3.3. Thiết kế bộ điều khiển

Nội dung

- Bộ điều khiển phản hồi trạng thái gán điểm cực
- Bộ quan sát trạng thái
- Bộ điều khiển phản hồi đầu ra

3.3.1. Bộ điều khiển phản hồi trạng thái gán điểm cực

+Đặt vấn đề:

- Xác định ma trận hàm truyền $G(s)$ của hệ từ mô hình trạng thái thì các điểm cực của hệ chính là giá trị riêng của ma trận A.
- Chất lượng hệ thống lại phụ thuộc nhiều vào vị trí của các điểm cực trong mặt phẳng phức.

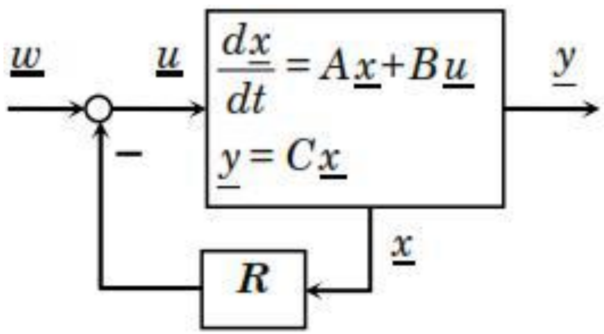
→ Vì vậy, để chất lượng hệ thống điều khiển như mong muốn, ta tìm cách can thiệp (thiết kế bộ điều khiển) sao cho các điểm cực của hệ kín ở vị trí tương ứng với chất lượng điều khiển mong muốn.

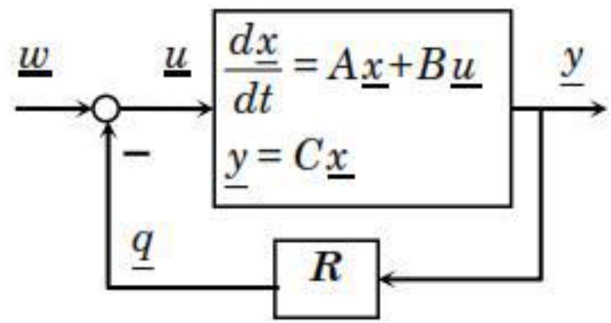
+Các phương pháp thiết kế

- **+ Thiết kế bộ điều khiển phản hồi trạng thái:**
  - ❑Phương pháp trực tiếp.
  - ❑Phương pháp Ackermann.
  - ❑Phương pháp modal.
- **+ Thiết kế theo nguyên tắc phản hồi tín hiệu ra**

Tư tưởng thiết kế của hai phương pháp

- Giả sử các điểm cực mong muốn là $s_1, \ldots\ldots, s_n$





- Phản hồi trạng thái

Phản hồi tín hiệu đầu ra

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = A\underline{x} + B\underline{u} = A\underline{x} + B\left(\underline{w} - R\underline{x}\right) = (A - BR)\underline{x} + B\underline{w}$$

Phải giải phương trình để có R

$$\det\left(sI - (A - BR)\right) = (s - s_1)(s - s_2)\ \cdots\ (s - s_n)$$

Điều kiện: Chỉ cần hệ điều khiển được

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = A\underline{x} + B\underline{u} = A\underline{x} + B\left(\underline{w} - R\underline{y}\right) = (A - BRC)\underline{x} + B\underline{w}$$

Tìm ma trận R thỏa mãn

$$\det\left(sI - (A - BRC)\right) = (s - s_1)(s - s_2)\ \cdots\ (s - s_n)$$

Tính điều khiển được chưa đủ

1. Phương pháp trực tiếp

=

Đơn giản , xét hệ một vào một ra

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = A\underline{x} + B\underline{u} \quad ; A \in R^{nxn} \text{ , } B \in R^{n} \qquad (1)$$

Tìm bộ điều khiển $R = [r_1, \ldots\ldots, r_n]$ trực tiếp từ phương trình

$$\det\left(sI - (A - BR)\right) = (s - s_1)(s - s_2) \cdots (s - s_n) \qquad (2)$$

Cách làm:

Khai triển hai vế của phương trình (2) thành các đa thức bậc n.

Cân bằng hệ số các đa thức.

Giải hệ n phương trình thu được tìm $r_1, \ldots\ldots, r_n$.

Ví dụ 1

Cho đối tượng có mô hình trạng thái

$$\frac{dx}{dt}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}u\ \ ;\ y=x_1$$

trong đó

$$\underline{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$$

Hãy xác định bộ điều khiển phản hồi trạng thái R để hệ kín nhận các giá trị cho trước s_1=-1; s_2=-2 làm điểm cực.

