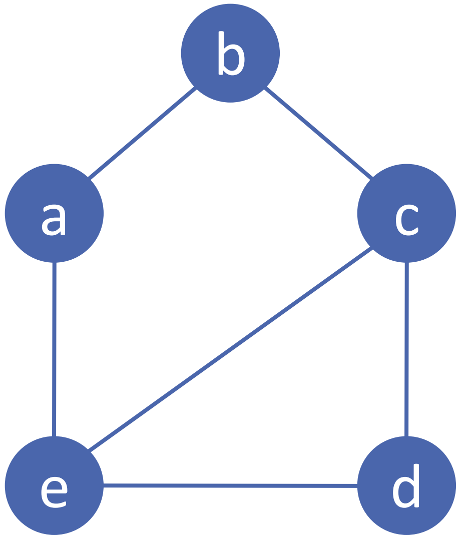
Các khái niệm về chu trình

- Đường đi được gọi là chu trình nếu nó bắt đầu và kết thúc tại cùng một đỉnh, nghĩa là $u = v$.
- Chu trình không lặp lại cạnh được gọi là circuit.
- Chu trình không lặp lại đỉnh được gọi là cycle.

- Chu trình đơn không đi qua cùng một cạnh quá một lần.
- Mạch là chu trình có các đỉnh không lặp lại.

Ví dụ về đường đi trên đồ thị

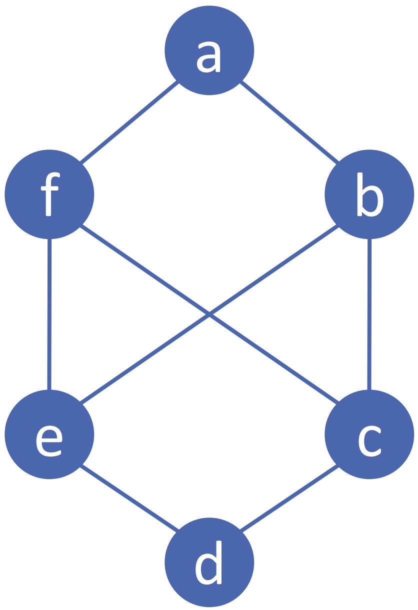
- {a, b, c, e, d} là một đường đi độ dài 4.
- {a, b, e, d} không là đường đi.
- {a, b, c, e, a} là một chu trình.
- {c, e, d, e, c} không phải là đường đi đơn.

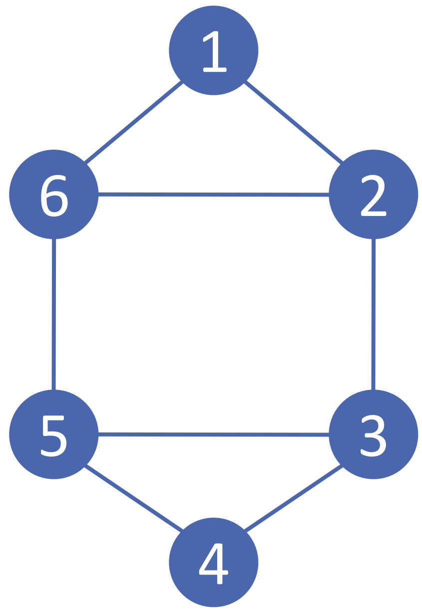


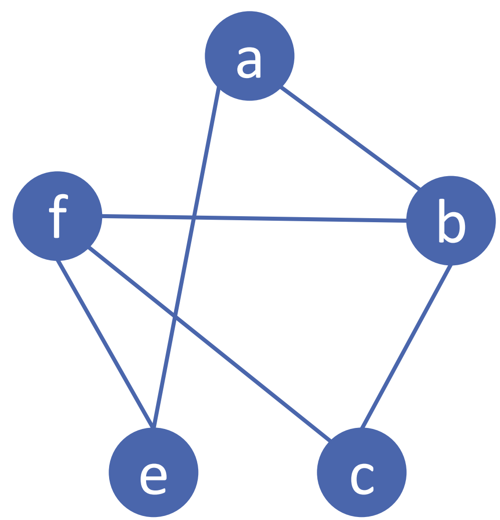
Chu trình và sự đẳng cấu

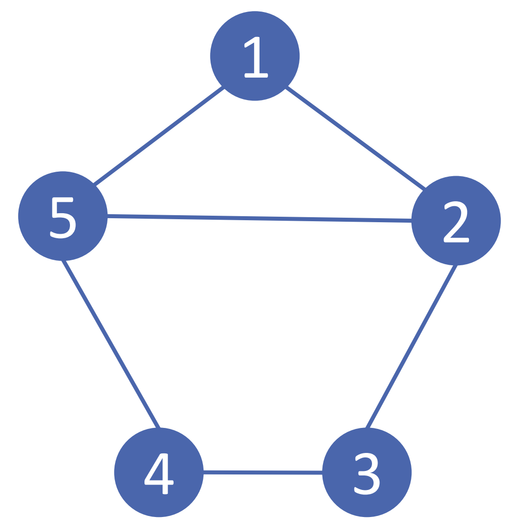
- Nếu hai đồ thị đẳng cấu với nhau, chúng có cùng số lượng chu trình độ dài k với nhau, trong đó $k > 2$.
  - Chu trình được đề cập ở đây không lặp lại cạnh.
- Điều này suy ra *Nếu điều kiện trên không thỏa, nghĩa là hai đồ thị không đẳng cấu với nhau.*

Ví dụ về chu trình và sự đẳng cấu



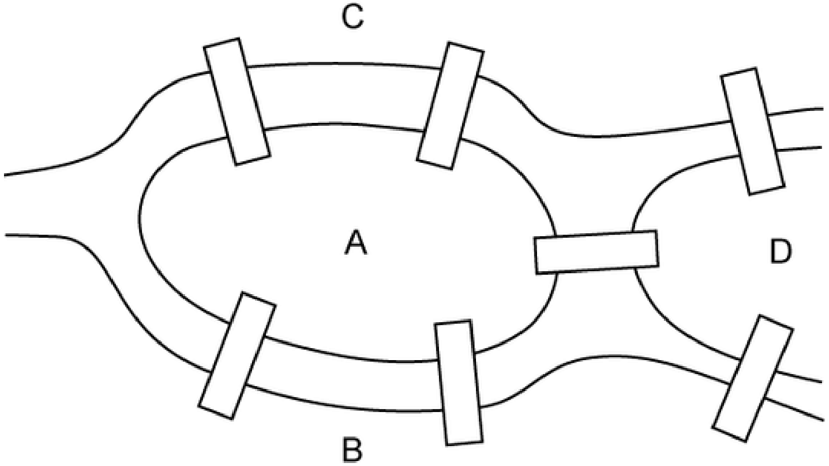






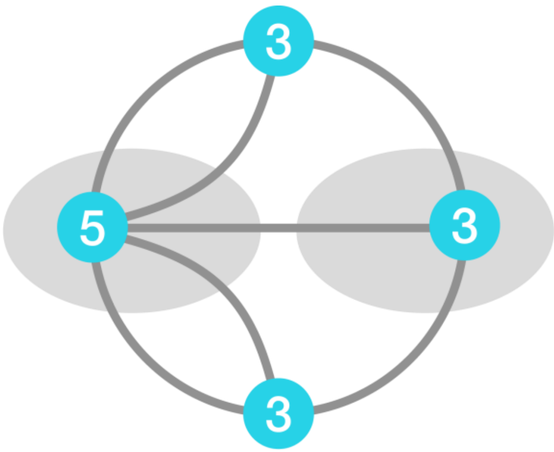
Chu trình Euler

Lịch sử phát triển



Bài toán bảy cây cầu ở Königsberg: Có lộ trình nào đi qua bảy cây cầu mà không đi qua bất kỳ cây cầu nào hai lần?

Có tồn tại chu trình đơn chứa tất cả các cạnh trong đa đồ thị?



Leonard Euler đã chứng minh không tồn tại một lộ trình như thế trong bài toán.

Leonhard Euler
(1707 – 1783)

Nguồn ảnh: STOR-i

Định nghĩa chu trình Euler

- Cho $\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{E})$ là một đa đồ thị vô hướng.
- Chu trình chứa tất cả các cạnh **phân biệt** của đồ thị $\boldsymbol{G}$ được gọi là chu trình Euler (Eulerian circuit hay Euler circuit).
- Đường đi Euler (Euler trail) trong đồ thị $\boldsymbol{G}$ là đường đi chứa mọi cạnh phân biệt của $\boldsymbol{G}$.
- Đồ thị có chu trình Euler được gọi là đồ thị Euler (Euler graph).
- Đồ thị có đường đi Euler được gọi là đồ thị nửa Euler (semi-Euler graph).

Định lý về Chu trình Euler

- **Định lý 1:** Một đa đồ thị liên thông có chu trình Euler khi và chỉ khi mỗi đỉnh của nó đều có bậc chẵn.

- Như vậy bài toán bảy cây cầu đã được giải.
- Do đồ thị có 4 đỉnh bậc lẻ nên không thể có chu trình Euler.

- **Định lý 2:** Đa đồ thị liên thông có đường đi Euler nhưng không có chu trình Euler nếu và chỉ nếu nó có đúng hai đỉnh bậc lẻ.

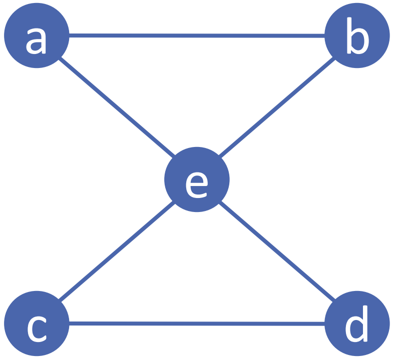
Hệ quả của định lý về Chu trình Euler

- Đồ thị vô hướng liên thông $\boldsymbol{G}$ là nửa Euler khi và chỉ khi nó có không quá hai đỉnh bậc lẻ.

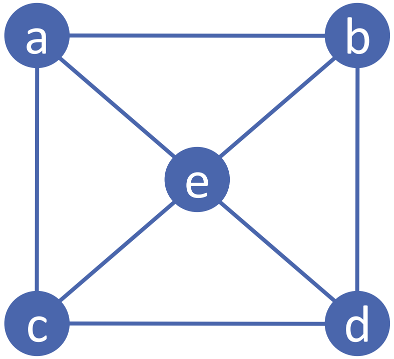
- **Chứng minh:**
  - Nếu $\boldsymbol{G}$ không có đỉnh bậc lẻ: theo định lý, hệ quả đúng.
  - Nếu $\boldsymbol{G}$ có hai đỉnh bậc lẻ u và v. Thêm cạnh $\{u, v\}$, $\boldsymbol{G}$ trở nên không có bậc lẻ. Do vậy khi đó $\boldsymbol{G}$ có chu trình Euler. Suy ra trước khi thêm cạnh $\{u, v\}$, $\boldsymbol{G}$ phải có đường đi Euler từ u đến v.

Bài tập rèn luyện

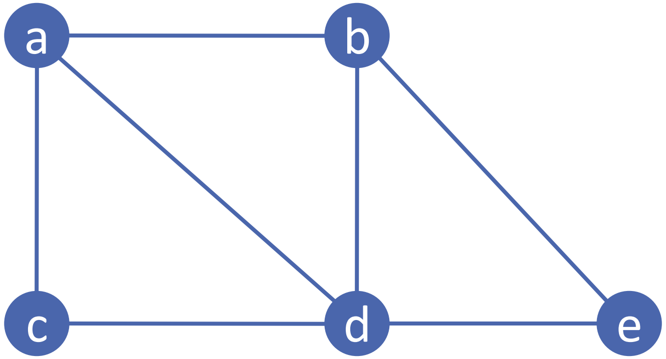
Đồ thị nào trong các hình dưới đây có chu trình Euler? Nếu không, liệu nó có đường đi Euler hay không? Giải thích.



(a)



(b)



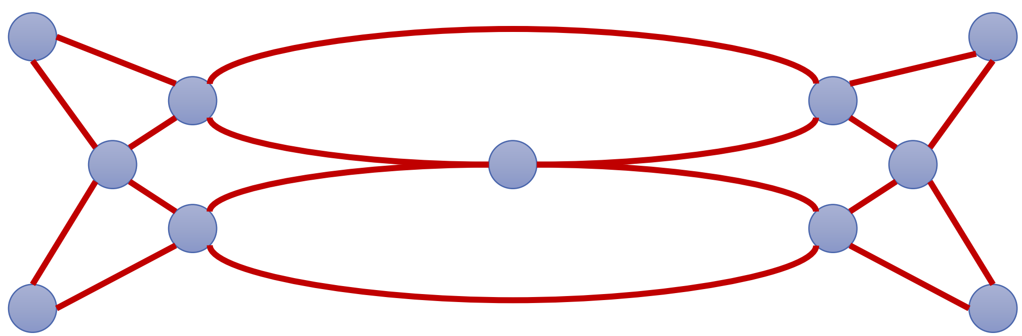
(c)

Giải thuật tìm Chu trình Euler

- Ta dựa vào các định lý và hệ quả đã đề cập trước đó để kiểm tra sự tồn tại của chu trình Euler.
- **Bước khởi tạo**
  - Tìm chu trình $\boldsymbol{C}$ bất kỳ trong $\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{E})$.
  - Loại bỏ khỏi $\boldsymbol{G}$ các cạnh trong chu trình $\boldsymbol{C}$.
- **Bước lặp:** Trong khi $\boldsymbol{E} \neq \emptyset$ thực hiện các bước sau
  - Bước 1. Tìm chu trình $\boldsymbol{C}'$ trong $\boldsymbol{G}$ sao cho tồn tại một đỉnh trong $\boldsymbol{C}'$ thuộc $\boldsymbol{C}$.
  - Bước 2. Loại bỏ khỏi $\boldsymbol{G}$ các cạnh trong chu trình $\boldsymbol{C}'$.
  - Bước 3. Chèn $\boldsymbol{C}'$ vào $\boldsymbol{C}$ ở vị trí thích hợp (vị trí đỉnh chung).
- Kết thúc giải thuật ta có $\boldsymbol{C}$ là chu trình Euler cần tìm.

