Cơ sở Lý thuyết Truyền tin-2004

Chương 3: Thông tin và định lượng thông tin

Hà Quốc Trung[1]

[1]Khoa Công nghệ thông tin
Đại học Bách khoa Hà nội

Chương 3: Thông tin và định lượng thông tin

1. Lượng tin của nguồn tin rời rạc
2. Entropi của nguồn rời rạc
3. Tốc độ lập tin của nguồn và thông lượng kênh rời rạc
4. Entropi của nguồn và thông lượng kênh liên tục

1. Lượng tin của nguồn tin rời rạc

1. Lượng tin của nguồn tin rời rạc
   - Nguồn tin rời rạc
   - Biến đổi nguồn tin rời rạc
   - Lượng tin riêng, lượng tin tương hỗ, lượng tin có điều kiện
   - Tính chất của lượng tin
   - Lượng tin trung bình
2. Entropi của nguồn rời rạc
3. Tốc độ lập tin của nguồn và thông lượng kênh rời rạc
4. Entropi của nguồn và thông lượng kênh liên tục

1.1.Nguồn tin rời rạc

- Nguồn tin rời rạc *Nguồn tin tạo ra một chuỗi các biến ngẫu nhiên rời rạc* $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$
- Ký hiệu
  - Phần tử nhỏ nhất chứa thông tin, Một giá trị của biến ngẫu nhiên, Ví dụ mã morse, 4 ký hiệu
- Bộ ký hiệu: tập hợp tất cả các ký hiệu có thể (tất cả các giá trị có thể của biến ngẫu nhiên rời rạc), còn gọi là bảng chữ cái $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$
- Từ: Tập hợp hữu hạn các ký hiệu
- Bộ từ: Tập hợp tất cả các từ có thể
- Nguồn đặc trưng bởi trường xác suất

$$\{X, p(x)\}, X = \{x_1 x_2 \ldots x_n \ldots\}$$

Các loại nguồn tin rời rạc

- Nguồn rời rạc không nhớ: xác suất xuất hiện của các ký hiệu không phụ thuộc vào các ký hiệu đã xuất hiện trước đó

$$p(x_n|x_1, x_2, \ldots x_{n-1}) = p(x_n)$$

- Nguồn rời rạc có nhớ

$$p(x_n|x_1, x_2, \ldots x_{n-1}) < p(x_n)$$

- Nguồn dừng: Xác suất xuất hiện của các ký tự chỉ phụ thuộc vào vị trí tương quan giữa các ký tự, không phụ thuộc vào vị trí so với gốc

$$p(x_i, n) = p(x_i, n + k) \forall k$$

- Nguồn dừng Ergodic: Nguồn có các giá trị trung bình tập hợp bằng các giá trị trung bình theo thời gian
- Nguồn có tốc độ thông tin điều khiển được (thay đổi)

Các loại nguồn tin rời rạc *(Tiếp)*

- Nguồn điện tín
- Telex
- Nguồn có tốc độ thông tin không điều khiển được (không thay đổi)

Nguồn Markov

- Nguồn Markov độ nhớ 1: xác suất của một ký hiệu chỉ phụ thuộc vào ký hiệu trước đó

$$p(x_{i_n}|x_{j_{n-1}}, x_{k_{n-2}}...) = p(x_{i_n}|x_{j_{n-1}})$$

- Tại thời điểm n nguồn có thể ở trạng thái x_j với xác suất $p_{ij} = p(x_{j,n}|x_{i,n-1})$ khi ở thời điểm $n-1$ nguồn đã ở trạng thái x_i. Khi đó $\sum_{j=1}^{L} p_{ij} = 1$
- Xác suất để ký hiệu thứ n là x_j

$$p(x_{jn}) = \sum_{i=1}^{L} p(x_{jn}, x_{in-1}) =$$

$$\sum_{i=1}^{L} p(x_{in-1})p(x_{jn}|x_{in-1}) = \sum_{i=1}^{L} p(x_{in-1})p_{ij}$$

Nguồn Markov *(Tiếp)*

- Biểu diễn bằng ma trận

$$P_n = \begin{bmatrix} p(x_{1n}) \\ p(x_{1n}) \\ \dots \\ p(x_{Ln}) \end{bmatrix} \quad P_{n-1} = \begin{bmatrix} p(x_{1n-1}) \\ p(x_{1n-1}) \\ \dots \\ p(x_{Ln-1}) \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1L} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2L} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{L1} & p_{L2} & \dots & p_{LL} \end{bmatrix}$$

- Phân bố xác suất tại thời điểm n

$$P_n = T^T P_{n-1} = (T^T)^n P_0$$

1.2. Biến đổi nguồn tin rời rạc

- Biến đổi cấu trúc thống kê của nguồn tin rời rạc

$$\{X, p(x)\} \rightarrow \{Y, p(y)\}$$

- Nếu không có nhiễu, phép biến đổi là 1-1, ánh xạ có thể biểu diễn theo bảng:

$$\begin{array}{ccc} A & \rightarrow & 00 \\ B & \rightarrow & 01 \\ C & \rightarrow & 10 \\ D & \rightarrow & 11 \end{array}$$

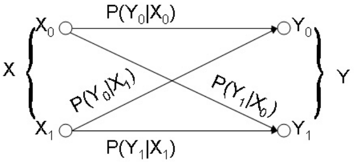
- Tổng quát, phép biến đổi biểu diễn bằng một trường xác suất

$$\{XY, p(X, Y)\}, X = \{A, B, C, D\}, Y = \{00, 01, 10, 11\}$$

mô tả xác suất có thể để có một đầu vào x và một đầu ra y đồng thời $p(x, y)$

- Có thể sử dụng các xác suất có điều kiện $p(y|x)$

Ví dụ: kênh nhị phân đối xứng



	Y=X	$Y = \overline{X}$
$P(Y_0\|X_0)$	1	0
$P(Y_1\|X_0)$	0	1
$P(Y_1\|X_1)$	1	0
$P(Y_0\|X_1)$	0	1

- Tập vào gồm 2 ký hiệu, Tập ra gồm hai ký hiệu
- Một phép biến đổi bất kỳ có thể biểu diễn bằng bộ 4 xác suất có điều kiện (xác suất chuyển đổi):
  - x_0 chuyển thành y_0
  - x_0 chuyển thành y_1
  - x_1 chuyển thành y_1
  - x_1 chuyển thành y_0

Ví dụ: kênh nhị phân đối xứng *(Tiếp)*

- Phân bố xác suất của đầu ra bằng phân bố xác suất của đầu vào và xác suất chuyển đổi: $p(x, y) = p(x)p(y|x)$
- Khi gửi một tin x, xác suất để có tin y ở đầu ra sẽ là

$$p(y|x) = \frac{p(x, y)}{p(x)}$$

Các xác suất này gọi là xác suất chuyển đổi, có thể dùng để đặc trưng cho phép biến đổi

- Theo công thức về xác suất đồng thời và có điều kiện

$$p(x) = \sum_{Y}(p(x, y)), p(y) = \sum_{X}(p(x, y))$$

$$p(x|y) = \frac{p(x)p(y|x)}{\sum_{Y} p(x)p(y|x)}$$

Ví dụ: kênh nhị phân đối xứng *(Tiếp)*

- Từ công thức cuối cùng, có thể tính được xác suất gửi tin x khi nhận được tin y: *Giải quyết bài toán thu tin*
- p(x): xác suất tiên nghiệm, p(x|y) xác suất hậu nghiệm, sử dụng để xác định các lượng tin

Ví dụ

Một nguồn tin gồm 8 tin U, mỗi tin là một ký hiệu u_i, $i = 1 \dots 8$ được biến đổi bởi một kênh truyền tin thành tập 8 tin, mỗi tin gồm 3 ký hiệu x, y, z, mỗi ký hiệu nhận 2 giá trị 0 hoặc 1. Ký hiệu $x_0 = y_0 = z_0 = 0, x_1 = y_1 = z_1 = 1$

