Chương III.
Lý thuyết điều khiển tuyến tính, liên tục, trong không gian trạng thái

Nội dung

3.1. Mô tả hệ thống trong không gian trạng thái

- Phương trình trạng thái
- Quan hệ giữa mô hình trạng thái và hàm truyền
- Quỹ đạo trạng thái

3.2. Phân tích hệ thống trong không gian trạng thái

- Tính ổn định
- Tính điều khiển được
- Tính quan sát được

3.3. Thiết kế bộ điều khiển

- Bộ điều khiển phản hồi trạng thái gán điểm cực
- Bộ quan sát trạng thái
- Bộ điều khiển phản hồi đầu ra

3.1. Mô tả hệ thống trong không gian trạng thái

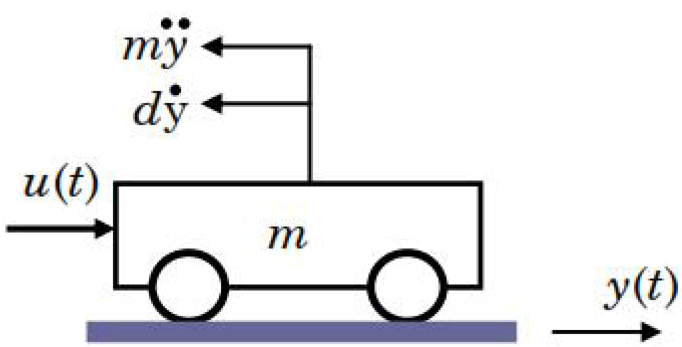
3.1.1. Phương trình trạng thái

+ Khái niệm biến trạng thái

Định nghĩa 3.1: Các biến trạng thái là các biến mang thông tin về các trạng thái bên trong của hệ thống, phản ánh các diễn biến, quá trình xảy ra trong hệ.

Các biến trạng thái có thể bao gồm cả biến ra. Đã là biến ra thì phải đo được, nhưng biến trạng thái không phải lúc nào cũng đo được mà có thể tính toán thông qua các tín hiệu đo khác.

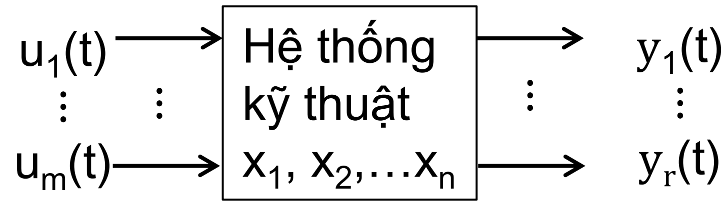
Ví dụ : Bài tóan điều khiển vận tốc xe



Biến trạng thái: quãng đường $y(t)$, vận tốc $\dot{y}(t)$.
Biến ra: vận tốc $\dot{y}(t)$.
Biến vào: lực tác động $u(t)$.

3.1.1. Phương trình trạng thái

Xét một hệ thống với cấu trúc cho như hình vẽ và:



- m tín hiệu vào $u_1(t), u_2(t), \ldots u_m(t)$, được viết chung thành vector $\underline{u}(t) \in R^m$
- r tín hiệu ra $y_1(t), y_2(t), \ldots y_r(t)$, viết chung lại thành vector $\underline{y}(t) \in R^r$;
- n biến trạng thái $x_1(t), x_2(t), \ldots x_n(t)$, viết chung lại thành $\underline{x}(t) \in R^n$

3.1.1. Phương trình trạng thái

Mô hình trạng thái là loại mô hình toán học có dạng:

$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{x}}{dt} = \mathrm{A}\underline{x} + \mathrm{B}\underline{u} \\ \underline{y} = \mathrm{C}\underline{x} + D\underline{u} \end{cases}$$

trong đó:

- Ma trận $A \in \mathrm{R}^{n\times n}$ là *ma trận hệ thống*.
- Ma trận $B \in \mathrm{R}^{n\times m}$ là *ma trận điều khiển*.
- Hai ma trận $C \in \mathrm{R}^{r\times n}$ và $D \in \mathrm{R}^{r\times m}$ là *các ma trận đầu ra*.

