2.5. Phân tích hệ thống

Nhiệm vụ của công việc phân tích

- *Tính ổn định* của hệ thống.
- Sai lệch tĩnh
- Thời gian quá độ và độ quá điều chỉnh

1. Tính ổn định

Định nghĩa 2.6: Ổn định BIBO (Bounded Input Bounded Output)

Một hệ thống được gọi là ổn định nếu khi kích thích hệ bằng tín hiệu *u(t)* bị chặn ở đầu vào thì hệ sẽ có đáp ứng *y(t)* ở đầu ra cũng bị chặn

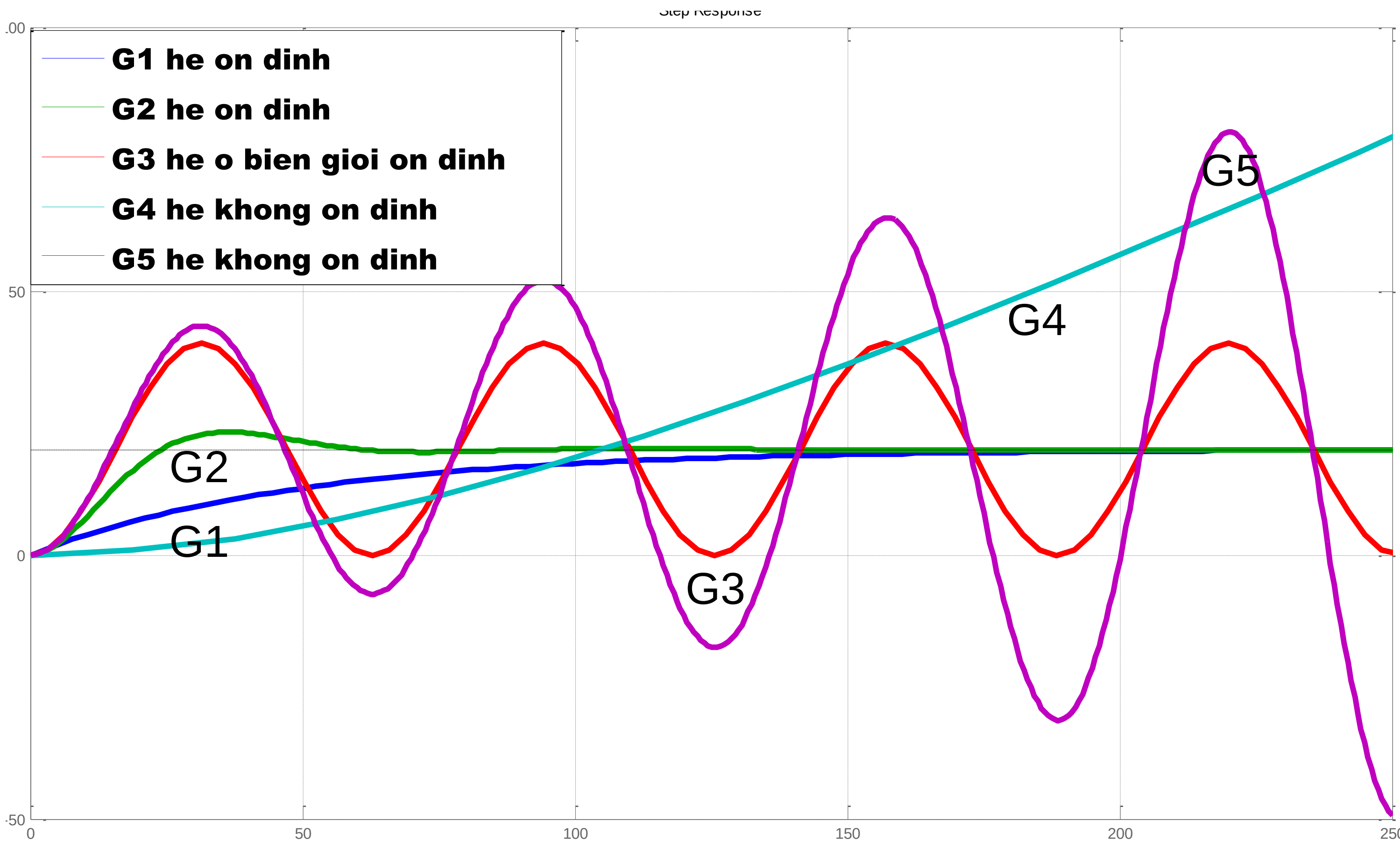
Định lý 2.5: Các phát biểu sau là tương đương:

a) Hệ ổn định BIBO.

b) Hàm trọng lượng $g(t)$ có chuẩn bậc 1 hữu hạn: $||g(t)||_1 < \infty$.

c) $G(s)$ là hàm bền (có tất cả các điểm cực nằm bên trái trục ảo).

- Các dạng đặc tính hàm quá độ



2. Phân tích tính ổn định

Để kiểm tra tính ổn định của một hệ LTI, ta chỉ cần kiểm tra các điểm cực của hệ, cũng chính là các nghiệm của đa thức đặc tính.

$$A(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$$

Hệ sẽ ổn định nếu *A(s)* có tất cả các nghiệm đều nằm bên trái trục ảo (có phần thực âm và khác 0).
Một số phương pháp (đại số) kiểm tra dấu các nghiệm của *A(s)* mà không cần giải tìm nghiệm của nó: tiêu chuẩn Routh, tiêu chuẩn Hurwitz, tiêu chuẩn Lienard-Chipart.
Một số phương pháp (hình học) đánh giá ổn định: tiêu chuẩn Michailov, tiêu chuẩn Nyquist, tiêu chuẩn Kharitonov.

4. Tiêu chuẩn ổn định Routh

- Là phương pháp đại số thuận tiện để kiểm tra tính ổn định BIBO của hệ thống.
- Điều kiện cần là tất cả các hệ số của đa thức đặc tính *A(s)* phải cùng dấu và khác 0.
- Đối với điều kiện cần và đủ, đầu tiên phải thành lập bảng Routh

4. Tiêu chuẩn ổn định Routh

Từ đa thức đặc tính:

$$A(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$$

$$\begin{array}{ccccc}
a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & \ldots \\
a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & \ldots \\
b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \ldots \\
c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \ldots \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \\
k_1 & k_2 & & & \\
l_1 & & & & \\
m_1 & & & &
\end{array}$$

trong đó

$$b_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}},$$

$$b_2 = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}},$$

$\ldots$

4. Tiêu chuẩn ổn định Routh

$$
\begin{array}{ccccc}
a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & \ldots \\
a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & \ldots \\
b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \ldots \\
c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \ldots \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \\
k_1 & k_2 & & & \\
l_1 & & & & \\
m_1 & & & &
\end{array}
$$

- Tương tự, các phần tử của hàng thứ 4 được tính toán dựa trên hai hàng ngay trước nó.

$$c_1 = \frac{b_1 a_{n-3} - a_{n-1} b_2}{b_1},$$

$$c_2 = \frac{b_1 a_{n-5} - a_{n-1} b_3}{b_1}.$$

- Các phần tử ở các hàng tiếp theo được tính toán một cách tương tự.

4. Tiêu chuẩn ổn định Routh

Các điều kiện cần và đủ là:

- Nếu tất cả các phần tử trong cột đầu tiên của bảng Routh đều cùng dấu thì tất cả các nghiệm của đa thức đặc tính *A(s)* đều có phần thực âm.
- Số lần đổi dấu trong cột đầu tiên bằng số các nghiệm của *A(s)* có phần thực dương.