Tìm bộ điều khiển phản hồi trạng thái R = (r1 , r2) sao cho

det(sI-A+BR) = (s+1)(s+2) = s^2+3s+2

Ta co

$$\det(sI-A+BR)=\det\left(\begin{pmatrix}s & -1\\ 1 & s-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r_1 & r_2\end{pmatrix}\right)=\det\begin{pmatrix}s & -1\\ r_1+1 & s-2+r_2\end{pmatrix}=s(s-2+r_2)+r_1+1$$

Cân bằng hệ số ta có hệ

$$\begin{cases}r_2-2=3\\ r_1+1=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}r_2=5\\ r_1=1\end{cases}$$

Vậy bộ điều khiển R=(1 5)

Ví dụ 2

- Xét đối tượng SISO có mô hình trạng thái:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\underline{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}u$$

- Hãy thiết kế bộ điều khiển để hệ kín nhận được chọn ứng điểm cực $s_0 = -3,\ s_1 = -4$ và $s_3 = -5$

Giải:

Bộ điều khiển R=(r_1,r_2,r_3), khi đó hệ kín có đa thức đặc tính

$$\det(sI - A + BR) = \det\left(\begin{pmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \det\begin{pmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ r_1+1 & r_2-2 & s-3+r_3 \end{pmatrix} = s\big(s(s-3+r_3)+r_2-2\big)+r1+1 = s^3+\left(r_3-3\right)s^2+\left(r_2-2\right)s+r_1+1 \qquad (1)$$

- Với các điểm cực mong muốn ta có:

$$(s-s_1)(s-s_2)(s-s_3)=(s+3)(s+4)(s+5)=60+47s+12s^2+s^3 \qquad (2)$$

Cân bằng hệ số của (1) và (2) ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} r_1+1=60 \\ r_2-2=47 \\ r_3-3=12 \end{cases} -> \begin{cases} r_1=59 \\ r_2=49 \\ r_3=15 \end{cases}$$

Vậy bộ điều khiển phản hồi trạng thái cần tìm là:

$$R=(59\ ,\ 49\ ,\ 15)$$

Ví dụ 3

Cho đối tượng có mô hình trạng thái

$$\frac{dx}{dt}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & -4 & 3\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}u$$

trong đó $\underline{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$

$y=x_1$

Hãy xác định bộ điều khiển phản hồi trạng thái R để hệ kín nhận các giá trị cho trước $s_1=s_2=-1$ và $s_3=-2$ làm điểm cực.

Giải:

- Tìm bộ điều khiển $R = (r_1 \quad r_2 \quad r_3)$ sao cho

$$\det\left(sI-(A-BR)\right)=(s+1)(s+1)(s+2)$$

Ta có

$$\left(sI-A+BR\right)=\begin{pmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \end{pmatrix}$$

$$\left(sI-A+BR\right)=\begin{pmatrix} s-1 & -2 & 1 \\ 0 & s-1 & 0 \\ 0 & 4 & s-3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} s-1+r_1 & r_2-2 & r_3 \\ r_1 & s-1+r_2 & r_3 \\ 0 & 4 & s-3 \end{pmatrix}$$

Suy ra: $\det\left(sI-A+BR\right)=(s-1+r_1)(s-1+r_2)(s-3)-4r_3(s-1+r_1)-(r_2-2)r_1(s-3)+4r_3r_1$

$$(s-1+r_1)(s-1+r_2)(s-3)-4r_3(s-1+r_1)-(r_2-2)r_1(s-3)+4r_3r_1=(s+1)(s+1)(s+2)$$

Khai triển rồi đồng nhất hệ số -> quá dài

Nhược điểm của phương pháp:

- Không chỉ ra cách tìm *R* một cách tổng quát.
- Không phải lúc nào cũng giải được dễ dàng hệ n phương trình thu được

2. Phương pháp Ackermann

=

+ Mô hình trạng thái dạng chuẩn điều khiển

Chỉ áp dụng cho đối tượng một tín hiệu vào.

Xét đối tượng chỉ có một đầu vào u được mô tả bởi mô hình trạng thái dạng chuẩn điều khiển

$$\frac{d\underline{x}}{dt}=\underbrace{\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1}\end{pmatrix}}_{A}\underline{x}+\underbrace{\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{pmatrix}}_{b}u \qquad (3)$$

Như vậy, đối tượng có đa thức đặc tính theo công thức là:

$$\det(sI-A)=a_0+a_1s+\cdots+a_{n-1}s^{n-1}+s^n \qquad (4)$$

với nghiệm là các điểm cực của đối tượng.

Bộ điều khiển phản hồi trạng thái R phải tìm là: R = $(r_1,\ r_2,\ \cdots,\ r_n)$

Khi đó hệ kín sẽ có mô hình:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = (A - \underline{b}R)\underline{x} + \underline{b}w$$

$$= \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1, & r_2, & \cdots, & r_2 \end{pmatrix}\right] \underline{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} w$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -(a_0 + r_1) & -(a_1 + r_2) & -(a_2 + r_3) & \cdots & -(a_{n-1} + r_n) \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} w$$

với đa thức đặc tính:

$$\det\left(sI - (A - \underline{b}R\right) = (a_0 + r_1) + (a_1 + r_2)s + \cdots + (a_{n-1} + r_n)s^{n-1} + s^n \quad (6)$$

Để hệ kín nhận các điểm s_1, s_2, …, s_n là các điểm cực thì

$$\det\left(sI - (A - \underline{b}R\right) = (s - s_1)(s - s_2)......(s - s_n)$$

Suy ra

$$(a_0 + r_1) + (a_1 + r_2)s + \cdots + (a_{n-1} + r_n)s^{n-1} + s^n = \tilde{a}_o + \tilde{a}_1 s + ...\tilde{a}_{n-1} s^{n-1} + s^n$$

$$r_i = \tilde{a}_{i-1} - a_{i-1}, \quad i = 1, 2, \ \ldots \ , n$$

Ví dụ 4

- Xét đối tượng SISO có mô hình trạng thái:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