Hệ tuyến tính cũng mô tả được bằng phương trình trạng thái ở một trong ba dạng cơ bản sau:

3.1.1. Phương trình trạng thái

- *Mô hình trạng thái tham số hằng* khi các ma trận A, B, C, D đều là ma trận hằng
- *Mô hình trạng thái tham số phụ thuộc t*, có phần tử các ma trận *A*, *B*, *C*, *D* là hàm số phụ thuộc thời gian:

$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{x}}{dt} = \mathrm{A}(t)\underline{x} + \mathrm{B}(t)\underline{u} \\ \underline{y} = \mathrm{C}(\mathrm{t})\underline{x} + D(t)\underline{u} \end{cases}$$

- *Mô hình trạng thái tham số rải*, có phần tử các ma trận *A*,*B*,*C*,*D* là hàm số phụ thuộc biến không gian (phụ thuộc vector tham số $\underline{v}$):

$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{x}}{dt} = \mathrm{A}(v)\underline{x} + \mathrm{B}(v)\underline{u} \\ \underline{y} = \mathrm{C}(\mathrm{v})\underline{x} + D(v)\underline{u} \end{cases}$$

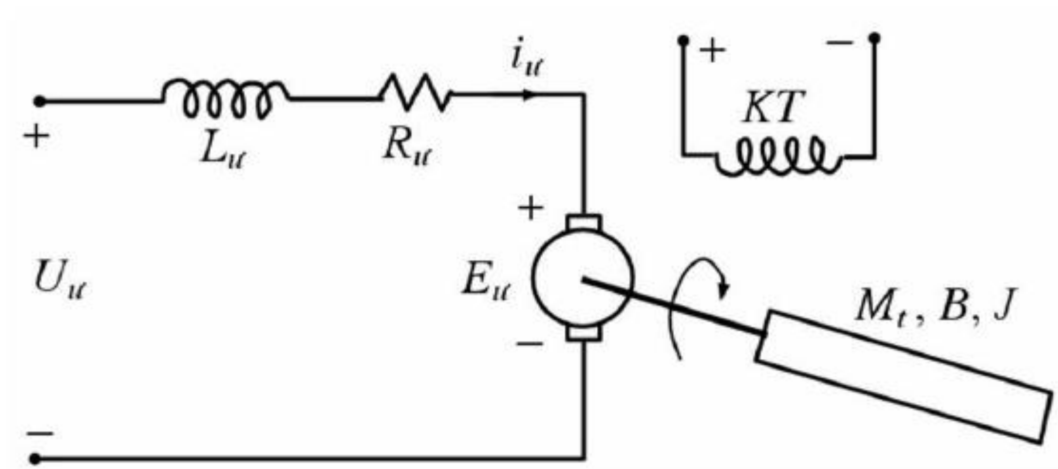
3.1.1. Phương trình trạng thái

+ Ưu điểm của hệ phương trình trạng thái:

- Cho phép mô tả hệ thống mà không cần điều kiện đầu bằng 0.
- Cho phép mô tả các hệ MIMO đơn giản hơn so với dạng hàm truyền đạt.
- Cho phép khảo sát các biến trạng thái cần quan tâm bên trong hệ thống chứ không phải đầu vào và đầu ra, vì thế giúp ta hiểu rõ và sâu hơn về các đặc tính của hệ.

Ví dụ

- Ví dụ 1: Động cơ một chiều:



– $L_ư$: điện cảm phần ứng
– $R_ư$: điện trở phần ứng
– $U_ư$: điện áp phần ứng
– $E_ư$: sức phản điện động

– ω : tốc độ động cơ
– M_t : moment tải
– B : hệ số ma sát
– J : moment quán tính