Ví dụ:

$$A(s) = 2s^4 + s^3 + 3s^2 + 5s + 10$$

2	*3*	*10*
1	*5*	*0*
-7	*10*	
6.63	*0*	
10		

Từ bảng Routh ta thấy các phần tử trong cột đầu tiên đổi dấu 2 lần

→ đa thức đặc tính có hai nghiệm có phần thực dương.

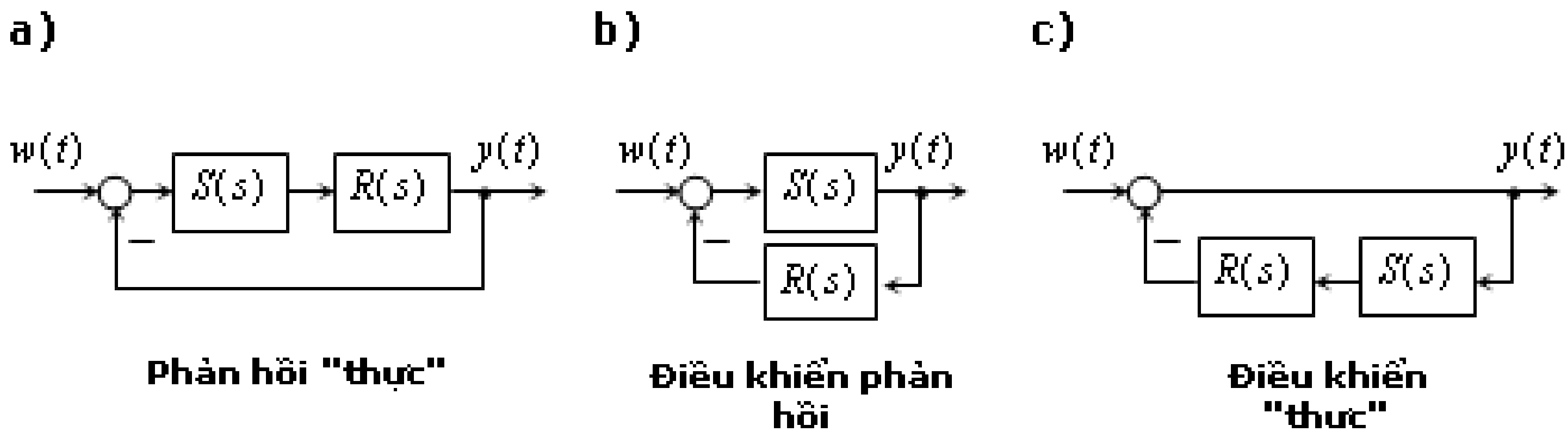
→ hệ không ổn định.

5. Phân tích chất lượng hệ kín từ HT của hệ hở

Khái niệm hệ kín (phản hồi âm) được mô tả trực quan ở hình 2.71 với hai khâu tuyến tính có hàm truyền hợp thức là $R(s)$ và $S(s)$. Khi đó hệ kín sẽ được có hàm truyền $G(s)$ cho các trường hợp phản hồi khác nhau như sau:

- Phản hồi thực (phản hồi đơn vị): $$G(s) = \frac{R(s)S(s)}{1 + R(s)S(s)}$$
- Điều khiển phản hồi: $$G(s) = \frac{S(s)}{1 + R(s)S(s)}$$
- Điều khiển thực (truyền thẳng đơn vị): $$G(s) = \frac{1}{1 + R(s)S(s)}$$

5. Phân tích chất lượng hệ kín từ HT của hệ hở



Hình 2.71: Một số dạng hệ hồi tiếp thường gặp.

Như vậy tất cả các dạng hồi tiếp đã xét ở trên đều có hàm truyền với một mẫu số chung là *hàm sai lệch phản hồi*

$$F(s) = 1 + R(s)S(s) = 1 + G_h(s)$$

trong đó tích $G_h(s) = R(s)S(s)$ được gọi là *hàm truyền của hệ hở*.

6. Xét tính ổn định: Tiêu chuẩn Nyquist

- **Định lý 2.6 :** Gọi $G_h(s)$ là hàm truyền của hệ hở. Giả sử rằng *m* là số điểm cực không nằm bên trái trục ảo của $G_h(s)$. Khi đó để hệ kín ổn định thì cần và đủ là: $\oint_N d\,\mathrm{arc}\left[1+G_h(s)\right] = 2\pi m$

Ký hiệu tiếp $G_h(N)$ là đường quỹ đạo của $G_h(s)$ khi *s* chạy dọc trên *N*, được gọi là *đường đồ thị Nyquist.*

- Định lý 2.7 (Nyquist): Nếu hàm truyền Gh(s) của hệ hở có m điểm cực không nằm bên trái trục ảo (nằm trên trục ảo hoặc nằm bên phải trục ảo), thì cần và đủ để hệ kín ổn định là đường đồ thị Nyquist của hệ hở, ký hiệu bằng Gh(N), bao điểm $-1+0j$ của mặt phẳng phức đúng m lần theo chiều ngược kim đồng hồ.

Ví dụ

Minh họa tiêu chuẩn Nyquist

- Xét hệ phản hồi âm có hàm truyền của hệ hở là khâu tích phân–quán tính bậc nhất

$$G_h(s) = \frac{k}{s(1+Ts)}, \quad k, T > 0$$

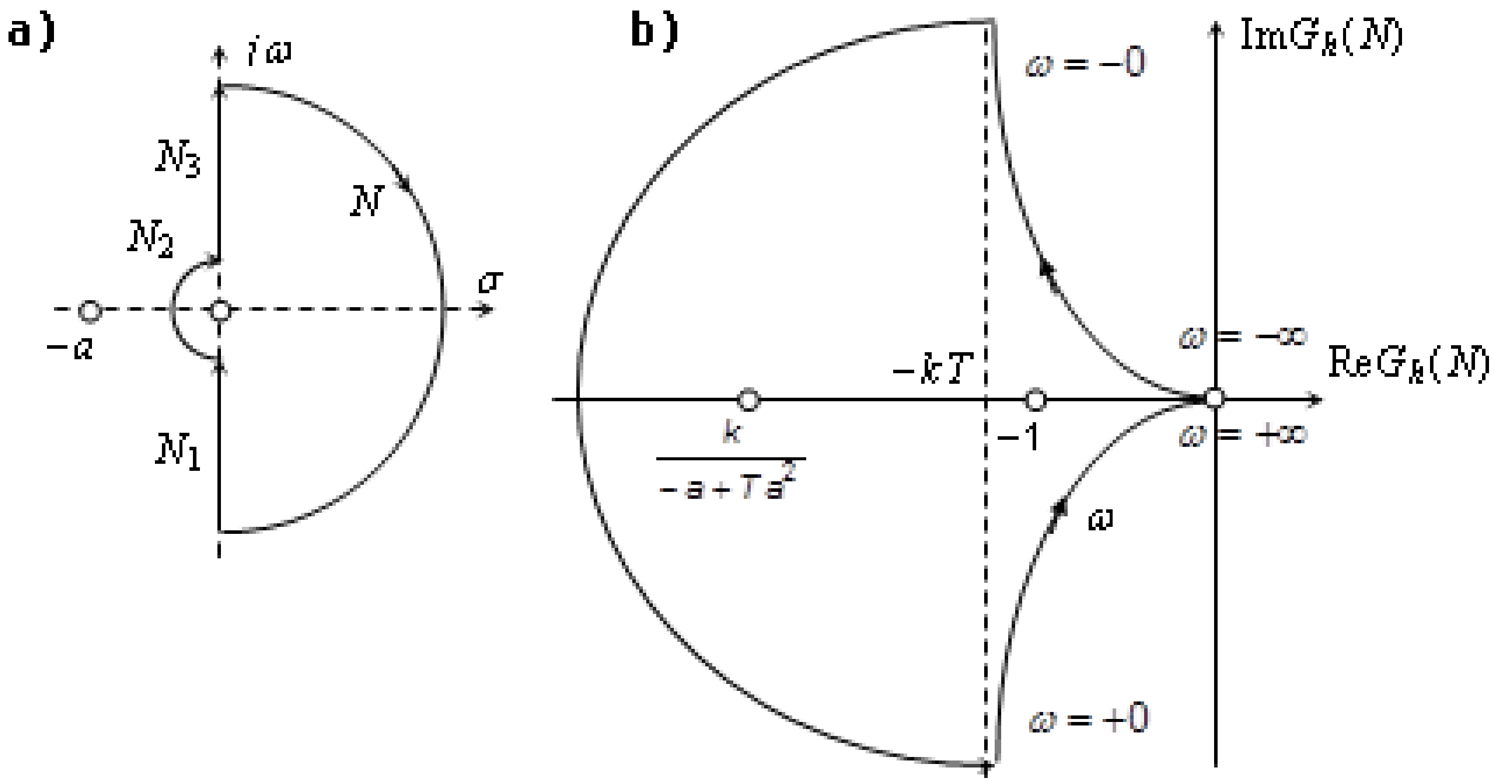
- Có thể thấy ngay được $G_h(s)$ chỉ có một điểm cực $s_1=0$ không nằm bên trái trục ảo, tức là có $m=1$. Hình a) là đường cong Nyquist N, gồm ba đoạn:

 N_1 nằm trên trục ảo có ω đi từ $-\infty$ tới -0.

 N_2 là nửa đường tròn phái trái trục ảo, có bán kính vô cùng nhỏ và tâm là gốc tọa độ.

 N_3 nằm trên trục ảo có ω đi từ $+0$ tới $+\infty$.

Ví dụ


a)
$j\omega$
N_3
N
N_2
σ
$-a$
N_1
b)
$\mathrm{Im}G_k(N)$
$\omega=-0$
$\omega=-\infty$
$\mathrm{Re}G_k(N)$
$-kT$
-1
$\omega=+\infty$
$\dfrac{k}{-a+Ta^2}$
ω
$\omega=+0$

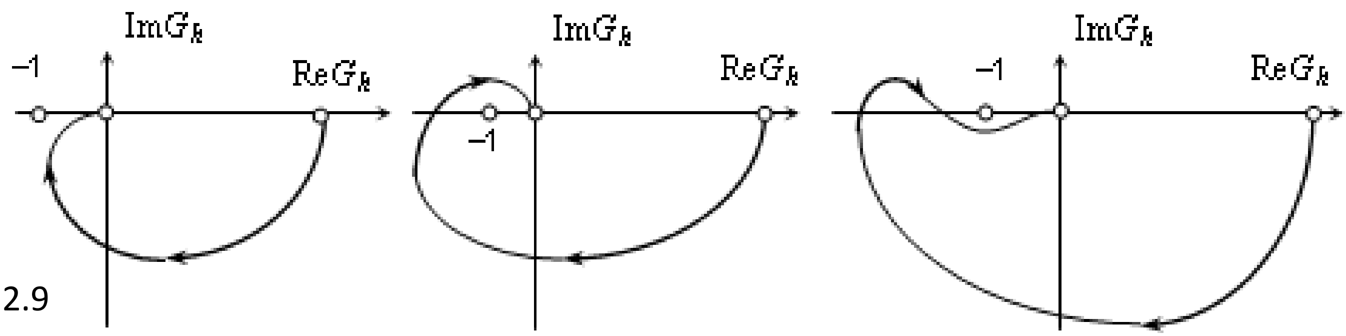
Ví dụ

- Hình b) là đồ thị Nyquist $G_h(N)$ cũng gồm ba nhánh:
- $G_h(N_1)$ là đường cong phía trên trục thực, có đường tiệm cận khi ω tiến tới -0.
- $G_h(N_2)$ là phần đường tròn phía trái đường tiệm cận với tâm 0 và bán kính bằng ∞. Lý do $G_h(N_2)$ phải là phần đường tròn nằm bên trái đường tiệm cận (chứ không nằm bên phải), là vì ứng với một giá trị $s=-a$, nằm gần gốc tọa độ sẽ có là một số âm nằm rất xa gốc 0.
- $G_h(N_3)$ là đường cong phía dưới trục thực, có đường tiệm cận $\mathrm{Re}G_h=-kT$ khi ω tiến tới +0.
- Từ đường đồ thị $G_h(N)$ thu được ta thấy, do nó bao điểm $-1+0j$ đúng một góc bằng , nên theo định lý 2.7, hệ kín ổn định.

6. Tiêu chuẩn Nyquist

- **Định lý 2.8:** Nếu hệ hở ổn định hoặc chỉ có s= 0 là điểm cực duy nhất không nằm bên trái trục ảo thì hệ kín sẽ ổn định khi và chỉ khi đường đồ thị đặc tính tần biên–pha $G_h(j\omega)$, của hệ hở không đi qua và không bao điểm .
  - Để thuận tiện cho việc kiểm tra xem đường đường quỹ đạo $G_h(j\omega)$ có đi qua hay bao điểm hay không, ta có thể chỉ cho ω chạy từ 0 đến $+\infty$ (vì $G_h(j\omega)$ có dạng đối xứng qua trục thực) và sử dụng *quy tắc bàn tay trái* như sau:
- **Định lý 2.9** (Quy tắc bàn tay trái)**:** Nếu hệ hở ổn định hoặc chỉ có s= 0 là điểm cực duy nhất không nằm bên trái trục ảo, thì hệ kín sẽ ổn định khi và chỉ khi điểm luôn nằm bên trái đường đồ thị biên pha $G_h(j\omega)$ của hệ hở nếu ta đi dọc trên $G_h(j\omega)$ theo chiều tăng của ω.

Minh họa cho định lý 2.9



Hệ kín ổn định   Hệ kín không ổn định   Hệ kín ổn định

Tổng quát hóa định lý 2.7 của Nyquist cho việc xác định hằng số khuếch đại *k* của bộ điều khiển để hệ kín có hàm truyền hệ hở là

$G_h(s) = kS(s)$được ổn định, ta có định lý sau:

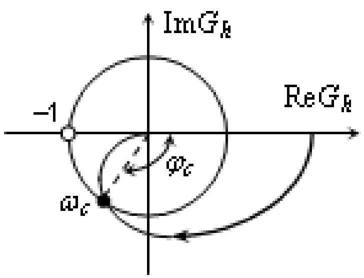
Định lý 2.10: Xét hệ kín có hàm truyền của hệ hở là $G_h(s) = kS(s)$

Giả sử rằng *S*(*s*) có *m* điểm cực không nằm bên trái trục ảo (nằm trên hoặc nằm bên phải trục ảo). Khi đó để hệ kín ổn định thì cần và đủ là đường đồ thị Nyquist *S*(*N*) của khâu *S*(*s*) bao điểm $-\frac{1}{k} + j0$

trong mặt phẳng phức đúng *m* lần theo chiều ngược kim đồng hồ.