Khi nhận tin, nhận lần lượt từng ký tự x, y, z. Mỗi lần nhận được một ký hiệu, xác suất hậu nghiệm của tin u thay đổi

Tin u	p(u)	xyz	p(u)khi nhận được ký hiệu		
			x_1	y_0	z_1
u_0	1/4	$x_0y_0z_0$	0	0	0
u_1	1/4	$x_1y_0z_0$	1/2	4/5	0
u_2	1/8	$x_0y_1z_0$	0	0	0
u_3	1/8	$x_1y_1z_0$	1/4	0	0
u_4	1/16	$x_0y_0z_1$	0	0	0
u_5	1/16	$x_1y_0z_1$	1/8	1/5	1
u_6	1/16	$x_0y_1z_1$	0	0	0
u_7	1/16	$x_1y_1z_1$	1/8	0	0

Ví dụ

Một nguồn tin gồm 8 tin U, mỗi tin là một ký hiệu u_i, $i = 1 \dots 8$ được biến đổi bởi một kênh truyền tin thành tập 8 tin, mỗi tin gồm 3 ký hiệu x, y, z, mỗi ký hiệu nhận 2 giá trị 0 hoặc 1. Ký hiệu $x_0 = y_0 = z_0 = 0, x_1 = y_1 = z_1 = 1$
Khi nhận tin, nhận lần lượt từng ký tự x, y, z. Mỗi lần nhận được một ký hiệu, xác suất hậu nghiệm của tin u thay đổi

Tin u	p(u)	xyz	p(u)khi nhận được ký hiệu		
			x_1	y_0	z_1
u_0	1/4	$x_0y_0z_0$	0	0	0
u_1	1/4	$x_1y_0z_0$	1/2	4/5	0
u_2	1/8	$x_0y_1z_0$	0	0	0
u_3	1/8	$x_1y_1z_0$	1/4	0	0
u_4	1/16	$x_0y_0z_1$	0	0	0
u_5	1/16	$x_1y_0z_1$	1/8	1/5	1
u_6	1/16	$x_0y_1z_1$	0	0	0
u_7	1/16	$x_1y_1z_1$	1/8	0	0

Ví dụ

Một nguồn tin gồm 8 tin U, mỗi tin là một ký hiệu $u_i, i = 1 \dots 8$ được biến đổi bởi một kênh truyền tin thành tập 8 tin, mỗi tin gồm 3 ký hiệu x, y, z, mỗi ký hiệu nhận 2 giá trị 0 hoặc 1. Ký hiệu $x_0 = y_0 = z_0 = 0, x_1 = y_1 = z_1 = 1$

Khi nhận tin, nhận lần lượt từng ký tự x, y, z. Mỗi lần nhận được một ký hiệu, xác suất hậu nghiệm của tin u thay đổi

Tin u	p(u)	xyz	p(u)khi nhận được ký hiệu		
			x_1	y_0	z_1
u_0	1/4	$x_0y_0z_0$	0	0	0
u_1	1/4	$x_1y_0z_0$	1/2	4/5	0
u_2	1/8	$x_0y_1z_0$	0	0	0
u_3	1/8	$x_1y_1z_0$	1/4	0	0
u_4	1/16	$x_0y_0z_1$	0	0	0
u_5	1/16	$x_1y_0z_1$	1/8	1/5	1
u_6	1/16	$x_0y_1z_1$	0	0	0
u_7	1/16	$x_1y_1z_1$	1/8	0	0

Ví dụ

Một nguồn tin gồm 8 tin U, mỗi tin là một ký hiệu u_i, $i = 1 \ldots 8$ được biến đổi bởi một kênh truyền tin thành tập 8 tin, mỗi tin gồm 3 ký hiệu x, y, z, mỗi ký hiệu nhận 2 giá trị 0 hoặc 1. Ký hiệu $x_0 = y_0 = z_0 = 0, x_1 = y_1 = z_1 = 1$
Khi nhận tin, nhận lần lượt từng ký tự x, y, z. Mỗi lần nhận được một ký hiệu, xác suất hậu nghiệm của tin u thay đổi

Tin u	p(u)	xyz	p(u)khi nhận được ký hiệu		
			x_1	y_0	z_1
u_0	1/4	$x_0y_0z_0$	0	0	0
u_1	1/4	$x_1y_0z_0$	1/2	4/5	0
u_2	1/8	$x_0y_1z_0$	0	0	0
u_3	1/8	$x_1y_1z_0$	1/4	0	0
u_4	1/16	$x_0y_0z_1$	0	0	0
u_5	1/16	$x_1y_0z_1$	1/8	1/5	1
u_6	1/16	$x_0y_1z_1$	0	0	0
u_7	1/16	$x_1y_1z_1$	1/8	0	0

1.3. Lượng tin riêng, lượng tin tương hỗ, lượng tin có điều kiện

- Lượng tin của mỗi tin $x_i \in X$: $I(x_i) = -log(p(x_i))$ gọi là *lượng tin riêng* của tin x_i
- Bài toán thu tin
  - Các tin của nguồn tin X truyền qua một hệ thống biến đổi thành đầu ra Y. Cho biết
    - Cấu trúc thống kê của nguồn
    - Cấu trúc thống kê của tạp nhiễu và phép biến đổi (cho bằng các xác suất chuyển đổi)
  - Với mỗi đầu ra $y \in Y$ xác định đầu vào $x \in X$ đã sinh ra $y \in Y$
- Lời giải
  - Chính xác: không có
  - Xác suất: Xác định đầu vào có khả năng nhất
  - Thông tin: (lọc)tách thông tin của đầu vào chứa trong đầu ra
    - Xác định lượng thông tin của mỗi x_i chứa trong y: *lượng tin tương hỗ*=Lượng tin ban đầu-lượng tin còn lại
    - chọn ra đầu vào lượng tin tương hỗ lớn nhất

1.3.Lượng tin riêng, lượng tin tương hỗ, lượng tin có điều kiện

- Lượng tin của mỗi tin $x_i \in X$: $I(x_i) = -log(p(x_i))$ gọi là *lượng tin riêng* của tin x_i
- Bài toán thu tin
  - Các tin của nguồn tin X truyền qua một hệ thống biến đổi thành đầu ra Y. Cho biết
    - Cấu trúc thống kê của nguồn
    - Cấu trúc thống kê của tạp nhiễu và phép biến đổi (cho bằng các xác suất chuyển đổi)
  - Với mỗi đầu ra $y \in Y$ xác định đầu vào $x \in X$ đã sinh ra $y \in Y$
- Lời giải
  - Chính xác: không có
  - Xác suất: Xác định đầu vào có khả năng nhất
  - Thông tin: (lọc)tách thông tin của đầu vào chứa trong đầu ra
    - Xác định lượng thông tin của mỗi x_i chứa trong y_j: *lượng tin tương hỗ*=Lượng tin ban đầu-lượng tin còn lại
    - chọn ra đầu vào lượng tin tương hỗ lớn nhất

1.3.Lượng tin riêng, lượng tin tương hỗ, lượng tin có điều kiện

- Lượng tin của mỗi tin $x_i \in X$: $I(x_i) = -log(p(x_i))$ gọi là *lượng tin riêng* của tin x_i
- Bài toán thu tin
  - Các tin của nguồn tin X truyền qua một hệ thống biến đổi thành đầu ra Y. Cho biết
    - Cấu trúc thống kê của nguồn
    - Cấu trúc thống kê của tạp nhiễu và phép biến đổi (cho bằng các xác suất chuyển đổi)
  - Với mỗi đầu ra $y \in Y$ xác định đầu vào $x \in X$ đã sinh ra $y \in Y$
- Lời giải
  - Chính xác: không có
  - Xác suất: Xác định đầu vào có khả năng nhất
  - Thông tin: (lọc)tách thông tin của đầu vào chứa trong đầu ra
    - Xác định lượng thông tin của mỗi x_i chứa trong y_j: lượng tin tương hỗ=Lượng tin ban đầu-lượng tin còn lại
    - chọn ra đầu vào lượng tin tương hỗ lớn nhất

