

## **2.3. Các khâu động học cơ bản**

# 1. Khâu quán tính bậc nhất

+ Phương trình vi phân:

$$T \frac{dy}{dt} + y = kx$$

+ Hàm truyền đạt:

$$G(s) = \frac{k}{1+Ts}$$

k : hệ số khuếch đại

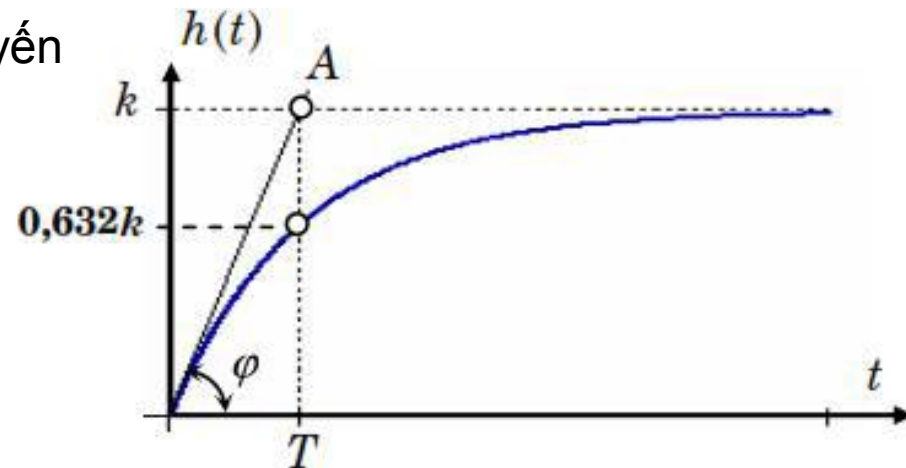
T: hằng số thời gian

+ Hàm quá độ :  $h(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} = k(1 - e^{-\frac{1}{T}t})$

Bài toán ngược: Biết hàm quá độ  $h(t)$ , xác định k, T

- Hoành độ của đường tiệm cận với  $h(t)$  khi  $t \rightarrow \infty$  là giá trị k
- Kẻ đường tiếp tuyến với  $h(t)$  tại  $t=0$
- Hoành độ của điểm A trên đường tiếp tuyến mà tại đó tung độ bằng k sẽ chính là tham số T cần tìm.

Ngoài ra cũng tại thời điểm T ta còn có  $h(t=T) = k(1 - e^{-1}) = 0,632k$  nên có thể tìm T bằng cách xác định điểm trên  $h(t) = 0,632k$



# 1. Khâu quán tính bậc nhất

- Đặc tính tần biên pha:

$$\tilde{G}(j\omega) = \frac{k}{1+j\omega T} = \frac{k(1-j\omega T)}{(1+j\omega T)(1-j\omega T)} = \frac{k}{1+T^2\omega^2} - j\frac{kT\omega}{1+T^2\omega^2}$$

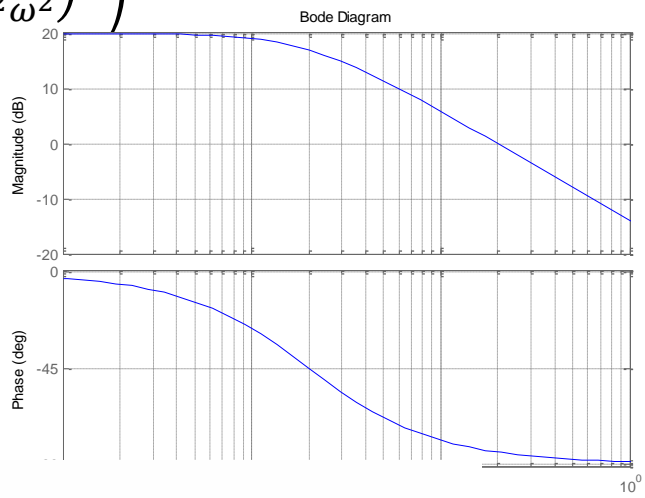
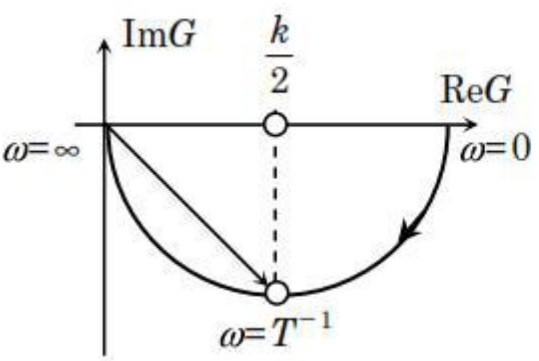
- Đồ thị bode:

$$\begin{aligned} \text{Biên độ: } L(\omega) &= 20 \lg |\tilde{G}(j\omega)| = 20 \lg \left( \sqrt{\left( \frac{k}{1+T^2\omega^2} \right)^2 + \left( \frac{kT\omega}{1+T^2\omega^2} \right)^2} \right) \\ &= 20 \lg \left( \frac{k^2}{1+T^2\omega^2} \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

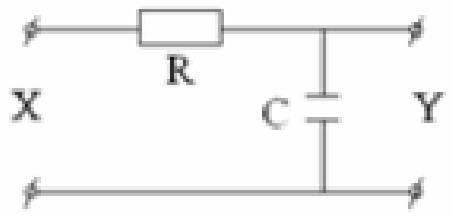
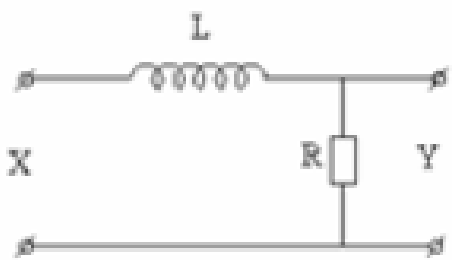
Khi  $\omega \ll 1/T$   $L(\omega) = 20 \lg k$   
 Khi  $\omega \gg 1/T$   $L(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg T\omega$

Pha:  $\varphi(\omega) = -\arctan(T\omega)$

Khi  $\omega=0$  thì  $\varphi(\omega) = 0$   
 Khi  $\omega=1/T$   $\varphi(\omega) = -\pi/4$   
 Khi  $\omega=\infty$   $\varphi(\omega) = -\pi$



Ví dụ:



## 2. Khâu tích phân - quán tính bậc nhất

+ **Hàm truyền đạt:**

$$G(s) = \frac{k}{s(1+Ts)} ; \text{ Trong đó } k : \text{ hệ số khuếch đại}$$

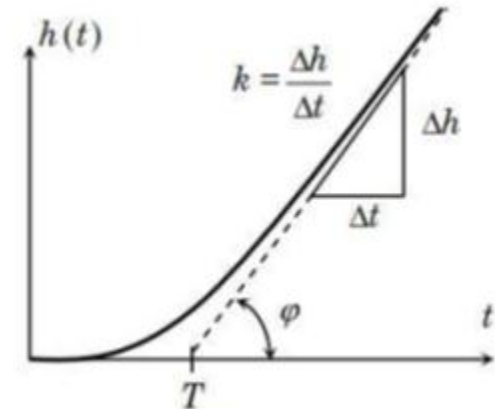
$T$ : hằng số thời gian

+ **Hàm quá độ:**  $h(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{k}{s^2(1+Ts)} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} - \frac{T}{s} + \frac{T}{s+\frac{1}{T}} \right\}$

Suy ra  $h(t) = k \left[ t - T(1 - e^{-\frac{1}{T}t}) \right]$

+ Bài toán ngược: Xác định  $k$ ,  $T$  từ hàm quá độ:

- Kẻ đường tiệm cận  $h_{tc}(t)$  với  $h(t)$  tại  $t = \infty$
- Xác định  $T$  là giao điểm của  $h_{tc}(t)$  với trục hoành
- Xác định góc nghiêng  $\varphi$  của  $h_{tc}(t)$  với trục hoành rồi tính  $k = \tan \varphi$



## 2. Khâu tích phân - quán tính bậc nhất

+ **Đặc tính tần biên pha:**

$$\tilde{G}(j\omega) = \frac{k}{j\omega(1+jT\omega)} = -\frac{kT}{1+T^2\omega^2} - j\frac{k}{\omega(1+T^2\omega^2)}$$

