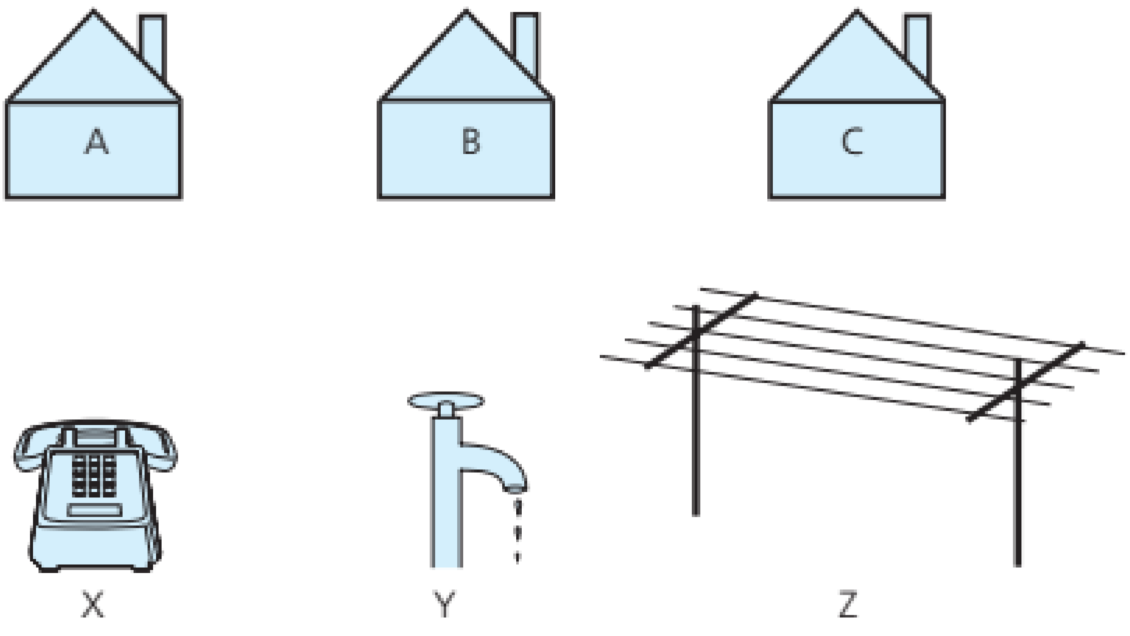
BÀI TOÁN
TÔ MÀU ĐỒ THỊ

Đặng Nguyễn Đức Tiến
Đặng Trần Minh Hậu
Nguyễn Ngọc Thảo

Bài toán ba căn nhà ba tiện ích

- Xét ba ngôi nhà A, B và C và ba tiện ích X, Y và Z (ví dụ: điện thoại, nước và điện). Nếu các ngôi nhà và tiện ích là những đỉnh trong một đồ thị, liệu có thể kết nối mỗi ngôi nhà với từng tiện ích bằng các cạnh không cắt nhau hay không?

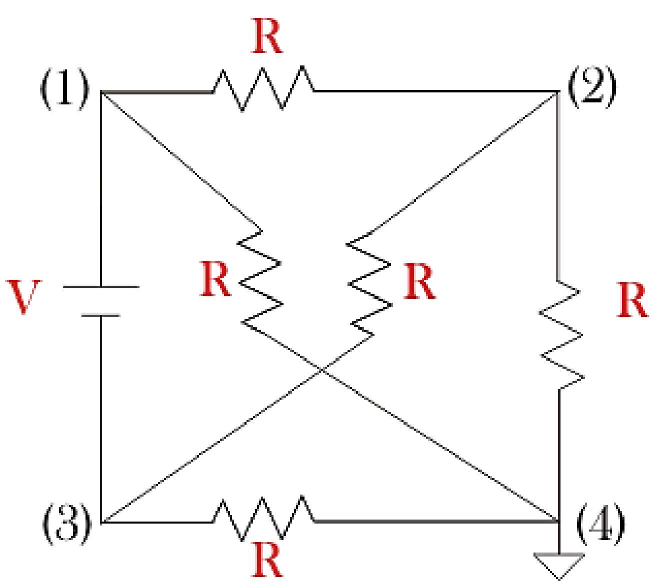


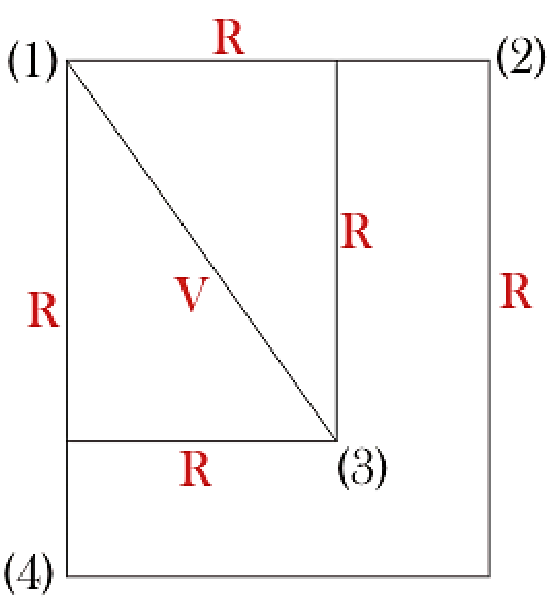
Câu trả lời là

KHÔNG.

Đồ thị phẳng

- Đồ thị vô hướng G là đồ thị phẳng (planar graph) nếu tồn tại cách vẽ G trong mặt phẳng sao cho không có hai cạnh nào của G cắt nhau.

