ET4020 - Xử lý tín hiệu số
Biến đổi Fourier (Nhiều buổi)

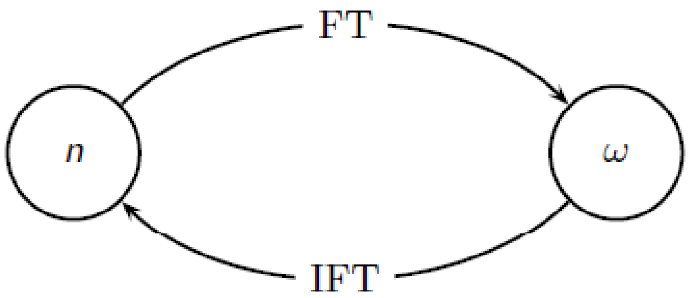
TS. Đỗ Lê Phú
Viện Điện tử - Viễn thông,
Trường Đại học Bách Khoa Hà Nội

HK1 năm học 2013-2014

Tổng kết biến đổi Fourier

- Biến đổi Fourier tín hiệu liên tục
  - Tuần hoàn
  - Không tuần hoàn
- Biến đổi Fourier tín hiệu rời rạc
  - Tuần hoàn
  - Không tuần hoàn

Tín hiệu rời rạc không tuần hoàn



$$x(n) \xrightarrow{\mathrm{FT}} X(e^{j\omega}) = \mathrm{FT}\{x(n)\} = \sum_{x=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

- Tuần hoàn với chu kỳ 2π
- Phổ biên độ: $|X(e^{j\omega})|$, và phổ pha: $\arg\{X(e^{j\omega})\}$.
- Biến đổi ngược:

$$X(e^{j\omega}) \xrightarrow{\mathrm{IFT}} x(n) = \mathrm{IFT}\{X(e^{j\omega})\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

Các tính chất của FT

- Quan hệ với biến đổi z:

$$X(e^{j\omega}) = X(z)|_{z=e^{j\omega}}$$

- Điều kiện hội tụ:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty$$

Một hệ thống LTI có đáp ứng tần số khi và chỉ khi nó ổn định.
- Tuyến tính, dịch thời gian, dịch tần số, chập, v.v.
- Các tính chất đối xứng
- Quan hệ Parseval

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

- Định lý Wiener - Khintchine: Nếu $x(n) \in \mathbb{R}$ thì

$$\mathrm{FT}\{r_{xx}(n)\} = S_{XX}(e^{j\omega}) := |X(e^{j\omega})|^2$$

trong đó $S_{XX}(e^{j\omega})$ là phổ mật độ năng lượng của $x(n)$.