+ **Đồ thị Bode**

$$\begin{aligned} \text{Biên độ : } L(\omega) &= 20\lg \left[ \sqrt{\left(-\frac{kT}{1+T^2\omega^2}\right)^2 + \left(-\frac{k}{\omega(1+T^2\omega^2)}\right)^2} \right] \\ &= 20\lg k - 20\lg \omega - 20\lg \sqrt{(T\omega)^2 + 1} \end{aligned}$$

$$\text{Khi } \omega \ll 1/T \quad L(\omega) = 20\lg k - 20\lg \omega$$

$$\omega \gg 1/T \quad L(\omega) = 20\lg k - 20\lg T - 40\lg \omega$$

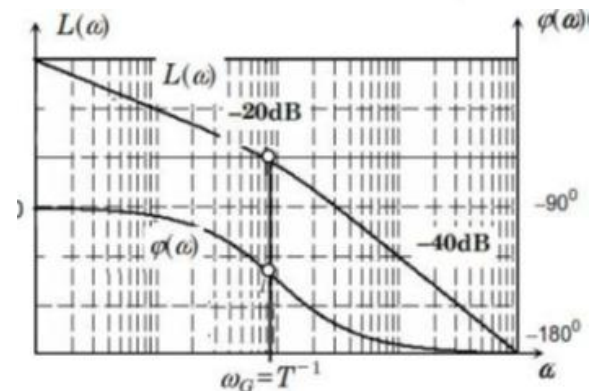
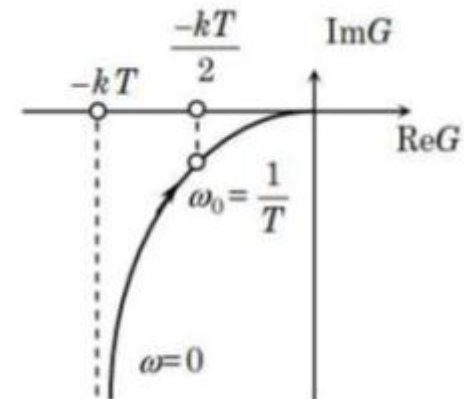
$$\text{Pha: } \varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) = -\pi/2 - \arctan(T\omega)$$

$$\text{Khi } \omega=0 \text{ thì } \varphi(\omega) = -\pi/2$$

$$\omega=1/T \quad \varphi(\omega) = -3\pi/4$$

$$\omega=\infty \quad \varphi(\omega) = -\pi$$

$\omega$	Re	Im
0	- kT	$-\infty$
1/T	- kT/2	-k/2T
$\infty$	0	0



# 3. Khâu tích phân - quán tính bậc n

**Hàm truyền đạt:**

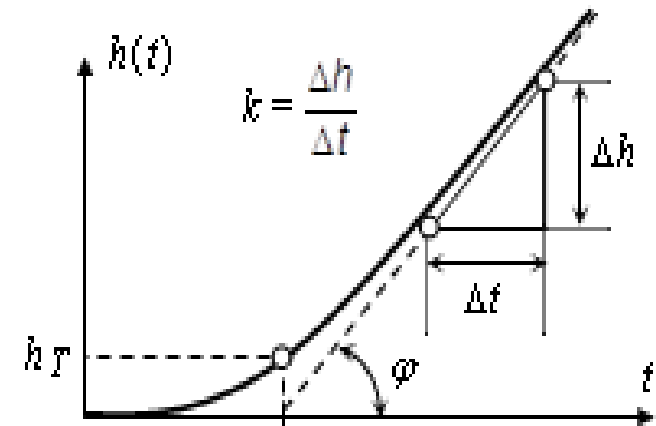
$$G(s) = \frac{k}{s(1+Ts)^n} ; \text{ Trong đó } k : \text{ hệ số khuếch đại}$$

T: hằng số thời gian

**Hàm quá độ:** 
$$h(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{k}{s^2(1+Ts)^n} \right\}$$

$$= \mathcal{L}^{-1} \left\{ k \left[ \frac{1}{s^2} - \frac{nT}{s} + \sum_{i=1}^n \frac{(n+1-i)T^2}{(1+Ts)^i} \right] \right\}$$

Suy ra 
$$h(t) = k \left[ t - nT + \sum_{i=1}^n \frac{(n+1-i)t^{i-1}e^{-\frac{1}{T}t}}{T^{i-2}(i-1)!} \right]$$