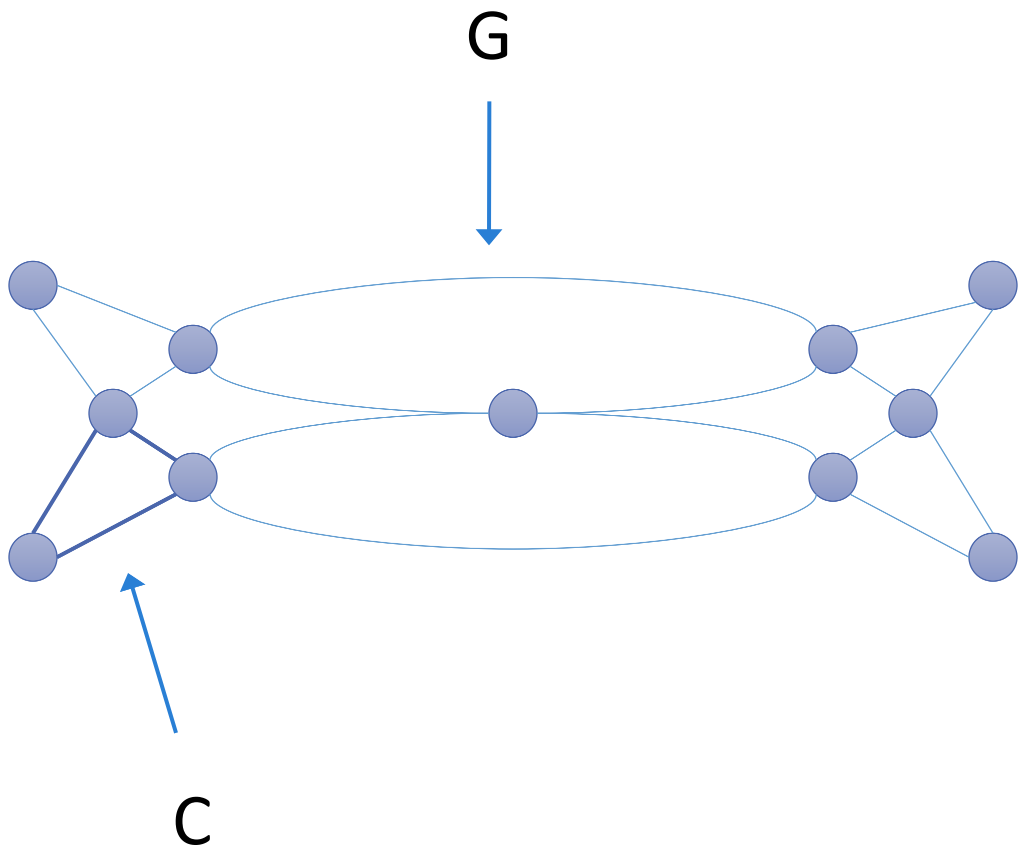
Ví dụ minh họa tìm chu trình Euler

- Có thể vẽ *thanh mã tấu của Mohammed* xuất phát và kết thúc tại một điểm bằng cách vẽ liên tục và không nhấc bút lên được không?
- Và nếu có thể thì vẽ như thế nào?



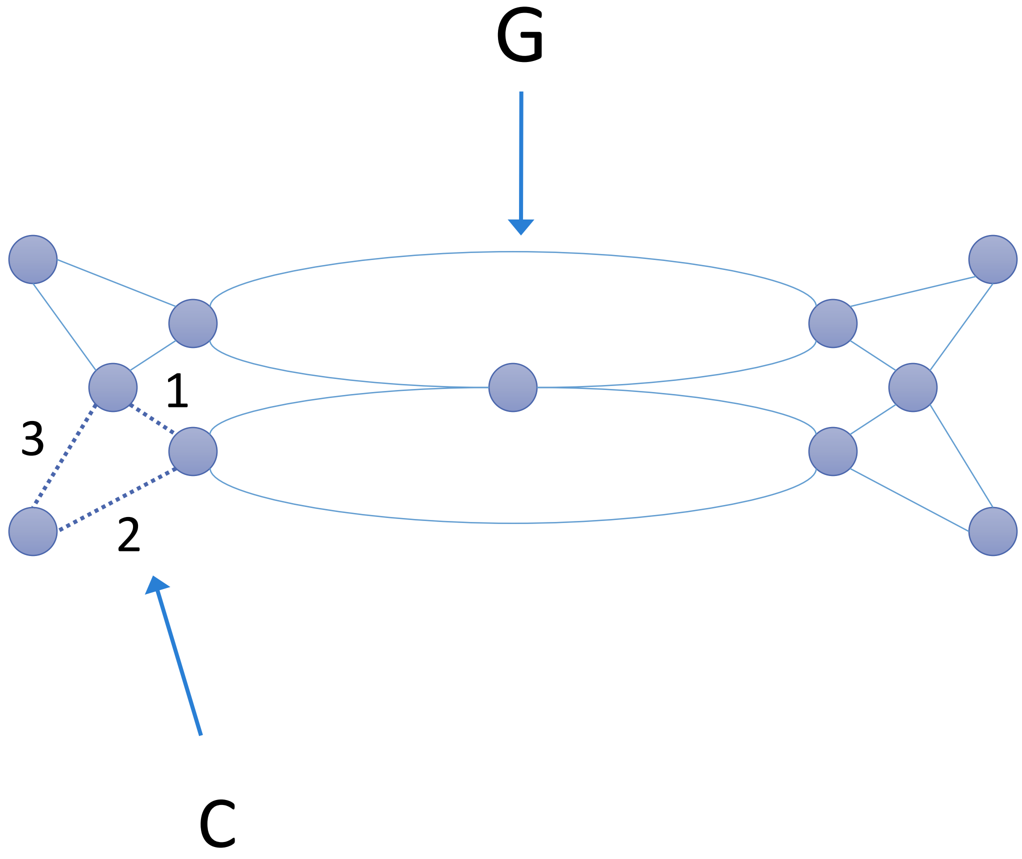
Ví dụ minh họa tìm chu trình Euler

- Tìm một chu trình $\boldsymbol{C}$ bất kỳ.



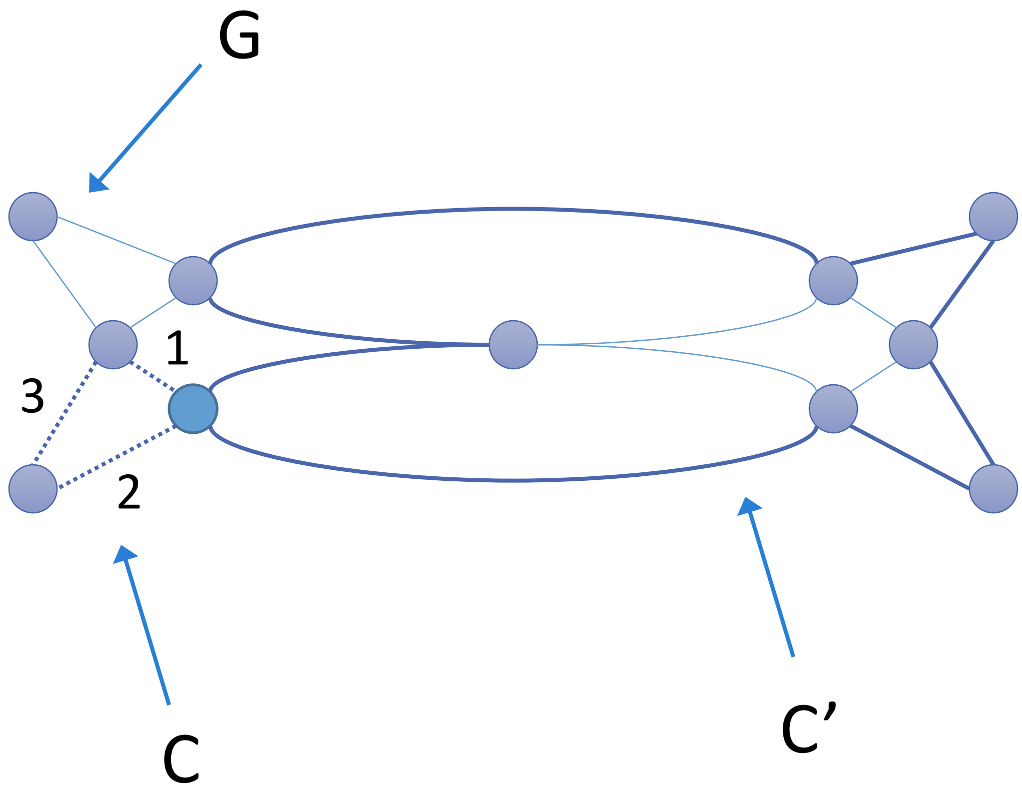
Ví dụ minh họa tìm chu trình Euler

- Xóa chu trình $\boldsymbol{C}$ đã tìm được ra khỏi $\boldsymbol{G}$.



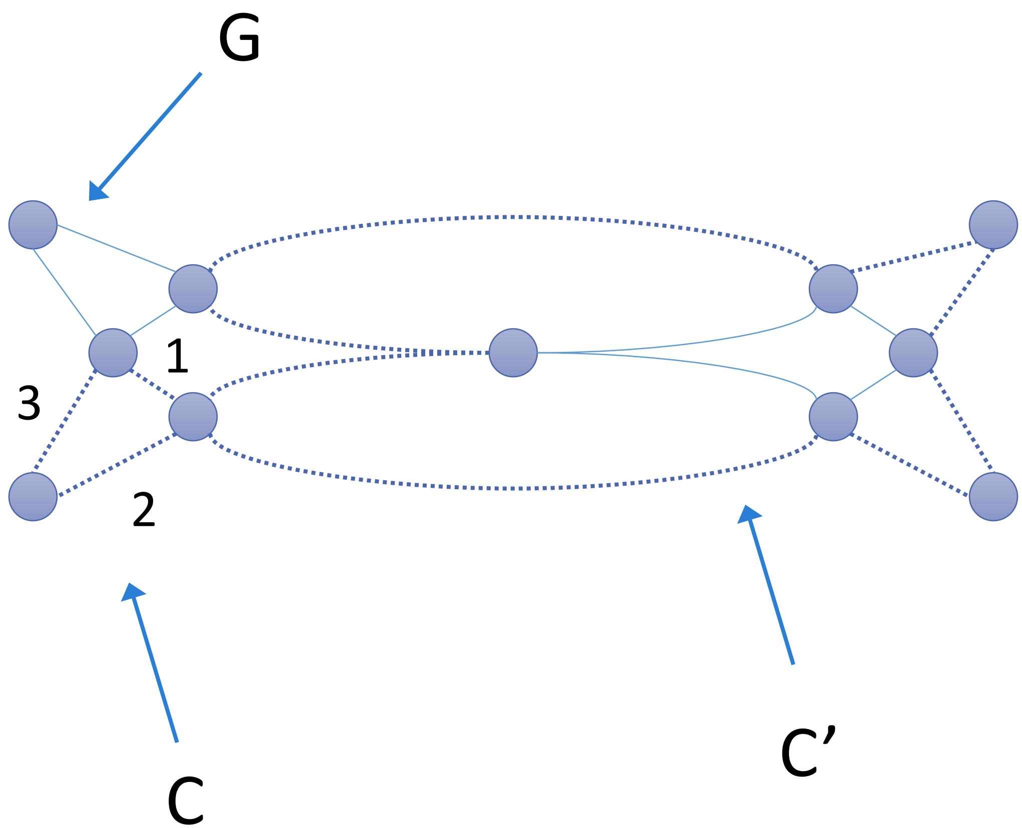
Ví dụ minh họa tìm chu trình Euler

- Tìm chu trình $\boldsymbol{C}'$ trên $\boldsymbol{G}$ có đỉnh trên chu trình $\boldsymbol{C}$ đã tìm được.



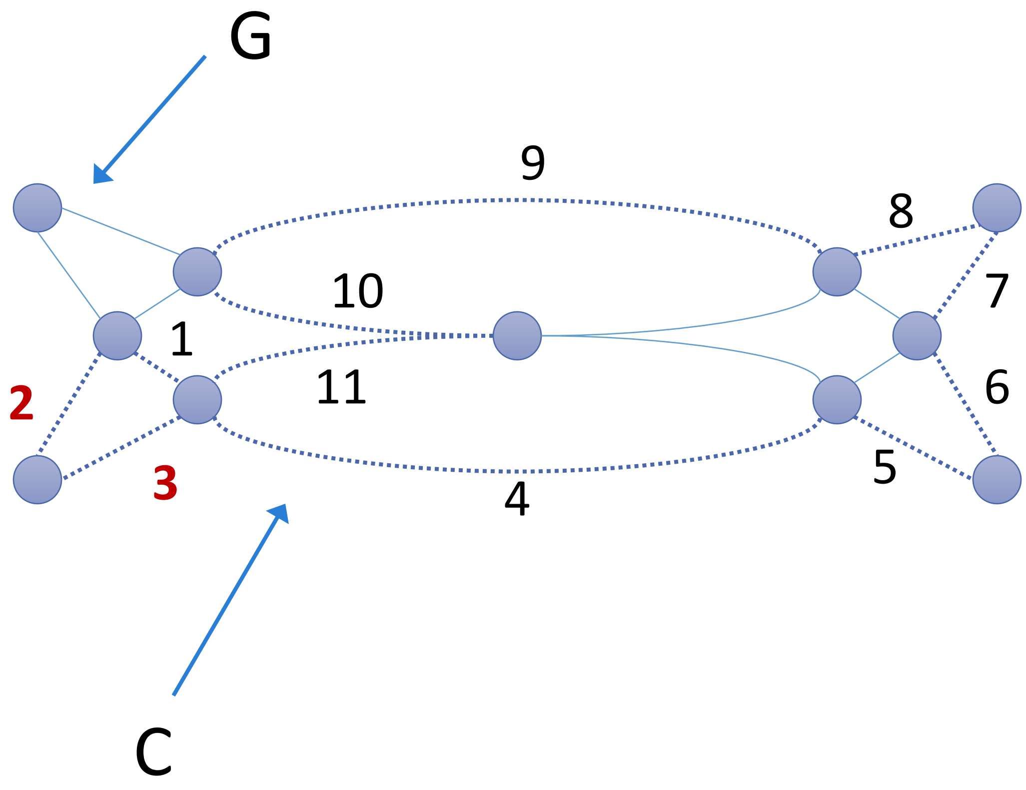
Ví dụ minh họa tìm chu trình Euler

- Xóa chu trình $\boldsymbol{C'}$ vừa tìm được khỏi $\boldsymbol{G}$.