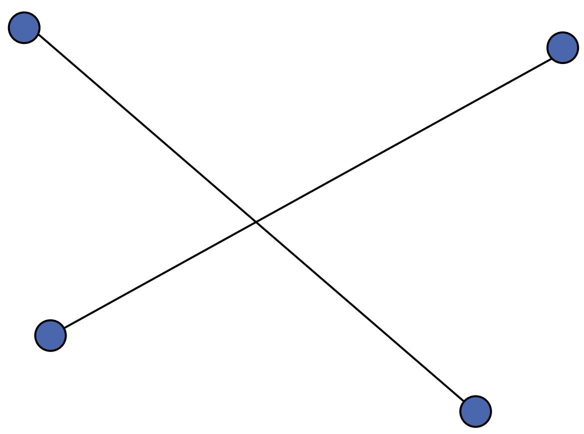




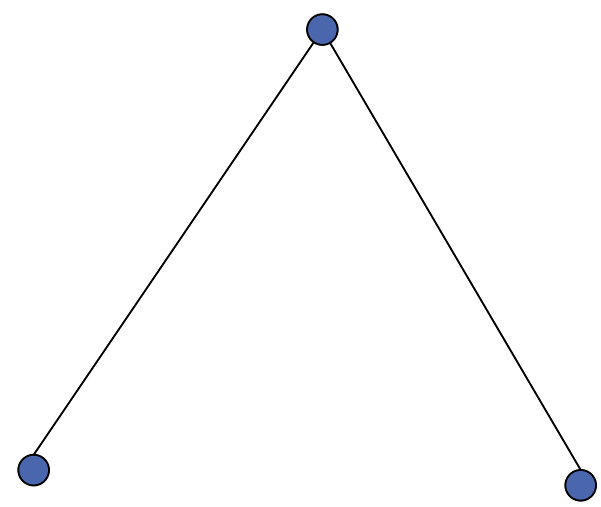
Thiết kế mạch sao cho các kết nối không cắt nhau.

Đồ thị phẳng

- **Quy ước:** hai cạnh có chung một đỉnh được xem là không cắt nhau.



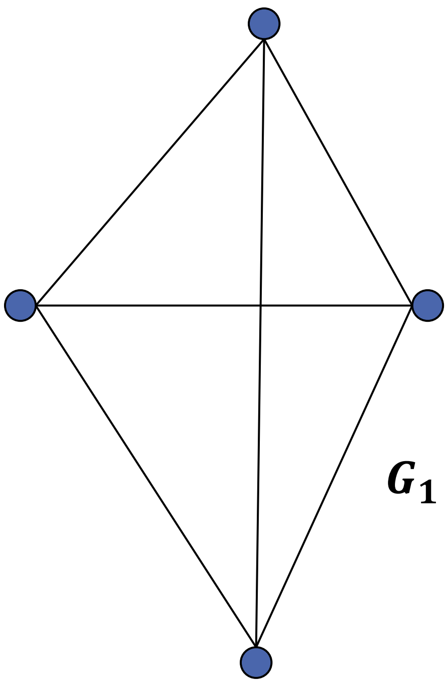
Cắt nhau



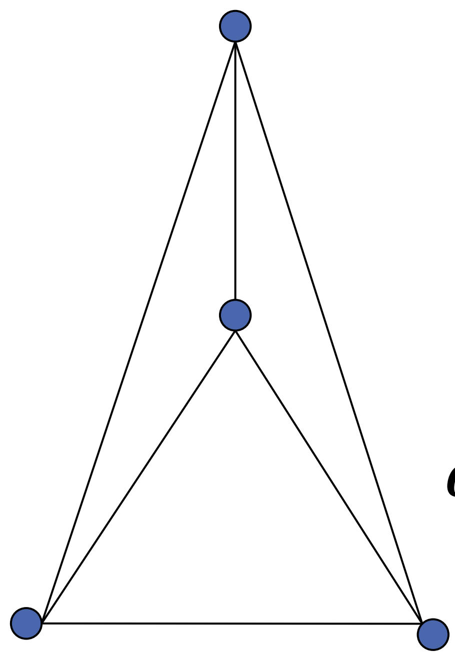
Không cắt nhau

Biểu diễn phẳng của đồ thị phẳng

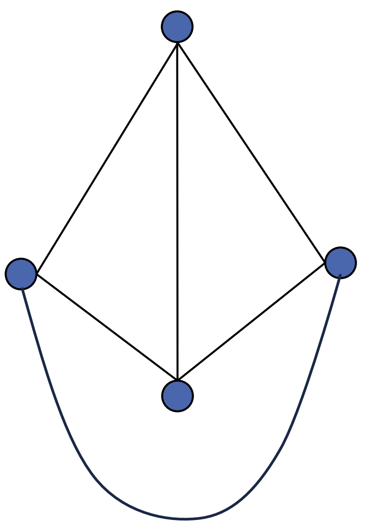
- Mỗi cách vẽ đồ thị phẳng $\boldsymbol{G}$ trong mặt phẳng (sao cho không có hai cạnh nào của $\boldsymbol{G}$ cắt nhau) là biểu diễn phẳng của $\boldsymbol{G}$.



$\boldsymbol{G_1}$



$\boldsymbol{G_2}$



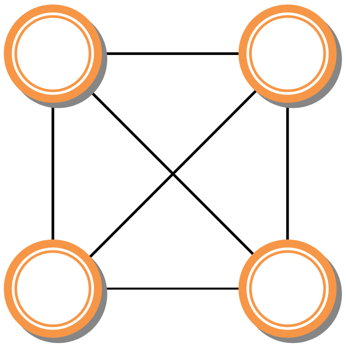
$\boldsymbol{G_3}$

Đồ thị $\boldsymbol{G_1}$ là đồ thị phẳng và các đồ thị $\boldsymbol{G_2}$ và $\boldsymbol{G_3}$ là các biểu diễn phẳng của $\boldsymbol{G_1}$.