Ví dụ

★ Áp dụng định luật Kirchoff cho mạch điện phần ứng:

$$U_u(t) = i_u(t).R_u + L_u \frac{di_u(t)}{dt} + E_u(t) \qquad (1)$$

trong đó: $$E_u(t) = K\Phi\omega(t) \qquad (2)$$

K : hệ số

Φ : từ thông kích từ

★ Áp dụng định luật Newton cho chuyển động quay của trục đ.cơ (để đơn giản giả sử moment tải bằng 0):

$$M(t) = B\omega(t) + J\frac{d\omega(t)}{dt} \qquad (3)$$

trong đó: $$M(t) = K\Phi i_u(t) \qquad (4)$$

Ví dụ

★ (1) & (2) ⇒ $$\frac{di_u(t)}{dt} = -\frac{R_u}{L_u} i_u(t) - \frac{K\Phi}{L_u}\omega(t) + \frac{1}{L_u} U_u(t) \qquad (5)$$

★ (3) & (4) ⇒ $$\frac{d\omega(t)}{dt} = \frac{K\Phi}{J} i_u(t) - \frac{B}{J}\omega(t) \qquad (6)$$

★ Đặt: $$\begin{cases} x_1(t) = i_u(t) \\ x_2(t) = \omega(t) \end{cases}$$

★ (5) & (6) ⇒ $$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -\dfrac{R_u}{L_u} x_1(t) - \dfrac{K\Phi}{L_u} x_2(t) + \dfrac{1}{L_u} U_u(t) \\ \dot{x}_2(t) = \dfrac{K\Phi}{J} x_1(t) - \dfrac{B}{J} x_2(t) \end{cases}$$

Ví dụ

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{R_u}{L_u} & -\dfrac{K\Phi}{L_u} \\ \dfrac{K\Phi}{J} & -\dfrac{B}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{L_u} \\ 0 \end{bmatrix} U_u(t) \\ \omega(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}U_u(t) \\ \omega(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) \end{cases}$$

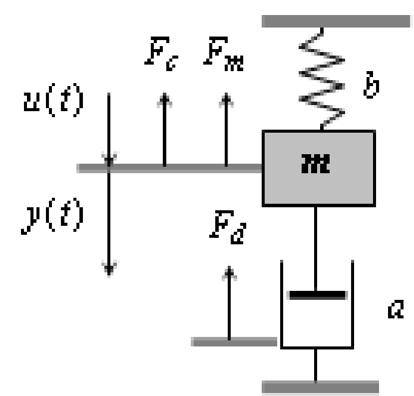
trong đó: $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -\dfrac{R_u}{L_u} & -\dfrac{K\Phi}{L_u} \\ \dfrac{K\Phi}{J} & -\dfrac{B}{J} \end{bmatrix}$ $\quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{L_u} \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$

Ví dụ

- Ví dụ 2: Cho hệ cơ gồm một lò xo có hệ số *b*, một vật với khối lượng *m* và bộ suy giảm tốc có hệ số *d* được nối với nhau như hình vẽ. Gọi $u(t)$ là tín hiệu vào được định nghĩa là lực bên ngoài tác động lên vật và tín hiệu ra $y(t)$ là quãng đường mà vật đi được.

Ký hiệu:

$x_1(t) = y(t)$ và $x_2(t) = \frac{dy(t)}{dt} = \frac{dx_1(t)}{dt}$



là hai biến trạng thái của hệ, cũng như F_c, F_m, F_d là những lực của lò xo, vật và bộ suy giảm tốc sinh ra khi vật chuyển động.

Ví dụ

Khi đó ta được

$$F_c = by(t) = bx_1, \quad F_m = m\frac{d^2y(t)}{dt^2} = m\frac{dx_2}{dt}$$ và $$F_d = a\frac{dy(t)}{dt} = ax_2$$

Suy ra

$$F_c + F_m + F_d = bx_1 + m\frac{dx_2}{dt} + ax_2 = u \quad \Leftrightarrow \frac{dx_2}{dt} = -\frac{b}{m}x_1 - \frac{a}{m}x_2 + \frac{1}{m}u$$

và từ đó là mô hình trạng thái:

$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -m^{-1}b & -m^{-1}a \end{pmatrix}\underline{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ m^{-1} \end{pmatrix}u \\ y = x_1 = (1\ ,\ 0)\underline{x} \end{cases}$$

3.1.2. Quan hệ giữa mô hình trạng thái và hàm truyền

Một hệ thống tuyến tính SISO cùng được mô tả bởi phương trình trạng thái và hàm truyền G(s). Vậy thì giữa hai mô hình này phải có những mối liên hệ với nhau.