Bài toán ngược: Xác định các tham số k, T và n từ hàm quá độ

- Kẻ đường tiệm cận  $h_{tc}(t)$  với  $h(t)$  tại  $t = \infty$
- Xác định góc nghiêng  $\varphi$  của  $h_{tc}(t)$  với trục hoành rồi tính  $k = \tan \varphi$
- Xác định  $T_{tc}$  là giao điểm của  $h_{tc}(t)$  với trục hoành và tính  $T = \frac{T_{tc}}{n}$

Trường hợp chưa biết bậc của n có thể tra bảng sau:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\varphi$	0,3679	0,2707	0,224	0,1954	0,1755	0,1606	0,149	0,1396	0,1318	0,1144

# 4. Khâu quán tính bậc hai

## + Hàm truyền đạt:

$$G(s) = \frac{k}{(1+T_1s)(1+T_2s)}; \text{ Trong đó } T_1 > T_2$$

$k$  : hệ số khuếch đại

$T_1, T_2$  : hằng số thời gian

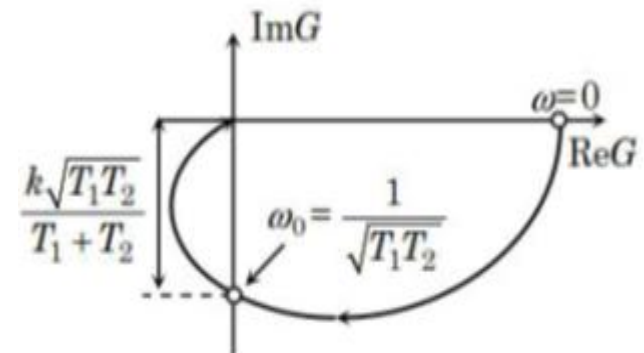
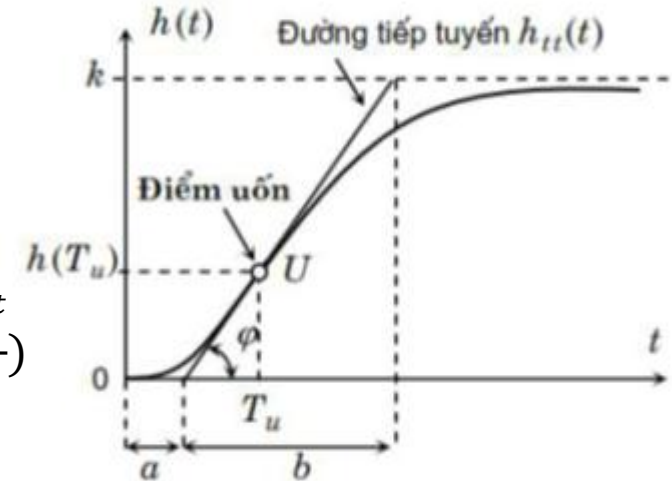
## + Hàm quá độ:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} = k \left( 1 - \frac{T_1 e^{-\frac{1}{T_1}t} - T_2 e^{-\frac{1}{T_2}t}}{T_1 - T_2} \right)$$

## + Đặc tính tần biên pha:

$$\tilde{G}(j\omega) = \frac{k(1-T_1T_2\omega^2)}{(1+T_1^2\omega^2)(1+T_2^2\omega^2)} - j \frac{k\omega(T_1+T_2)}{(1+T_1^2\omega^2)(1+T_2^2\omega^2)}$$

$\omega$	Re	Im
0	k	0
$1/\sqrt{T_1T_2}$	0	$-\frac{k\sqrt{T_1T_2}}{T_1+T_2}$
$\infty$	0	0



## 4. Khâu quán tính bậc hai

Bài toán ngược: Biết hàm quá độ  $h(t)$ , xác định  $k, T_1, T_2$

Tìm hằng số  $k$  theo  $k=h(\infty)$

Kẻ đường tiếp tuyến  $h_{tt}(t)$  với  $h(t)$  tại điểm uốn. Sau đó xác định hai tham số  $a$  là hoành độ giao điểm của đường tiếp tuyến với trục thời gian và  $b$  là khoảng thời gian để đường tiếp tuyến đó đi được từ 0 đến  $k$ .

Lập tỷ số  $a/b$ . Nếu  $\frac{a}{b} > 0,103648$  thì bỏ qua.