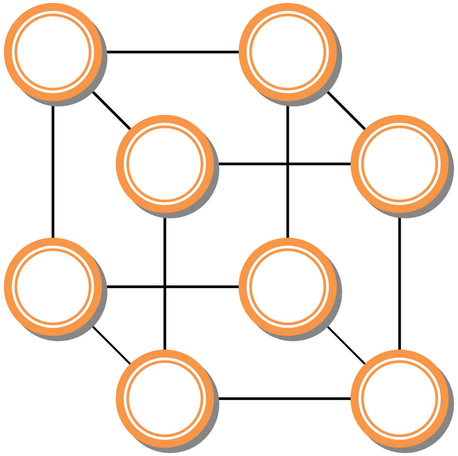
Bài tập rèn luyện

Các đồ thị sau có phải là đồ thị phẳng?

a)

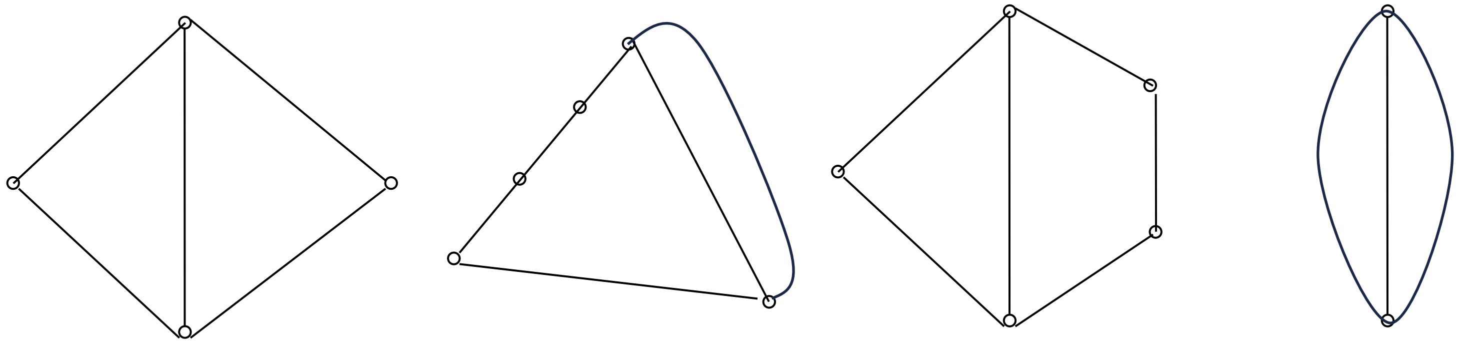


b)



Đồ thị đồng phôi

- Phép biến đổi đồng phôi (homeomorphism) là thao tác
  - Thêm vào một đỉnh nằm trên một cạnh hay
  - Gộp hai cạnh có chung đỉnh bậc 2 thành một cạnh.

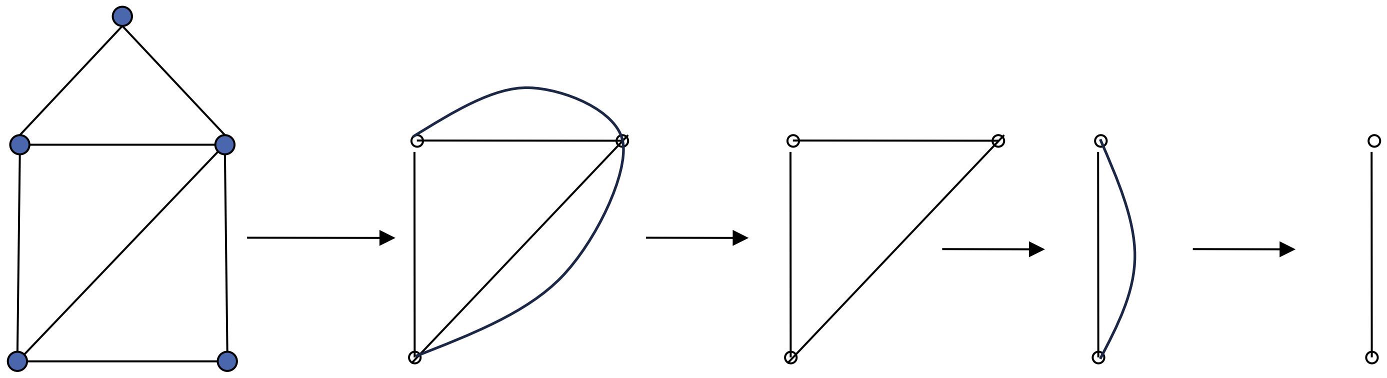


Đồ thị đồng phôi

- Tính phẳng của đồ thị không thay đổi khi thực hiện một hay nhiều lần các phép rút gọn cơ bản sau đây:
    - Loại bỏ các cạnh khuyên.
    - Loại bỏ bớt các cạnh song song, chỉ giữ lại một cạnh nối hai đỉnh.
    - Gộp hai cạnh có chung đỉnh bậc 2 thành một cạnh.

Đồ thị đồng phôi

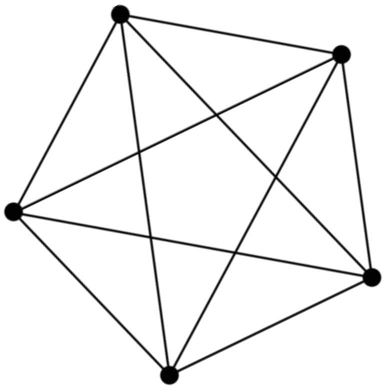
- Đồ thị đồng phôi (homeomorphic graphs): Hai đồ thị được gọi là đồng phôi nếu mỗi đồ thị có được từ đồ thị kia bằng cách thực hiện một dãy các phép biến đổi đồng phôi.