- Hãy thiết kế bộ điều khiển để hệ kín nhận được chọn ứng điểm cực $s_0 = -3,\ s_1 = -4$ $s_3 = -5$

Giải:

- Hệ này ở dạng chuẩn điều khiển nên từ mô hình ta có ngay:

$$\det(sI - A) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + s^3 \quad \text{với} \quad a_0 = 1,\ a_1 = -2,\ a_2 = -3$$

- Với các điểm cực mong muốn ta có:

$$(s-s_1)(s-s_2)(s-s_3)=(s+3)(s+4)(s+5)=60+47s+12s^2+s^3$$

Ta có: $\tilde{a}_o=60; \tilde{a}_1=47; \tilde{a}_2=12$

Vậy bộ điều khiển phản hồi trạng thái cần tìm là:

R = (60–1 , 47+2 , 12+3) = (59 , 49 , 15)

+Mô hình không ở dạng chuẩn điều khiển

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = A\underline{x} + B\underline{u}$$

- Tìm một phép đổi biến $\underline{z} = S\underline{x} \Leftrightarrow \underline{x} = S^{-1}\underline{z}$ sao cho với nó, đối tượng ban đầu được chuyển về dạng chuẩn điều khiển.

- **Định lý 3.13.** Nếu hệ là điều khiển được thì phép đổi biến

$\underline{z} = S\underline{x}$ với:

$$S = \begin{pmatrix} \underline{s}^T \\ \underline{s}^T A \\ \vdots \\ \underline{s}^T A^{n-1} \end{pmatrix}$$

trong đó $\underline{s}^T$ là vector hàng cuối cùng của ma trận:

$$(\text{B}\ ,\ A\underline{B}\ ,\ \cdots\ ,\ A^{n-1}\underline{B})^{-1}$$

sẽ chuyển nó về dạng chuẩn điều khiển

$$\frac{d\underline{z}}{dt} = SAS^{-1}\underline{z} + S\underline{b}u = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}\underline{z} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

- với $a_0,\ a_1,\ \dots,\ a_{n-1}$ là các hệ số của đa thức đặc tính:

$$\det(sI - A) = a_0 + a_1 s + \ \cdots\ + a_{n-1}s^{n-1} + s^n$$

áp dụng được thuật toán đã biết để thiết kế bộ điều khiển R_z phản hồi trạng thái $\underline{z}$ cho nó, tức là:

$$R_z = (\tilde{a}_0 - a_0,\ \tilde{a}_1 - a_1\ ,......,\tilde{a}_{n-1} - a_{n-1})$$

với các hệ số $\tilde{a}_i$ được xác định từ:

$$(s - s_1)(s - s_2)......(s - s_n) = \tilde{a}_o + \tilde{a}_1 s + ...\tilde{a}_{n-1} s^{n-1} + s^n$$

- Cuối cùng bộ điều khiển phản hồi trạng thái là

$$R = R_z S = (\tilde{a}_0 - a_0,\ \tilde{a}_1 - a_1\ ,......,\tilde{a}_{n-1} - a_{n-1})\begin{pmatrix} \underline{s}^T \\ \underline{s}^T A \\ \vdots \\ \underline{s}^T A^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \left(\tilde{a}_i - a_i\right) \underline{s}^T A^i = \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{a}_i\, \underline{s}^T A^i - \sum_{i=0}^{n-1} a_i\, \underline{s}^T A^i$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{a}_i\, \underline{s}^T A^i + \underline{s}^T A^n$$

Vì: $A^n = -\sum_{i=0}^{n-1} a_i A^i \qquad \text{(Cayley–Hamilton)}$

Ví dụ 5

Cho đối tượng

$$\frac{dx}{dt}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}u$$

Thiết kế bộ điều khiển để hệ kín nhận được các điểm cực $s_1=s_2=s_3=-1$

Giải

Trước hết phải chuyển về mô hình điều khiển chuẩn

Đối tượng này có

$$AB=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}\;;\qquad A^2B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-3\\4\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}B & AB & A^2B\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -3\\ 1 & -2 & 4\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Vậy $\quad s^T=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}$

$$s^T A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\end{pmatrix} \;; \qquad s^T A^2 = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$s^T A^3 = \begin{pmatrix}0 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1 & -3\end{pmatrix}$$

- Để gán các điểm cực $s_1 = s_2 = s_3 = -1$

$$(s-s_1)(s-s_2)(s-s_3) = (s+1)^3 = 1 + 3s + 3s^2 + s^3 \qquad \tilde{a}_0 = 1, \quad \tilde{a}_1 = \tilde{a}_2 = 3$$

Ta sử dụng bộ điều khiển phản hồi trạng thái *R* tìm theo

$$\boxed{R = \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{a}_i \, \underline{s}^T A^i + \underline{s}^T A^n}$$

$$\tilde{a}_0 s^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; ;$$

$$\tilde{a}_1 s^T A = 3\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\tilde{a}_2 s^T A^2 = 3\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$s^T A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Vậy bộ điều khiển R là

$$R = \tilde{a}_0 s^T + \tilde{a}_1 s^T A + \tilde{a}_2 s^T A^2 + s^T A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \end{pmatrix};$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ví dụ 6

Cho đối tượng có mô hình trạng thái

$$\frac{dx}{dt}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & -4 & 3\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}u \qquad y=x_1 \text{ trong đó } \qquad \underline{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$$

a) Hãy xác định bộ điều khiển phản hồi trạng thái R để hệ kín nhận các giá trị cho trước $s_1=s_2=-1$ và $s_3=-2$ làm điểm cực.

b) Hãy viết hàm truyền đạt của hệ kín bao gồm đối tượng đã cho và bộ điều khiển phản hồi trạng thái tìm được ở câu a. Từ đó chỉ ra rằng bộ điều khiển phản hồi trạng thái đó đã không làm thay đổi được bậc tương đối của đối tượng.