1.3.Lượng tin riêng, lượng tin tương hỗ, lượng tin có điều kiện

- Lượng tin của mỗi tin $x_i \in X$: $I(x_i) = -log(p(x_i))$ gọi là *lượng tin riêng* của tin x_i
- Bài toán thu tin
    - Các tin của nguồn tin X truyền qua một hệ thống biến đổi thành đầu ra Y. Cho biết
        - Cấu trúc thống kê của nguồn
        - Cấu trúc thống kê của tạp nhiễu và phép biến đổi (cho bằng các xác suất chuyển đổi)
    - Với mỗi đầu ra $y \in Y$ xác định đầu vào $x \in X$ đã sinh ra $y \in Y$
- Lời giải
    - Chính xác: không có
    - Xác suất: Xác định đầu vào có khả năng nhất
    - Thông tin: (lọc)tách thông tin của đầu vào chứa trong đầu ra
        - Xác định lượng thông tin của mỗi x_i chứa trong y_j: lượng tin tương hỗ=Lượng tin ban đầu-lượng tin còn lại
        - chọn ra đầu vào lượng tin tương hỗ lớn nhất

1.3.Lượng tin riêng, lượng tin tương hỗ, lượng tin có điều kiện

- Lượng tin của mỗi tin $x_i \in X$: $I(x_i) = -log(p(x_i))$ gọi là *lượng tin riêng* của tin x_i
- Bài toán thu tin
  - Các tin của nguồn tin X truyền qua một hệ thống biến đổi thành đầu ra Y. Cho biết
    - Cấu trúc thống kê của nguồn
    - Cấu trúc thống kê của tạp nhiễu và phép biến đổi (cho bằng các xác suất chuyển đổi)
  - Với mỗi đầu ra $y \in Y$ xác định đầu vào $x \in X$ đã sinh ra $y \in Y$
- Lời giải
  - Chính xác: không có
  - Xác suất: Xác định đầu vào có khả năng nhất
  - Thông tin: (lọc)tách thông tin của đầu vào chứa trong đầu ra
    - Xác định lượng thông tin của mỗi x_i chứa trong y_j: lượng tin tương hỗ=Lượng tin ban đầu-lượng tin còn lại
    - chọn ra đầu vào lượng tin tương hỗ lớn nhất

1.3.Lượng tin riêng, lượng tin tương hỗ, lượng tin có điều kiện

- Lượng tin của mỗi tin $x_i \in X$: $I(x_i) = -log(p(x_i))$ gọi là *lượng tin riêng* của tin x_i
- Bài toán thu tin
  - Các tin của nguồn tin X truyền qua một hệ thống biến đổi thành đầu ra Y. Cho biết
    - Cấu trúc thống kê của nguồn
    - Cấu trúc thống kê của tạp nhiễu và phép biến đổi (cho bằng các xác suất chuyển đổi)
  - Với mỗi đầu ra $y \in Y$ xác định đầu vào $x \in X$ đã sinh ra $y \in Y$
- Lời giải
  - Chính xác: không có
  - Xác suất: Xác định đầu vào có khả năng nhất
  - Thông tin: (lọc)tách thông tin của đầu vào chứa trong đầu ra
    - Xác định lượng thông tin của mỗi x_i chứa trong y_j: lượng tin tương hỗ=Lượng tin ban đầu-lượng tin còn lại
    - chọn ra đầu vào lượng tin tương hỗ lớn nhất

1.3.Lượng tin riêng, lượng tin tương hỗ, lượng tin có điều kiện

- Lượng tin của mỗi tin $x_i \in X$: $I(x_i) = -log(p(x_i))$ gọi là *lượng tin riêng* của tin x_i
- Bài toán thu tin
  - Các tin của nguồn tin X truyền qua một hệ thống biến đổi thành đầu ra Y. Cho biết
    - Cấu trúc thống kê của nguồn
    - Cấu trúc thống kê của tạp nhiễu và phép biến đổi (cho bằng các xác suất chuyển đổi)
  - Với mỗi đầu ra $y \in Y$ xác định đầu vào $x \in X$ đã sinh ra $y \in Y$
- Lời giải
  - Chính xác: không có
  - Xác suất: Xác định đầu vào có khả năng nhất
  - Thông tin: (lọc)tách thông tin của đầu vào chứa trong đầu ra
    - Xác định lượng thông tin của mỗi x_i chứa trong y_j: *lượng tin tương hỗ*=**Lượng tin ban đầu-lượng tin còn lại**
    - chọn ra đầu vào lượng tin tương hỗ lớn nhất

1.3.Lượng tin riêng, lượng tin tương hỗ, lượng tin có điều kiện

- Lượng tin của mỗi tin $x_i \in X$: $I(x_i) = -log(p(x_i))$ gọi là *lượng tin riêng* của tin x_i
- Bài toán thu tin
    - Các tin của nguồn tin X truyền qua một hệ thống biến đổi thành đầu ra Y. Cho biết
        - Cấu trúc thống kê của nguồn
        - Cấu trúc thống kê của tạp nhiễu và phép biến đổi (cho bằng các xác suất chuyển đổi)
    - Với mỗi đầu ra $y \in Y$ xác định đầu vào $x \in X$ đã sinh ra $y \in Y$
- Lời giải
    - Chính xác: không có
    - Xác suất: Xác định đầu vào có khả năng nhất
    - Thông tin: (lọc)tách thông tin của đầu vào chứa trong đầu ra
        - Xác định lượng thông tin của mỗi x_i chứa trong y_j: *lượng tin tương hỗ*=**Lượng tin ban đầu-lượng tin còn lại**
        - chọn ra đầu vào lượng tin tương hỗ lớn nhất

1.3.Lượng tin riêng, lượng tin tương hỗ, lượng tin có điều kiện

- Lượng tin của mỗi tin $x_i \in X$: $I(x_i) = -log(p(x_i))$ gọi là *lượng tin riêng* của tin x_i
- Bài toán thu tin
  - Các tin của nguồn tin X truyền qua một hệ thống biến đổi thành đầu ra Y. Cho biết
    - Cấu trúc thống kê của nguồn
    - Cấu trúc thống kê của tạp nhiễu và phép biến đổi (cho bằng các xác suất chuyển đổi)
  - Với mỗi đầu ra $y \in Y$ xác định đầu vào $x \in X$ đã sinh ra $y \in Y$
- Lời giải
  - Chính xác: không có
  - Xác suất: Xác định đầu vào có khả năng nhất
  - Thông tin: (lọc)tách thông tin của đầu vào chứa trong đầu ra
    - Xác định lượng thông tin của mỗi x_i chứa trong y_j: *lượng tin tương hỗ*=**Lượng tin ban đầu-lượng tin còn lại**
    - chọn ra đầu vào lượng tin tương hỗ lớn nhất

1.3.Lượng tin riêng, lượng tin tương hỗ, lượng tin có điều kiện

- Lượng tin của mỗi tin $x_i \in X$: $I(x_i) = -log(p(x_i))$ gọi là *lượng tin riêng* của tin x_i
- Bài toán thu tin
  - Các tin của nguồn tin X truyền qua một hệ thống biến đổi thành đầu ra Y. Cho biết
    - Cấu trúc thống kê của nguồn
    - Cấu trúc thống kê của tạp nhiễu và phép biến đổi (cho bằng các xác suất chuyển đổi)
  - Với mỗi đầu ra $y \in Y$ xác định đầu vào $x \in X$ đã sinh ra $y \in Y$
- Lời giải
  - Chính xác: không có
  - Xác suất: Xác định đầu vào có khả năng nhất
  - Thông tin: (lọc)tách thông tin của đầu vào chứa trong đầu ra
    - Xác định lượng thông tin của mỗi x_i chứa trong y_j: *lượng tin tương hỗ*=**Lượng tin ban đầu-lượng tin còn lại**
    - chọn ra đầu vào lượng tin tương hỗ lớn nhất