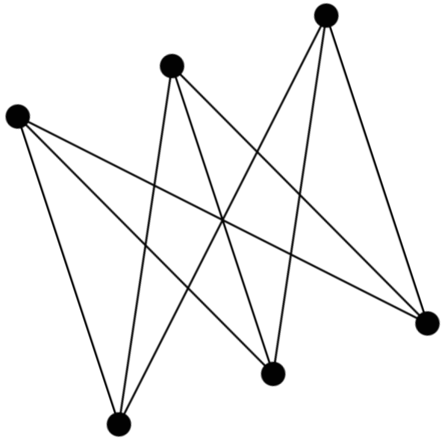
Đồ thị đồng phôi

- **Định lý:** Nếu $\boldsymbol{G}$ là đồ thị phẳng thì ta có thể tìm một đồ thị $\boldsymbol{G_1}$ đồng phôi với $\boldsymbol{G}$ sao cho có thể vẽ $\boldsymbol{G_1}$ bằng cách chỉ dùng các đoạn thẳng.

Định lý Kuratowski



- Định lý 1: Đồ thị đủ $\boldsymbol{K_5}$ không phẳng.

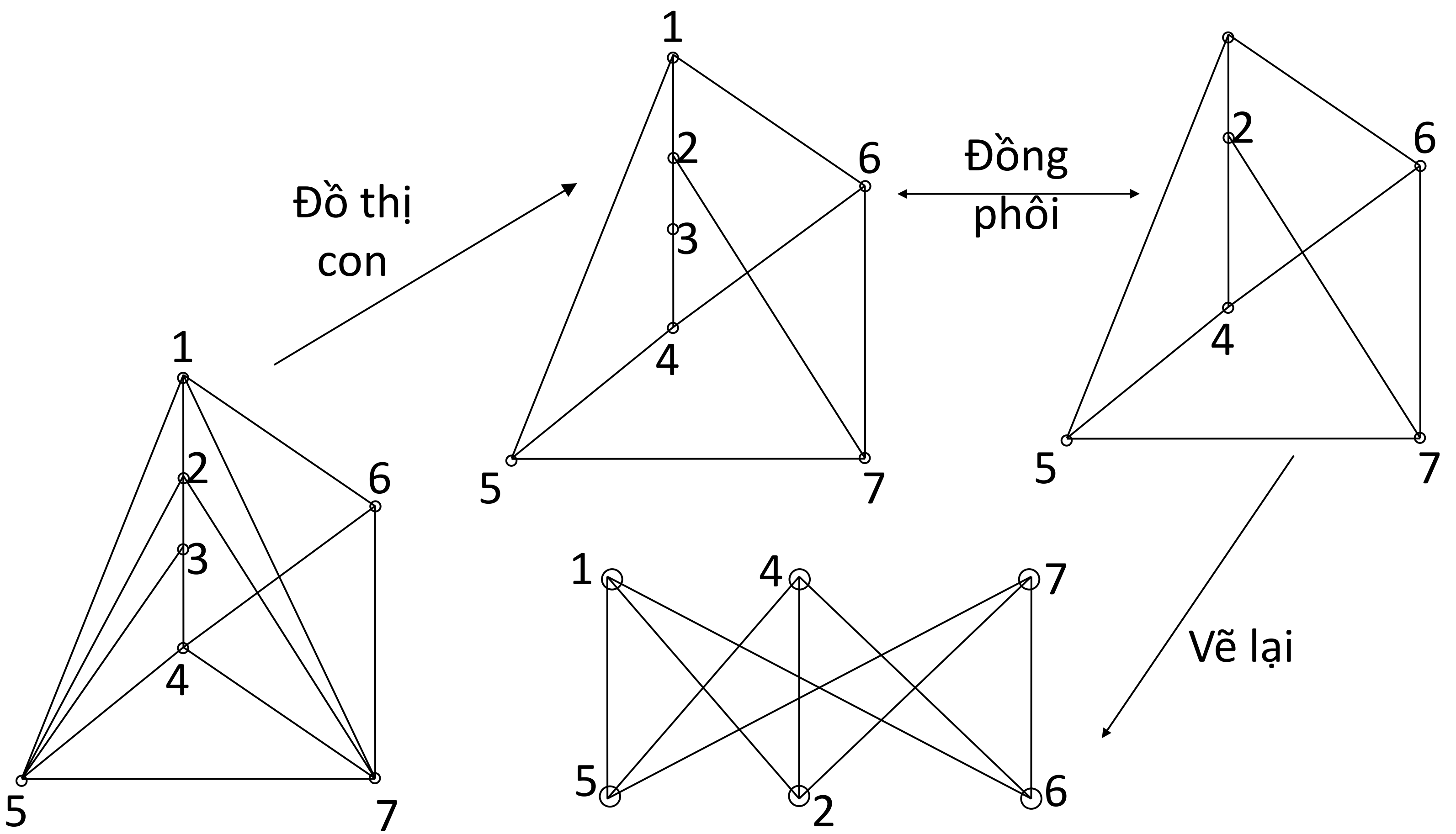


- Định lý 2: Đồ thị lưỡng phân đủ $\boldsymbol{K_{3,3}}$ không phẳng.
- Định lý 3: Điều kiện cần và đủ để một đồ thị liên thông $\boldsymbol{G}$ có tính phẳng là $\boldsymbol{G}$ không chứa bất kỳ đồ thị con nào đồng phôi với $\boldsymbol{K_5}$ hay $\boldsymbol{K_{3,3}}$.