- Xác định hàm truyền từ mô hình trạng thái;
- Xác định mô hình trạng thái từ hàm truyền;
- Xác định bậc tương đối của hàm truyền từ mô hình trạng thái.

3.1.2. Quan hệ giữa mô hình trạng thái và hàm truyền

1) Xác định hàm truyền từ mô hình trạng thái

Cho đối tượng được mô tả bởi mô hình trạng thái tham số hằng :

$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{x}}{dt} = A\underline{x} + Bu \\ y = C\underline{x} + Du \end{cases}$$

Khi đó hàm truyền đạt được tính theo công thức:

$$G(s) = \underline{C}(sI - A)^{-1}B + D$$

Ví dụ

- Cho hệ SISO với hai biến trạng thái được mô tả bởi:

$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\underline{x} + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}\underline{x} \end{cases}$$

Tìm hàm truyền đạt.

Ta có hàm truyền đạt:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s-2 & -1 \\ 0 & s-3 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{(s-2)(s-3)}\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s-3 & 1 \\ 0 & s-2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{6}{s^2 - 5s + 6}$$

2)Xác định mô hình trạng thái chuẩn điều khiển từ hàm truyền

- Xét hệ SISO có hàm truyền:

$$G(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \cdots + b_n s^n}{a_0 + a_1 s + \cdots + a_{n-1}s^{n-1} + s^n} = \frac{B(s)}{A(s)} \qquad (*)$$

- Gọi *U*(*s*) là ảnh Laplace của *u*(*t*), *Y*(*s*) là ảnh của *y*(*t*) thì từ hàm truyền đã cho ta có:

$$Y(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \cdots + b_n s^n}{A(s)} U(s) = b_0 \frac{U(s)}{A(s)} + b_1 \frac{sU(s)}{A(s)} + \cdots + b_n \frac{s^n U(s)}{A(s)}$$

Đặt n biến trạng thái $x_1(t)$, …, $x_n(t)$, ghép chung lại

thành $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ có ảnh Laplace

$$X_1(s) = \frac{U(s)}{A(s)}, \quad X_2(s) = \frac{sU(s)}{A(s)}, \quad \ldots, \quad X_n(s) = \frac{s^{n-1}U(s)}{A(s)}$$

2)Xác định mô hình trạng thái chuẩn điều khiển từ hàm truyền

Sẽ được

$$sX_1(s) = X_2(s) \quad \Rightarrow \quad \frac{dx_1}{dt} = x_2$$

$$sX_2(s) = X_3(s) \quad \Rightarrow \quad \frac{dx_2}{dt} = x_3$$

$$\vdots$$

$$sX_{n-1}(s) = X_n(s) \quad \Rightarrow \quad \frac{dx_{n-1}}{dt} = x_n$$

Cũng như:

$$X_1(s) = \frac{U(s)}{A(s)}$$

$$\Leftrightarrow \quad U = a_0X_1 + a_1sX_1 + \cdots + a_{n-1}s^{n-1}X_1 + s^nX_1$$
$$= a_0X_1 + a_1X_2 + \cdots + a_{n-1}X_n + sX_n$$

$$\Leftrightarrow \quad a_0x_1 + a_1x_2 + \cdots + a_{n-1}x_n + \frac{dx_n}{dt} = u$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{dx_n}{dt} = -a_0x_1 - a_1x_2 - \cdots - a_{n-1}x_n + u$$

Suy ra:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

2)Xác định mô hình trạng thái chuẩn điều khiển từ hàm truyền

Mặt khác, từ:

$$Y = b_0 X_1 + b_1 X_2 + \cdots + b_{n-1} X_n + s b_n X_n$$

còn có:

$$y = b_0 x_1 + b_1 x_2 + \cdots + b_{n-1} x_n + b_n \frac{dx_n(t)}{dt}$$

$$\left\{ y = (b_0 - a_0 b_n) x_1 + \left(b_1 - a_1 b_n\right) x_2 + \cdots + \left(b_{n-1} - a_{n-1} b_n\right) x_n + b_n u \right.$$