1.3.Lượng tin riêng, lượng tin tương hỗ, lượng tin có điều kiện

- Lượng tin của mỗi tin $x_i \in X$: $I(x_i) = -log(p(x_i))$ gọi là *lượng tin riêng* của tin x_i
- Bài toán thu tin
  - Các tin của nguồn tin X truyền qua một hệ thống biến đổi thành đầu ra Y. Cho biết
    - Cấu trúc thống kê của nguồn
    - Cấu trúc thống kê của tạp nhiễu và phép biến đổi (cho bằng các xác suất chuyển đổi)
  - Với mỗi đầu ra $y \in Y$ xác định đầu vào $x \in X$ đã sinh ra $y \in Y$
- Lời giải
  - Chính xác: không có
  - Xác suất: Xác định đầu vào có khả năng nhất
  - Thông tin: (lọc)tách thông tin của đầu vào chứa trong đầu ra
    - Xác định lượng thông tin của mỗi x_i chứa trong y_j: *lượng tin tương hỗ*=**Lượng tin ban đầu-lượng tin còn lại**
    - chọn ra đầu vào lượng tin tương hỗ lớn nhất

1.3.Lượng tin riêng, lượng tin tương hỗ, lượng tin có điều kiện

- Lượng tin của mỗi tin $x_i \in X$: $I(x_i) = -log(p(x_i))$ gọi là *lượng tin riêng* của tin x_i
- Bài toán thu tin
  - Các tin của nguồn tin X truyền qua một hệ thống biến đổi thành đầu ra Y. Cho biết
    - Cấu trúc thống kê của nguồn
    - Cấu trúc thống kê của tạp nhiễu và phép biến đổi (cho bằng các xác suất chuyển đổi)
  - Với mỗi đầu ra $y \in Y$ xác định đầu vào $x \in X$ đã sinh ra $y \in Y$
- Lời giải
  - Chính xác: không có
  - Xác suất: Xác định đầu vào có khả năng nhất
  - Thông tin: (lọc)tách thông tin của đầu vào chứa trong đầu ra
    - Xác định lượng thông tin của mỗi x_i chứa trong y_j: *lượng tin tương hỗ*=**Lượng tin ban đầu-lượng tin còn lại**
    - chọn ra đầu vào lượng tin tương hỗ lớn nhất

Giải quyết bài toán thu tin

- Lượng tin của x_i khi đã nhận được y_j
  - Xác suất của x_i khi biết y_j: $p(x_i|y_j)$
  - Lượng tin của x_i khi có y_j là

$$I(x_i|y_j) = -log(p(x_i|y_j))$$

- Lượng tin tương hỗ của x_i trong y_j

$$I(x_i; y_j) = I(x_i) - I(x_i|y_j) = log\frac{p(x_i|y_j)}{p(x_i)} = log\frac{p(y_j|x_i)}{\sum_j(p(y_j)p(y_j|x_i))}$$

  chính là sự thay đổi thông tin về x_i do y_j gây ra
- Lượng tin tương hỗ tính theo các xác suất chuyển đổi và đầu vào

$$I(x_i; y_j) = \log\frac{p(x_i|y_j)}{p(x_i)} = \log\frac{p(y_j|x_i)}{\sum_j(p(x_i) * p(y_j|x_i))}$$

- $I(x_i|y_j)$ là lượng tin của x_i không nằm trong y_j, do bị tạp nhiễu ảnh hưởng, không đến đầu thu, gọi là *lượng tin có điều kiện*

1.4. Tính chất của lượng tin

- Tính chất 1
  Lượng tin riêng của một tin x_i luôn lớn hơn lượng tin tương hỗ trong một tin khác y_j
  - Nếu hai tin này độc lập thống kê, lượng tin tương hỗ bằng 0
  - Nếu từ y_j xác định được x_i lượng tin tương hỗ là cực đại
  - Lượng tin riêng chính là lượng tin tương hỗ cực đại

$$I(x_i) = -\log p(x_i) \geq I(x_i; y_j) = log\frac{p(x_i|y_j)}{p(x_i)} = log\frac{p(y_j|x_i)}{p(y_j)}$$

- Tính chất 2
  Lượng tin tương hỗ có thể âm
- Tính chất 3: Lượng tin của một cặp tin $x_i y_j$

$$I(x_i y_j) = I(x_i) + I(y_j) - I(x_i; y_j)$$

Nếu hai cặp tin độc lập thống kê

$$I(x_i y_j) = I(x_i) + I(y_j)$$

1.4. Tính chất của lượng tin

- Tính chất 1
  Lượng tin riêng của một tin x_i luôn lớn hơn lượng tin tương hỗ trong một tin khác y_j
  - Nếu hai tin này độc lập thống kê, lượng tin tương hỗ bằng 0
  - Nếu từ y_j xác định được x_i lượng tin tương hỗ là cực đại
  - Lượng tin riêng chính là lượng tin tương hỗ cực đại

$$I(x_i) = -\log p(x_i) \geq I(x_i; y_j) = log\frac{p(x_i|y_j)}{p(x_i)} = log\frac{p(y_j|x_i)}{p(y_j)}$$

- Tính chất 2
  Lượng tin tương hỗ có thể âm
- Tính chất 3: Lượng tin của một cặp tin $x_i y_j$

$$I(x_i y_j) = I(x_i) + I(y_j) - I(x_i; y_j)$$

Nếu hai cặp tin độc lập thống kê

$$I(x_i y_j) = I(x_i) + I(y_j)$$

1.4. Tính chất của lượng tin

- Tính chất 1
  Lượng tin riêng của một tin x_i luôn lớn hơn lượng tin tương hỗ trong một tin khác y_j
  - Nếu hai tin này độc lập thống kê, lượng tin tương hỗ bằng 0
  - Nếu từ y_j xác định được x_i lượng tin tương hỗ là cực đại
  - Lượng tin riêng chính là lượng tin tương hỗ cực đại

$$I(x_i) = -\log p(x_i) \geq I(x_i; y_j) = log\frac{p(x_i|y_j)}{p(x_i)} = log\frac{p(y_j|x_i)}{p(y_j)}$$

- Tính chất 2
  Lượng tin tương hỗ có thể âm
- Tính chất 3: Lượng tin của một cặp tin $x_i y_j$

$$I(x_i y_j) = I(x_i) + I(y_j) - I(x_i; y_j)$$

Nếu hai cặp tin độc lập thống kê

$$I(x_i y_j) = I(x_i) + I(y_j)$$

1.4. Tính chất của lượng tin

- Tính chất 1
  Lượng tin riêng của một tin x_i luôn lớn hơn lượng tin tương hỗ trong một tin khác y_j
  - Nếu hai tin này độc lập thống kê, lượng tin tương hỗ bằng 0
  - Nếu từ y_j xác định được x_i lượng tin tương hỗ là cực đại
  - Lượng tin riêng chính là lượng tin tương hỗ cực đại

$$I(x_i) = -\log p(x_i) \geq I(x_i; y_j) = log\frac{p(x_i|y_j)}{p(x_i)} = log\frac{p(y_j|x_i)}{p(y_j)}$$

- Tính chất 2
  Lượng tin tương hỗ có thể âm
- Tính chất 3: Lượng tin của một cặp tin $x_i y_j$

$$I(x_i y_j) = I(x_i) + I(y_j) - I(x_i; y_j)$$

Nếu hai cặp tin độc lập thống kê

$$I(x_i y_j) = I(x_i) + I(y_j)$$

1.4. Tính chất của lượng tin

- Tính chất 1
  Lượng tin riêng của một tin x_i luôn lớn hơn lượng tin tương hỗ trong một tin khác y_j
  - Nếu hai tin này độc lập thống kê, lượng tin tương hỗ bằng 0
  - Nếu từ y_j xác định được x_i lượng tin tương hỗ là cực đại
  - Lượng tin riêng chính là lượng tin tương hỗ cực đại

$$I(x_i) = -\log p(x_i) \geq I(x_i; y_j) = log\frac{p(x_i|y_j)}{p(x_i)} = log\frac{p(y_j|x_i)}{p(y_j)}$$