Định lý Kuratowski: Nhận xét

- $\boldsymbol{K_5}$ và $\boldsymbol{K_{3,3}}$ là đồ thị không phẳng đơn giản nhất với các tính chất sau đây.
- Nếu xóa đi một đỉnh hay một cạnh của hai đồ thị trên thì chúng ta sẽ có được đồ thị phẳng.
- Đồ thị $\boldsymbol{K_5}$ là đồ thị không phẳng có ít đỉnh nhất.
- Đồ thị $\boldsymbol{K_{3,3}}$ là đồ thị không phẳng có ít cạnh nhất.

Ví dụ minh họa Định lý 3



Công thức Euler

- **Định lý:** Cho $\boldsymbol{G}$ là đồ thị phẳng, liên thông, gồm n đỉnh và e cạnh. Giả sử $\boldsymbol{G}$ chia mặt phẳng ra làm f vùng, ta có công thức Euler như sau

$$f = e - n + 2$$

hay $n - e + f = 2$

- **Hệ quả:** Nếu $\boldsymbol{G}$ là đồ thị đơn, phẳng, liên thông, gồm n đỉnh và e cạnh (với $e > 2$). Giả sử $\boldsymbol{G}$ chia mặt phẳng ra thành f vùng. Ta có

$$e \geq \frac{3}{2} \cdot f$$

$$e \leq 3n - 6$$

Công thức Euler

- Ta có thể áp dụng hệ quả này để chứng minh tính không phẳng của $\boldsymbol{K_5}$.
- $\boldsymbol{K_5}$ là đồ thị đơn và liên thông có $n = 5$ và $e = 10$.
- Ta có $e = 10 > 9 = 3n - 6$. Do đó $\boldsymbol{K_5}$ không phẳng.
- Chú ý rằng, khi đảo lại, nếu một đồ thị thỏa mãn $e \leq 3n - 6$ thì chưa chắc là đồ thị phẳng. $\boldsymbol{K_{3,3}}$ là một ví dụ

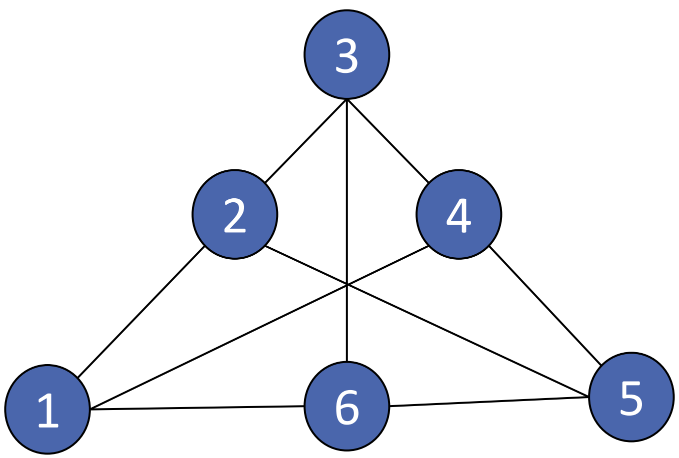
Công thức Euler tổng quát

- Cho $\boldsymbol{G}$ là đồ thị phẳng, gồm n đỉnh, e cạnh, p thành phần liên thông.
- Giả sử $\boldsymbol{G}$ chia mặt phẳng ra làm f vùng, ta có công thức sau (công thức Euler tổng quát):

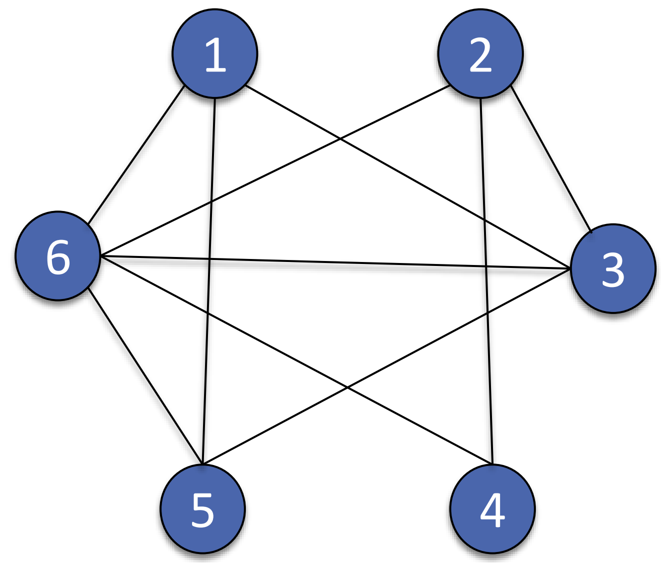
$$n - e + f = p + 1$$

Bài tập rèn luyện

Xác định các đồ thị sau đây có phẳng hay không? Nếu phẳng, hãy vẽ lại để các cạnh không cắt nhau



a)



b)

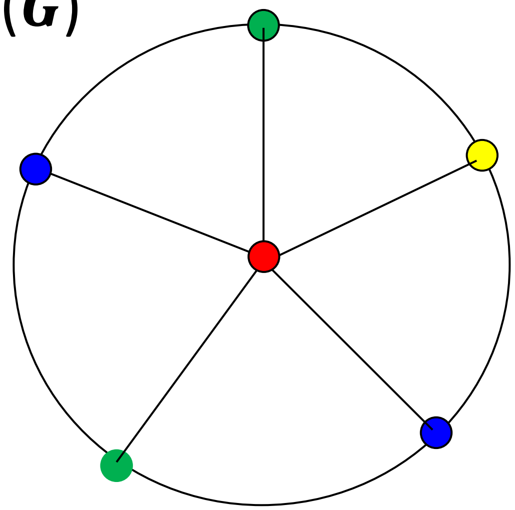
Bài tập rèn luyện

1. Giả sử đồ thị liên thông có 6 đỉnh, mỗi đỉnh đều bậc 4. Biểu diễn phẳng của đồ thị này chia mặt phẳng thành bao nhiêu miền?
2. Đồ thị nào trong số các đồ thị không phẳng sau đây có tính chất: bỏ đi một đỉnh bất kỳ và các cạnh liên thuộc với nó sẽ tạo ra đồ thị phẳng?
   - $a)$ K_5
   - $b)$ K_6
   - $c)$ $K_{3,3}$
   - $d)$ $K_{3,4}$