Định nghĩa 3.2: Hệ SISO vói hàm truyền đạt (*) có mô hình trạng thái chuẩn điều khiển như sau:

$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{x}}{dt} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}}_{A} \underline{x} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{B} u \\ y = \underbrace{\left(b_0 - a_0 b_n \,, \quad \cdots \quad , b_{n-1} - a_{n-1} b_n\right)}_{C} \underline{x} + b_n u \end{cases}$$

3) Xác định mô hình trạng thái chuẩn quan sát từ hàm truyền

Định nghĩa 3.3: Hệ SISO với hàm truyền đạt 3.12 có mô hình trạng thái chuẩn quan sát như sau:

$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \underline{x} + \underbrace{\begin{pmatrix} b_0 - a_0 b_n \\ \vdots \\ b_{n-1} - a_{n-1} b_n \end{pmatrix}}_{B} u \\ y = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \, , & \cdots & , \, 0 \, , \, 1 \end{pmatrix}}_{C} \underline{x} + b_n u \end{cases}$$

Ví dụ

- Hãy xác định hệ phương trình trạng thái theo chuẩn quan sát khi biết hàm truyền đạt

$$G(s) = \frac{3+s}{4+5s+s^2}$$

Ta có a0 = 4; a1 = 5;

b0 = 3 ; b1 =1

$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & -a_0 \\ 1 & -a_1 \end{pmatrix}\underline{x} + \underbrace{\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix}}_{\underline{b}} u \\ y = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \ , \ 1 \end{pmatrix}}_{\underline{c}^T}\underline{x} \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} \dfrac{d\underline{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}\underline{x} + \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\underline{b}} u \\ y = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \ , \ 1 \end{pmatrix}}_{\underline{c}^T}\underline{x} \end{cases}$$

4) Xác định bậc tương đối của hàm truyền từ mô hình trạng thái

- Xét hệ SISO có hàm truyền hợp thức chặt:

$$G(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \cdots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \cdots + a_n s^n}, \quad m < n \qquad (**)$$

Bậc tương đối của nó được hiểu là hiệu r = n-m≥1

Định nghĩa 3.4: Bậc tương đối của hệ SISO có hàm truyền (**) được xác định từ mô hình trạng thái tương ứng của nó bằng công thức sau:

$$CA^k B = \begin{cases} = 0 & \text{khi } 0 \le k \le r-2 \\ \neq 0 & \text{khi } k = r-1 \end{cases}$$

Ví dụ

- Cho hệ SISO với hai biến trạng thái được mô tả bởi:

Xác định bậc tương đối

$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\underline{x} + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}u \\ y = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}\underline{x} \end{cases}$$

Ta có hàm truyền: G(s) = $\frac{6}{s^2-5s+6}$

Như vậy, ta thấy hệ có bậc tương đối là r = 2. Giá trị này cũng có thể trực tiếp tính được từ mô hình trạng thái như sau:

Xét k=0

$$CB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = 0$$

k=1

$$CAB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = 8 \neq 0$$

Do đó r = k+1 = 2

3.1.3. Quỹ đạo trạng thái

1) Khái niệm

- *Quỹ đạo trạng thái* được hiểu là *nghiệm* của hệ phương trình vi phân:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = A\underline{x} + B\underline{u}$$

trong mô hình trạng thái với một kích thích $\underline{u}(t)$ và trạng thái đầu $x(0) = x_0$ cho trước. Tập hợp của tất cả các quỹ đạo trạng thái của hệ thống được gọi là *không gian trạng thái*.

- Nếu $u(t) = 0$ và $x(0) \neq 0$ thì quỹ đạo trạng thái được gọi là tự do.
- Nếu $u(t) \neq 0$ và $x(0) = 0$ thì quỹ đạo trạng thái được gọi là cưỡng bức.

2) Ma trận hàm mũ

+ Ý nghĩa: Dùng để tìm quỹ đạo trạng thái của hệ.