- Tính chất 2
  Lượng tin tương hỗ có thể âm
- Tính chất 3: Lượng tin của một cặp tin $x_i y_j$

$$I(x_i y_j) = I(x_i) + I(y_j) - I(x_i; y_j)$$

Nếu hai cặp tin độc lập thống kê

$$I(x_i y_j) = I(x_i) + I(y_j)$$

1.4. Tính chất của lượng tin

- Tính chất 1
  Lượng tin riêng của một tin x_i luôn lớn hơn lượng tin tương hỗ trong một tin khác y_j
  - Nếu hai tin này độc lập thống kê, lượng tin tương hỗ bằng 0
  - Nếu từ y_j xác định được x_i lượng tin tương hỗ là cực đại
  - Lượng tin riêng chính là lượng tin tương hỗ cực đại

$$I(x_i) = -\log p(x_i) \geq I(x_i; y_j) = log \frac{p(x_i|y_j)}{p(x_i)} = log \frac{p(y_j|x_i)}{p(y_j)}$$

- Tính chất 2
  Lượng tin tương hỗ có thể âm
- Tính chất 3: Lượng tin của một cặp tin $x_i y_j$

$$I(x_i y_j) = I(x_i) + I(y_j) - I(x_i; y_j)$$

Nếu hai cặp tin độc lập thống kê

$$I(x_i y_j) = I(x_i) + I(y_j)$$

1.5.Lượng tin trung bình

- Lượng tin của nguồn: lượng tin của một tập hợp tin
- Ví dụ: nguồn nhị phân , $p(x_0) = 0.99$ $p(x_1) = 0.01$, Tin x_1 có lượng tin lớn ($log100 \simeq 6.5bit$), nhưng thông tin của nguồn này ít có giá trị
- Lượng tin riêng trung bình

$$I(X) = -\sum_{X} p(x)logp(x)$$

  Trong ví dụ trên $I(X) \simeq 0.01$
- Lượng tin tương hỗ trung bình

$$I(X,Y) = \sum_{XY} p(x,y)log\frac{p(x|y)}{p(x)}$$

- Lượng tin riêng trung bình có điều kiện

$$I(X|Y) = \sum_{XY} p(x,y)logp(x|y)$$

1.5.Lượng tin trung bình *(Tiếp)*

- Tính chất của lượng tin trung bình

$$I(X,Y) = I(X) - I(X|Y)$$

$$I(X;Y) = I(Y;X) \geq 0$$

2. Entropi của nguồn rời rạc

1. Lượng tin của nguồn tin rời rạc
2. Entropi của nguồn rời rạc
    - Khái niệm entropi
    - Tính chất của Entropi
    - Entropi đồng thời và có điều kiện
3. Tốc độ lập tin của nguồn và thông lượng kênh rời rạc
4. Entropi của nguồn và thông lượng kênh liên tục

2.1.Khái niệm entropi

- Độ bất định của một nguồn tin=độ bất ngờ của tin, xác định vào trước thời điểm nhận tin
- Khi nhận tin, độ bất ngờ được giải thoát (tin đã biết, độ bất ngờ=0), đồng thời nhận được một lượng tin
- *Độ bất ngờ của tin = lượng tin của tin* về số đo

$$H(x_i) = -logp(x_i) = I(x_i)$$

- Độ bất định trung bình của một nguồn tin

$$H(X) = -\sum_{X} p(x)logp(x) = I(X)$$

  phản ánh chất lượng của nguồn tin.
- Độ bất ngờ H(X) gọi là *Entropi* của nguồn
- Thông số phản ánh khả năng phát tin (trung bình) của một nguồn
- Đo bằng lượng tin trung bình của các tin do nguồn phát ra

2.2.Tính chất của Entropi

- Entropi luôn không âm $H(X) \geq 0$
- Entropi bằng 0 khi và chỉ khi
  - Một ký hiệu có xác suất bằng 1
  - Tất cả các ký hiệu khác có xác suất 0
- Entropi có giá trị cực đại khi tất cả các ký hiệu có cùng xác suất, $H(X)_{max}$

2.2.Tính chất của Entropi

- Entropi luôn không âm $H(X) \geq 0$
- Entropi bằng 0 khi và chỉ khi
  - Một ký hiệu có xác suất bằng 1
  - Tất cả các ký hiệu khác có xác suất 0
- Entropi có giá trị cực đại khi tất cả các ký hiệu có cùng xác suất, $H(X)_{max}$

2.2.Tính chất của Entropi

- Entropi luôn không âm $H(X) \geq 0$
- Entropi bằng 0 khi và chỉ khi
  - Một ký hiệu có xác suất bằng 1
  - Tất cả các ký hiệu khác có xác suất 0
- Entropi có giá trị cực đại khi tất cả các ký hiệu có cùng xác suất, $H(X)_{max}$

2.2.Tính chất của Entropi

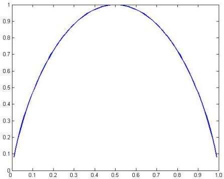
- Entropi luôn không âm $H(X) \geq 0$
- Entropi bằng 0 khi và chỉ khi
  - Một ký hiệu có xác suất bằng 1
  - Tất cả các ký hiệu khác có xác suất 0
- Entropi có giá trị cực đại khi tất cả các ký hiệu có cùng xác suất, $H(X)_{max}$

2.2.Tính chất của Entropi

- Entropi luôn không âm $H(X) \geq 0$
- Entropi bằng 0 khi và chỉ khi
    - Một ký hiệu có xác suất bằng 1
    - Tất cả các ký hiệu khác có xác suất 0
- Entropi có giá trị cực đại khi tất cả các ký hiệu có cùng xác suất, $H(X)_{max}$

Ví dụ

- Nguồn có hai ký hiệu, xác suất $p, 1 - p$. Entropi của nguồn là $H(X) = -p \log p - (1-p) \log(1-p)$ đạt giá trị cực đại là $\log_2 2 = 1$ khi $p = 1 - p = 1/2$



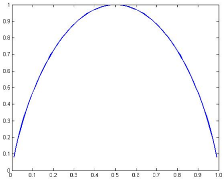
- Tổng quát nếu nguồn X có m ký hiệu, entropi sẽ có giá trị lớn nhất khi các ký hiệu đẳng xác suất:

$$p_1 = p_2 = \ldots = p_m = p = \frac{1}{m}$$

$$H(X)_{max} = -\sum_{i=1}^{m} p_i \log p_i = \log_2 m$$

Ví dụ

- Nguồn có hai ký hiệu, xác suất $p, 1-p$. Entropi của nguồn là $H(X) = -p \log p - (1-p)\log(1-p)$ đạt giá trị cực đại là $\log_2 2 = 1$ khi $p = 1 - p = 1/2$



- Tổng quát nếu nguồn X có m ký hiệu, entropi sẽ có giá trị lớn nhất khi các ký hiệu đẳng xác suất:

$$p_1 = p_2 = \ldots = p_m = p = \frac{1}{m}$$

$$H(X)_{max} = -\sum_{i=1}^{m} p_i \log p_i = \log_2 m$$

2.3.Entropi đồng thời và có điều kiện

- Xét tập tin của nguồn là X, tập tin của đích là Y
- Entropi đồng thời: độ bất định trung bình của tất cả các cặp x, y

$$H(XY) = -\sum_{XY} p(x, y) \log p(x, y)$$

- Độ bất định trung bình của một ký hiệu x_i thuộc X khi biết một ký hiệu y_j thuộc Y gọi là Entropi có điều kiện