Tô màu đồ thị

- Phép tô màu đồ thị là cách đánh nhãn cho mỗi đỉnh của đồ thị bằng một màu sao cho hai đỉnh kề nhau phải được đánh nhãn khác nhau.
- Sắc số của đồ thị $\boldsymbol{G}$, ký hiệu $\gamma(\boldsymbol{G})$, là số nguyên dương k nhỏ nhất sao cho tồn tại phép tô màu cho $\boldsymbol{G}$ chỉ dùng k màu.

$(\boldsymbol{G})$



- $\gamma(\boldsymbol{G}) = 4$
- $\gamma(\boldsymbol{K_n}) = n, \forall n \in \mathbb{N}$
- $\gamma(\boldsymbol{K_{m,n}}) = 2, \forall m, n \in \mathbb{N}$

Tô màu đồ thị

- Nếu đồ thị $\boldsymbol{G}$ có chứa ít nhất một cạnh không phải là khuyên thì $\gamma(\boldsymbol{G}) \geq 2$.
- Đồ thị đủ n đỉnh, $\boldsymbol{K_n}$, có sắc số là n.
- Nếu đồ thị $\boldsymbol{G}$ chứa một đồ thị con đẳng cấu $\boldsymbol{K_r}$ thì $\gamma(\boldsymbol{G}) \geq r$.
- Nếu đồ thị $\boldsymbol{G}$ là chu trình sơ cấp n đỉnh thì
  - $\gamma(G) = 2$ nếu n chẵn, $\gamma(G) = 3$ nếu n lẻ
  - $\gamma(G) = (n \ mod\ 2) + 2$

** Chu trình sơ cấp: là chu trình không chứa cùng một đỉnh quá một lần (trừ đỉnh đầu và đỉnh cuối).*

Định lý tô màu đồ thị

- Định lý 1: Nếu $\boldsymbol{T}$ là cây có n đỉnh ($n \geq 2$) thì $\gamma(\boldsymbol{T}) = 2$.

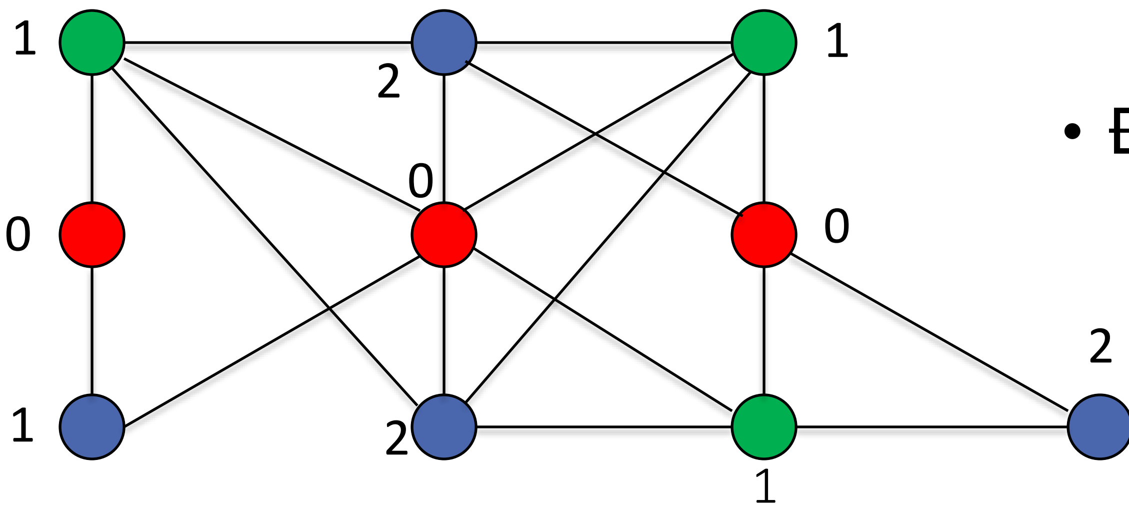
- Định lý 2 (Định lý Konig): Cho $\boldsymbol{G}$ là đồ thị liên thông có ít nhất một cạnh. Khi đó $\gamma(\boldsymbol{G}) = 2$ khi và chỉ khi $\boldsymbol{G}$ không chứa chu trình sơ cấp có số cạnh lẻ.

- Định lý 3: Cho đồ thị $\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{E})$. Gọi $d(\boldsymbol{G}) = \max\{d(v) \mid v \in V\}$. Ta có $\gamma(\boldsymbol{G}) \leq d(\boldsymbol{G}) + 1$.