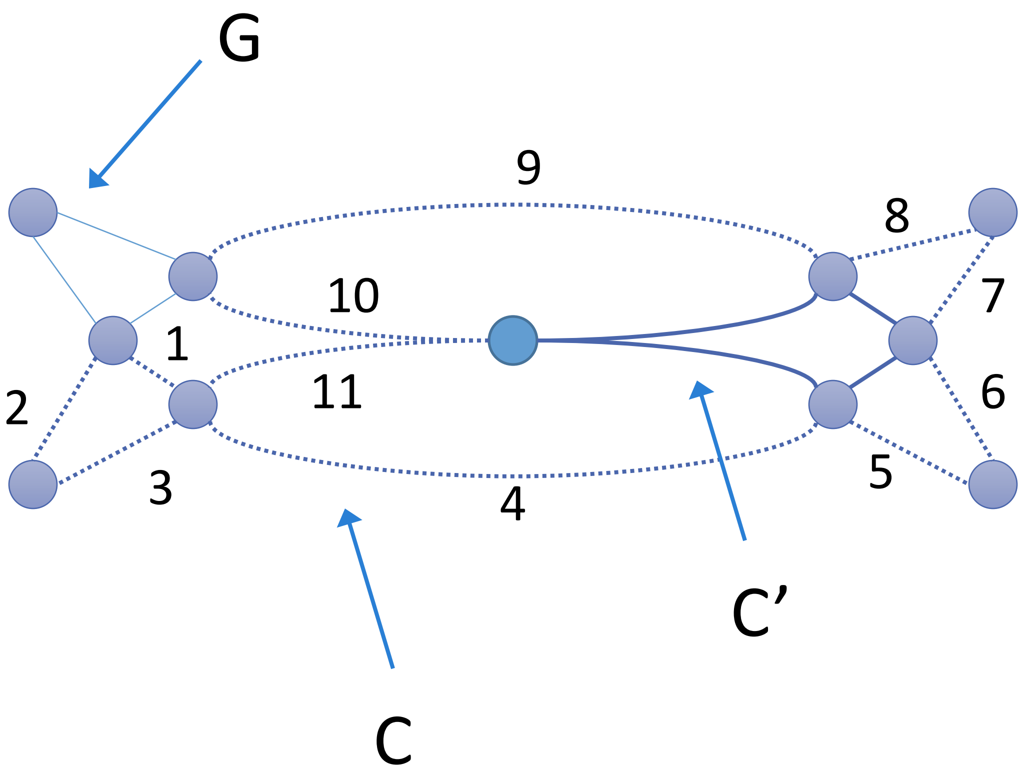
Ví dụ minh họa tìm chu trình Euler

- Thêm chu trình $\boldsymbol{C'}$ vừa tìm được vào $\boldsymbol{C}$.



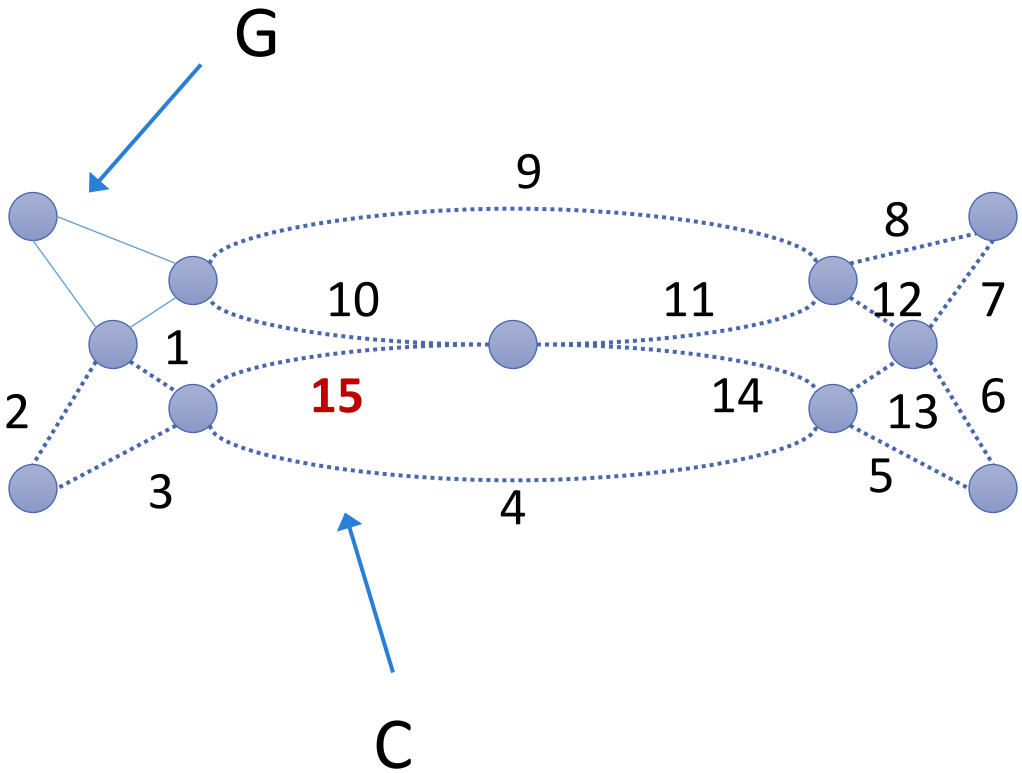
Ví dụ minh họa tìm chu trình Euler

- Tìm chu trình $\boldsymbol{C}'$ trên $\boldsymbol{G}$ có đỉnh trên chu trình $\boldsymbol{C}$ đã tìm được.



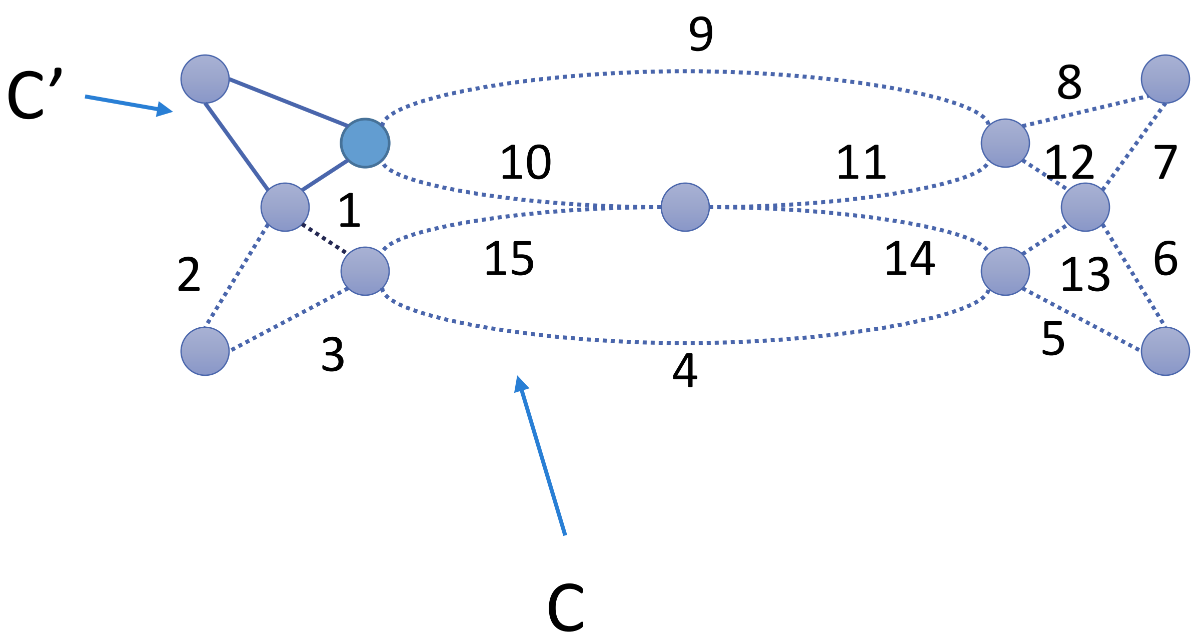
Ví dụ minh họa tìm chu trình Euler

- Thêm chu trình $\boldsymbol{C'}$ vừa tìm được vào $\boldsymbol{C}$. Xóa $\boldsymbol{C'}$ ra khỏi $\boldsymbol{G}$.



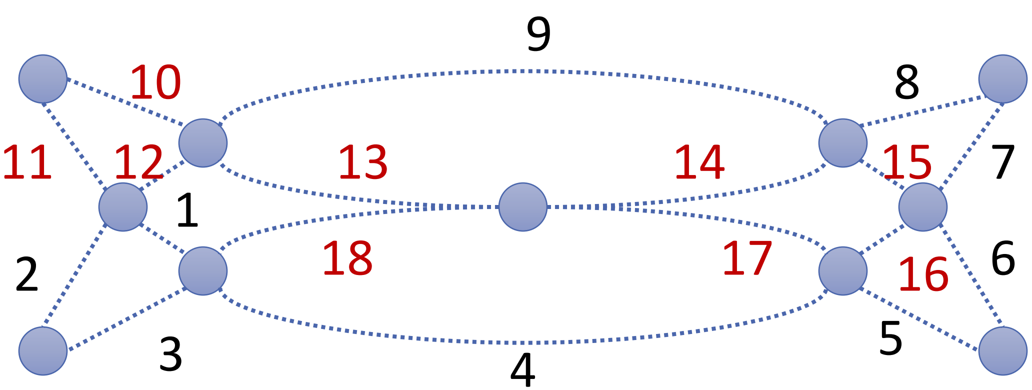
Ví dụ minh họa tìm chu trình Euler

- Tìm chu trình $\boldsymbol{C}'$ trên $\boldsymbol{G}$ có đỉnh trên chu trình $\boldsymbol{C}$ đã tìm được.



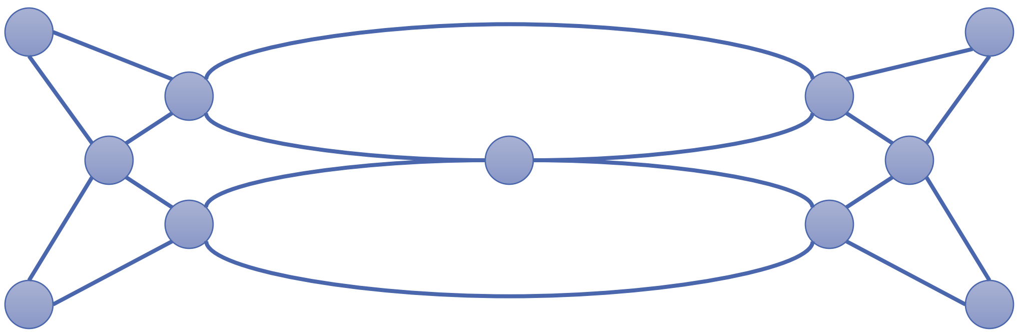
Ví dụ minh họa tìm chu trình Euler

- Thêm chu trình $\boldsymbol{C'}$ vừa tìm được vào $\boldsymbol{C}$. Xóa $\boldsymbol{C'}$ ra khỏi $\boldsymbol{G}$.



Ví dụ minh họa tìm chu trình Euler

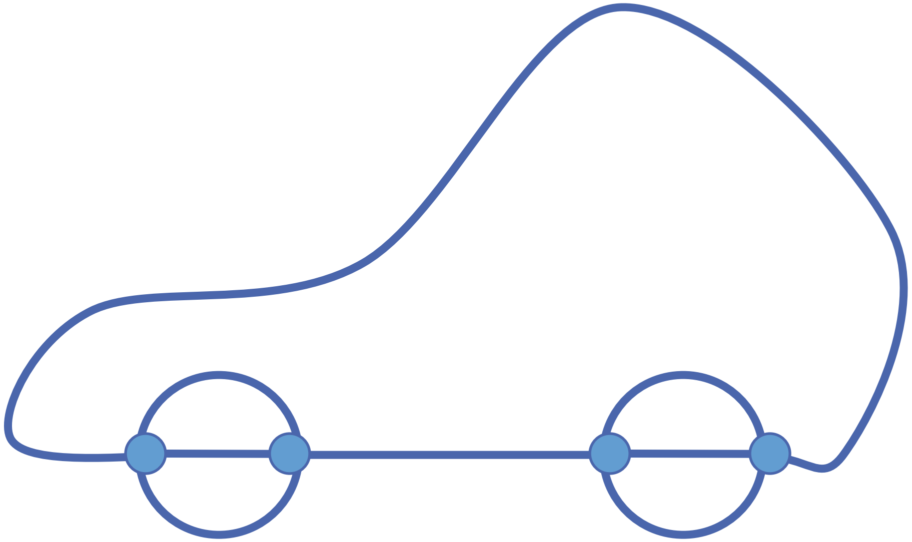
- Vậy ta có thể vẽ thanh mã tấu Mohammed liên tục bằng một nét và xuất phát/kết thúc cùng một điểm.