$$H(X|Y) = -\sum_{XY} p(x, y) \log p(x|y)$$

$$H(Y|X) = -\sum_{XY} p(x, y) \log p(y|x)$$

- Tính chất

$$H(XY) = H(X) + H(Y|X) = H(Y) + H(X|Y)$$

$$H(Y) \geq H(Y|X), H(X) \geq H(X|Y)$$

Liên hệ giữa lượng tin tương hỗ và Entropi

- Thay đổi về độ bất định của tin X

$$I(X;Y) = H(X) - H(X|Y)$$

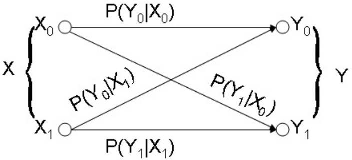
- Tương tự

$$I(X;Y) = H(Y) - H(Y|X)$$

- Lượng tin tương hỗ

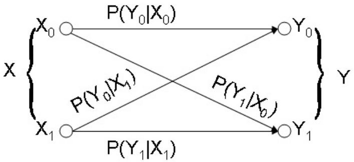
$$I(X;Y) = H(X) + H(Y) - H(XY)$$

Ví dụ: kênh nhị phân đối xứng



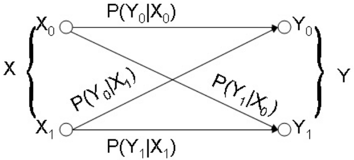
- Giả sử $p(y_0|x_0) = p(y_1|x_1) = p_d, p(y_0|x_1) = p(y_1|x_0) = p_s, p(x_0) = p, p(x_1) = q$. Khi đó $p_d + p_s = 1, p + q = 1$
- Tìm lượng tin tương hỗ trung bình giữa X, Y?
- Sử dụng công thức $I(X; Y) = H(Y) - H(Y|X)$
  - Tính H(Y)
  - Tính H(Y|X)

Ví dụ: kênh nhị phân đối xứng



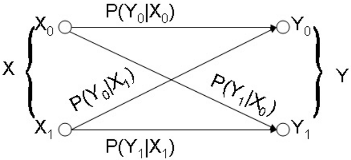
- Giả sử $p(y_0|x_0) = p(y_1|x_1) = p_d, p(y_0|x_1) = p(y_1|x_0) = p_s, p(x_0) = p, p(x_1) = q$. Khi đó $p_d + p_s = 1, p + q = 1$
- Tìm lượng tin tương hỗ trung bình giữa X, Y?
- Sử dụng công thức $I(X;Y) = H(Y) - H(Y|X)$
    - Tính H(Y)
    - Tính H(Y|X)

Ví dụ: kênh nhị phân đối xứng



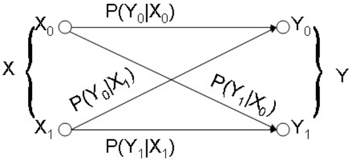
- Giả sử $p(y_0|x_0) = p(y_1|x_1) = p_d, p(y_0|x_1) = p(y_1|x_0) = p_s, p(x_0) = p, p(x_1) = q$. Khi đó $p_d + p_s = 1, p + q = 1$
- Tìm lượng tin tương hỗ trung bình giữa X, Y?
- Sử dụng công thức $I(X; Y) = H(Y) - H(Y|X)$
  - Tính H(Y)
  - Tính H(Y|X)

Ví dụ: kênh nhị phân đối xứng



- Giả sử $p(y_0|x_0) = p(y_1|x_1) = p_d, p(y_0|x_1) = p(y_1|x_0) = p_s, p(x_0) = p, p(x_1) = q$. Khi đó $p_d + p_s = 1, p + q = 1$
- Tìm lượng tin tương hỗ trung bình giữa X, Y?
- Sử dụng công thức $I(X; Y) = H(Y) - H(Y|X)$
  - Tính H(Y)
  - Tính H(Y|X)

Ví dụ: kênh nhị phân đối xứng



- Giả sử $p(y_0|x_0) = p(y_1|x_1) = p_d, p(y_0|x_1) = p(y_1|x_0) = p_s, p(x_0) = p, p(x_1) = q$. Khi đó $p_d + p_s = 1, p + q = 1$
- Tìm lượng tin tương hỗ trung bình giữa X, Y?
- Sử dụng công thức $I(X; Y) = H(Y) - H(Y|X)$
  - Tính H(Y)
  - Tính H(Y|X)

Ví dụ: kênh nhị phân đối xứng

- Xác định xác suất của các tin đầu ra

$$p(y) = \sum_X p(x,y) = \sum_X p(x)p(y|x)$$

$$p(y_0) = p(x_0)p(y_0|x_0) + p(x_1)p(y_0|x_1) =$$

$$= p(1-p_s) + (1-p)p_s = p - 2pp_s + p_s$$

$$p(y_1) = 1 - (p - 2pp_s + p_s)$$

- Entropi đầu ra

$$H(Y) = -p(y_0)\log p(y_0) - p(y_1)\log p(y_1) =$$

$$-(p - 2pp_s + p_s)\log(p - 2pp_s + p_s) -$$

$$-(1-(p - 2pp_s + p_s))\log(1-(p - 2pp_s + p_s))$$

Ví dụ: kênh nhị phân đối xứng *(Tiếp)*

- Entropi có điều kiện

$$H(Y|X) = -\sum_{XY} p(x,y)\log(p(y|x)) = -\sum_{XY} p(x)p(y|x)\log(p(y|x$$

$$-\{pp(y_0|x_0)\log p(y_0|x_0) + qp(y_1|x_1)\log p(y_1|x_1) +$$

$$pp(y_1|x_0)\log p(y_1|x_0) + qp(y_0|x_1)\log p(y_0|x_1)\} =$$

$$-\{p.p_d \log p_d + (1-p).p_d \log p_d + p.p_s \log p_s + (1-p).p_s \log p_s\} =$$

$$-\{p_d \log p_d + p_s \log p_s\} = -(p_s \log p_s + (1-p_s)\log(1-p_s))$$

- Lượng tin tương hỗ

$$I(X;Y) = H(Y) - H(Y|X) =$$

$$-(p - 2pp_s + p_s)\log(p - 2pp_s + p_s) -$$

$$-(1 - (p - 2pp_s + p_s))\log(1 - (p - 2pp_s + p_s)) +$$

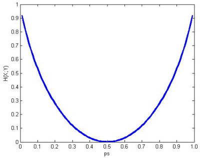
$$+(p_s \log p_s - (1-p_s)\log(1-p_s))$$

Ví dụ: kênh nhị phân đối xứng *(Tiếp)*

- Xét trường hợp $p = q = 1/2$, $H(Y) = 1$

$$I(X;Y) = 1 + (1 - p_s)\log_2(1 - p_s) + p_s\log_2(p_s)$$

Đồ thị theo p_s



- $p_s = 0$: không có sai số, lượng tin tương hỗ là 1, đạt cực đại
- $p_s = 1$: Sai số hoàn toàn, lượng tin tương hỗ là 1, đạt cực đại
- $p_s = 0.5$: lượng tin tương hỗ là 0, X, Y độc lập thống kê, sự truyền tin bị nhiễu phá hủy hoàn toàn

1. Lượng tin của nguồn tin rời rạc
2. Entropi của nguồn rời rạc
3. Tốc độ lập tin của nguồn và thông lượng kênh rời rạc
   - Tốc độ lập tin và độ dư của nguồn
   - Khái niệm thông lượng của kênh
   - Thông lượng của kênh rời rạc không nhiễu
   - Thông lượng của kênh rời rạc có nhiễu
4. Entropi của nguồn và thông lượng kênh liên tục

3.1.Tốc độ lập tin và độ dư của nguồn

- Tốc độ tạo ra các tin (ký hiệu) của nguồn (vật lí)là hữu hạn
- Lượng tin nguồn có thể tạo ra trong một đơn vị thời gian

$$R = n_0 H(X)$$

  gọi là tốc độ lập tin của nguồn. Ký hiệu R
- Để có tốc độ lập tin lớn với n_0 (nguồn vật lí) cố định, cần $H(X)$ lớn nhất
- Để $H(X)$ lớn nhất: thay đổi cấu trúc thống kê của nguồn: *mã hóa thống kê*

Ví dụ (Shannon)

- Một nguồn X có 4 ký hiệu và có phân bố xác suất

$$X = x_1, x_2, x_3, x_4$$

$$p(x_1) = 1/2, p(x_2) = 1/4, p(x_3) = 1/8, p(x_4) = 1/8$$

- Entropi của X là

$$H(X) = -\sum_X p(x) \log p(x) = 7/4$$

- Để có Entropi cực đại $H(X)_{max} = \log_2 4 = 2$ cần có phân bố xác suất đều cho các ký hiệu