Giải thuật tô màu đồ thị

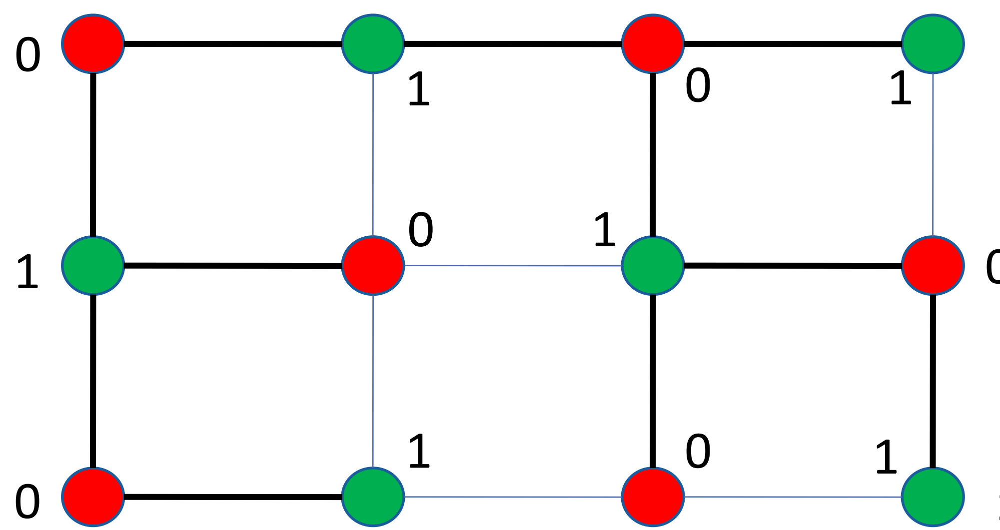
- Liệt kê các đỉnh $v_1, v_2, \ldots, v_n$ của đồ thị theo thứ tự giảm dần của bậc: $d(v_1), d(v_2), \ldots, d(v_n)$.
- Điều này làm giảm các phép kiểm tra ở các bưới dưới đây.
- Lần lượt tô màu các đỉnh theo thứ tự đã liệt kê.
- Tô màu $i = 0$ cho đỉnh v_1 cùng các đỉnh không kề với v_1 và không kề với các đỉnh đã tô màu 0.
- Lặp lại thủ tục tô màu $i + 1$ giống như thủ tục tô màu i cho đến khi tô màu hết các đỉnh của đồ thị.

Ví dụ giải thuật tô màu đồ thị



- Đồ thị $\boldsymbol{G_1}$ có $\gamma(\boldsymbol{G_1}) = 3$.

- Đồ thị $\boldsymbol{G_2}$ có $\gamma(\boldsymbol{G_2}) = 2$.

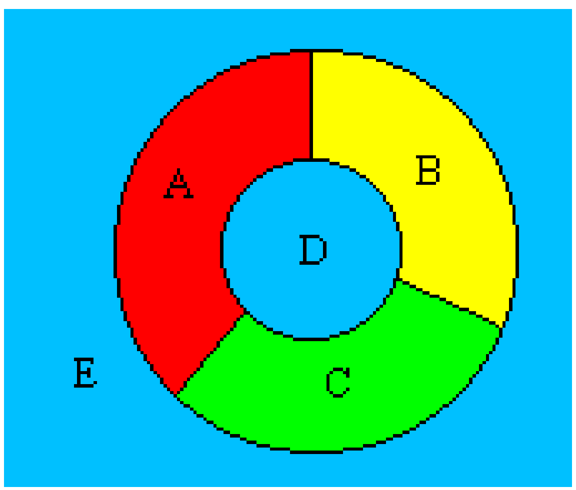


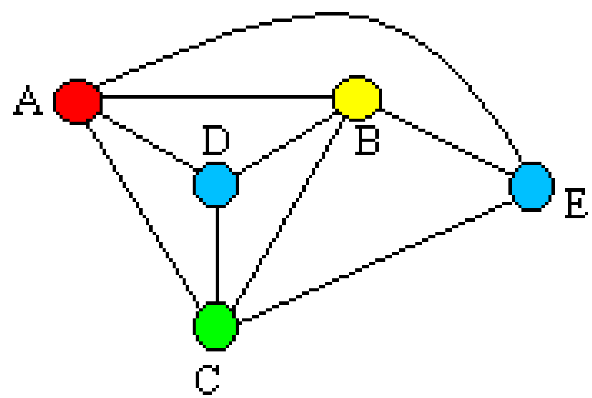
Bài toán sắc số của đồ thị phẳng

- Lịch sử về giả thuyết 4 màu
- Khoảng 10/1852, giáo sư De Morgan ở trường Đại học Luân Đôn viết thư cho đồng nghiệp của mình là ông Sir William Hamilton để bàn về bài toán: “Mọi bản đồ đều có thể tô bằng 4 màu sao cho hai nước nằm kề nhau phải được tô bằng hai màu khác nhau”.
- Sau đó có nhiều cố gắng của một số nhà toán học để giải bài toán nầy nhưng đều không đi đến kết quả cuối cùng. Đặc biệt có một lời giải bị sai (phải sau 10 năm mới phát hiện được chỗ không đúng trong lời giải), nhưng lý luận của lời giải nầy đúng cho “bài toán 5 màu”.

Định lý bốn màu cho đồ thị phẳng

- Định lý bốn màu (four color theorem) phát biểu rằng không cần quá bốn màu để tô các vùng của bản đồ (đồ thị phẳng) bất kỳ sao cho không có hai vùng kề nhau có cùng màu.

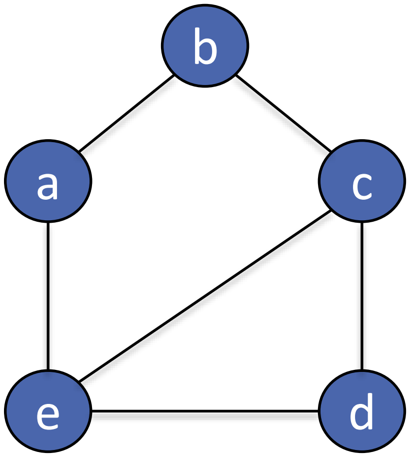




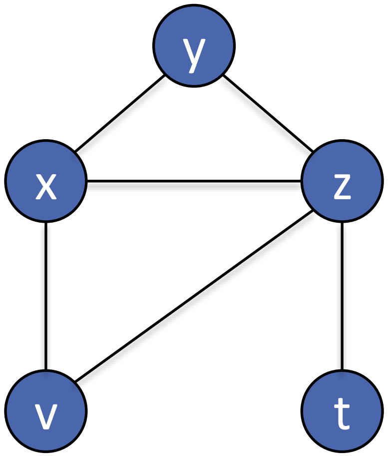
Nguồn ảnh: [Mathpages.com]