Giải

a. Trước hết phải chuyển về mô hình điều khiển chuẩn

Đối tượng này có

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad ; \qquad A^2B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} B & AB & A^2B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -10 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -6 & 5 \\ -10 & 10 & -7 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Vậy

$$s^T = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

- Để gán các điểm cực

$$s_1 = s_2 = -1;\ s_3 = -2$$

$$(s-s_1)(s-s_2)(s-s_3) = (s+1)^2(s+2) = 2+5s+4s^2+s^3 \quad \tilde{a}_0 = 2,\quad \tilde{a}_1 = 5; \tilde{a}_2 = 4$$

Ta sử dụng bộ điều khiển phản hồi trạng thái *R* tìm theo

$$\boxed{R = \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{a}_i\, \underline{s}^T A^i + \underline{s}^T A^n}$$

$$s^T A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -5 & 3 \end{pmatrix}\ ; \qquad s^T A^2 = \begin{pmatrix} 5 & -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -7 & 4 \end{pmatrix}$$

$$s^T A^3 = \begin{pmatrix} 8 & -7 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -7 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{a}_0 s^T = 2\begin{pmatrix}3 & -3 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6 & -6 & 4\end{pmatrix};$$

$$\tilde{a}_1 s^T A = 5\begin{pmatrix}5 & -5 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}25 & -25 & 15\end{pmatrix};$$

$$\tilde{a}_2 s^T A^2 = 4\begin{pmatrix}8 & -7 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}32 & -28 & 16\end{pmatrix}$$

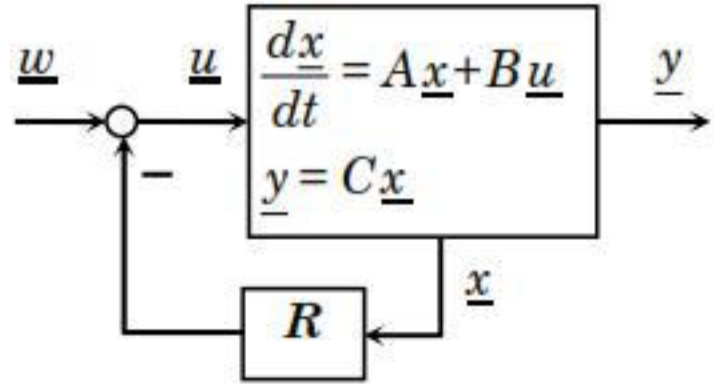
$$s^T A^3 = \begin{pmatrix}12 & -7 & 4\end{pmatrix}$$

Vậy bộ điều khiển R là

$$R = \tilde{a}_0 s^T + \tilde{a}_1 s^T A + \tilde{a}_2 s^T A^2 + s^T A^3$$
$$= \begin{pmatrix}6 & -6 & 4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}25 & -25 & 15\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}32 & -28 & 16\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}12 & -7 & 4\end{pmatrix};$$
$$\rightarrow R = \begin{pmatrix}75 & -66 & 39\end{pmatrix}$$

b. Sơ đồ hệ thống khi có bộ điều khiển R

$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{x}}{dt} = A\underline{x} + B\underline{u} = A\underline{x} + B\left(\underline{w} - R\underline{x}\right) = (A - BR)\underline{x} + B\underline{w} \\ y = Cx \end{cases}$$



Ta có bậc tương đối của đối tượng là kiểm tra

$CA^kB \neq 0$ với k= 0,1,….

Với k=0 ta có:

$$CB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$$

Vậy bậc tương đối của đối tượng là bằng 1

Để kiểm tra bậc tương đối r khi có bộ điều khiển R ta tìm k để

$C(A-BR)^kB \neq 0$ với k= 0,1,….

Suy ra r-1 = k

Với k = 0 ta có:

$$CB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$$

Vậy k= 0 suy ra r=1 ; như vậy khi mắc thêm bộ điều khiển R không làm thay đổi Bậc tương đối của đối tượng

+ Ưu nhược điểm của phương pháp Ackermann

- Ưu điểm:
  - Đơn giản.
  - Chỉ ra cách tìm bộ điều khiển phản hồi trạng thái *R* một cách tổng quát.
- Nhược điểm:
  - Chỉ áp dụng được cho các hệ có một đầu vào

Sử dụng Matlab xác định hàm truyền đạt khi biết hệ phương trình trạng thái

```
A=[1 2 -1;0 1 0;1 -4 3];
B=[1;1;0];
C=[1,0,0];
D = 0;
[num,den]=ss2tf(A,B,C,D);
Gd=tf(num,den)
R=[75,-66,39];
Q= A-B*R
[num,den]=ss2tf(Q,B,C,D);
Gk=tf(num,den)
```

3. Phương pháp modal phản hồi trạng thái

- Thiết kế bộ điều khiển tĩnh R cho đối tượng MIMO:

Cho ma trận A, gọi $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ là các giá trị riêng và $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n$ là các vector riêng bên phải tương ứng.