Giải thuật Fleury tìm chu trình Euler

- Ta dựa vào các định lý và hệ quả đã đề cập trước đó để kiểm tra sự tồn tại của chu trình Euler.
- Bước 1. Chọn một đỉnh $\boldsymbol{u}$ tùy ý để bắt đầu.
- Bước 2. Chọn một cạnh $\boldsymbol{e}$ xuất phát từ $\boldsymbol{u}$ để đi tiếp, chỉ chọn cạnh cầu khi nào không còn lựa chọn nào khác.
- Bước 3. Đánh dấu cạnh đã đi qua cho biết ta không thể quay lại cạnh đó.
- Bước 4. Đi theo cạnh $\boldsymbol{e}$ đó đến đỉnh tiếp theo.
- Bước 5. Lặp lại Bước 2 cho đến khi nào mọi cạnh đều đã được duyệt.

Ví dụ minh họa giải thuật Fleury

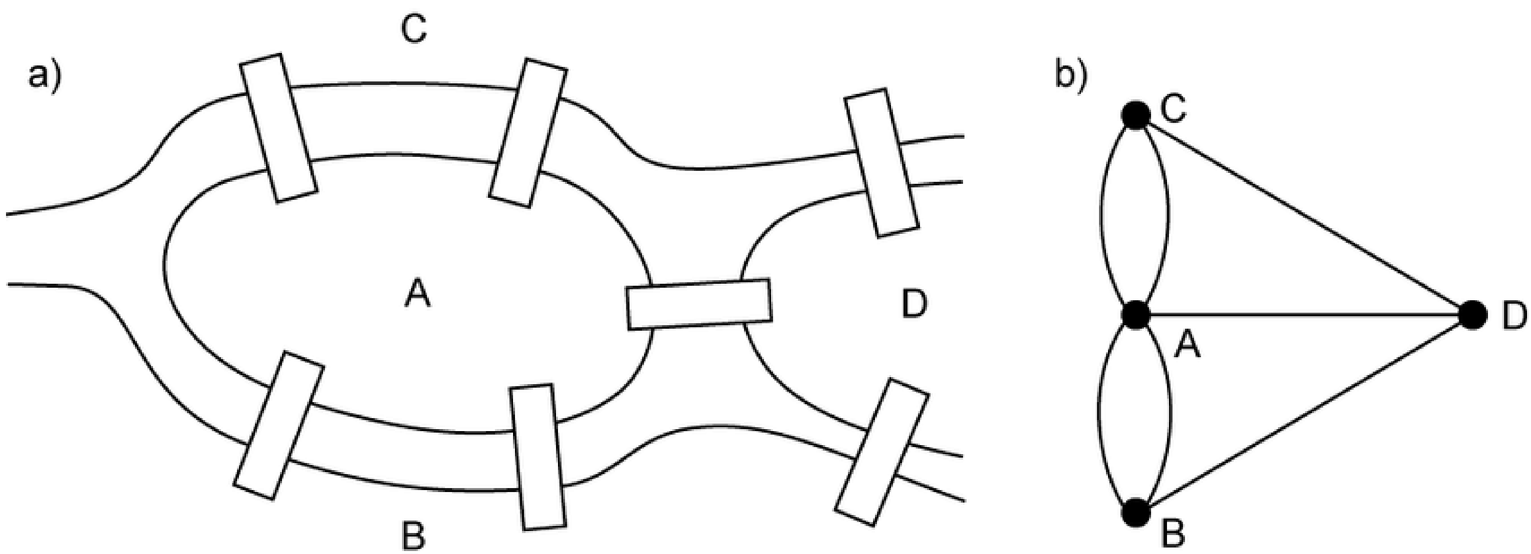


Chu trình Euler: Ứng dụng

- Bài toán người đưa thư Trung Hoa (the Chinese postman problem, Guan Meigu, 1962): Một nhân viên bưu điện cần phát thư đến những căn nhà trên các con phố trong một quận. Xác định lộ trình phát thư đi qua mỗi con phố một lần.
- Sinh học: đường đi Euler được dùng để sắp xếp phân tử thành chuỗi DNA.
- Tác vụ bố trí các mạch điện, kỹ thuật multi-casting trong mạng máy tính, v.v.

Bài tập rèn luyện

Lần này ngoài 7 chiếc cầu đã được xây dựng từ thế kỷ XVIII ở Kaliningrad, người ta xây thêm 2 chiếc nữa nối vùng B với vùng C và nối vùng B với vùng D. Một người nào đó có thể đi qua 9 chiếc cầu, mỗi chiếc đi qua đúng một lần và trở về nơi xuất phát được không?

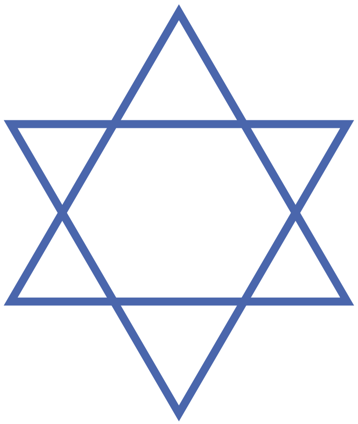


Hình mình họa bố trí vật lý của bảy cây cầu (bên trái) và biểu diễn đồ thị tương ứng (bên phải) cho bài toán ban đầu.

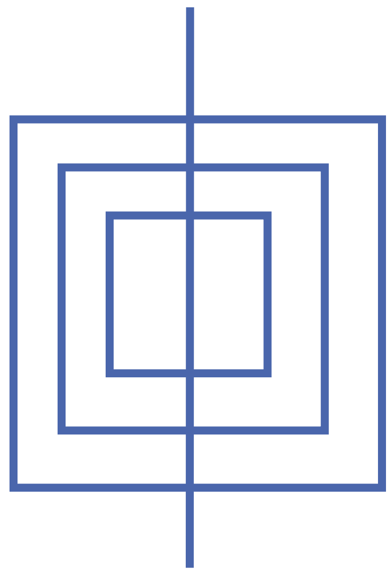
Nguồn ảnh: [ResearchGate]

Bài tập rèn luyện

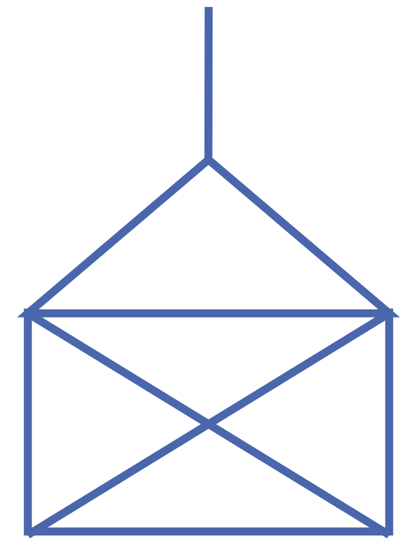
Xác định xem các hình sau đây có thể vẽ bằng một nét hay không.



(a)



(b)



(c)

Bài tập rèn luyện

Với giá trị nào của m, n các đồ thị sau đây có chu trình Euler? Tương tự, Đường đi Euler?

a) K_n

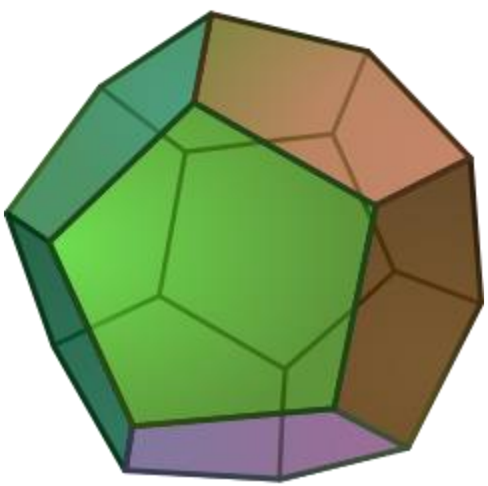
b) C_n

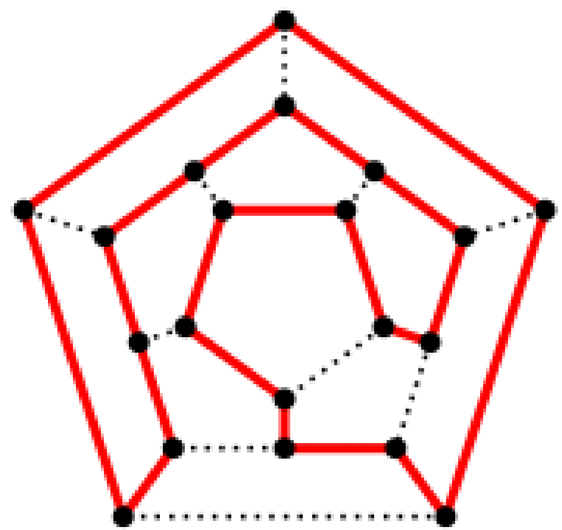
c) $K_{m, n}$

Chu trình Hamilton

Lịch sử phát triển

- Giả sử có một khối thập nhị diện (dodecahedron), mỗi mặt là một ngũ giác đều. Mỗi đỉnh trong 20 đỉnh khối này được đặt tên một thành phố. Hãy tìm một đường xuất phát từ một thành phố, đi dọc theo cạnh của khối, ghé thăm mỗi một trong 19 thành phố còn lại đúng một lần, cuối cùng trở về thành phố ban đầu.





W. R. Hamilton
(1805 – 1865)

Định nghĩa chu trình Hamilton

- Cho $\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{E})$ là một đơn đồ thị vô hướng.
- Đường đi $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$ trong đồ thị $\boldsymbol{G}$ được gọi là đường đi Hamilton (Hamiltonian path, Hamilton path) nếu $\boldsymbol{V} = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ và $x_i \neq x_j$, với $0 \leq i < j \leq n$.
- Chu trình $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n, x_0$ $(n > 1)$ trong đồ thị $\boldsymbol{G}$ gọi là chu trình Hamilton (Hamilton cycle) nếu $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$ là đường đi Hamilton.
- Đồ thị chứa chu trình Hamilton được gọi là đồ thị Hamilton (Hamilton graph).
- Đồ thị chứa đường đi Hamilton được gọi là đồ thị nửa Hamilton (semi-hamilton graph).

Nhận biết đồ thị Hamilton

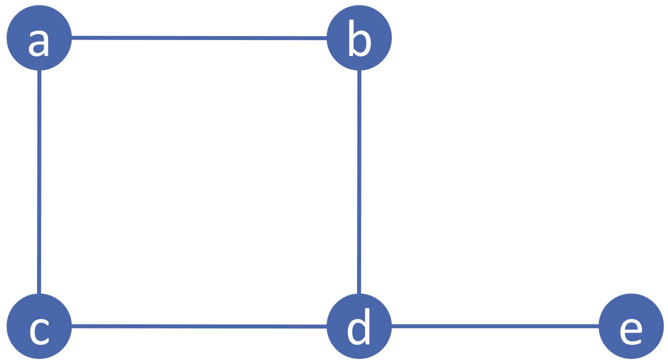
- Cho đến nay, người ta vẫn chưa tìm ra được điều kiện cần và đủ để tồn tại chu trình Hamilton.
- Các kết quả thu được phần lớn là các điều kiện đủ để một đồ thị là đồ thị Hamilton.
- Phần lớn các kết quả này đều có dạng *"Nếu đồ thị $\boldsymbol{G}$ có số cạnh đủ lớn thì $\boldsymbol{G}$ là đồ thị Hamilton."*

Nhận biết đồ thị không là Hamilton

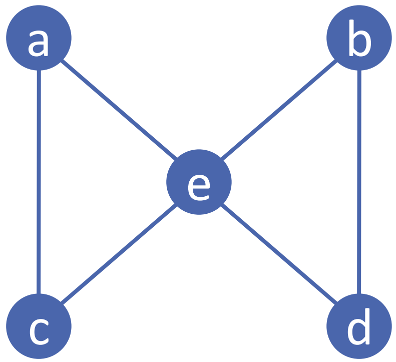
- Một số tính chất sau đây có thể dùng để nhận biết một đồ thị không là đồ thị Hamilton.
- **Tính chất 1:** Đồ thị có đỉnh treo không thể có chu trình Hamilton.
  - Mỗi đỉnh trong chu trình Hamilton đều gắn với hai cạnh của chu trình
- **Tính chất 2:** Nếu một đỉnh có bậc hai thì cả hai cạnh liên thuộc với đỉnh này phải là một phần của chu trình Hamilton.
- **Lưu ý:** Chu trình Hamilton không thể chứa chu trình nhỏ hơn trong nó.

Bài tập rèn luyện

Hãy chỉ ra rằng các đồ thị sau không là đồ thị Hamilton.



(a)



(b)

Một số định lý về chu trình Hamilton

- **Định lý Dirac** (1952)

  Đơn đồ thị vô hướng $\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{E})$ với n đỉnh ($n \geq 3$) có chu trình Hamilton nếu

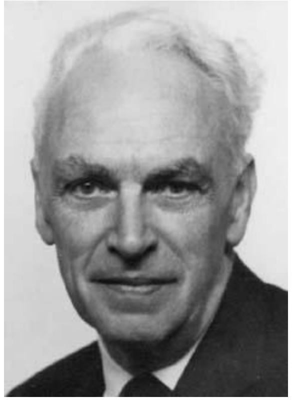
$$\mathbf{deg}(\boldsymbol{v}) \geq \frac{\boldsymbol{n}}{\mathbf{2}}, \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$$

Gabriel Andrew Dirac
(1925 – 1984)

- **Định lý Ore** (1960):

  Đồ thị vô hướng $\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{E})$ với $|V| \geq 3$ có chu trình Hamilton khi

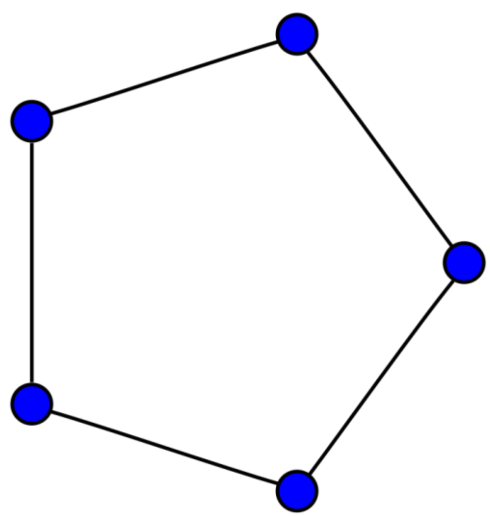
$$\mathbf{deg}(\boldsymbol{u}) + \mathbf{deg}(\boldsymbol{v}) \geq \boldsymbol{n}, \forall (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \notin \boldsymbol{E}$$



Øystein Ore
(1899 – 1968)

Lưu ý về định lý Dirac và Ore

- Cả hai định lý Dirac và Ore đều chỉ là điều kiện đủ để một đơn đồ thị liên thông có tồn tại chu trình Hamilton.
- Tuy nhiên, chúng không phải là điều kiện cần.
- Ví dụ, đồ thị C_5 có chu trình Hamilton nhưng không thỏa mãn các giả định của định lý Ore hay định lý Dirac.