Ví dụ (Shannon) *(Tiếp)*

- Thực hiện liên tiếp hai phép biến đổi. Phép biến đổi thứ nhất

$$x_1 \longrightarrow y_0$$
$$x_2 \longrightarrow y_1 y_0$$
$$x_3 \longrightarrow y_1 y_1 y_0$$
$$x_4 \longrightarrow y_1 y_1 y_1$$

  Xác suất của y_0 và y_1 là bằng nhau: $(7/8)/(7/4) = 1/2$

- Biến đổi nguồn tin thu được thành một nguồn có 4 ký hiệu

$$y_0 y_0 \longrightarrow z_1$$
$$y_1 y_0 \longrightarrow z_2$$
$$y_0 y_1 \longrightarrow z_3$$
$$y_1 y_1 \longrightarrow z_4$$

Ví dụ (Shannon) *(Tiếp)*

- Cả hai phép biến đổi đều bảo toàn lượng tin cho mỗi tin
- Entropi của nguồn Z là 2, do đó tốc độ lập tin của nguồn Z sẽ lớn hơn nguồn X

3.2.Khái niệm thông lượng của kênh

- Lượng tin tối đa kênh cho đi qua trong một đơn vị thời gian mà không gây sai nhầm. Ký hiệu C
- Là tốc độ lập tin tối đa ở đầu ra của kênh
- Tốc độ lập tin thường nhỏ hơn nhiều so với thông lượng

$$R \ll C$$

- Tận dụng thông lượng của kênh
  - Tối đa tốc độ lập tin của nguồn cho phù hợp với kênh: Mã hóa thống kê để có tốc độ lập tin cực đại, gần với thông lượng (đồng bộ kênh-nguồn)
    Cơ sở lý thuyết: định luật Shannon cho kênh không nhiễu
  - Sử dụng phần còn lại của thông lượng để chống nhiễu (mã chống nhiễu)
    Cơ sở lý thuyết: Định luật Shannon cho kênh có nhiễu

3.3. Thông lượng của kênh rời rạc không nhiễu

- Kênh không có nhiễu:
  - Thông tin do nguồn thiết lập được truyền không có sai nhầm
  - Thông lượng kênh khi đó bằng tốc độ lập tin cực đại

$$C = R_{max} = n_0 H(X)_{max} (bit/sec)$$

- Để tối ưu hệ thống cần cực đại entropi của nguồn
  - Tồn tại một phương pháp mã hóa với entropi cực đại?
  - Giới hạn của tốc độ truyền tin khi đó là bao nhiêu

Định lý Shannon cho kênh rời rạc không nhiễu

- Giả định
  - Nguồn có entropi H(bit/ký hiệu)
  - Kênh có thông lượng C(bit/sec)
  - Chú ý $C = R_{max} = n_0 H(X)_{max}(bit/sec)$
- Kết luận
  1. Có thể mã hóa nguồn để truyền tin với tốc độ trung bình $\frac{C}{H} - \epsilon$(ký hiệu/s),ϵ bé tùy ý
  2. Không thể truyền tin nhanh hơn $\frac{C}{H}$ (ký hiệu/s)
- Chứng minh
  1. ??? (Bài tập)
  2. Hiển nhiên?
- Tốc độ lập tin tối đa tiệm cận và có thể bằng với thông lượng kênh. Phép mã hóa tương ứng gọi là *phép mã hóa tối ưu*.
- Phép mã hóa tối ưu không sử dụng hết thông lượng của kênh

Độ dư của nguồn

- Khi tốc độ lập tin của nguồn chưa đạt cực đại, còn khả năng để tối ưu nguồn. Khả năng này đo bằng *độ dư của nguồn*
- Độ dư của nguồn

$$H(X)_{max} - H(X)$$

- Độ dư tương đối

$$r_s = \frac{H(X)_{max} - H(X)}{H(X)_{max}} = 1 - \frac{H(X)}{H(X)_{max}}$$

- Để có thể xây dựng mã chống nhiễu, điều kiện đầu tiên là phải có độ dư

Độ dư của nguồn

- Khi tốc độ lập tin của nguồn chưa đạt cực đại, còn khả năng để tối ưu nguồn. Khả năng này đo bằng *độ dư của nguồn*
- Độ dư của nguồn

$$H(X)_{max} - H(X)$$

- Độ dư tương đối

$$r_s = \frac{H(X)_{max} - H(X)}{H(X)_{max}} = 1 - \frac{H(X)}{H(X)_{max}}$$

- Để có thể xây dựng mã chống nhiễu, điều kiện đầu tiên là phải có độ dư

3.4. Thông lượng của kênh rời rạc có nhiễu

- Xét kênh không nhớ, có nhiễu
- Các tin nhận được bị sai lệch
  - Nếu vẫn phân biệt được các tin đầu vào: không có sai nhầm
  - Nếu các tin đầu vào bị lẫn nhau ở đầu ra (nhiều tin đầu vào cho một tin đầu ra): giảm độ chính xác truyền tin
  - Xuất hiện sai số truyền tin, đo bằng bit/s
- Xét hệ thống gồm đầu vào $X = \{x_i, i = 1 \dots m\}$, đầu ra $Y = \{y_j, j = 1 \dots n\}$. Do kênh có nhiễu, nên phép biến đổi giữa X và Y được biểu diễn bằng ma trận xác suất chuyển đổi $p(y_j|x_i)$
- Lượng tin tương hỗ khi đó có thể tính theo

$$I(X;Y) = H(X) - H(X|Y)$$

$$I(X;Y) = H(Y) - H(Y|X)$$

3.4.Thông lượng của kênh rời rạc có nhiễu *(Tiếp)*

- Tốc độ lập tin ở đầu ra của kênh

$$R = n_0 I(X;Y) = n_0(H(X) - H(X|Y))(bit/sec)$$

Trong đó $n_0 H(X|Y)(bit/sec)$ là lương tin bị nhiễu phá hủy trong một đơn vị thời gian

- Khi các thông số của kênh đã xác định, muốn nâng cao tốc độ lập tin đầu ra, cần phải tăng entropi bằng cách thay đổi phương pháp mã hóa. Thông lượng kênh chính là tốc độ lập tin tối đa ở đầu ra kênh:

$$C = R_{max} = n_0 I(X;Y)_{max} = n_0(H(X) - H(X|Y))_{max}(bit/sec)$$

Nếu xem giải thông của kênh $\Delta f = n_0$ thì thông lượng kênh có nhiễu là

$$C = \Delta f(H(X) - H(X|Y))_{max}(bit/sec)$$

đảm bảo truyền tin không có sai nhầm

Định lý Shannon cho kênh có nhiễu

- Với nguồn tin có tốc độ lập tin R, kênh tin có thông lượng C, có thể truyền tin với độ chính xác tối đa là bao nhiêu?
- Định lý
  1. Với kênh rời rạc có thông lượng C, tốc độ lập tin của nguồn là $R < C$ có thể có phương pháp mã hóa để truyền tin với một độ sai nhầm bé tùy ý.
  2. Nếu $R > C$ có thể mã hóa nguồn với sai số $R - C + \epsilon, \epsilon$ bé tùy ý.
  3. Không tồn tại cách mã hóa với sai số nhỏ hơn $R - C$
- Ýnghĩa
  - Nếu $R < C$ phần dư của nguồn được dùng để bổ sung các thông tin chống nhiễu. Cần truyền lượng tin lớn hơn so với lươọng tin cần truyền.
  - Nếu$R > C$, phần thông tin không được truyền đi sẽ trở thành sai số (tối thiểu). Tồn tại cách mã hóa để có(tiệm cận) sai số tối thiểu

4. Entropi của nguồn và thông lượng kênh liên tục

1. Lượng tin của nguồn tin rời rạc
2. Entropi của nguồn rời rạc
3. Tốc độ lập tin của nguồn và thông lượng kênh rời rạc
4. Entropi của nguồn và thông lượng kênh liên tục
    - Entropi của nguồn liên tục
    - Thông lượng kênh liên tục