Ví dụ của FT và IFT

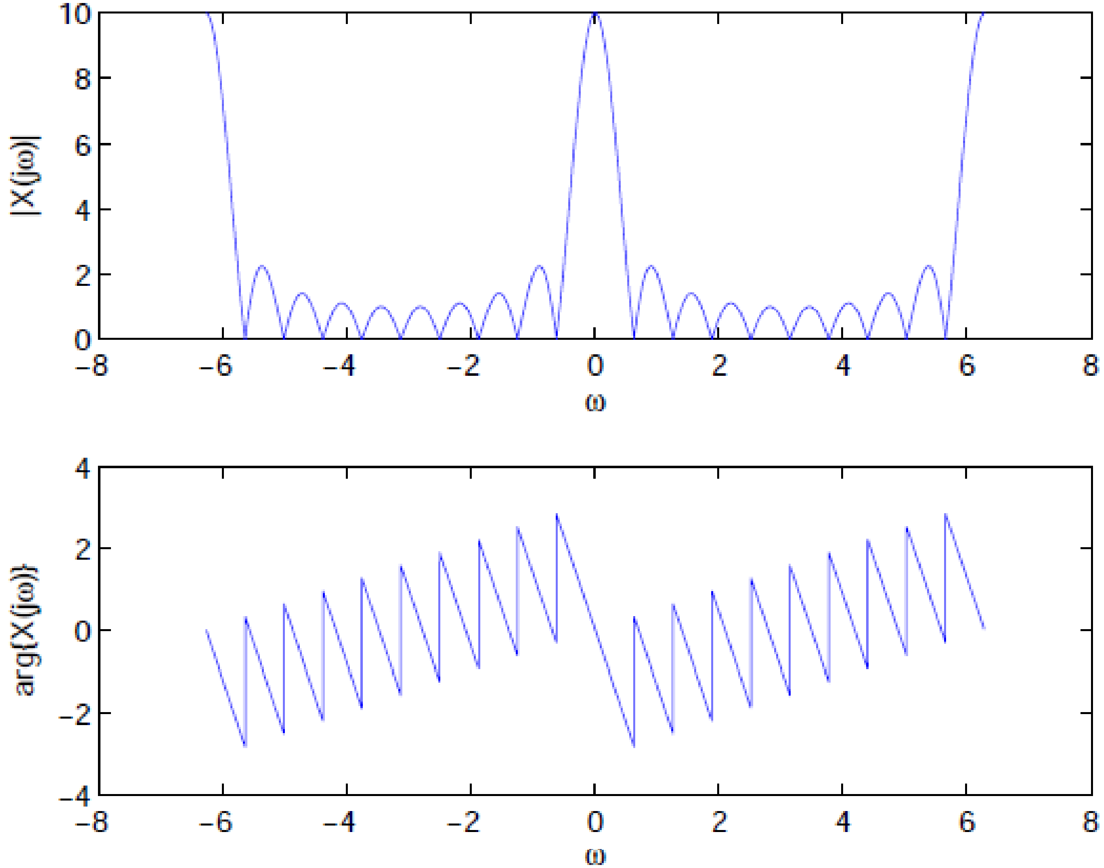
1. Tìm $X(e^{j\omega})$, $|X(e^{j\omega})|$ và $\arg\{X(e^{j\omega})\}$ của các dãy sau đây:
   (a) $x(n) = \delta(n)$
   (b) $x(n) = \delta(n-2)$
   (c) $x(n) = \delta(n-2) - \delta(n)$
   (d) $x(n) = \mathrm{rect}_N(n)$
   (e) $x(n) = (0.5)^n u(n)$
   (f) $x(n) = u(n)$
2. Xét bộ lọc thông thấp lý tưởng có đáp ứng tần số (trong một chu kỳ) như sau:

$$H_{lp}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

   (a) Hãy tìm đáp ứng xung $h_{lp}(n)$ của bộ lọc này.
   (b) Giải bài toán cho trường hợp bộ lọc thông cao

Ví dụ phổ biên độ và pha

- $rect_{10}(n)$



Biến đổi Fourier rời rạc

Dãy tuần hoàn

- Khái niệm

$$\tilde{x}(n) = \tilde{x}(n - N), \quad \forall n$$

  - Chu kỳ $N \in \mathbb{Z} \rightarrow$ ký hiệu $\tilde{x}(n)_N$.
  - Tồn tại khai triển Fourier
  - Khác hệ số N so với khái niệm chuỗi Fourier cho tín hiệu tuần hoàn trong môn Tín hiệu và hệ thống!

Tính chất

- Tuyến tính, dịch thời gian, dịch tần số
- Đối ngẫu: Nếu

$$\tilde{x}(n) \xleftrightarrow{\text{DFS}} \tilde{X}(k)$$

  thì

$$\tilde{X}(n) \xleftrightarrow{\text{DFS}} N\tilde{x}(-k)$$

- Các tính chất đối xứng

Chập tuần hoàn

$$\tilde{x}_1(n) \xleftrightarrow{\text{DFS}} \tilde{X}_1(k)$$
$$\tilde{x}_2(n) \xleftrightarrow{\text{DFS}} \tilde{X}_2(k)$$

Nếu $\tilde{X}_3(k) = \tilde{X}_1(k)\tilde{X}_2(k)$

$\longrightarrow$ Chập tuần hoàn:

$$\tilde{x}_3(n)_N = \tilde{x}_1(n)(\tilde{*})_N\tilde{x}_2(n) = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1(m)\tilde{x}_2(n-m)$$