7. Kiểm tra tính ổn định hệ kín nhờ biểu đồ Bode

- Định lý 2.11: Nếu hàm truyền $G_h(s)$ của hệ hở là hàm bền, tức là hệ hở ổn định, và $\|G_h(j\omega)\|_\infty = \sup_{0\le\omega\le\infty} |G_h(j\omega)| < 1$ thì hệ kín cũng ổn định.
- Định lý 2.12: Nếu hàm truyền $G_h(s)$ của hệ hở là hàm bền, có $\sup_{0\le\omega\le\infty} |G_h(j\omega)| \ge 1$ nhưng đường quỹ đạo tần số $G_h(j\omega)$ chỉ cắt đường tròn đơn vị một lần tại điểm tần số cắt ω_c và tại đó có $\varphi_c = \text{arc}G_h(j\omega_c) > -\pi$ thì hệ kín sẽ ổn định.



7. Kiểm tra tính ổn định hệ kín nhờ biểu đồ Bode

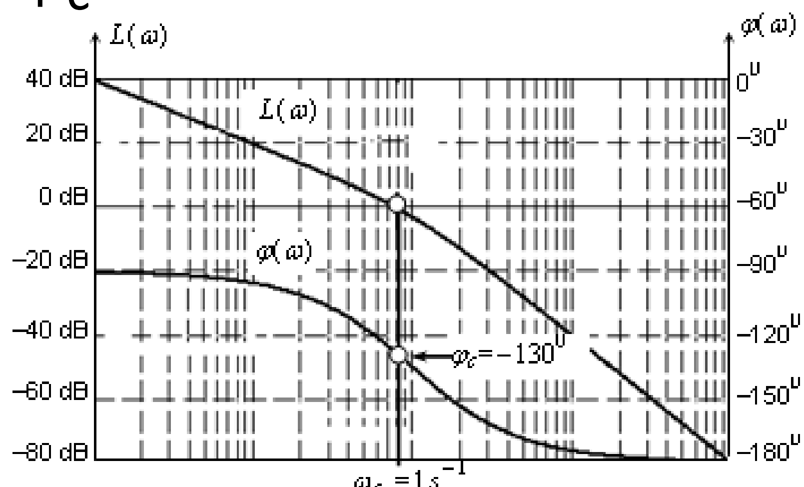
Kiểm tra tính ổn định của hệ kín khi đã biết được rằng hàm truyền $G_h(s)$ của hệ hở là hàm bền nhờ biểu đồ Bode

$L(\omega) = 20\cdot\lg|G_h(j\omega)|$ và $\varphi(\omega) = \arg G_h(j\omega)$ của $G_h(s)$.

Nguyên tắc kiểm tra như sau:

- Nếu $L(\omega)$ có đoạn nằm phía trên trục hoành thì $\sup\limits_{0\le\omega\le\infty}|G_h(j\omega)| > 1$
- Điểm cắt của $G_h(j\omega)$ với đường tròn đơn vị là giao điểm của $L(\omega)$ với trục hoành.
- Tần số cắt ω_c là hoành độ giao điểm của với trục hoành.
- Góc $\varphi_c = \arg G_h(j\omega_c)$ là tung độ của $\varphi(\omega)$ tại tần số cắt ω_c
- Hệ kín sẽ ổn định nếu φ_c nằm phía bên trên đường $\varphi(\omega)=-\pi$

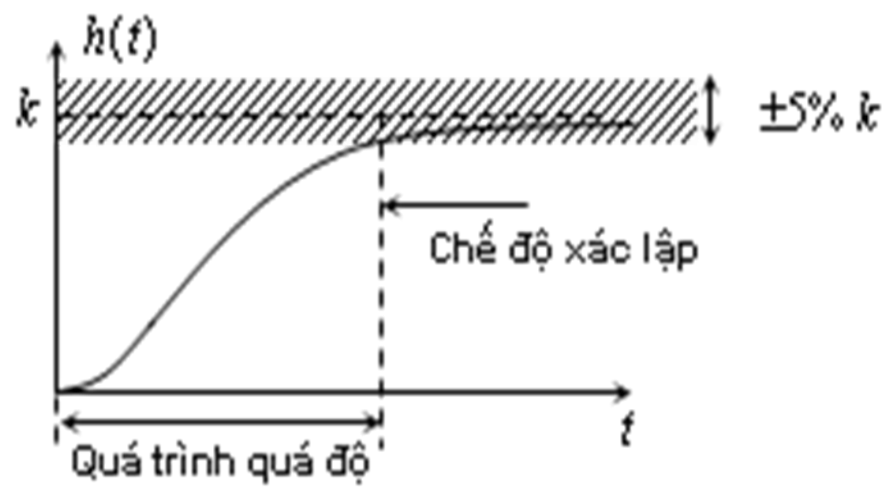
- **Ví dụ:** Xét tính ổn định nhờ biểu đồ Bode
- Từ giao điểm đường của biểu đồ Bode đó với trục hoành (đường ngang tại 0 dB) ta xác định được tần số cắt ωc = 1 s-1. Tiếp tục, với tần số cắt đó ta đọc ra được từ đường $\varphi(\omega)$ góc pha φ_c = -130^O . Vì φ_c = -130^O >- 180^O nên hệ kín là ổn định



Quá trình quá độ và chế độ xác lập

Khi phân tích hệ thống, người ta thường sử dụng hai khái niệm *quá trình quá độ* và *chế độ xác lập*.

- Quá trình quá độ là giai đoạn hệ thống đang chuyển đổi từ trạng thái cũ sang một trạng thái mong muốn khác.
- Chế độ xác lập là giai đoạn hệ thống đã đạt được đến trạng thái mới mong muốn (hoặc đã gần đến).



Điểm phân chia quá trình quá độ và chế độ xác lập.

8. Đánh giá sai lệch tĩnh

Giá trị sai lệch tĩnh của hệ kín:

$$e_\infty = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s)$$

Hệ được gọi là *có chất lượng tốt* nếu như có $e_\infty = 0$. Việc đánh giá sai lệch tĩnh thường được thực hiện với một dạng cụ thể của tín hiệu vào *w*(*t*),

Định lý 2.13: Cho hệ kín ổn định, không có nhiễu tác động, với sơ đồ cấu trúc cho trong hình 2.79. Hệ sẽ có *sai lệch tĩnh bằng* 0, tức là có , nếu:

- Khi $\omega(t)$ = 1(t) và hàm truyền hệ hở $G_h(s)$ có ít nhất một điểm cực là gốc tọa độ, tức là hệ hở có chứa ít nhất *một khâu tích phân*.
- Khi $\omega(t)$ = t và hàm truyền hệ hở $G_h(s)$ có ít nhất hai điểm cực là gốc tọa độ (điểm cực bội hai), tức là hệ hở có chứa ít nhất *hai khâu tích phân*.