Không thỏa định lý Dirac vì
$\deg(v) = 2 < 5/2, \forall v \in V$

Không thỏa định lý Ore vì
$\deg(u) + \deg(v) = 4 < 5, \forall (u, v) \notin E$

Chứng minh Định lý Dirac

- Chứng minh này dựa trên Định lý Ore.
- Với mọi cặp đỉnh $u, v \in \boldsymbol{V}$, không quan tâm có tồn tại cạnh $(u, v) \in \boldsymbol{E}$ hay không nếu ta đều có:

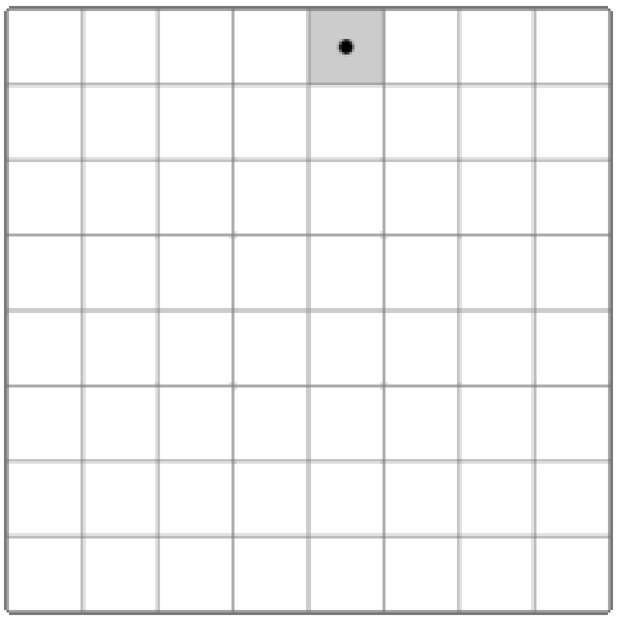
$$\deg(u) + \deg(v) \geq \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n$$

- Do đó, theo định lý Ore, đồ thị có chứa chu trình Hamilton [đpcm].

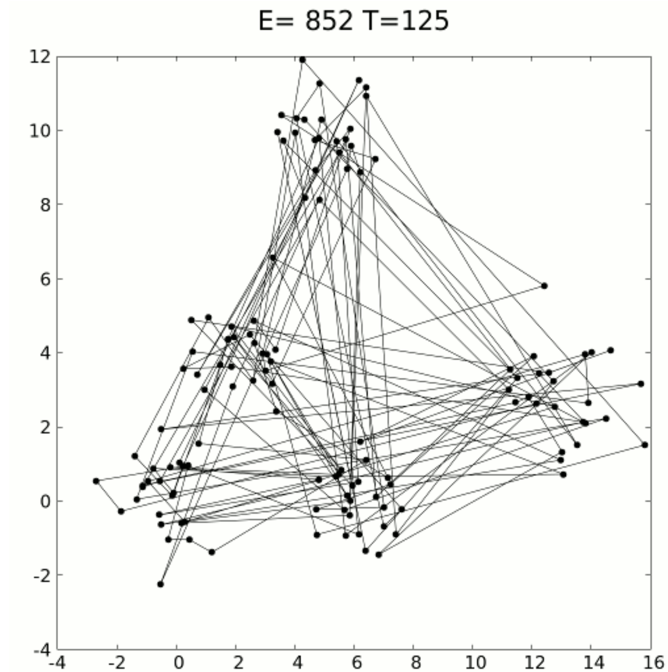
Chu trình Hamilton: Ứng dụng

- Bài toán Mã đi tuần (Knight tour problem): Cho bàn cờ vua có kích thước 8 x 8. Đặt một con mã ở vị trí bất kỳ (x, y). Hãy tìm lộ trình sao cho con mã đi qua hết các ô của bàn cờ, mỗi ô đúng một lần.
- Bài toán người bán hàng (Traveller Salesman Problem): Cho N thành phố và M tuyến đường giao thông hai chiều giữa chúng. Một người thương gia xuất phát từ một thành phố, muốn đi thăm tất cả các thành phố, mỗi thành phố đúng một lần và cuối cùng quay lại thành phố ban đầu sao cho hành trình người này đi qua là ngắn nhất.
- Bài toán sắp xếp chỗ ngồi: Có N đại biểu từ N nước đến dự hội nghị quốc tế. Mỗi ngày họp mọi người ngồi quanh một bàn tròn. Hỏi phải bố trí bao nhiêu ngày và bố trí như thế nào sao cho trong mỗi ngày, mỗi người đều có hai người kế bên là bạn mới.

Chu trình Hamilton: Ứng dụng



Đường đi Hamilton cho bài toán Mã đi tuần



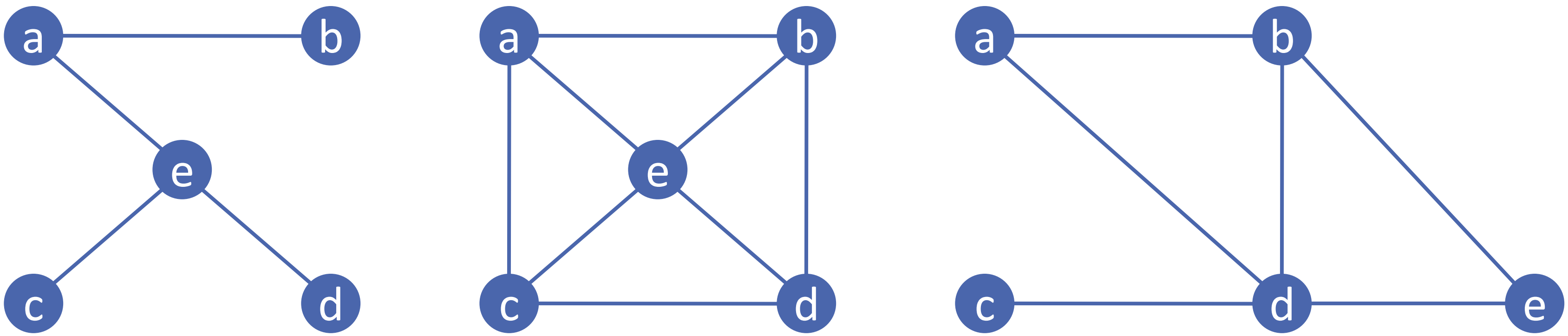
Chu trình Hamilton cho bài toán Người bán hàng sử dụng giải thuật Simulated Annealing

Nguồn ảnh: Wikipedia,

Bài tập rèn luyện

Xác định xem các đồ thị sau đây có là đồ thị Hamilton hay không? Nếu có, hãy chỉ ra, nếu không hãy giải thích.

Câu hỏi tương tự với đồ thị nửa Hamilton.

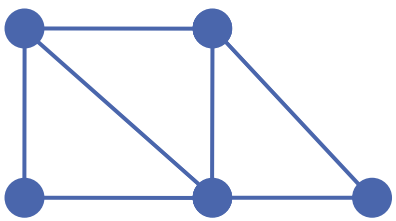


(a) (b) (c)

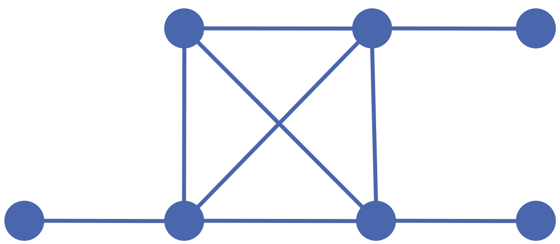
Bài tập rèn luyện

Xác định xem các đồ thị sau đây có là đồ thị Hamilton hay không? Nếu có, hãy chỉ ra, nếu không hãy giải thích.

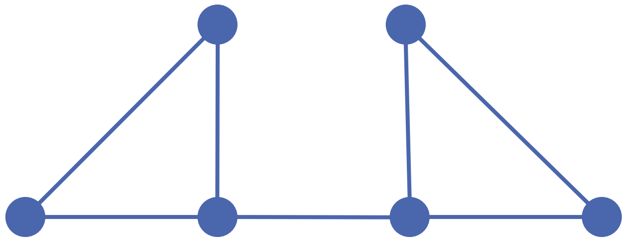
Câu hỏi tương tự với đồ thị nửa Hamilton.



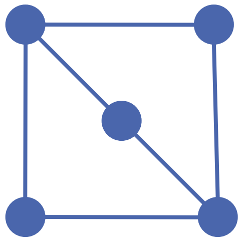
(a)



(b)



(c)

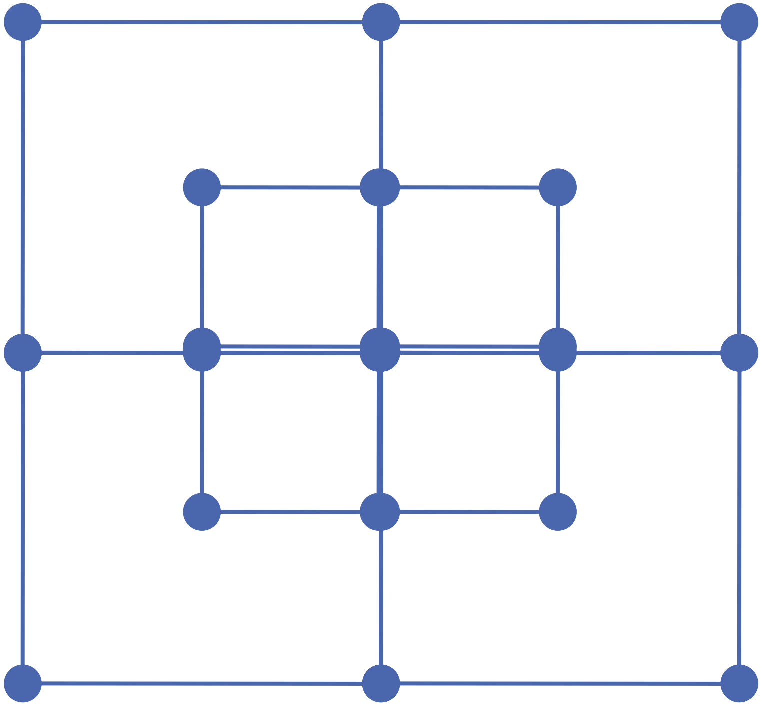


(d)

Bài tập rèn luyện

Xác định xem các đồ thị sau đây có là đồ thị Hamilton hay không? Nếu có, hãy chỉ ra, nếu không hãy giải thích.

Câu hỏi tương tự với đồ thị nửa Hamilton.



Bài tập rèn luyện

1. Với các giá trị nào của n, đồ thị sau đây có đường đi Hamilton
   a) K_n
   b) C_n

2. Với giá trị nào của m và n thì đồ thị phân đôi đầy đủ $K_{m,n}$ có chu trình Hamilton.

3. Đồ thị có một đỉnh kề với ba đỉnh bậc hai thì có chu trình Hamilton hay không? Giải thích và cho ví dụ minh họa, nếu có.

Bài toán tìm đường đi ngắn nhất

Phát biểu bài toán

- Cho $\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{E})$ là đồ thị có hướng và có trọng số, trong đó mỗi cạnh e có trọng số $w(e)$.
- Trọng số của đồ thị $\boldsymbol{G}'$, là đồ thị con của $\boldsymbol{G}$, được định nghĩa như sau

$$\boldsymbol{w(G') = \sum_{e \in G'} w(e)}$$

- Nếu $\boldsymbol{G}'$ là đường đi hay chu trình thì $w(\boldsymbol{G}')$ là độ dài của $\boldsymbol{G}'$.
- Nếu $\boldsymbol{G}'$ là mạch (chu trình không lặp lại đỉnh) và $w(\boldsymbol{G}') < 0$ thì $\boldsymbol{G}'$ gọi là mạch âm.

Phát biểu bài toán

- Cho $\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{E})$ là đồ thị có hướng có trọng số và $s, t \in \boldsymbol{V}$.
- Gọi $\boldsymbol{P}$ là tập hợp tất cả các đường đi từ s tới t.
- Bài toán *Tìm $p_0 \in P$ sao cho $p_0 = \min\{w(p): p \in P\}$* được gọi là bài toán đường đi ngắn nhất (shortest path problem) và p_0 là đường đi ngắn nhất (shortest path) từ s tới t.