Năm bước tính chập tuần hoàn

Tìm $\tilde{x}_3(n_0)$, $\forall n_0 \in [0, (N-1)]$

(1) Lấy đối xứng $\tilde{x}_2(m) \to \tilde{x}_2(-m)$

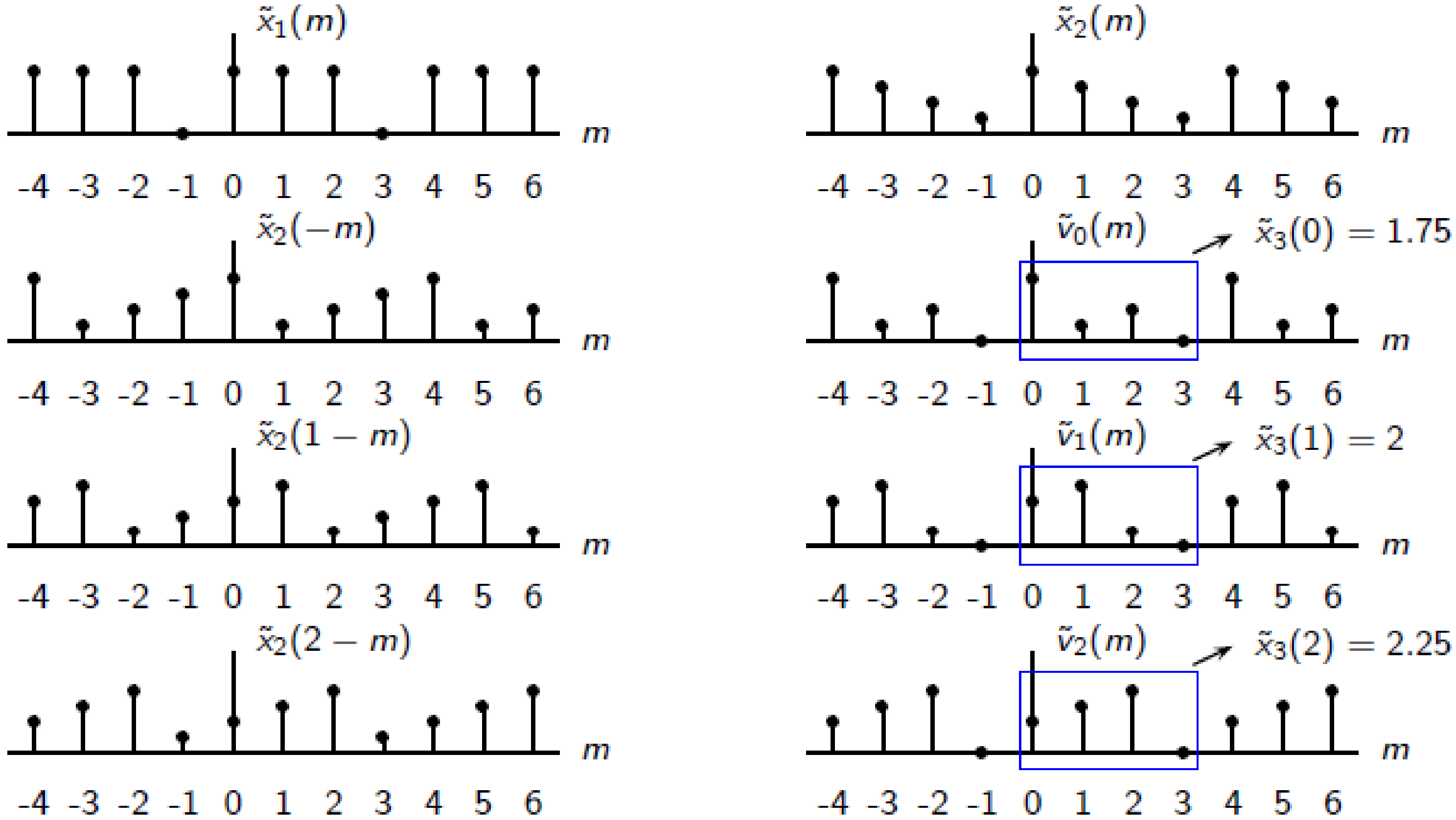
(2) Dịch theo trục thời gian đi n_0 mẫu

(3) Nhân: $\tilde{v}_{n_0}(m) = \tilde{x}_1(m)\tilde{x}_2(n_0 - m)$ trong đoạn $[0, (N-1)]$