8. Đánh giá sai lệch tĩnh

- Ví dụ: Cho kích thích $\omega(t)$ = 1(t) ở đầu vào của hệ có cấu trúc phản hồi thực với hàm truyền hệ hở:

  a) $G_h(s) = \dfrac{1}{s(1+0{,}5s)}$ b) $G_h(s) = \dfrac{4}{1+5s}$

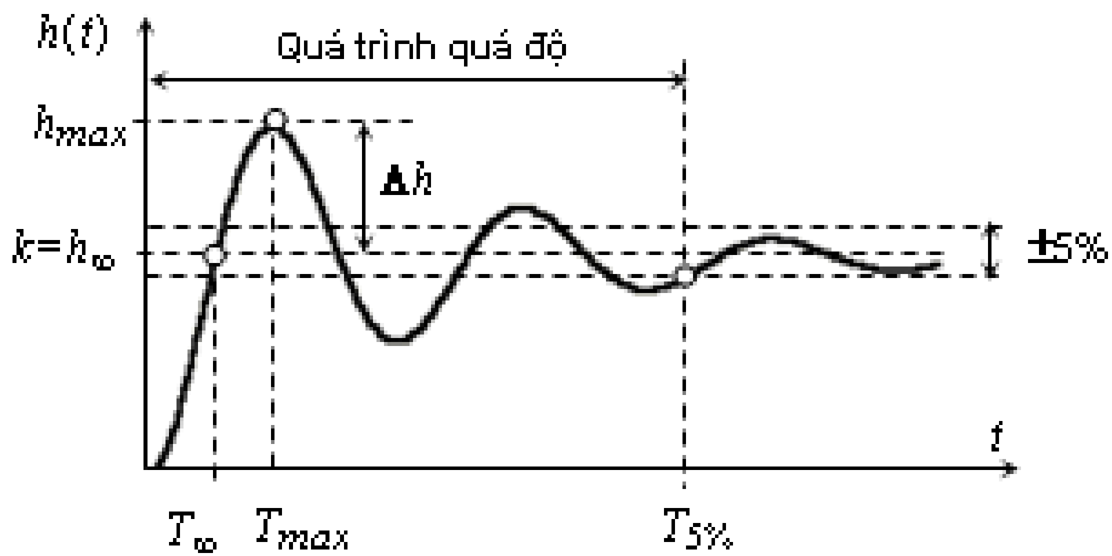
- Ta thấy ở trường hợp a) hệ không có sai lệch tĩnh vì $G_h(s)$ có chứa thành phần tích phân, nhưng với b) thì hệ có sai lệch tĩnh và sai lệch đó bằng 0,2.

9. Độ quá điều chỉnh và thời gian quá độ

Có hai thông số cơ bản đặc trưng cho quá trình quá độ, đó là:

- Thời gian quá độ $T_{5\%}$. Đây là điểm thời gian mà kể từ sau đó $h(t)$ nằm trong khoảng $\pm 5\%$ của giá trị xác lập h_∞ của nó.
- Độ quá điều chỉnh Δh, được định nghĩa là:

$$\Delta h = \max_t h(t) - h_\infty = h_{max} - h_\infty > 0$$



Hàm quá độ của khâu dao động bậc hai.

9. Độ quá điều chỉnh và thời gian quá độ

Ví dụ 1: Cho hệ dao động bậc hai:

$$G(s)=\frac{k}{1+2DTs+(Ts)^2} \quad \text{với} \quad 0<D<1$$

Xác định hai thông số $T_{5\%}$ và Δh.

Từ mục 2.2.8 ta đã được biết là hệ này có hàm quá độ (2.112), độ quá điều chỉnh (2.116) và thời gian T_{max} (2.114) như sau:

$$h(t)=k-ke^{-\frac{D}{T}t}\left[\cos\left(\frac{\sqrt{1-D^2}}{T}t\right)+\frac{D}{\sqrt{1-D^2}}\sin\left(\frac{\sqrt{1-D^2}}{T}t\right)\right],\ t\geq 0$$

$$\Delta h = k\exp\left(\frac{-\pi D}{\sqrt{1-D^2}}\right) \quad \text{và} \quad T_{max}=\frac{\pi T}{\sqrt{1-D^2}}$$

Suy ra

$$k\exp\left(\frac{-DT_{5\%}}{T}\right)\approx 0{,}05k \quad \Leftrightarrow \quad T_{5\%}\approx\frac{T\ln 20}{D}\approx\frac{3T}{D}$$

9. Độ quá điều chỉnh và thời gian quá độ

- **Ví dụ 2:** Xác định thời gian quá độ và độ quá điều chỉnh

  Xét hệ kín cho ở hình 2.79 với hàm truyền của hệ hở

$$G_h(s) = R(s)S(s) = \frac{1}{T_1 s(1+T_2 s)}, \quad T_1,\ T_2 > 0$$

Khi đó, hàm truyền của hệ kín sẽ là

$$G(s) = \frac{Gh(s)}{1+Gh(s)} = \frac{1}{1+T_1s+T_1T_2s^2} = \frac{1}{1+2DTs+(Ts)^2}$$

- trong đó

$T = \sqrt{T_1 T_2}$ và $D = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{T_1}{T_2}}$

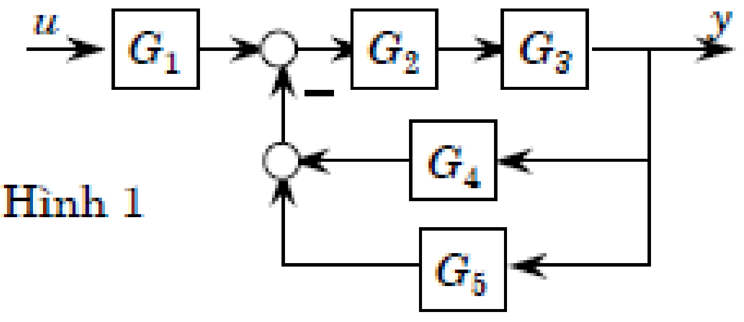
Vậy trong trường hợp $T_1 < 4T_2$ hệ kín với là một khâu dao động bậc hai. Suy ra $\Delta h = \exp\left(-\pi\sqrt{\frac{T_1}{4T_2 - T_1}}\right)$ và

$$T_{5\%} \approx \frac{3T}{D} = 6T_2$$

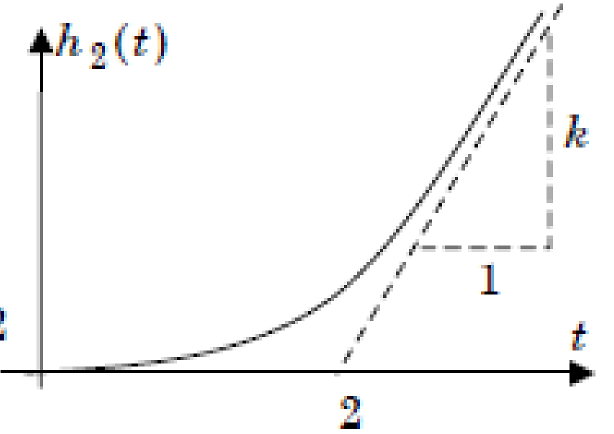
Ví dụ

- **Bài 1:** Cho hệ kín mô tả ở hình 1.
- 1. Hãy xác định hàm truyền đạt tương đương $G(s)$ của hệ.
- 2. Biết rằng $G1=G2=G3=G4=1$ và $G5=\frac{1}{s+1}$. Hãy tính hàm trọng lượng $g(t)$ và hàm quá độ $h(t)$ của hệ. Từ đó kiểm tra lại quan hệ $g(t)=\frac{dh(t)}{dt}$
- 3. Biết rằng $G1=G3=G4+G5=1$ và $G2$ là khâu tích phân−quán tính bậc nhất có hàm quá độ $h_2(t)$ cho ở hình 2. Hãy xác định k để hệ kín là một khâu dao động bậc 2 tắt dần. Từ đó tính cụ thể độ quá điều chỉnh Δhmax và thời gian quá độ $T5\%$ ứng với $k=2$.
- 4. $G1=k$, $G3=G4+G5=1$ và $G2=\frac{1}{T_1 s(T2s+1)}$. Tìm điều kiện cho $T1$, $T2$ để hệ kín có dạng dao động bậc hai. Chứng minh rằng thời gian quá độ $T5\%$ của hệ không phụ thuộc hằng số k.