Bài tập rèn luyện

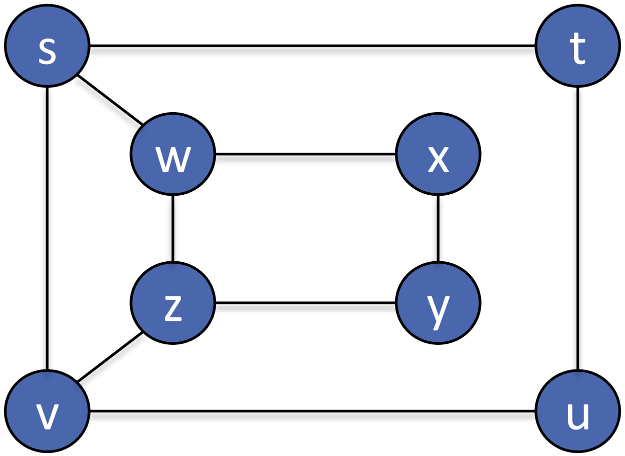
Hãy tìm sắc số của các đồ thị đã cho dưới đây.



a)



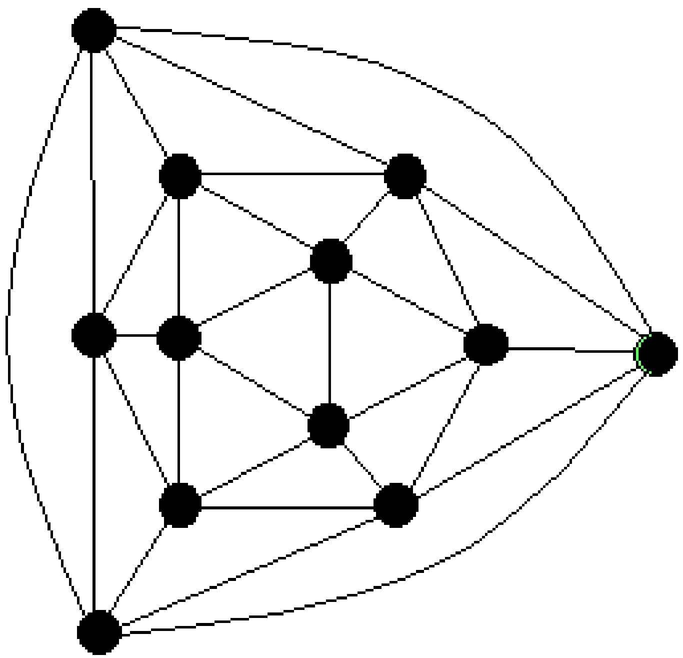
b)



c)

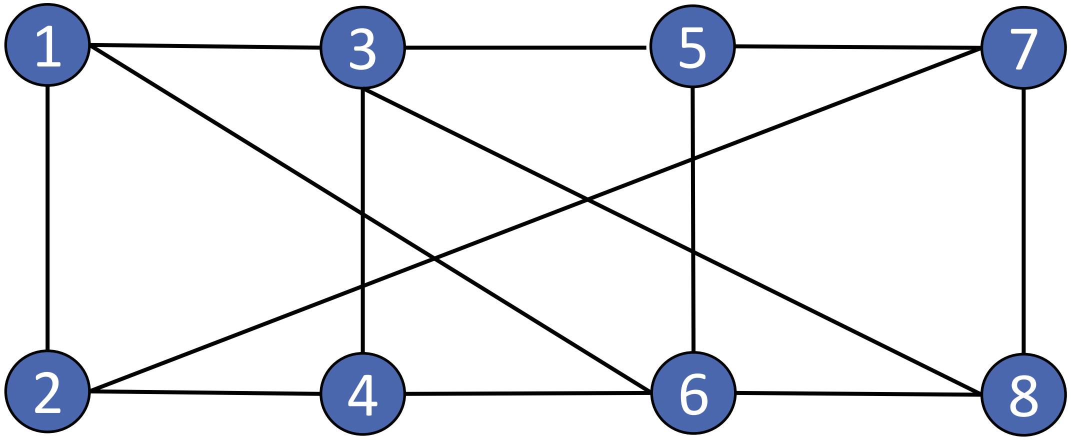
Bài tập rèn luyện

Bạn hãy tô màu đồ thị dưới đây.



Bài tập rèn luyện

Cho đồ thị như bên dưới.



Hãy xét tính phẳng của đồ thị và tô màu đồ thị này.

Bài tập rèn luyện

Vào cuối học kỳ, Khoa CNTT cần tổ chức lịch thi với các môn học và danh sách lớp học môn tương ứng như bên dưới.

- Môn A: Lớp 1, Lớp 3, Lớp 4
- Môn B: Lớp 2, Lớp 3, Lớp 5
- Môn C: Lớp 1, Lớp 4
- Môn D: Lớp 1, Lớp 3
- Môn E: Lớp 5
- Môn F: Lớp 2, Lớp 4
- Môn G: Lớp 3, Lớp 4
- Môn H: Lớp 2

Biết rằng lịch thi phải thỏa mãn những điều kiện sau

- Mỗi môn thi phải được thi trong một buổi, tức là sinh viên chỉ dự thi một môn trong một buổi.
- Một buổi có thể có tổ chức thi cho nhiều môn cùng lúc
- Sinh viên dĩ nhiên là không thể cùng lúc dự thi hai môn khác nhau.

Áp dụng giải thuật tô màu để giải quyết bài toán sắp xếp lịch thi.


...the end.