Nhận xét bài toán tìm đường đi ngắn nhất

1. Các giải thuật tìm đường đi ngắn nhất được phát biểu cho đồ thị có hướng có trọng số, nhưng chúng đều có thể áp dụng cho đồ thị vô hướng bằng cách xem mỗi cạnh của đồ thị vô hướng như hai cạnh ngược chiều nhau có cùng trọng số và nối cùng một cặp đỉnh.
2. Ta có thể bỏ bớt các cạnh song song, chỉ giữ lại một cạnh có trọng số nhỏ nhất trong số các cạnh song song.
3. Ta cũng có thể bỏ đi các khuyên có trọng số không âm vì chúng không ảnh hưởng đến kết quả của bài toán. Tuy nhiên, các khuyên có trọng số âm có thể dẫn đến trường hợp bài toán không có lời giải.
4. Nếu $\boldsymbol{G}$ có mạch âm q trên đường đi từ u đến v thì đường đi ngắn nhất từ u đến v không tồn tại. Nhận xét này được mở rộng từ Nhận xét 3.

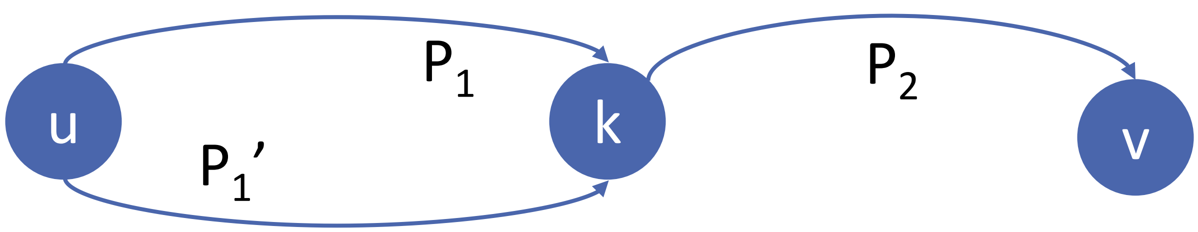
Nguyên lý Bellman

- Hầu hết các giải thuật tìm đường đi ngắn nhất đều đặt cơ sở trên nguyên lý quy hoạch động Bellman.
- Đây là nguyên lý tổng quát cho các bài toán tối ưu hóa rời rạc

Richard Ernest Bellman
(1920 – 1984)

Nguyên lý Bellman

- Nguyên lý Bellman cho bài toán đường đi ngắn nhất trình bày như sau.
- Giả sử $\boldsymbol{P}$ là đường đi ngắn nhất từ đỉnh u đến đỉnh v và k là một đỉnh nằm trên đường đi $\boldsymbol{P}$.
- Giả sử $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P_1} \oplus \boldsymbol{P_2}$ với $\boldsymbol{P_1}$ là đường đi con của $\boldsymbol{P}$ từ u đến k và $\boldsymbol{P_2}$ là đường đi con của $\boldsymbol{P}$ từ k đến v.
- Nguyên lý Bellman nói rằng $\boldsymbol{P_1}$ cũng là đường đi ngắn nhất từ u đến k.
  - Nếu có một đường đi khác là $\boldsymbol{P_1'}$ từ u đến k có trọng số nhỏ hơn hơn $\boldsymbol{P_1}$ thì $\boldsymbol{P_1'} \oplus \boldsymbol{P_2}$ là đường đi từ u đến v mà có trọng số nhỏ hơn $\boldsymbol{P}$.
  - Điều này mâu thuẫn với tính ngắn nhất của $\boldsymbol{P}$.



$$w(\boldsymbol{P_1'}) < w(\boldsymbol{P_1}) \Rightarrow w(\boldsymbol{P_1'} \oplus \boldsymbol{P_2}) < w(\boldsymbol{P_1} \oplus \boldsymbol{P_2}) = w(\boldsymbol{P})$$

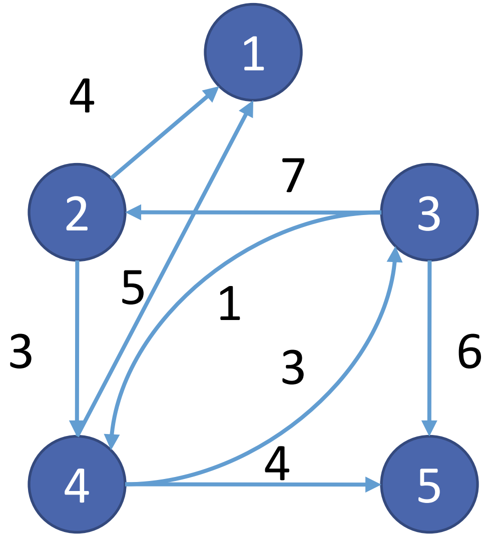
Điều kiện tồn tại lời giải

- Gọi $\boldsymbol{P}$ là một đường đi từ đỉnh u đến đỉnh v, và giả sử $\boldsymbol{P}$ có chứa một mạch μ.
- Nếu độ dài $L(\mu) \geq 0$ thì có thể cải tiến đường đi $\boldsymbol{P}$ bằng cách bỏ đi mạch μ.
- Nếu $L(\mu) < 0$ thì không tồn tại đường đi ngắn nhất từ u đến v vì nếu quay vòng tại μ càng nhiều vòng thì trọng số của đường đi $\boldsymbol{P}$ càng nhỏ đi, tức là $L(\boldsymbol{P}) \to -\infty$.

Ma trận khoảng cách

- Ma trận khoảng cách (distance matrix) $\boldsymbol{D}$ là ma trận với mỗi ô D_{ij} được định nghĩa như sau

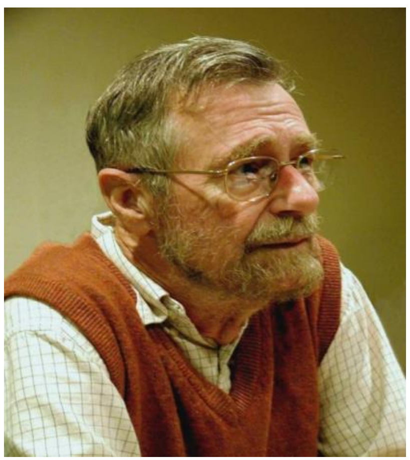
$$D_{ij} = \begin{cases} 0 & i = j \\ w(i,j) & (i,j) \in \boldsymbol{E} \\ +\infty & (i,j) \notin \boldsymbol{E} \end{cases}$$



	1	2	3	4	5
1	0	+∞	+∞	+∞	+∞
2	4	0	+∞	3	+∞
3	+∞	7	0	1	6
4	5	+∞	3	0	4
5	+∞	+∞	+∞	+∞	0

Giải thuật tìm đường đi ngắn nhất

- Dijkstra và Bellman-Ford là hai giải thuật thông dụng nhất để tìm đường đi nhỏ nhất.
- Giải thuật Dijkstra do Edsger Wybe Dijkstra đưa ra vào năm 1959.
- Giải thuật Bellman-Ford do Richard Ernest Bellman và Lester Randolph Ford đề xuất.



Edsger Wybe Dijkstra
(1930 – 2002)

Richard Ernest Bellman
(1920 – 1984)

Lester Randolph Ford
(1886 – 1967)

Mô tả giải thuật Dijkstra

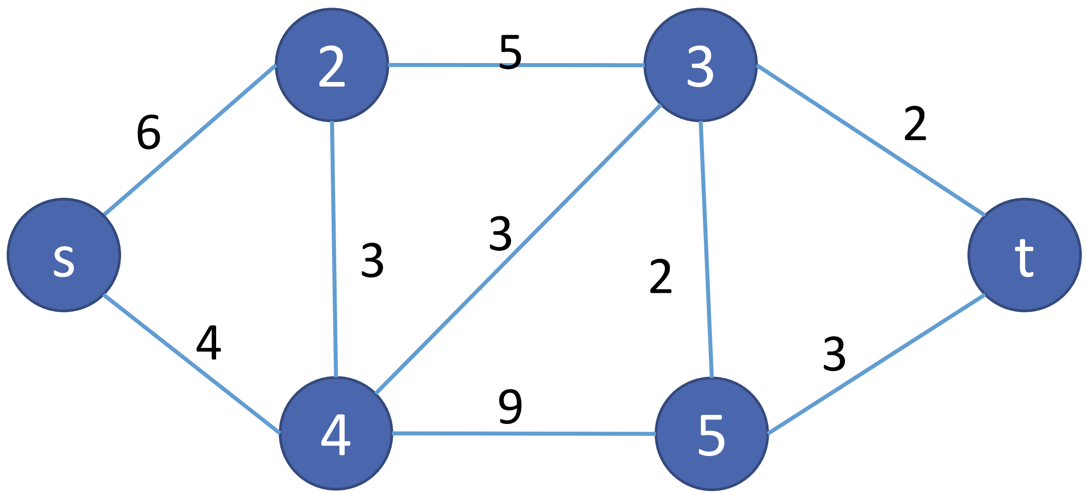
- Xét đồ thị $\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{E})$ có trọng số không âm.
- **Dữ liệu đầu vào:** Ma trận khoảng cách $\boldsymbol{D}$, đỉnh xuất phát u và đỉnh kết thúc v.
- **Dữ liệu đầu ra:** Đường đi ngắn nhất từ u tới v.

- Bước khởi tạo
  - Gán $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{V}$
  - $L[u] = 0, L[k] = +\infty, \forall k \in \boldsymbol{V} \backslash \{u\}$
  - $Prev[k] = -1, \forall k \in \boldsymbol{V}$

Mô tả giải thuật Dijkstra

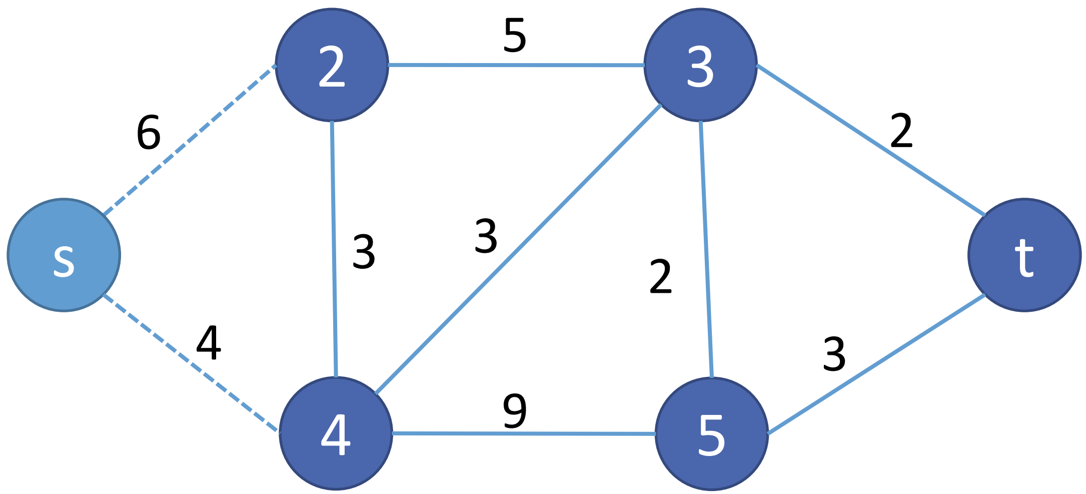
- Bước 1.
  - Nếu $v \notin \boldsymbol{T}$ thì dừng.
    - Giá trị $L[v]$ chính là độ dài đường đi ngắn nhất từ u đến v.
    - $Prev[v]$ là đỉnh nằm ngay trước v trên đường đi đó.
  - Ngược lại sang **Bước 2**
- Bước 2.
  - Chọn đỉnh $i \in \boldsymbol{T}$ sao cho $L[i]$ nhỏ nhất và xóa đỉnh i khỏi $\boldsymbol{T}$.
- Bước 3.
  - Với $\forall k \in \boldsymbol{T}$ và từ đỉnh i (ở **Bước 2**) đến đỉnh k có cạnh nối:
    - Nếu $L[k] > L[i] + D_{ik}$ thì cập nhật $L[k] = L[i] + D_{ik}$ và $Prev[k] = i.$
  - Trở về **Bước 1**.

Ví dụ về giải thuật Dijkstra



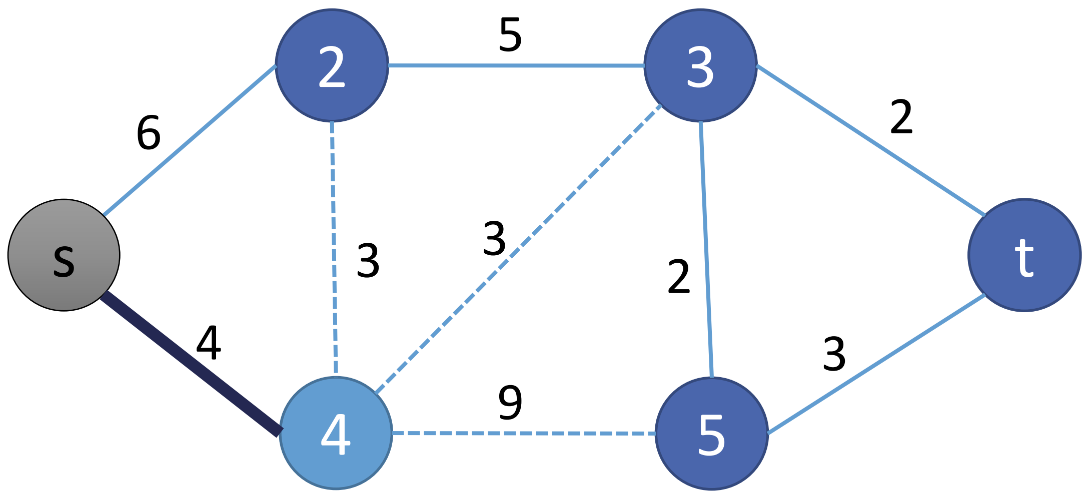
	s	2	3	4	5	t
T	s	2	3	4	5	t
L	0	+∞	+∞	+∞	+∞	+∞
Prev	-1	-1	-1	-1	-1	-1