Ví dụ



Hình 1



Hình 2

Giải:

1. Hàm truyền đạt tương đương:

$$G(s) = G1 \frac{G2G3}{1+G2G3(G4+G5)}$$

Ví dụ

. Thay các giá trị của đầu bài ta có :

$$G(s) = G1\,\frac{G2G3}{1+G2G3(G4+G5)} = \frac{1}{1+(1+\frac{1}{s+1})} = \frac{s+1}{2s+3}$$

Tính hàm trọng lượng:

Ta có $g(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{2s+3}\right\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s+\frac{3}{2}}\right\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}{s+\frac{3}{2}}\right\}$

$$= \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{1-\frac{\frac{1}{2}}{s+\frac{3}{2}}\right\} = \frac{1}{2}\left(\delta(t)-\frac{1}{2}e^{-\frac{3}{2}t}\right)$$

Ví dụ

Tính hàm quá độ:

Ta có h(t) = $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s(2s+3)}\right\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s(s+\frac{3}{2})}\right\} = \frac{1}{2}$

$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{a1}{s} + \frac{a2}{s+\frac{3}{2}}\right\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{2}{3}}{s} + \frac{\frac{1}{3}}{s+\frac{3}{2}}\right\} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}e^{-\frac{3}{2}t}\right)1(t)$

Chứng minh: $\frac{dh(t)}{dt} = -\frac{1}{4}e^{-\frac{3}{2}t}1(t) + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}e^{-\frac{3}{2}t}\right)\delta(t) =$

$-\frac{1}{4}e^{-\frac{3}{2}t} + \frac{1}{2}\delta(t) = g(t)$ Vì hàm $\delta(t)$ chỉ có giá trị tại t=0

Ví dụ

- G2 là khâu tích phân quán tính có hàm truyền đạt dưới dạng:
  G2 = $\frac{k}{s(1+Ts)}$
- Từ đồ thị ta suy ra T = 2 ; k = tan α = k
- Vậy hàm truyền đạt của hệ kín bằng:
- G(s) = $\frac{\frac{k}{s(1+2s)}}{1+\frac{k}{s(1+2s)}}$ = $\frac{k}{k+s+2s^2}$ = $\frac{1}{1+2\sqrt{\frac{1}{8k}}\sqrt{\frac{2}{k}}s+\left(\sqrt{\frac{2}{k}}\right)^2 s^2}$
- Muốn hệ kín là khâu bâc 2 tắt dần thì:

  D = $\sqrt{\frac{1}{8k}}$ <1 vậy k>$\frac{1}{8}$
- Hoặc $\Delta = 1 - 8k < 0\,, suy\ ra\ k > 1/8$

Ví dụ

- Với k = 2 thì G(s) = $\frac{2}{2+s+2s^2}$ = $\frac{1}{1+\frac{1}{2}s+s^2}$
- Vậy tham số của khâu dao động bậc hai là:

  k=1; T=1; D = ¼
- Độ quá điều chỉnh

$$\Delta h = k\exp\left(\frac{-\pi D}{\sqrt{1-D^2}}\right) = \exp\left(\frac{-\frac{\pi}{4}}{\sqrt{\frac{15}{16}}}\right) = \exp\left(-\frac{\pi}{\sqrt{15}}\right) = 0.45$$

- Thời gian quá độ

$$T_{5\%} = \frac{3T}{D} = 12 \text{ s}$$

Ví dụ

- Thay dữ liệu vào hàm truyền đạt ta có:
- G(s) =G1 $\frac{G2G3}{1+G2G3(G4+G5)}$ = $\frac{k\frac{1}{T1s(1+T2s)}}{1+\frac{1}{T1s(1+T2s)}}$ = $\frac{k}{1+T1s+T1T2s^2}$
- Ta có : $\begin{cases} 2DT = T1 \\ T = \sqrt{T1T2} \end{cases}$
- suy ra D = $\frac{T1}{2\sqrt{T1T2}}$ 0<D<1 suy ra T1<4T2 thì hệ kín là khâu dao động
- Thời gian quá độ T5% = $\frac{3T}{D} = \frac{3\sqrt{T1T2}}{\frac{T1}{2\sqrt{T1T2}}} = 6\mathrm{T2}$
- vậy không phụ thuộc vào k

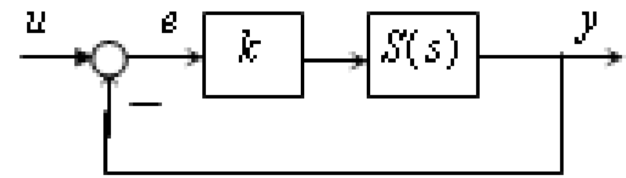
10. Phương pháp quỹ đạo nghiệm số

Đặt vấn đề

- Đối với một hệ thống điều khiển tự động, khi có một thông số biến đổi (như hệ số khuếch đại K, hằng số thời gian T, ...) từ 0 - ∞, ta cần phải xác định phạm vi nào của thông số biến đổi đó thì hệ thống ổn định.
- Trạng thái ổn định của hệ thống có thể biểu diễn bằng vị trí nghiệm số của phương trình đặc tính của hệ kín trên mặt phẳng phức.
- Khi thông số biến đổi thì vị trí nghiệm cũng thay đổi tạo nên một số quỹ đạo nào đó trong mặt phẳng phức gọi là quỹ đạo nghiệm số.

10. Phương pháp quỹ đạo nghiệm số

Xét trường hợp tổng quát cho hệ



$$G_h(s) = kS(s) = k\frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + \cdots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \cdots + a_n s^n} \quad \text{k}$$

Gọi p_j là các điểm cực và q_k là các điểm không của $S(s)$. Khi đó $G_h(s)$ sẽ viết được thành

$$G_h(s) = k\frac{(s-q_1)(s-q_2)\cdots(s-q_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$$

Hệ kín ổn định nếu như các điểm cực của hàm truyền hệ kín, tức là nghiệm của hàm sai lệch phản hồi $F(s) = 1 + G_h(s) = 1 + kS(s)$ nằm bên trái trục ảo

10. Phương pháp quỹ đạo nghiệm số

- Để xây dựng đường quỹ đạo nghiệm số, ta có *sáu quy tắc của Evans* phát biểu như sau:

1) *Quy tắc 1: Quỹ đạo nghiệm số có dạng đối xứng qua trục thực*
2) *Quy tắc 2: Quỹ đạo nghiệm số có n nhánh. Các nhánh này đều bắt đầu khi k= 0 ở những điểm cực* p_j *của* $S(s)$*. Sẽ có m nhánh kết thúc khi* $k \to \infty$ *tại các điểm không* q_k *của* $S(s)$.
3) *Quy tắc 3: Quỹ đạo nghiệm số có n – m nhánh kéo ra xa tận vô cùng khi* $k \to \infty$.