Định nghĩa 3.5: Với một ma trận $A \in R^{nxn}$ cho trước, ma trận hàm mũ tương ứng với A được định nghĩa bởi:

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!}$$

+ Các tính chất của ma trận hàm mũ:

- a) $e^{At_1}e^{At_2} = e^{At_2}e^{At_1} = e^{A(t_1+t_2)}$ và $e^{At}e^{-At} = e^{A(t-t)} = I$
- b) $\dfrac{de^{At}}{dt} = Ae^{At} = e^{At}A$
- c) Nếu A là ma trận đường chéo A = diag(a_i) thì e^{At}= diag ($e^{a_i t}$).
- d) $e^{At} = L^{-1}\{(sI - A)^{-1}\}$

2) Ma trận hàm mũ

+ Cách xác định hàm e^{At}

- Sử dụng toán tử Laplace $e^{At} = \mathrm{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\}$.

Ví dụ- toán tử Laplace

Ví dụ 1: Xác định ma trận hàm mũ bằng toán tử Laplace

Với $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}$ thì

Theo phép biến đổi Laplace:

$$e^{At}=\mathcal{L}^{-1}\{(sI-A)^{-1}\}=\mathcal{L}^{-1}\{\begin{pmatrix}s-2 & -1\\ 0 & s-3\end{pmatrix}^{-1}\}=\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{(s-2)(s-3)}\begin{pmatrix}s-3 & 1\\ 0 & s-2\end{pmatrix}\}$$

$$=\mathcal{L}^{-1}\{\begin{pmatrix}\dfrac{1}{s-2} & \dfrac{1}{(s-2)(s-3)}\\ 0 & \dfrac{1}{s-3}\end{pmatrix}\}=\begin{pmatrix}e^{2t} & e^{3t}-e^{2t}\\ 0 & e^{3t}\end{pmatrix}$$

3) Tìm quỹ đạo trạng thái

Định lý 3.4: Nghiệm của phương trình trạng thái tham số hằng được tính:

$$\begin{cases} \underline{x}(t) = e^{At}\underline{x}_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}B\underline{u}(\tau)d\tau \\ \underline{y}(t) = C\left[e^{At}\underline{x}_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}B\underline{u}(\tau)d\tau\right] + D\underline{u} \end{cases}$$

Định lý 3.5: Khi hệ thống được mô tả bởi mô hình trạng thái tham số hằng thì nó sẽ có:

a) Quá trình tự do: $\underline{y}_t(t) = Ce^{At}\underline{x}_0$

b) Quá trình cưỡng bức : $\underline{y}_c(t) = C\int_0^t e^{A(t-\tau)}B\underline{u}(\tau)d\tau + D\underline{u}$

Ví dụ

- Xác định quỹ đạo trạng thái có tham số không phụ thuộc thời gian
  - Hãy xác định $y(t)$ khi hệ được kích thích bởi u(t) = 1(t) từ trạng thái đầu x_0 = 0 cho hệ thống SISO có hai biến trạng thái được mô tả bởi:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \underline{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot u \ , \ \ y = x_1$$

Hệ có ma trận: $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \ \ C = (1 \quad 0)$

Khi đó:

$$(sI - A)^{-1} = \begin{pmatrix} s+2 & -1 \\ 0 & s+1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} s+1 & 1 \\ 0 & s+2 \end{pmatrix}}{(s+2)(s+1)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s+2} & \frac{1}{(s+2)(s+1)} \\ 0 & \frac{1}{s+1} \end{pmatrix}$$

$$e^{At} = L^{-1}\{(sI - A)^{-1}\} = \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

Ví dụ

- Vậy

$$\underline{x}(t)=\int_0^t \begin{pmatrix} e^{-2(t-\tau)} & e^{-(t-\tau)}-e^{-2(t-\tau)} \\ 0 & e^{-(t-\tau)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} 1(\tau)d\tau = \int_0^t \begin{pmatrix} e^{-(t-\tau)}-e^{-2(t-\tau)} \\ e^{-(t-\tau)} \end{pmatrix} d\tau$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-(t-\tau)} - \left.\dfrac{e^{-2(t-\tau)}}{2}\right|_0^t \\ \left. e^{-(t-\tau)} \right|_0^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} - e^{-t} + \dfrac{e^{-2t}}{2} \\ 1-e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$y(t) = \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{e^{-2t}}{2}$$