Ví dụ về giải thuật Dijkstra



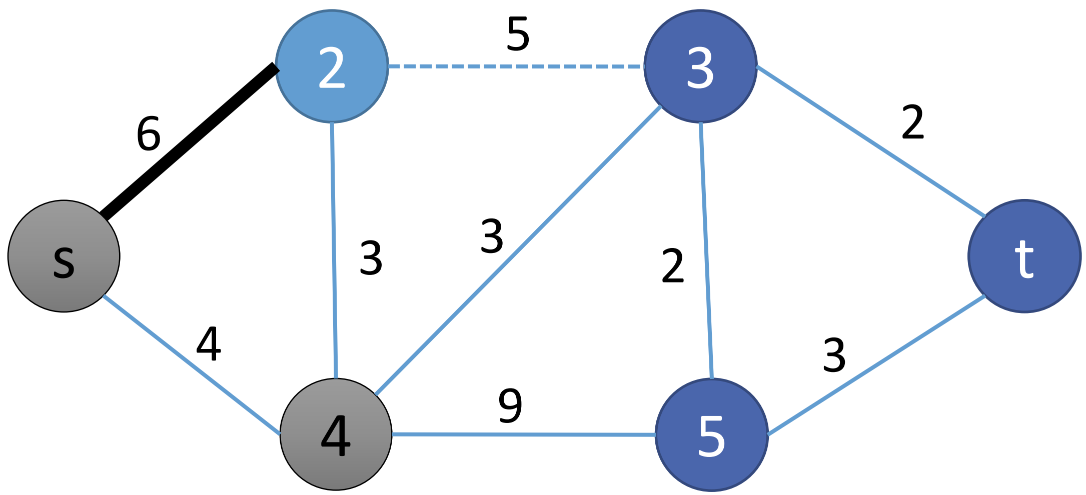
	s	2	3	4	5	t
T		2	3	4	5	t
L	0	6	+∞	4	+∞	+∞
Prev	-1	s	-1	s	-1	-1

Ví dụ về giải thuật Dijkstra



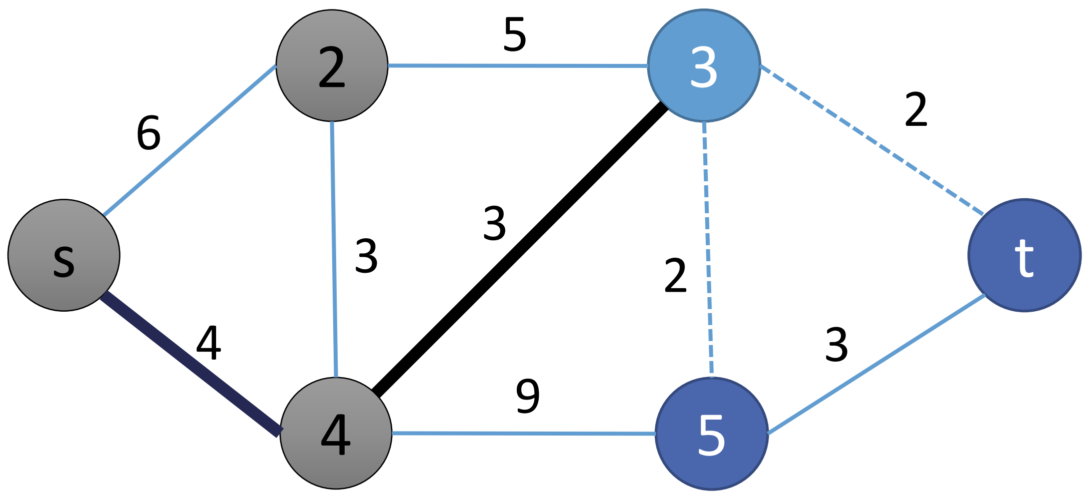
	s	2	3	4	5	t
T		2	3		5	t
L	0	6	7	4	13	+∞
Prev	-1	s	4	s	4	-1

Ví dụ về giải thuật Dijkstra



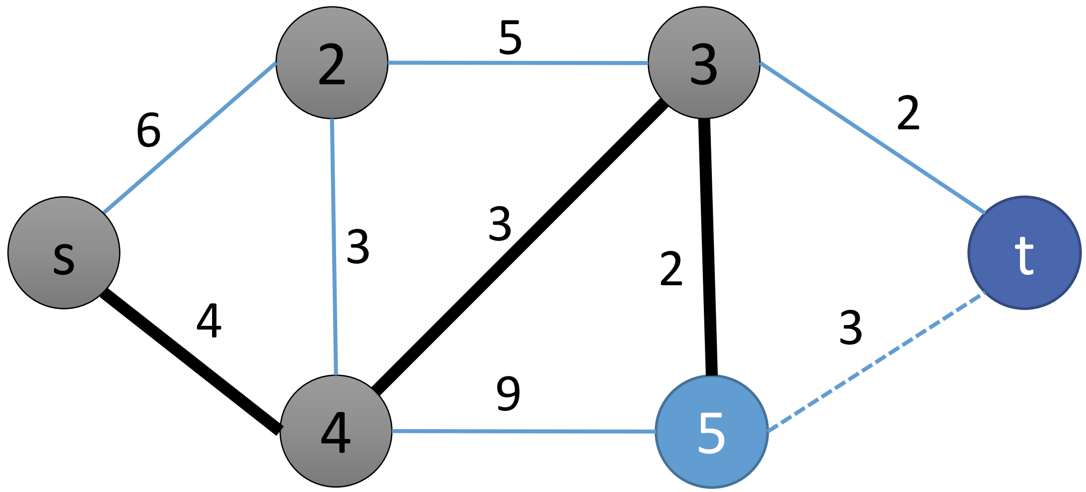
	s	2	3	4	5	t
T			3		5	t
L	0	6	7	4	13	+∞
Prev	-1	s	4	s	4	-1

Ví dụ về giải thuật Dijkstra



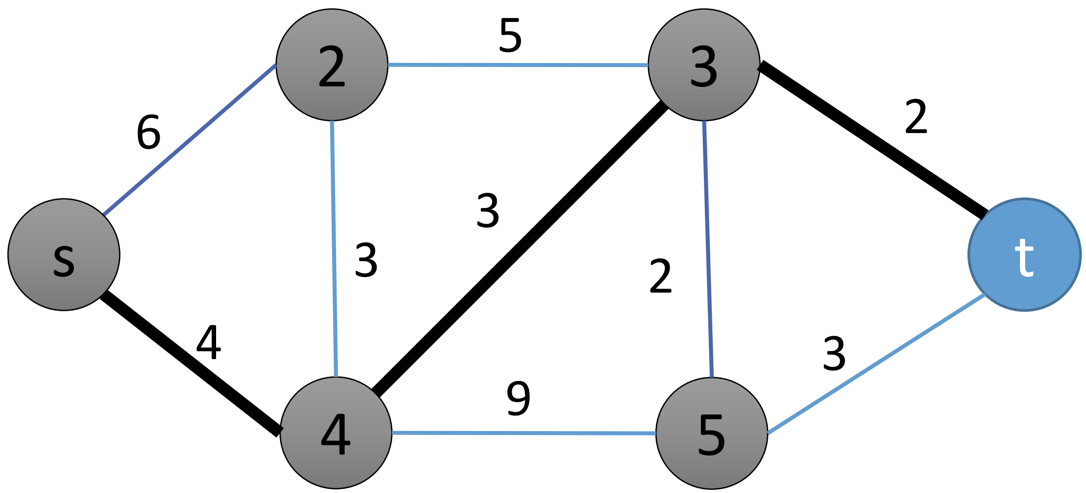
	s	2	3	4	5	t
T					5	t
L	0	6	7	4	9	9
Prev	-1	s	4	s	3	3

Ví dụ về giải thuật Dijkstra



	s	2	3	4	5	t
T						t
L	0	6	7	4	9	9
Prev	-1	s	4	s	3	3

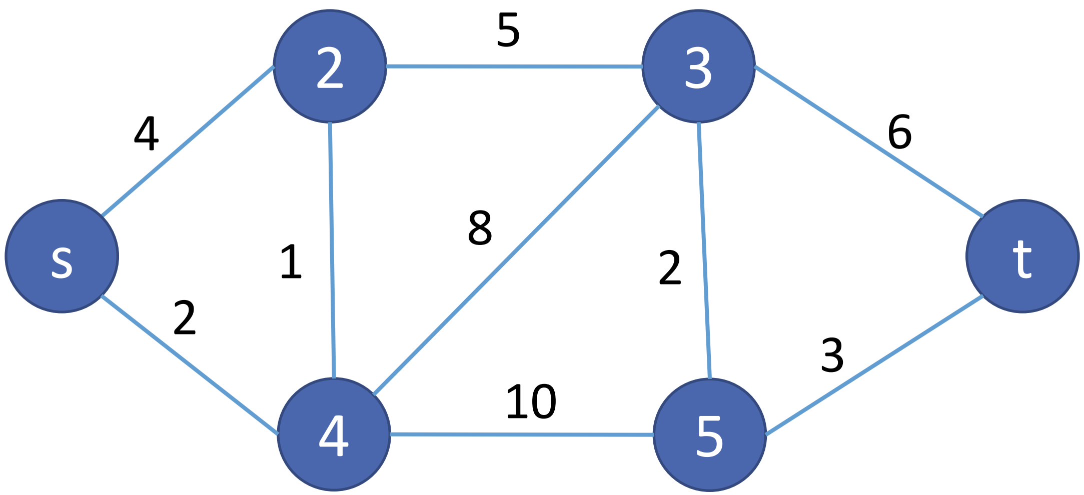
Ví dụ về giải thuật Dijkstra



	s	2	3	4	5	t
T						
L	0	6	7	4	9	**9**
Prev	-1	s	4	s	3	3

Bài tập rèn luyện

Tìm đường đi ngắn nhất bằng giải thuật Dijkstra từ đỉnh s đến đỉnh t cho đồ thị sau.



Giải thuật Bellman-Ford

- Giải thuật Bellman-Ford có thể tìm được đường đi ngắn nhất trên đồ thị có trọng số âm.
- Giải thuật này tìm đường đi ngắn nhất từ một đỉnh cho trước của đồ thị đến mỗi đỉnh khác nếu đường đi không gặp phải mạch âm.
- Nếu phát hiện đồ thị có mạch âm thì giải thuật dừng.

Mô tả giải thuật Bellman-Ford

- Xét đồ thị $\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{E})$ có trọng số có thể âm.
- **Dữ liệu đầu vào:** Ma trận trọng số $\boldsymbol{D}$, và đỉnh xuất phát u.
- **Dữ liệu đầu ra:** Đường đi ngắn nhất từ u tới mọi đỉnh v còn lại trong đồ thị.

- Bước khởi tạo
  - Khởi tạo $(k = 0)$
  - $\pi(0, u) = 0$; $\pi(0, i) = +\infty, \forall i \in \boldsymbol{V}, i \neq x$
  - $Prev(i) = i, \forall i \in \boldsymbol{V}$

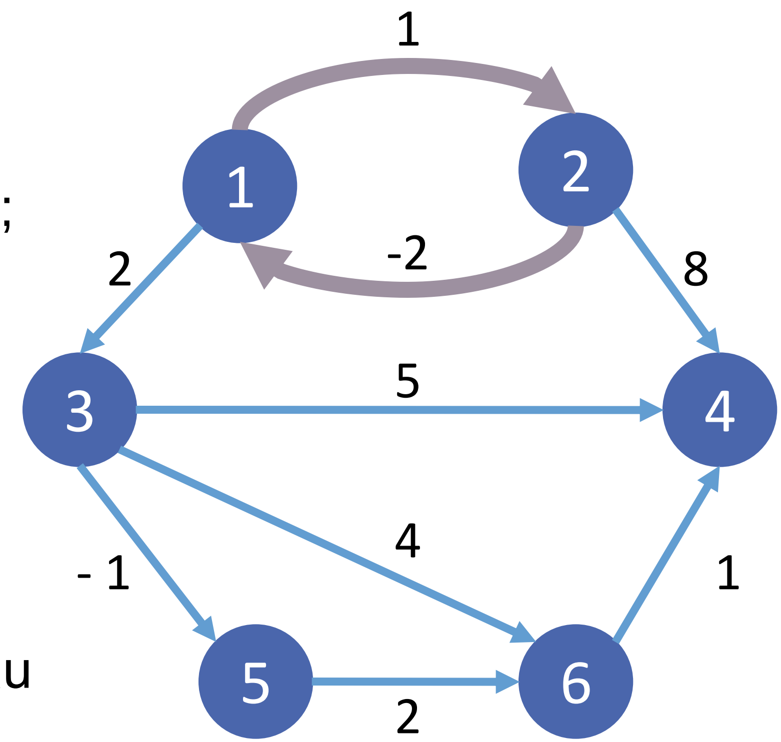
Mô tả giải thuật Bellman-Ford

- Bước 1. $k = k + 1$. Với mỗi $i \in V$ ta cập nhật:
  - $\pi(k, i) = \min(\pi(k-1, i), \pi(k-1, j) + Dj_i)$
  - Nếu $\pi(k, i) = \pi(k-1, j) + D_{ji}$ thì $Prev(i) = j$.
- Bước 2.
  - Nếu $\pi(k, i) = \pi(k-1, i)$ với $\forall i \in V$ thì $\pi(k, i)$ chính là độ dài đường đi ngắn nhất từ x đến i.
  - Ngược lại
    - Nếu $k < n$ thì tăng $k = k + 1$ và trở lại **Bước 1**.
    - Ngược lại thì dừng vì từ x đi tới được một mạch âm.