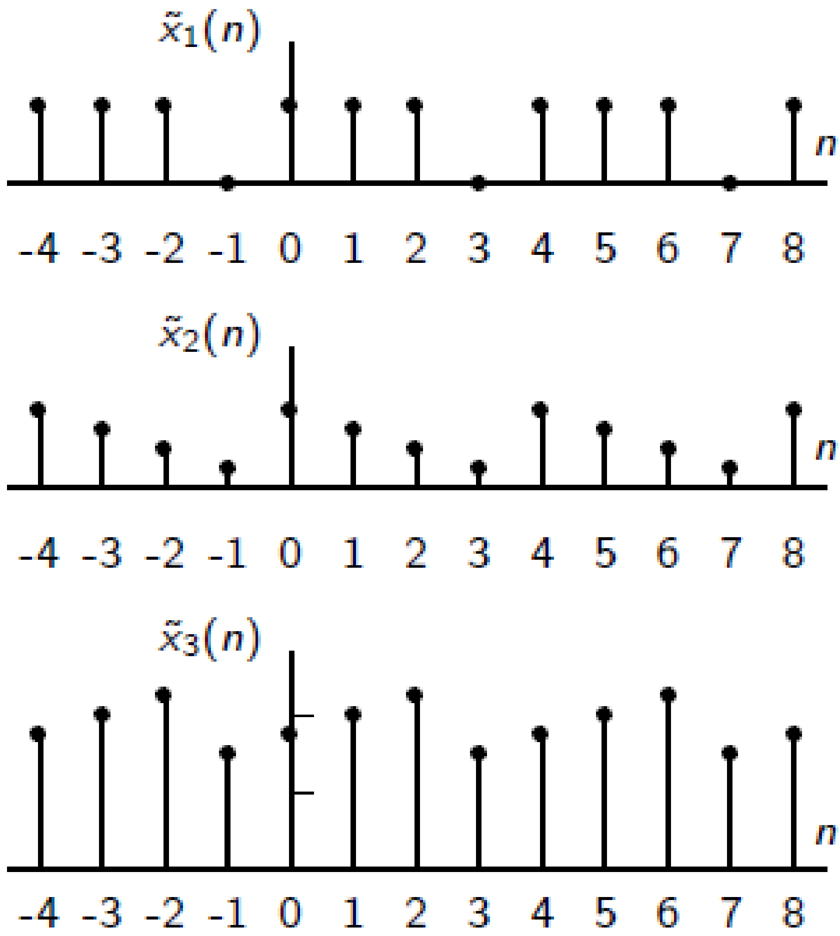
(4) Tính tổng: Cộng tất cả thành phần khác không của $\tilde{v}_{n_0}(m)$ trong đoạn $[0, (N-1)] \to \tilde{x}_3(n_0)$

(5) Kết quả là một dãy tuần hoàn với chu kỳ N:
$\tilde{x}_3(n_0) = \tilde{x}_3(n_0 + rn), \quad \forall r \in \mathbb{Z}.$

Ví dụ tính chập tuần hoàn



Kết quả tính chập tuần hoàn



Biến đổi Fourier rời rạc cho dãy không tuần hoàn

Xét tín hiệu $x(n)$ có chiều dài hữu hạn N, nếu lấy đủ mẫu (tối thiểu N / một chu kỳ) của phổ $X(e^{j\omega})$, thì có thể khôi phục lại được $x(n)$.
$\longrightarrow$ Biến đổi Fourier rời rạc DFT cho dãy có chiều dài hữu hạn!

Cho $x(n)$ với chiều dài hữu hạn N: $x(n) = 0, \quad \forall n < 0, n > N-1$, ta có dãy tuần hoàn $\tilde{x}(n)$:

$$\tilde{x}(n) = x(n \bmod N)$$

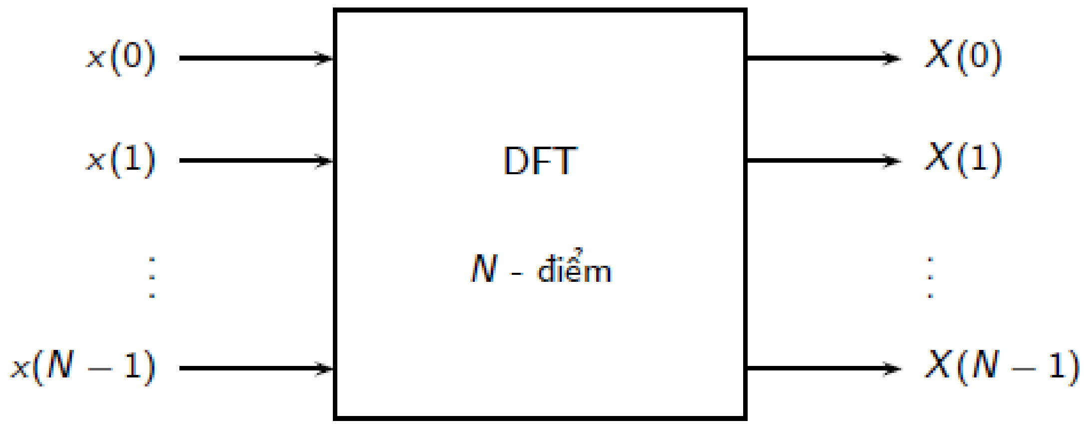
Lấy một chu kỳ từ $\mathrm{DFS}\{\tilde{X}(k)\}$:

$$X(k) = \begin{cases} \tilde{X}(k), & 0 \le k \le (N-1) \\ 0, & k \text{ còn lại} \end{cases}$$

Cặp biến đổi Fourier rời rạc

$$X(k) = \mathrm{DFT}\{x(n)\} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad \forall k \in [0, N-1]$$

$$x(n) = \mathrm{IDFT}\{X(k)\} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad \forall n \in [0, N-1]$$



Ví dụ: Tìm DFT N-điểm của $x(n) = rect_M(n)$ cho ba trường hợp: $M = 1$, $M = N$ và $1 < M < N$.

Dạng ma trận

Xét ma trận $\mathbf{W}_{N\times N}$ trong đó $W_{kn} = W_N^{kn}$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & W_N^1 & W_N^2 & \cdots & W_N^{(N-1)} \\ 1 & W_N^2 & W_N^4 & \cdots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{(N-1)} & W_N^{(N-1)2} & \cdots & W_N^{(N-1)^2} \end{bmatrix}$$