10. Phương pháp quỹ đạo nghiệm số

4) Quy tắc 4: *n-m nhánh kéo ra xa vô cùng đều có đường tiệm cận. Các đường tiệm cận đó cùng cắt trục thực tại một điểm*:

$$r_0 = \frac{1}{n-m}\left(\sum_{j=1}^{n} p_j - \sum_{k=1}^{m} q_k\right)$$

và hợp với trục thực một góc

$$\gamma_l = \frac{2l+1}{n-m}\pi \text{ , l= 0, 1,\ldots.., n-m-1}$$

10. Phương pháp quỹ đạo nghiệm số

<u>5) Quy tắc 5</u>: *Các nhánh của quỹ đạo nghiệm số cắt nhau tại những điểm thỏa mãn*:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{s-p_j} = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{s-q_k}$$

và nếu tại giao điểm đó có r nhánh thì các nhánh đó hợp với nhau một góc là 2π/r

<u>6) Quy tắc 6</u>: *Giao điểm* $s_c = j\omega_c$ *của quỹ đạo nghiệm số với trục ảo là nghiệm của*:

$$A(j\omega_c) + k_c B(j\omega_c) = 0 \qquad \begin{cases} Re[A(j\omega_c)] + k_c Re[B(j\omega_c)] = 0 \\ Im[A(j\omega_c)] + k_c Im[B(j\omega_c)] = 0 \end{cases}$$

Ví dụ

Cho hệ kín có cấu trúc sơ đồ khối như trong hình 2.91a) và

$$S(s) = \frac{1}{s(s+2)(s+4)}$$

- $S(s)$ có ba điểm cực là $s_1 = 0$, $s_2 = -2$ và $s_3 = -4$. Ngoài ra $S(s)$ không có điểm không. Do đó quỹ đạo nghiệm số mô tả hệ kín sẽ gồm ba nhánh và cả ba nhánh này đều kéo ra xa vô cùng khi $k \to \infty$. Ba nhánh quỹ đạo nghiệm đều có chứa những đoạn trên trục thực gồm đoạn thẳng giữa các điểm $s_1 = 0$, $s_2 = -2$ và nửa đường thẳng bên trái điểm $s_3 = -4$

Ví dụ

Đường tiệm cận của các nhánh đồng quy tại

$$r_0 = \frac{1}{3}(0-2-4) = -2$$

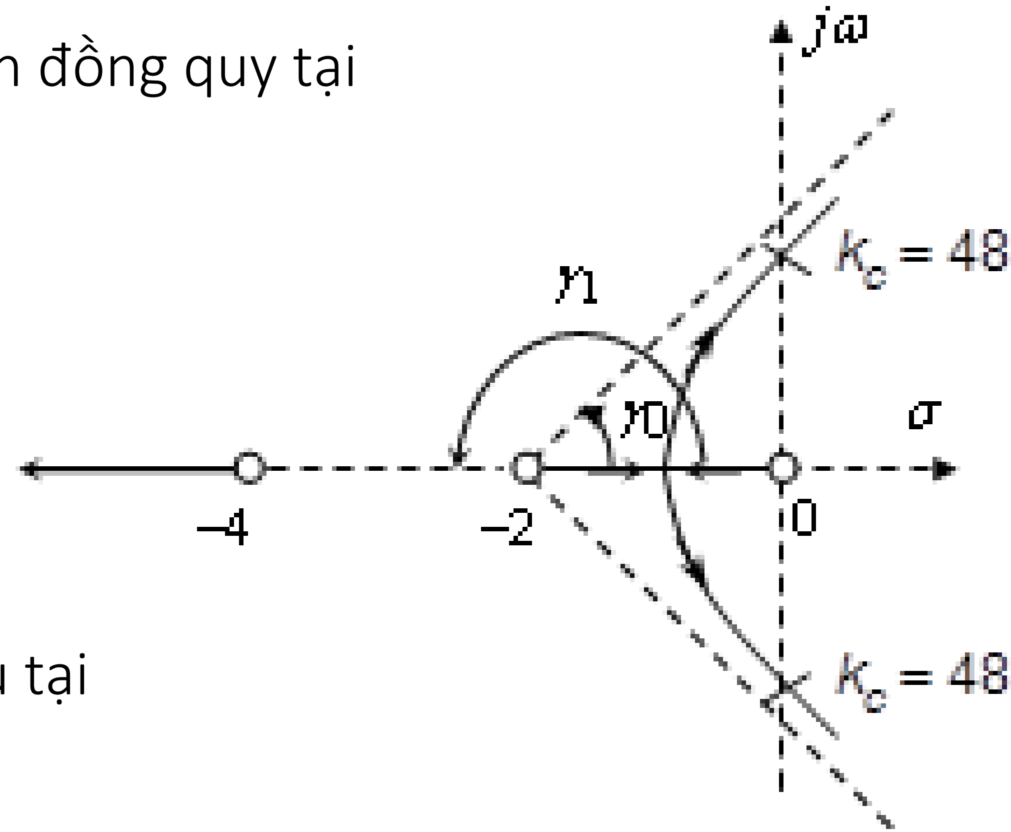
và hợp với trục thực các góc

$$\gamma_0 = \frac{\pi}{3};\ \gamma_1 = \pi;\ \gamma_0 = \frac{5\pi}{3}$$

Các nhánh có giao điểm với nhau tại

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s+2} + \frac{1}{s+4} = 0$$

$3s^2 + 12s + 8 = 0$



Ví dụ

- $s_1 = -2 + \frac{2}{\sqrt{3}}$, $s_2 = -2 - \frac{2}{\sqrt{3}}$
- Trong đó chỉ có s1 là giao điểm, còn s2 không thuộc về quỹ đạo nghiệm số nên bị loại
  - Tại giao điểm s_1 có r = 4 nhánh nên các nhánh đó hợp với nhau một góc bằng $\frac{\pi}{2}$. Cuối cùng, quỹ đạo nghiệm số cắt trục ảo tại
- $j\omega_c(j\omega_c+2)(j\omega_c+4)+k_c = 0 \Rightarrow \omega_c = 2\sqrt{2}$ và kc = 48

Dùng Matlab

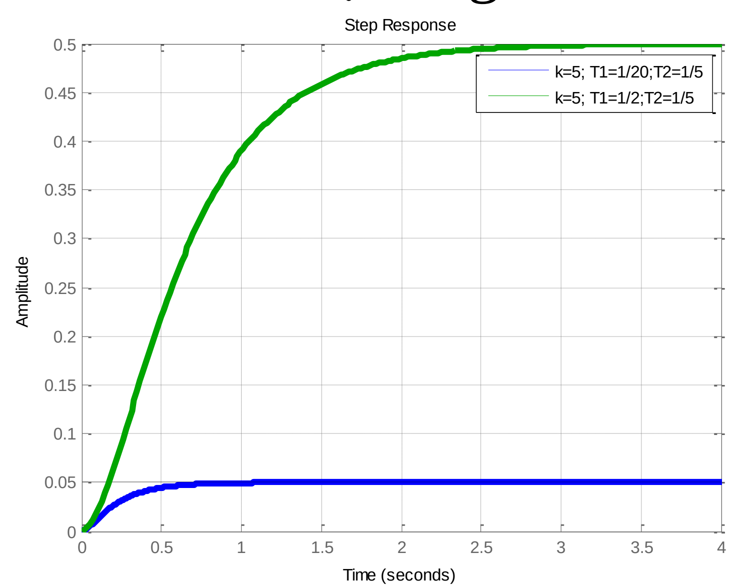
>>S=tf(1,conv([1 0],conv([1 2],[1 4]))) % định nghĩa hàm truyền đạt của S(s)