Gọi $M = \left(\underline{a}_1, \ \dots \ , \ \underline{a}_n\right)$ là ma trận modal.

Nếu M không suy biến thì:

$$M^{-1}AM = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} = diag(\lambda_i)$$

M không suy biến thì:

- hoặc các giá trị riêng λ_i của nó khác nhau từng đôi một

- hoặc là ứng với giá trị riêng λ_k bội q thì phải có đúng q vectơ riêng bên phải độc lập tuyến tính

với mọi $i = 1, \ 2, \ \dots \ , \ n$

Tư tưởng thiết kế của phương pháp

- Xét đối tượng:

$$\frac{dx}{dt} = A\underline{x} + B\underline{u}$$

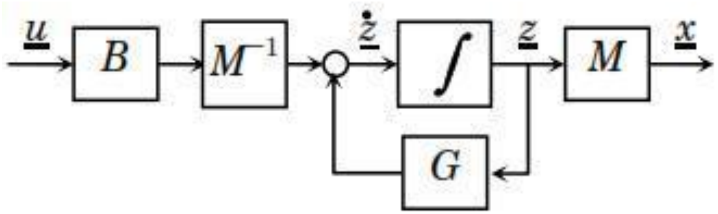
- Gọi M là ma trận modal của A. Sử dụng phép đổi biến $\underline{x}$=M$\underline{z}$ hay $\underline{z}$=M^{-1}$\underline{x}$ ta có mô hình đối tượng là:

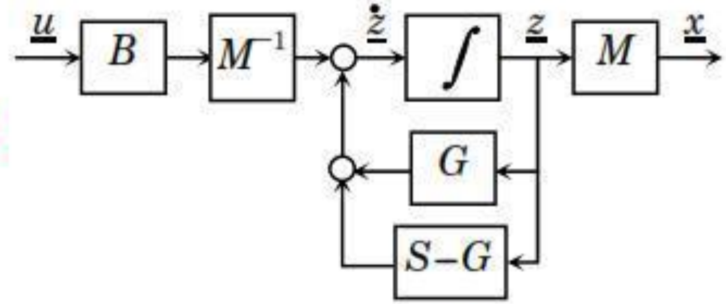
$$\frac{d\underline{z}}{dt} = M^{-1}\frac{dx}{dt} = M^{-1}A\underline{x} + M^{-1}B\underline{u} = M^{-1}AM\underline{z} + M^{-1}B\underline{u} = G\underline{z} + M^{-1}B\underline{u}$$

trong đó:

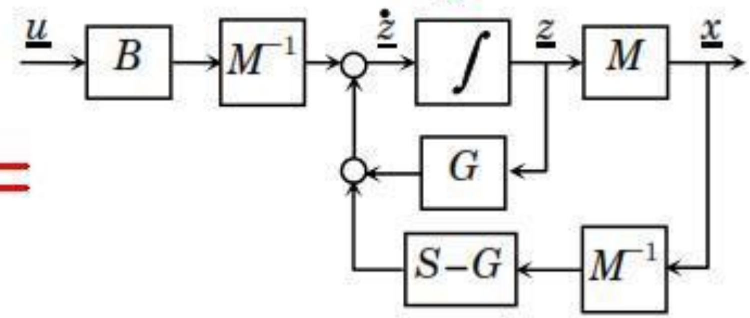
$$G = M^{-1}AM = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} = diag(\lambda_i)$$

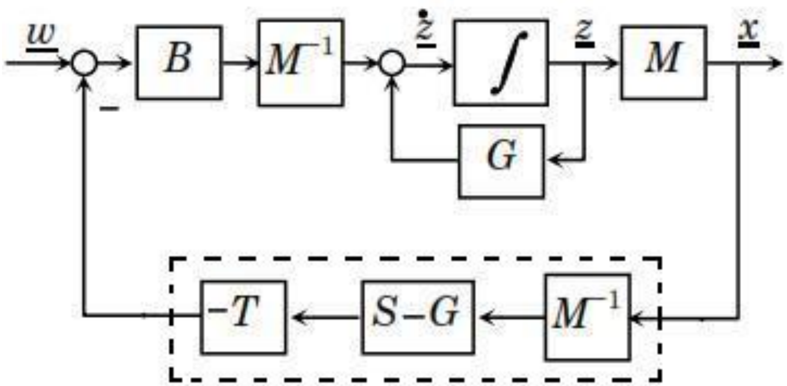
Muốn hệ thống nhận các giá trị s_i cho trước thì chỉ cần mắc song song khối S-G





mạch phản hồi chính là ma trận đường chéo chứa các điểm cực của hệ





- Do M không suy biến nên sử dụng đại số sơ đồ khối được hình c. Sau đó chuyển điểm hồi tiếp ra trước B
- Nếu B không suy biến thì chỉ cần chọn

$$T=(M^{-1}B)^{-1}=B^{-1}M$$

Và được bộ điều khiển phản hồi âm R khi đó

$$R=-T(S-G)M^{-1}$$

Do B là ma trận gồm n hàng và r cột, $n \geq r$. Do đó công thức tính bộ điều khiển R phải sửa lại là

$$R=-T_r(S_r-G_r)M_r^{-1}$$

Trong đó M_r^{-1} là ma trận gồm r vecto đầu tiên của M^{-1}, Sr và Gr là ma trận vuông rxr

$$S_r = \begin{pmatrix} s_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & s_r \end{pmatrix} \qquad G_r = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_r \end{pmatrix}$$