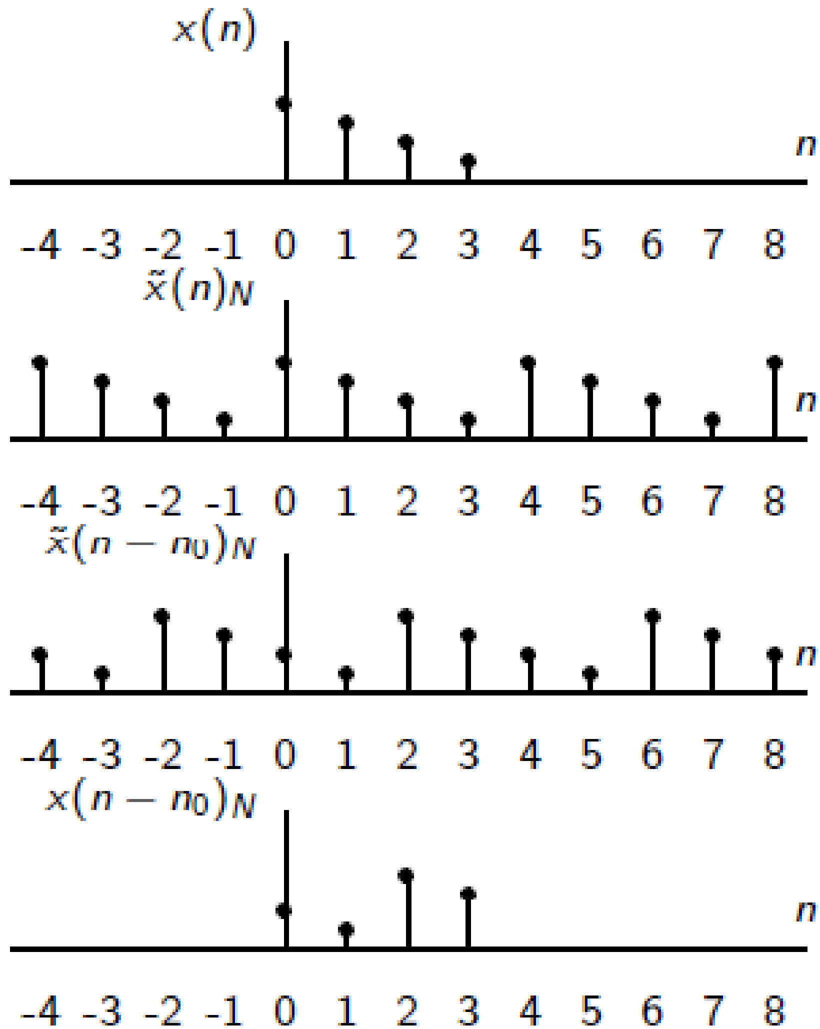
và

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= [X(0), X(1), \cdots, X(N-1)]^T \\ \mathbf{x} &= [x(0), x(1), \cdots, x(N-1)]^T \end{aligned}$$

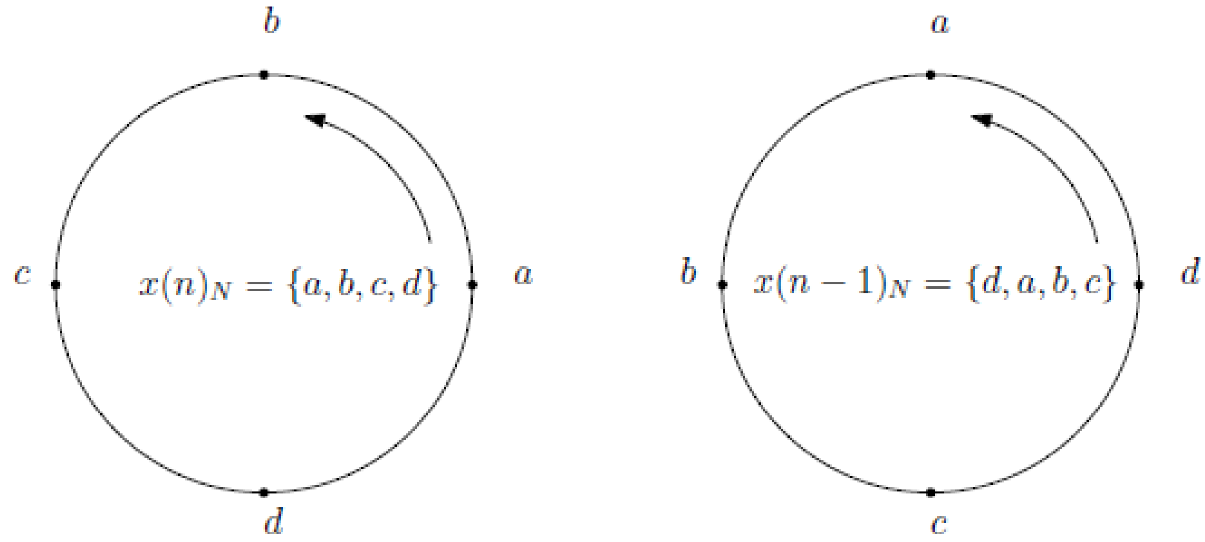
DFT và IDFT có thể được biểu diễn dưới dạng:

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \mathbf{W}\mathbf{x} \\ \mathbf{x} &= \frac{1}{N}\mathbf{W}^H\mathbf{X} \end{aligned}$$