4.1.Entropi của nguồn liên tục

- Nguồn liên tục là một quá trình ngẫu nhiên liên tục. Để có thể nghiên cứu, xem xét nguồn liên tục cần *rời rạc hóa nguồn liên tục*
- Với điều kiện nguồn có phổ hữu hạn, có thời gian tồn tại hữu hạn, nguồn liên tục có thể được lấy mẫu với tần số $2\Delta f$ tại các điểm $\{t_i\}, i = 1 \dots n$
- Mỗi một thể hiện của nguồn liên tục là một hàm $x(t)$ theo thời gian, được đặc trưng bởi n giá trị tức thời $\{x_i\}, i = 1 \dots n$
- Tính chất thống kê của nguồn đặc trưng bởi phân bố xác suất đồng thời

$$p(x_1, x_2 \dots, x_n)$$

- Với nguồn dừng, phân bố xác suất này không phụ thuộc thời gian

$$p(x_{t_i}) = p(x_{t_i+\tau})$$

- Nguồn đặc trưng bằng một phân bố xác suất chung $p(x)$
- Entropi của nguồn liên tục dừng

$$H(X) = -\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\log p(x)dx$$

- Entropi của nguồn không dừng

$$-\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dots \int\limits_{-\infty}^{\infty} p(x_{t_1}, x_{t_2} \dots x_{t_n}) \log p(x_{t_1}, x_{t_2} \dots x_{t_n}) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

- Tốc độ lập tin của nguồn

$$R = n_0 H(X) = 2\Delta f H(X)$$

Entropi có điều kiện, Lượng tin tương hỗ

- Entropi có điều kiện

$$H(X|Y) = -\int_{\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)\log p(x|y)$$

$$H(Y|X) = -\int_{\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)\log p(y|x)$$

- Lượng tin tương hỗ

$$I(X;Y) = -\int_{\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)\log \frac{p(x|y)}{p(x)}dxdy$$

$$I(X;Y) = -\int_{\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)\log \frac{p(y|x)}{p(y)}dxdy$$

Quan hệ giữa lượng tin tương hỗ, lượng tin đồng thời và Entropi

$$H(X;Y) = H(X) - H(Y|X) = H(Y) + H(X|Y)$$
$$H(XY) = H(X) + H(Y|X),\ H(XY) = H(Y) + H(X|Y)$$

Ví dụ 1: Entropi của nguồn có công suất cực đại hạn chế

- Với công suất cực đại hạn chế bởi P_{max}, $x(t)$ biến đổi trong phạm vi $x_{min} \sim x_{max}$, $x_{min} = -\sqrt{P_{max}}$, $x_{max} = \sqrt{P_{max}}$
- (*Không chứng minh*)Phân bố đều sẽ cho Entropi cực đại

$$p(x) = \frac{1}{2\sqrt{P_{max}}} = \frac{1}{2x_{max}}$$

$$H(X) = -\int_{x_{min}}^{x_{max}} \frac{1}{2x_{max}} \log \frac{1}{2x_{max}} dx = log(2x_{max})$$

Ví dụ 2: Entropi của nguồn có công suất trung bình hữu hạn

- Công suất trung bình hữu hạn

$$\int_{\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx = P_{av}^2$$

- Entropy cực đại khi $p(x)$ là phân bố gauss chuẩn

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi P_{av}}} e^{\frac{x^2}{2P_{av}}}$$

và có giá trị là

$$H(X) = H(X)_{max} = \int_{\infty}^{\infty} p(x)[\frac{x^2}{2P_{av}} + \ln \sqrt{2\pi P_{av}}]dx$$

Ví dụ 2: Entropi của nguồn có công suất trung bình hữu hạn *(Tiếp)*

$$= \frac{1}{2P_{av}} \int_{\infty}^{\infty} x^2 p(x)dx + \ln \sqrt{2\pi P_{av}} \int_{\infty}^{\infty} p(x)dx$$

$$= \frac{1}{2} + \ln \sqrt{2\pi P_{av}} = \ln \sqrt{2\pi e P_{av}}$$

- Các nguồn nhiễu trắng có phân bố gauss chuẩn. Tốc độ lập nhiễu

$$R = 2\Delta f H(N) = 2\Delta f \ln \sqrt{2\pi e P_N} = \Delta f \ln 2\pi e P_N =$$

- Để có thể có entropi lớn nhất, cần mã hóa thông tin sử dụng các tín hiệu có phân bố chuẩn (giống nhiễu trắng): mã hóa giả nhiễu

4.2. Thông lượng kênh liên tục

- Xét kênh truyền tin có nhiễu cộng. Tín hiệu đầu ra là

$$y(t) = x(t) + n(t), x \in X, y \in Y, n \in N$$

  giả thiết X và N độc lập thống kê

- Vậy

$$H(X, Y) = H(X, X + N) = H(X, N) = H(X) + H(N)$$

  Độ bất định của đầu ra bằng tổng độ bất định đầu vào và nhiễu

- Mặt khác

$$H(X, Y) = H(X) + H(Y|X)$$

  Vậy $H(N) = H(Y|X)$

4.2.Thông lượng kênh liên tục *(Tiếp)*

- Tốc độ lập tin

$$R = n_0[H(Y) - H(Y|X)] = 2\Delta f[H(Y) - H(N)]$$

- Thông lượng kênh bằng tốc độ lập tin cực đại đầu ra

$$C = R_{max}$$

- Cần có $H(Y)$ cực đại để có thông lượng cực đại
- Các tin của Y gồm hai thành phần từ X và N. Phụ thuộc vào các hạn chế của X, N có thể xác định qui luật phân bố của X để thông lượng kênh cực đại

Trường hợp công suất trung bình hạn chế

- Công suất trung bình đầu ra

$$P_Y = P_X + P_N$$

- Để $H(Y)$ cực đại, Y có phân bố chuẩn. Nhiễu có quá trình phân bố chuẩn, vậy X phải có quá trình phân bố chuẩn. Khi đó

$$H(Y) = H(Y)_{max} = \ln\sqrt{2\pi e(P_X + P_N)}, H(N) = \ln\sqrt{2\pi e P_N}$$

$$C = R_{max} = 2\Delta f(H(Y) - H(N)) = \Delta f(1 + \frac{P_X}{P_N})$$

gọi là công thức Shannon

- Vậy muốn tăng thông lượng của kênh cần tăng giải thông Δf hoặc tăng công suất tín hiệu

Trường hợp công suất trung bình hạn chế *(Tiếp)*

- Giải thông không thể tăng vô hạn. Khi giải thông tăng, công suất nhiễu cũng tăng

$$P_N = \Delta f N_0^2$$

- Khi đó

$$C = \Delta f \log_2(1 + \frac{P_S}{\Delta f} N_0^2)$$

Giới hạn của thông lượng

$$\lim_{\Delta f \to \infty}(C) = \frac{P_X}{N_0^2} \log_2 e = 1.443 \frac{P_X}{N_0^2}$$

- Các hệ thống truyền tin trong thực tế còn cách rất xa giới hạn trên

Chương 3: Thông tin và định lượng thông tin

1. Lượng tin của nguồn tin rời rạc
   - Nguồn tin rời rạc
   - Biến đổi nguồn tin rời rạc
   - Lượng tin riêng, lượng tin tương hỗ, lượng tin có điều kiện
   - Tính chất của lượng tin
   - Lượng tin trung bình
2. Entropi của nguồn rời rạc
   - Khái niệm entropi
   - Tính chất của Entropi
   - Entropi đồng thời và có điều kiện
3. Tốc độ lập tin của nguồn và thông lượng kênh rời rạc
   - Tốc độ lập tin và độ dư của nguồn
   - Khái niệm thông lượng của kênh
   - Thông lượng của kênh rời rạc không nhiễu
   - Thông lượng của kênh rời rạc có nhiễu
4. Entropi của nguồn và thông lượng kênh liên tục
   - Entropi của nguồn liên tục
   - Thông lượng kênh liên tục