- Ứng với giá trị riêng λ_i của nó thì khi biến đổi M^{-1} về dạng

$$M^{-1} = \left(\underline{a}_1, \ \ldots \ , \ \underline{a}_n\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \underline{b}_1^T \\ \vdots \\ \underline{b}_n^T \end{pmatrix}$$

- Các vector $\underline{b}_j, \ j = 1, \ 2, \ \ldots \ , \ n$ lại chính là *vector riêng bên trái* của *A* ứng với λ_j, tức là

$$\underline{b}_j^T\left(\lambda_j I - A\right) = \underline{0}^T \text{ với mọi } \quad j = 1, \ 2, \ \ldots \ , \ n$$

- Ta đi đến thuật toán xác định bộ điều khiển *R* dịch chuyển điểm cực cho đối tượng có hạng của *B* là *r* và *A* là ma trận giống đường chéo, như sau:

- Xác định r vector riêng bên trái $\underline{b}_j,\ j=1,\ 2,\ \dots,\ n$ của A theo công thức : $\underline{b}_j^T\left(\lambda_j I - A\right) = \underline{0}^T$

- Tính M_r^{-1} và T_r theo :

$$M_r^{-1} = \begin{pmatrix} \underline{b}_1^T \\ \vdots \\ \underline{b}_r^T \end{pmatrix}, \quad T_r = \begin{pmatrix} \underline{b}_1^T B \\ \vdots \\ \underline{b}_r^T B \end{pmatrix}^{-1}$$

- Xác định $S_r,\ G_r$ từ theo:

$$S_r = \begin{pmatrix} s_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & s_r \end{pmatrix} \qquad G_r = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_r \end{pmatrix}$$

- Tính R theo công thức $R = -T_r(S_r - G_r)\ M_r^{-1}$

- **Định lý 3.14.** Phương pháp modal vừa nêu chỉ dịch chuyển được r điểm cực λ_k, k = 1,….,r , trong khi các điểm cực khác không bị thay đổi.

Ví dụ 7

- Thiết kế bộ điều khiển tĩnh, phản hồi trạng thái hoàn toàn cho đối tượng có mô hình:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\underline{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}u$$

Để hệ mới nhận các điểm $s_1=s_2=-1$ làm các điểm cực

Do rank(B) = 1 nên chỉ có thể dịch chuyển 1 điểm cực. Đối tượng có giá trị riêng

$$det(sI - A) = \det\left(\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} s & -2 \\ 1 & s-3 \end{pmatrix} = s^2 - 3s + 2 = (s-2)(s-1)$$

$\lambda_1=1$; $\lambda_2=2$

Ta sẽ sử dụng thuật toán để xác định *R1* chuyển λ_1=1 tới s_1=-1

Bây giờ ta xác định $\underline{b}_1$ là vector riêng bên trái của đối tượng ứng với:

$\underline{b}_1^T(\lambda_1 I - A) = \underline{0}^T$ $\quad b_1^T\begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & -2\end{pmatrix} = 0$ $\quad (b11 \quad b21)\begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & -2\end{pmatrix} = 0$

$\begin{pmatrix}b_{11}+b_{21}\\ -2b_{11}-2b_{21}\end{pmatrix} = 0$ Chọn $b_{11}=-b_{21}=1$ Vậy vector b1=$\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$

Tiếp theo là : $S_r - G_r = -1-1=-2$

Suy ra $M^{-1}=b_1^T = (1 \quad -1)$ và $T_r = (M^{-1}B)^{-1} = \left((1,-1)\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\right)^{-1} = 1$

Vậy bộ điều khiển $R_1 = -T_r(S_r-G_r)M^{-1} = 2(1,-1) = (2, -2)$

Thử lại với bộ điều khiển R_1 tìm được thì hệ kín với:

$$A - BR1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}(2, -2) = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Hệ kín có điểm cực s_1=-1 và s_2=2. Xem hệ kín gồm đối tượng đã cho và bộ điều khiển R_1 vừa tìm được như một đối tượng mới thì đối tượng này có mô hình: $\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}u$

Tiếp tục chuyển điểm cực s_2=2 về s=-1 như sau:

Bây giờ ta xác định $\underline{b}_2$ là vector riêng bên trái của đối tượng ứng với: $\underline{b}_2{}^{\mathrm{T}}(\lambda_2 I - A) = 0$ $\quad (b21 \quad b22)\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 0$

$\begin{pmatrix} 4b21 + b22 \\ -4b_{21} - b_{22} \end{pmatrix} = 0$ Chọn b_{22}= -4b_{21} =-4 Vậy vector b2=$\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

Tiếp theo là : S_r-G_r =-1-2=-3

Suy ra $M^{-1} = b_2{}^T = (1 \quad -4)$ và $T_r = (M^{-1}B)^{-1} = \left((1, -4)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)^{-1} = 1$

Vậy bộ điều khiển $R_2 = -T_r(S_r - G_r)M^{-1} = 3(1,-4) = (3,-12)$

Thử lại với bộ điều khiển R_2 tìm được thì hệ kín:

$$A-BR_2=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ -1 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}(3\,,-12)=\begin{pmatrix}-5 & 16\\ -1 & 3\end{pmatrix}$$