Dịch vòng: chu kỳ của t/h tuần hoàn sau dịch



Dịch vòng: Đặt lên vòng tròn và xoay quanh tâm



Tính chất dịch

- Dịch thời gian

$$\mathrm{DFT}\{x(n-n_0)_N\} = e^{-j(2\pi/N)kn_0}X(k)$$

- Dịch tần số

$$\mathrm{DFT}\{e^{j(2\pi/N)k_0 n}x(n)\} = X(k-k_0)_N$$

Tính chất đối ngẫu

Nếu

$$\mathrm{DFT}\{x(n)\} = X(k)$$

thì

$$\mathrm{DFT}\{X(n)\} = Nx(-k)_N$$

Tính chất đảo trục thời gian

Nếu

$$\mathrm{DFT}\{x(n)\} = X(k)$$

thì

$$\mathrm{DFT}\{x(-n)_N\} = X(-k)_N$$

Tính chất đối xứng

(a) $\mathrm{DFT}\{x^*(n)\} = X^*(-k)_N$

(b) $\mathrm{DFT}\{x^*(-n)_N\} = X^*(k)$

(c) $\mathrm{DFT}\{\mathrm{Re}[x(n)]\} = \frac{1}{2}[X(k) + X^*(-k)_N]$

(d) $\mathrm{DFT}\{\frac{1}{2}[x(n) + x^*(-n)_N]\} = \mathrm{Re}[X(k)]$

(e) Nếu $x(n) \in \mathbb{R}$

- $X(k) = X^*(-k)_N = X^*(N-k)$
- $\mathrm{Re}[X(k)] = \mathrm{Re}[X(N-k)]$
- $\mathrm{Im}[X(k)] = -\mathrm{Im}[X(N-k)]$
- $|X(k)| = |X(N-k)|$
- $\arg\{X(k)\} = -\arg\{X(N-k)\}$

Định nghĩa chập vòng

$$x_3(n)_N = x_1(n)(*)_N x_2(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) x_2(n-m)_N, \quad \forall n \in [0, N-1]$$

Áp dụng DFT ta có:

$$\mathrm{DFT}\{x_1(n)(*)_N x_2(n)\} = X_1(k) X_2(k)$$

Cách tính chập vòng:

- Miền thời gian
- Miền tần số

Ví dụ: Tính chập vòng 5-điểm ($N = 5$) của hai dãy sau:

$$x_1(n) = \mathrm{rect}_4(n) + 0.5\delta(n-4)$$

$$x_2(n) = \begin{cases} 1 - \frac{n}{4}, & 0 \le n \le 4 \\ 0, & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

Ma trận chập vòng

$$\mathbf{x}_3 = \mathbf{X}_2 \cdot \mathbf{x}_1$$

trong đó $\mathbf{x}_3 = [x_3(0), x_3(1), \cdots, x_3(N-1)]^T$,
$\mathbf{x}_1 = [x_1(0), x_1(1), \cdots, x_1(N-1)]^T$ và $\mathbf{X}_2$ là (circulant matrix):

$$\mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} x_2(0) & x_2(N-1) & \cdots & x_2(1) \\ x_2(1) & x_2(0) & \cdots & x_2(2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_2(N-1) & x_2(N-2) & \cdots & x_2(0) \end{bmatrix}$$

- Dạng ma trận của chập tuyến tính $\rightarrow$ ma trận Toeplitz!
- Làm thế nào để tính chập vòng bằng Matlab?

Quan hệ chập vòng và chập

Cho hai dãy có chiều dài hữu hạn, $x(n)$: $[0 \cdots (N-1)]$ và $h(n)$: $[0 \cdots (M-1)]$. Nếu

$$y_1(n) = x(n) * h(n)$$

và

$$y_2(n) = x(n)(*)_L h(n)$$

(a) Với những giá trị nào của L thì $y_1(n) = y_2(n)$, $\forall n$?

(b) Nếu $L = N$ thì tại những thời điểm n nào ta có $y_1(n) = y_2(n)$?

Quan hệ Parseval

$$\sum_{n=0}^{N-1} x(n)y^*(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)Y^*(k)$$

Nếu $x(n) = y(n)$:

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2$$

Bài tập

1. Viết chương trình Matlab để vẽ phổ biên độ và phổ pha của một dãy có chiều dài hữu hạn bất kỳ
2. Sử dụng hàm `freqz` trong Matlab để vẽ đáp ứng tần số của một hệ thống LTI từ phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng.
3. *Lấy mẫu tần số.* Cho dãy $x(n)$ có chiều dài hữu hạn L với phổ $X(e^{j\omega})$ (chu kỳ 2π). Để biểu diễn phổ tín hiệu, người ta lấy các mẫu tại tần số $\omega = k\frac{2\pi}{N}$ để thu được $X(e^{jk\frac{2\pi}{N}})$ với chu kỳ lấy mẫu $\frac{2\pi}{N}$. Với những giá trị nào của N thì ta có thể tái tạo lại hoàn toàn $x(n)$ từ các mẫu $X(e^{jk\frac{2\pi}{N}})$?