Tìm  $x$  thỏa mãn  $0 < x < 1$  từ  $\frac{a}{b}$  (tra bảng)

Tìm  $T_1$  theo công thức  $T_1 = b / f_1(x)$  với  $f_1(x) = x^{\frac{x}{x-1}}$

Tính  $T_2 = xT_1$ .

a/b	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,1
x	0,012	0,0275	0,0467	0,707	0,1008	0,1393	0,1904	0,2622	0,374	0,6113



## 5. Khâu quán tính bậc n

Hệ thống có đường thực nghiệm  $h(t)$  tuy cũng có dạng hình chữ S nhưng không thỏa mãn điều kiện  $0 < \frac{a}{b} < 0,103648$ .

**+ Hàm truyền đạt:**

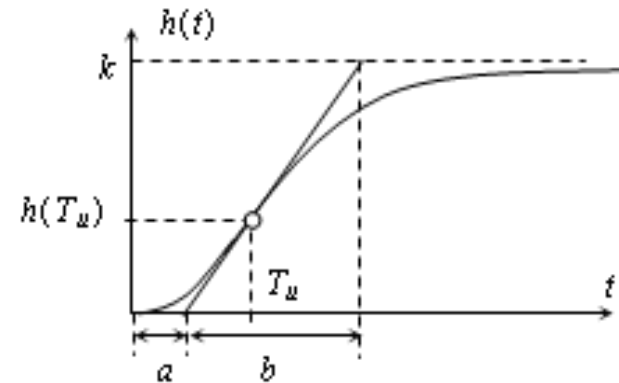
$$G(s) = \frac{k}{(1+Ts)^n}$$

Như vậy hàm quá độ  $h(t)$  của khâu PTn có ảnh Laplace

$$H(s) = \frac{k}{s(1+Ts)^n}$$

**+ Hàm quá độ là:**

$$h(t) = k(1 - e^{-\frac{1}{T}t} \sum_{i=1}^n \frac{A_i t^{i-1}}{(i-1)!}) \quad \text{Với } A_i = \frac{k}{T^{i-1}}$$



Đồ thị bode được biểu diễn trên hình vẽ với tần số gãy  $\omega_G = 1/T$

Trước tần số gãy  $\omega_G$ ,  $L(\omega)$  có dạng song song với trục hoành ứng với thành phần khuếch đại  $k$ , sau tần số gãy thì  $L(\omega)$  giảm về 0 với vận tốc là  $20n$  dB/dec

## 5. Khâu quán tính bậc n

### Bài toán ngược: tìm k, T và n từ đường đặc tính

- Tìm hằng số k theo  $k = h_{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} h(t)$
- Kẻ đường tiếp tuyến  $h_{tt}(t)$  với  $h(t)$  tại điểm uốn. Sau đó xác định hai tham số a là hoành độ giao điểm của đường tiếp tuyến  $h_{tt}(t)$  với trục thời gian và b là khoảng thời gian để đường tiếp tuyến đó đi từ 0 tới  $h_{\infty}$ .
- Lập tỷ số  $\frac{a}{b}$ . Nếu  $0 < \frac{a}{b} < 0,103648$  thì dừng thuật toán với kết luận rằng đối tượng phải được mô tả bằng mô hình quán tính bậc hai
- Tìm n bằng cách tra bảng

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\frac{a}{b}$	0,1036	0,218	0,3194	0,4103	0,4933	0,57	0,6417	0,7092	0,7732	0,8341

- Tìm T từ n và b theo công thức:

$$T = \frac{b(n-1)^{n-2}}{e^{n-1}(n-2)!}$$

## 6. Khâu Lead/Lag

Khâu Lead và khâu Lag đều là những hệ có chung hàm truyền đạt:

$$G(s) = \frac{1+T_t s}{1+T_m s}$$

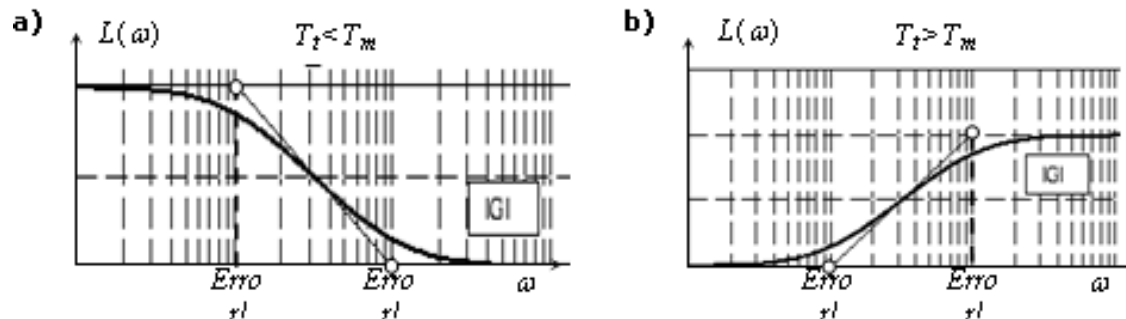
Trong đó :

Nếu  $T_t > T_m$  thì ta nói đó là khâu Lead (dẫn trước)

Nếu  $T_t < T_m$  thì ta nói đó là khâu Lag (cắt bớt)

Cả hai khâu đều có tần số gãy là  $\omega_{G1} = T_t^{-1}$  và  $\omega_{G2} = T_m^{-1}$ .

Nếu  $T_t > T_m$  thì những thành phần có tần số cao trong tín hiệu đầu vào sẽ được ưu tiên cho đi qua (dẫn tần số cao), ngược lại khi  $T_t < T_m$  thì khâu ưu tiên những thành phần có tần số thấp (cắt bớt tần số cao)

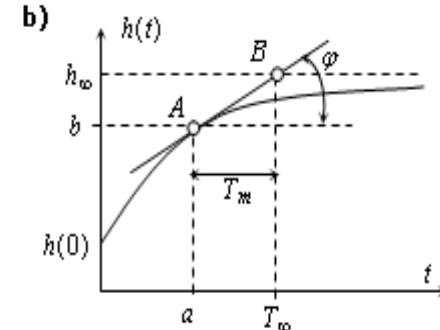
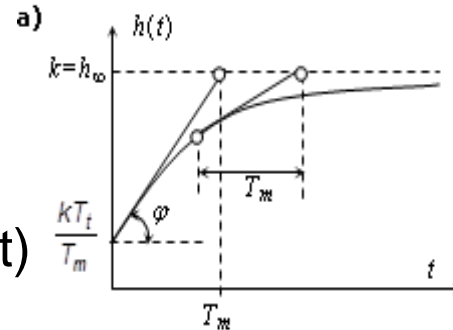


## 6. Khâu Lead/Lag

Từ hàm truyền đạt ta có ảnh Laplace của hàm quá độ

$$H(s) = \frac{1+T_t s}{s(1+T_m s)} = \frac{1}{s} - \frac{T_m - T_t}{1+T_m s}$$

$$\text{Hàm quá độ } h(t) = \left(1 - \frac{(T_m - T_t)e^{-\frac{1}{T_m}t}}{T_m}\right)1(t)$$



Xác định tham số của mô hình Lead/Lag từ đồ thị hàm quá độ  $h(t)$  của nó như sau:

- ☐ Kẻ đường tiệm cận  $h_\infty$  với  $h(t)$  tại  $t=\infty$  rồi xác định  $k$  theo .
- ☐ Kẻ đường tiếp tuyến  $h_{tt}(t)$  với  $h(t)$  tại điểm  $t=0$ , sau đó xác định  $T_m$  là hoành độ của giao điểm giữa đường tiếp tuyến  $h_{tt}(t)$  với đường tiệm cận  $h_\infty$ .
- Xác định  $T_t$  theo  $T_t = \frac{h(0)T_m}{k}$

## 6. Khâu Lead/Lag

- Kẻ đường tiệm cận  $h_\infty$  với  $h(t)$  tại  $\infty$  rồi xác định  $k$  theo .
- Lấy một điểm  $A$  bất kỳ trên  $h(t)$  và kẻ đường tiếp tuyến  $h_{tt}(t)$  với  $h(t)$  tại  $A$ , sau đó xác định  $B$  là giao điểm giữa đường tiếp tuyến  $h_{tt}(t)$  với đường tiệm cận  $h_\infty$ .
- Chiều đoạn lên trục thời gian (trục hoành) để có  $T_m$ .
- Xác định  $T_t$  từ  $T_m$  và  $k$  theo  $T_t = \frac{h(0)T_m}{k}$