Ví dụ về giải thuật Bellman – Ford

- Bắt đầu từ **đỉnh 1**
- Khởi tạo: $\pi(0,1) = 0; \pi(0,i) = +\infty, \forall i \neq x;$

π và k	1	2	3	4	5	6
k=0 và π =	0	+∞	+∞	+∞	+∞	+∞
Prev	1	2	3	4	5	6



- Với $k = 1$, cập nhật $\pi(1, i)\ \forall i \in \boldsymbol{V}$ như sau

$$\pi(k,i) = \min(\pi(k-1,i), \pi(k-1,j) + D_{ji})$$

π và k	1	2	3	4	5	6
k=0 và π =	0	+∞	+∞	+∞	+∞	+∞
k=1 và π =	0	1	2	+∞	+∞	+∞
Prev	1	1	1	4	5	6

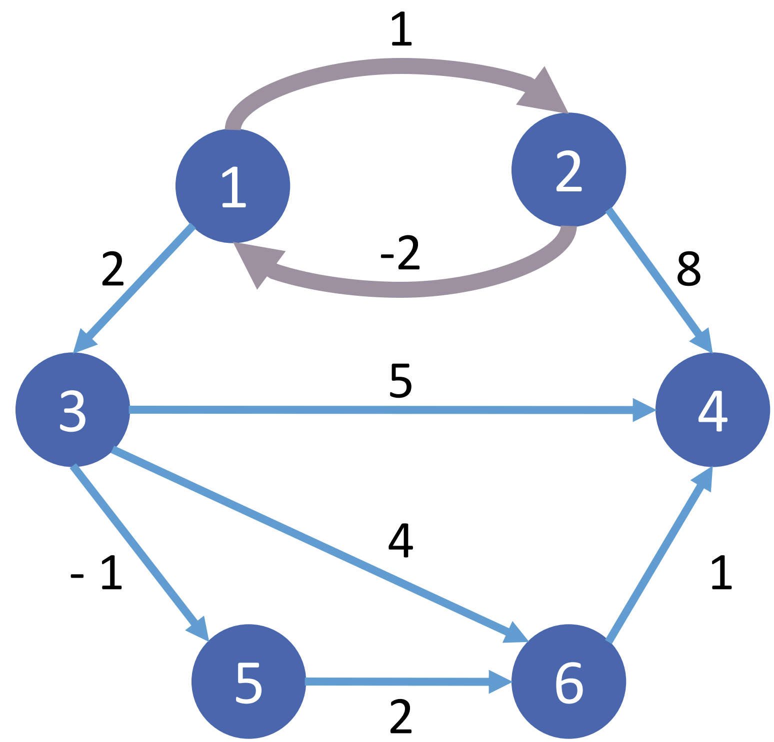
Ví dụ về giải thuật Bellman – Ford

- Với $k = 2$, cập nhật $\pi(2, i)\ \forall i \in V$

π và k	1	2	3	4	5	6
k=0 và π =	0	+∞	+∞	+∞	+∞	+∞
k=1 và π =	0	1	2	+∞	+∞	+∞
k=2 và π =	-1	1	2	7	1	6
Prev	2	1	1	3	3	3

- Với $k = 3$

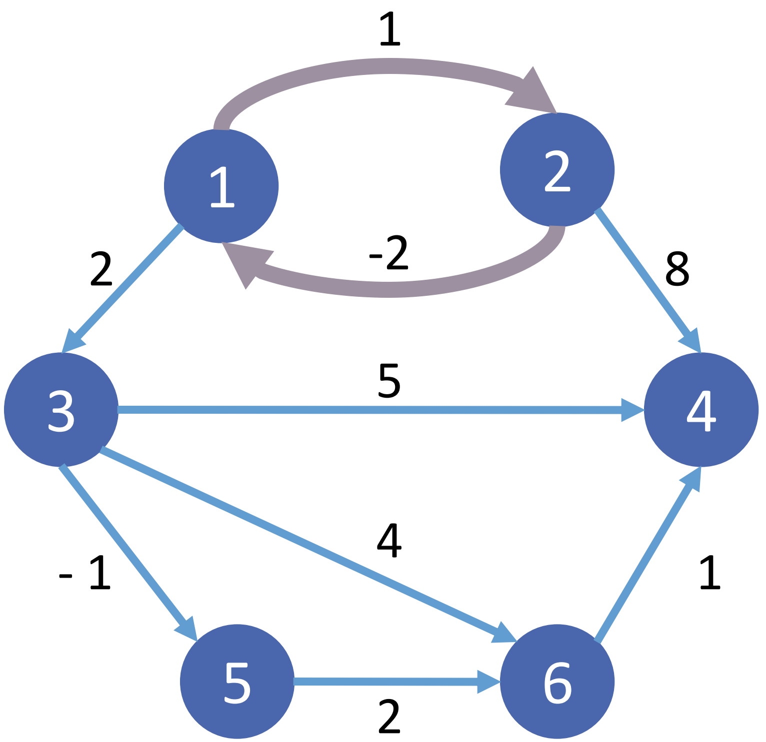
π và k	1	2	3	4	5	6
k=0 và π =	0	+∞	+∞	+∞	+∞	+∞
k=1 và π =	0	1	2	+∞	+∞	+∞
k=2 và π =	-1	1	2	7	1	6
k=3 và π =	-1	0	1	7	1	3
Prev	2	1	1	3	3	5



Ví dụ về giải thuật Bellman – Ford

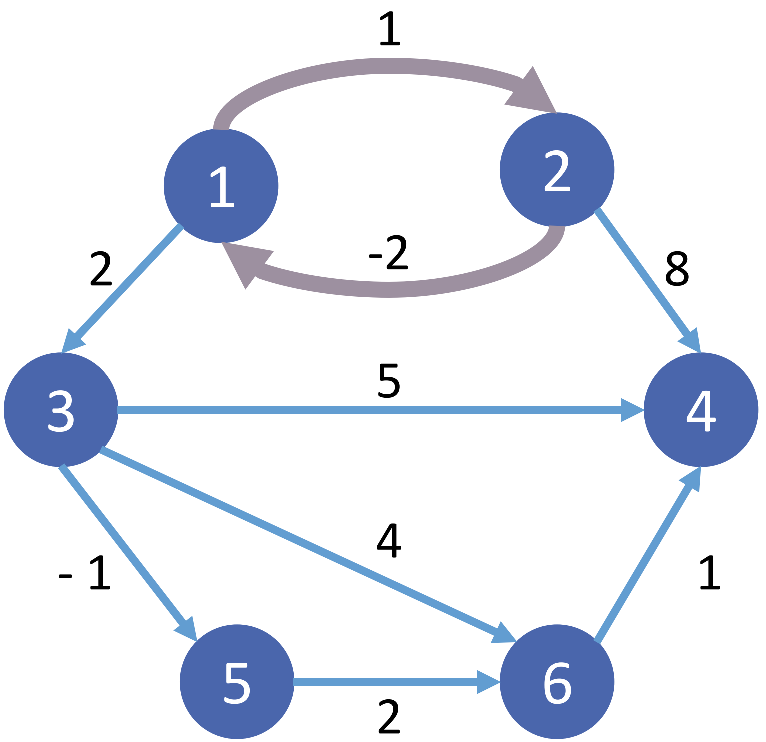
- Với $k = 4$
- Với $k = 5$
- Với $k = 6$

π và k	1	2	3	4	5	6
k=0 và π =	0	+∞	+∞	+∞	+∞	+∞
k=1 và π =	0	1	2	+∞	+∞	+∞
k=2 và π =	-1	1	2	7	1	6
k=3 và π =	-1	0	1	7	1	3
k=4 và π =	-2	0	1	4	0	3
k=5 và π =	-2	-1	0	4	0	2
k=6 và π =	-3	-1	0	3	-1	2
Prev	2	1	1	6	3	5



Ví dụ về giải thuật Bellman – Ford

- Trường hợp đường đi khởi đầu từ đỉnh 3, giải thuật dừng và cho biết có đường đi ngắn nhất từ đỉnh 3 đến mỗi đỉnh còn lại hay không.



π và k	3	1	2	4	5	6
k=0 và π =	0	∞	∞	∞	∞	∞
k=1 và π =	0	∞	∞	5	-1	4
k=2 và π =	0	∞	∞	5	-1	1
k=3 và π =	0	∞	∞	2	-1	1
k=4 và π =	0	∞	∞	2	-1	1
Prev	3	1	2	6	3	5

Ví dụ về giải thuật Bellman – Ford

- Đường đi từ 3 đến 1 hay 2: không có
- Đường đi ngắn nhất từ 3 đến 4: 4 $\leftarrow$ 6 $\leftarrow$ 5 $\leftarrow$ 3 (độ dài 2)
- Đường đi ngắn nhất từ 3 đến 5: 5 $\leftarrow$ 3 (độ dài -1)
- Đường đi ngắn nhất từ 3 đến 6: 6 $\leftarrow$ 5 $\leftarrow$ 3 (độ dài 1).

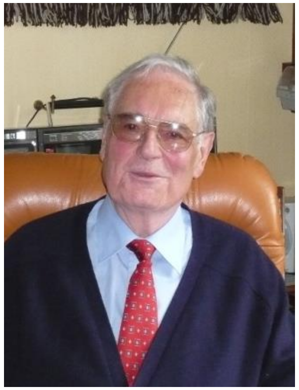
π và k	3	1	2	4	5	6
k=0 và π =	0	∞	∞	∞	∞	∞
k=1 và π =	0	∞	∞	5	-1	4
k=2 và π =	0	∞	∞	5	-1	1
k=3 và π =	0	∞	∞	2	-1	1
k=4 và π =	0	∞	∞	2	-1	1
Prev	3	1	2	6	3	5

Giải thuật Floyd-Warshall

- Giải thuật được Robert Floyd đưa ra vào năm 1962.
- Bernard Roy cũng đưa ra giải thuật tương tự vào năm 1959.
- Do vậy, giải thuật còn có tên gọi là Roy – Floyd.

- Stephen Warshall cũng công bố giải thuật tương tự vào 1962.

Robert Floyd
(1936 – 2001)



Bernard Roy
(1934 - 2017)

Stephen Warshall
(1935 – 2006)

Mô tả giải thuật Floyd-Warshall

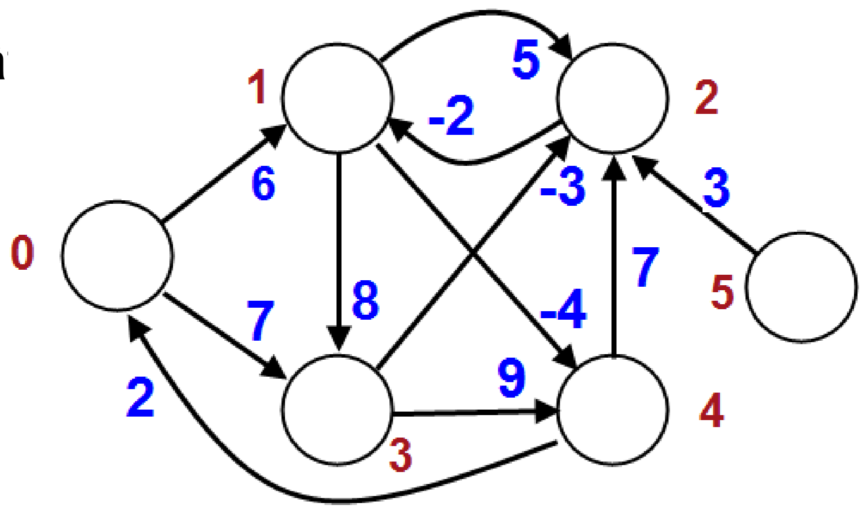
- Giải thuật Floyd tìm ra đường đi ngắn nhất giữa tất cả cặp đỉnh bất kỳ của đồ thị $\boldsymbol{G}$ với các cạnh có trọng số dương.
- Khởi đầu với ma trận khoảng cách $\boldsymbol{D}$.
- Thực hiện n lần lặp trên $\boldsymbol{D}$. Sau bước lặp thứ k, $D[i,j]$ chứa độ dài đường đi ngắn nhất từ đỉnh i đến đỉnh j mà chỉ đi qua các đỉnh có chỉ số không vượt quá k.
- Vậy tại bước lặp thứ k ta thực hiện theo công thức sau

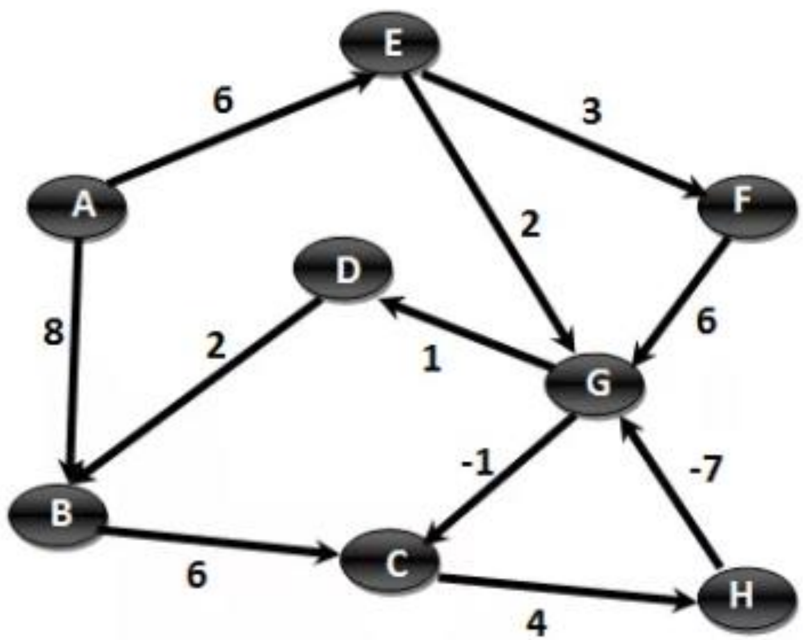
$$\boldsymbol{D^{(k)}[i,j] = min(D^{(k-1)}i,j]\,, D^{(k-1)}[i,k] + D^{(k-1)}[k,j])}$$

với $k = 1, 2, \dots, n$.

Bài tập rèn luyện

Tìm đường đi ngắn nhất bằng giải thuậ Bellman-Ford từ đỉnh 0.





Tìm đường đi ngắn nhất bằng giải thuật Bellman-Ford từ đỉnh A.


...the end.