Đa thức đặc tính:

$$\det(sI-A+BR2)=\det\begin{pmatrix}s+5 & -16\\ 1 & s-3\end{pmatrix}=s^2+2s+1$$

Có các giá trị riêng $s_1=s_2=-1$

+Ưu nhược điểm của phương pháp modal

- Ưu điểm :
  - áp dụng được cho các hệ MIMO.
  - Chỉ ra cách tìm bộ điều khiển phản hồi trạng thái R một cách tổng quát.
- Nhược điểm :
  - (Chỉ dịch chuyển được một số điểm cực không phải tất cả. Muốn dịch chuyển hết các điểm cực, phải lặp lại thuật toán nhiều lần.)
  - Đối với các hệ có A không chéo hóa được thì phương pháp sẽ trở nên phức tạp hơn.

3.3.2. Bộ quan sát trạng thái

Tại sao cần quan sát trạng thái?

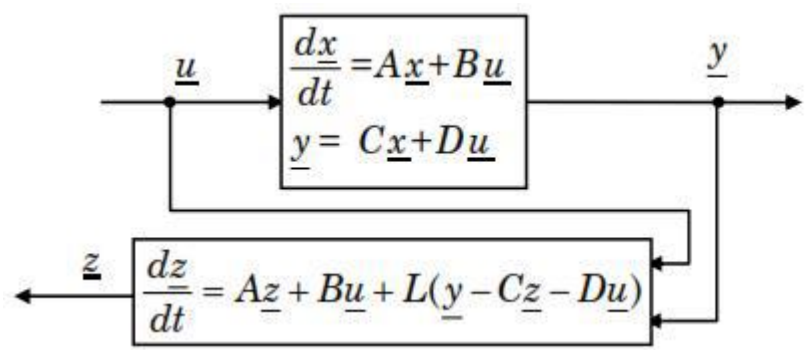
- Không phải lúc nào cũng đo được tất cả các trạng thái của hệ.Hơn nữa, nếu có thể thì chi phí rất đắt. Ví dụ: công suất không đo được trực tiếp mà phải thông qua dòng điện và điện áp.
- Số biến trạng thái đo được thì ít nhưng thuật toán điều khiển cần tới giá trị của nhiều biến trạng thái.

=) cần tới bộ quan sát trạng thái tính toán, xấp xỉ các biến trạng thái không đo được.

+ Bộ quan sát Luenberger

1. Tư tưởng thiết kế

Xét đối tượng hợp thức chặt với mô hình trạng thái:



$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{x}}{dt} = A\underline{x} + B\underline{u} \\ \underline{y} = C\underline{x} + D\underline{u} \end{cases}$$

thiết kế bộ quan sát trạng thái Luenberger là sử dụng khâu có mô hình:

$$\frac{d\underline{z}}{dt} = A\underline{z} + B\underline{u} + L(\underline{y} - C\underline{z} - D\underline{u}) \qquad (1)$$

Làm bộ quan sát để có $\underline{z} \approx \underline{x}$ ít nhất trong khoảng thời gian đủ ngắn T hay $\|\underline{e}(t)\|_\infty = \|\underline{x}(t) - \underline{z}(t)\|_\infty \approx 0$ với $t \geq T$ (2)

Nhiệm vụ xác định L trong (1) để có được (2)

- Trước hết ta lập sai lệch : $\underline{e}(t) = \underline{x}(t) - \underline{z}(t)$
- Mô hình $\underline{e}$:

$$\frac{d\underline{e}}{dt} = \frac{d(\underline{x}-\underline{z})}{dt} = A(\underline{x}-\underline{z}) - L(\underline{y} - C\underline{z} - D\underline{u})$$
$$= A(\underline{x}-\underline{z}) - L(C\underline{x} + D\underline{u} - C\underline{z} - D\underline{u}) = (A - LC)\underline{e}$$

có nghiệm $e(t) = e^{(A-LC)t}e(0)$

Từ đó suy ra $e(t) \rightarrow 0 \Leftrightarrow$ A-LC là bền

Giá trị riêng của A-LC càng xa trục ảo về bên trái thì $e(t) \rightarrow 0$ càng nhanh.

2. Thuật toán

- Cho trước $s_1, s_2, \ldots, s_n$ đủ xa về phía trái trục ảo
- Tìm L từ phương trình

  $\det(sI-(A-LC)) = (s-s_1)(s-s_2)\ldots(s-s_n)$ đúng với $\forall s$
- So sánh việc tìm L sao cho A-LC nhận các điểm cho trước làm điểm cực thì cũng tương đương với việc tìm L^T để $(A-LC)^T$ nhận các điểm cho trước làm điểm cực.
- Do đó việc tìm L chính là bài toán thiết kế bộ điều khiển phản hồi trạng thái L^T cho đối tượng đối ngẫu

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = A^T x + C^T u \\ y = B^T x \end{cases}$$

Ví dụ

- Cho đối tượng

$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}\underline{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\underline{u} \\ \underline{y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\underline{x} \end{cases}$$

- Hãy xác định bộ quan sát trạng thái Luenberger để tính xấp xỉ $\underline{z}=\underline{x}$ trạng thái của đối tượng với hai điểm cực cho trước $\lambda_1 = \lambda_2 = -10$

Giải:

- Chuyển về mô hình đối tượng đối ngẫu ta có

$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}\underline{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\underline{u} \\ \underline{y} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}\underline{x} \end{cases}$$

Ví dụ

- Khi đó bài toán trở thành thiết kế bộ điều khiển phản hồi trạng thái R cho đối tượng đối ngẫu.
- Để hệ kín nhận $\lambda_1 = \lambda_2 = -10$ làm điểm cực thì

$$\det\left(sI - A^T + C^T R\right) = (s+10)^2$$

$$\mathrm{Det}\begin{pmatrix} s + r_1 & r_2 + 3 \\ -1 & s + 5 \end{pmatrix} = (s + r_1)(s + 5) + r_2 + 3 = s^2 + (r_1 + 5)s + 5r_1 + r_2 + 3$$

$$= s^2 + 20s + 100$$

Cân bằng các hệ số ta có hệ:

$$\begin{cases} r_1 + 5 = 20 \\ 5r_1 + r_2 + 3 = 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = 15 \\ r_2 = 22 \end{cases}$$

Vậy R=(15 , 22) suy ra bộ quan sát $L = R^T = \begin{pmatrix} 15 \\ 22 \end{pmatrix}$

3.3.3. Bộ điều khiển phản hồi đầu ra

Tại sao cần bộ điều khiển phản hồi đầu ra?

- Dùng bộ điều khiển phản hồi trạng thái thì cần phải đo tín hiệu trạng thái> Tuy nhiên trong thực tế nhiều trạng thái không đo được. Còn tín hiệu đầu ra luôn đo được.
- Đó là bài toán tìm bộ điều khiển R phản hồi đầu ra cho đối tượng:

$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{x}}{dt} = A\underline{x} + B\underline{u} \\ \underline{y} = C\underline{x} \end{cases}$$

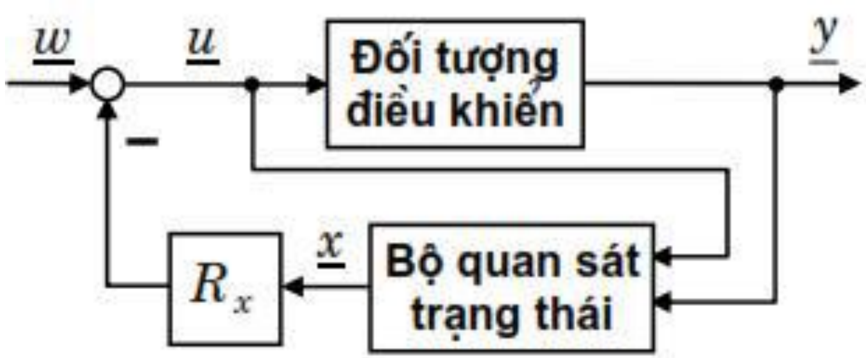
trong đó $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{r\times n}$ sao cho hệ kín thu được với mô hình:

$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{x}}{dt} = (A - BR)\underline{x} + B\underline{w} \\ \underline{y} = C\underline{x} \end{cases}$$

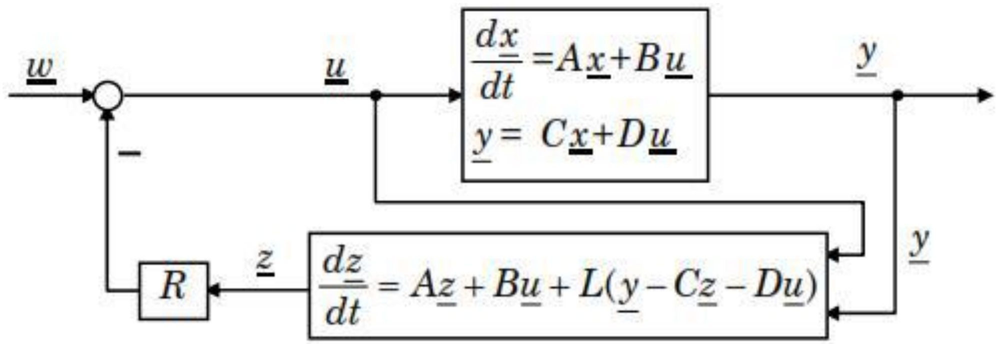
có được các điểm cực $s_1, \ldots, s_n$ là những giá trị cho trước.

3.3.3. Bộ điều khiển phản hồi đầu ra

- Sử dụng thêm bộ quan sát trạng thái cùng với bộ điều khiển phản hồi trạng thái để có điều khiển phản hồi đầu ra.
- Sơ đồ cấu trúc



- Sử dụng bộ quan sát Luenberger ta có sơ đồ cấu trúc



Thường chọn giá trị riêng của *A-LC* xa trục ảo hơn rất nhiều so với giá trị riêng A-BR

+Nguyên lý tách

- Mô hình trạng thái của hệ kín

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BR & BR \\ 0 & A - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}$$

- Hệ kín là ổn định khi và chỉ khi *A -BR* và *A -LC* ổn định
- Đa thức đặc tính của hệ kín:

$$A_k(s) = \det(sI-(A-BR)).\det(sI-(A-LC))$$

- Ở hệ tuyến tính việc thiết kế bộ điều khiển phản hồi đầu ra có thể tách thành hai bài toán riêng: thiết kế bộ quan sát trạng thái L và thiết kế bộ điều khiển phản hồi trạng thái R