## 7. Khâu dao động bậc hai

Khâu dao động bậc hai là khâu có hàm truyền:

$$G(s) = \frac{k}{1+2DTs+T^2s^2} = \frac{k}{(Ts+D)^2+1-D^2}, \quad 0 < D < 1$$

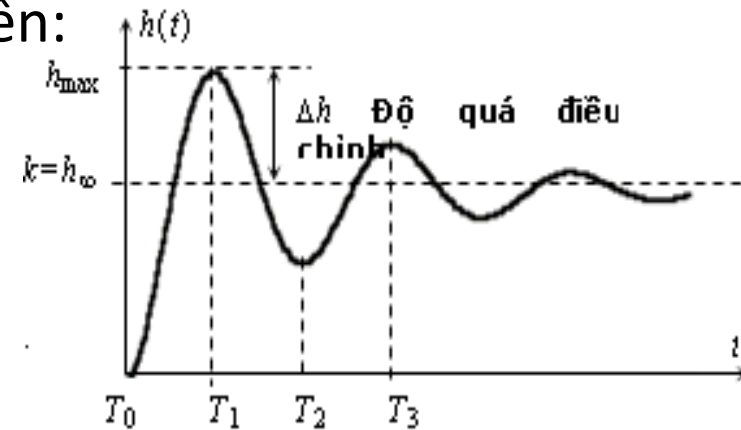
Hàm quá độ (xem ví dụ 2.10):

$$h(t) = k \left[ 1 - \frac{e^{-\frac{Dt}{T}}}{\sqrt{1-D^2}} \sin \left( \frac{\sqrt{1-D^2}}{T} t + \arccos D \right) \right]$$

Bài toán ngược: xác định các tham số  $k$ ,  $T$ ,  $D$

- Tìm  $k = h(\infty)$ .
- Tìm  $\Delta h = h_{\max} - h(\infty)$  và tính
- Tính  $T = \frac{T_1 \sqrt{1-D^2}}{\pi}$

$$D = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\pi^2}{\ln^2 \left| \frac{\Delta h}{k} \right|}}}$$



## 8. Khâu chậm trễ (khâu trễ)

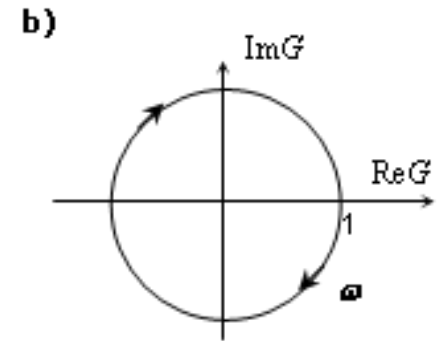
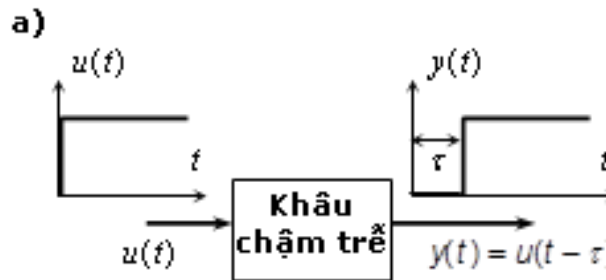
- Khâu trễ là một hệ động học cơ bản có quan hệ giữa tín hiệu vào  $u(t)$  và ra  $y(t)$  là  $y(t) = u(t - \tau)$

$\tau$  được gọi là *thời gian trễ*

- Khâu trễ có hàm truyền  $G(s) = e^{-s\tau}$
- và hàm đặc tính tần :  $G(j\omega) = e^{-j\omega\tau} = \cos(\omega\tau) - j\sin(\omega\tau)$

- Cách 1:

$$G(s) = e^{-\tau s} \approx \frac{1}{(1 + Ts)^n}$$



- Cách 2: công thức xấp xỉ Pade

$$G(s) = e^{-\tau s} \approx \frac{1 + b_1 s + \dots + b_m s^m}{1 + a_1 s + \dots + a_n s^n}$$

<https://voer.edu.vn/m/cac-khau-tieu-bieu-cua-he-thong-tu-dong-va-cac-dac-tinh-tieu-bieu-cua-chung/69c02629>