>> rlocus(S) % vẽ quỹ đạo nghiệm số

>>rlocfind(S) % Tìm giao điểm của quỹ đạo nghiệm số với trục ảo để suy ra k

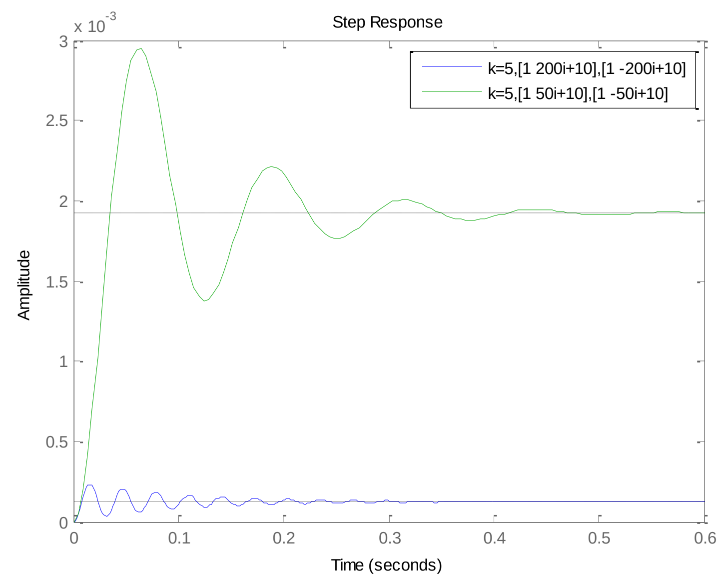
11. Vị trí điểm cực và điểm không

- Nếu tất cả các điểm cực đều nằm bên trái trục ảo thì $G(s)$ là hàm bền.
- Các điểm cực nằm càng xa trục ảo về phía trái, quá trình quá độ của hệ càng ngắn, tức là quán tính của hệ càng nhỏ.



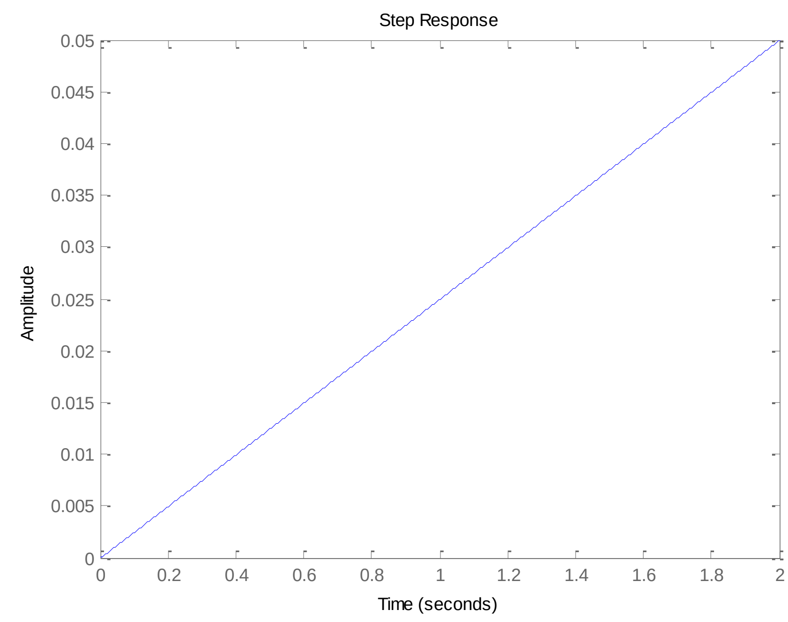
11. Vị trí điểm cực và điểm không

- Nếu $G(s)$ có một điểm cực không nằm trên trục thực (có phần ảo khác 0) thì quá trình quá độ $h(t)$ có dạng dao động với vô số các điểm cực trị. Các điểm cực nằm càng xa trục thực, tần số của dao động càng lớn.



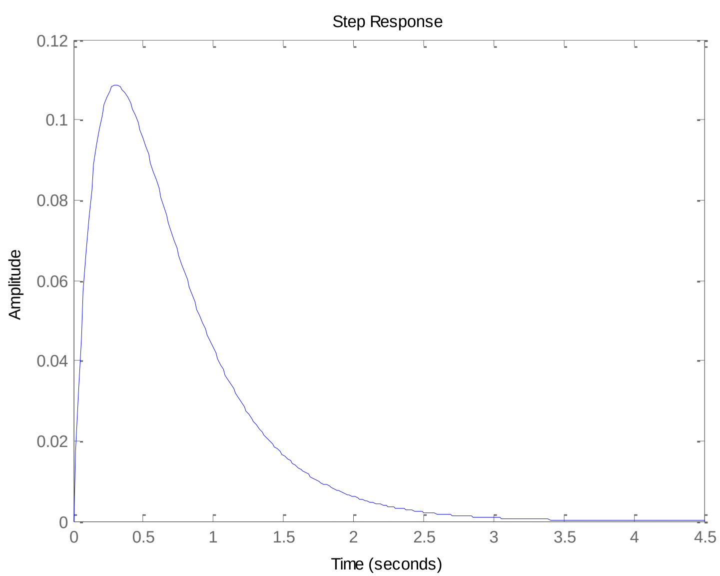
11. Vị trí điểm cực và điểm không

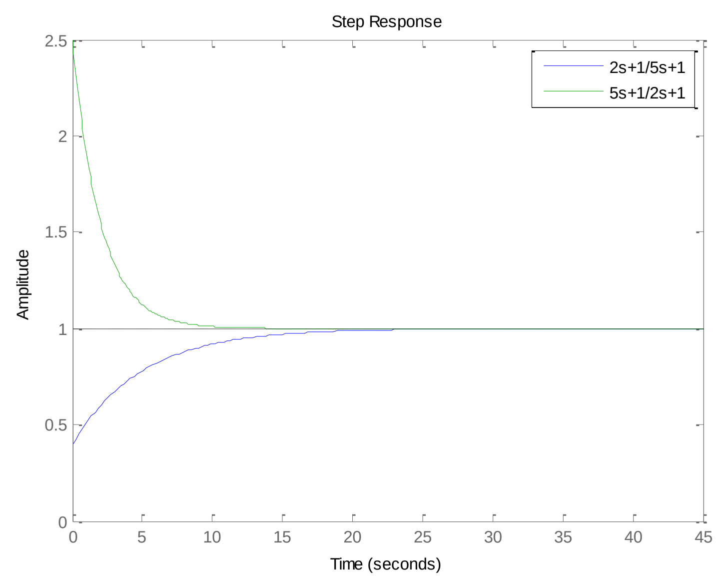
- Nếu $G(s)$ có ít nhất một điểm cực là gốc tọa độ thì hệ sẽ có chứa thành phần tích phân và do đó tín hiệu ra luôn thay đổi khi tín hiệu vào còn khác 0



11. Vị trí điểm cực và điểm không

- Những hệ có điểm không là gốc tọa độ đều mang đặc tính vi phân. Các hệ này sẽ phản ứng rất nhanh với sự thay đổi của tín hiệu đầu vào.
- Nếu $G(s)$ là hàm hợp thức không chặt (m=n) thì hàm quá độ $h(t)$ của hệ thống sẽ không xuất phát từ gốc tọa độ, tức là $h(0)\neq 0$.
- Nếu $G(s)$ là hàm hợp thức chặt (m<n) thì hàm quá độ $h(t)$ của hệ thống sẽ xuất phát từ gốc tọa độ, tức là có $h(0)=0$

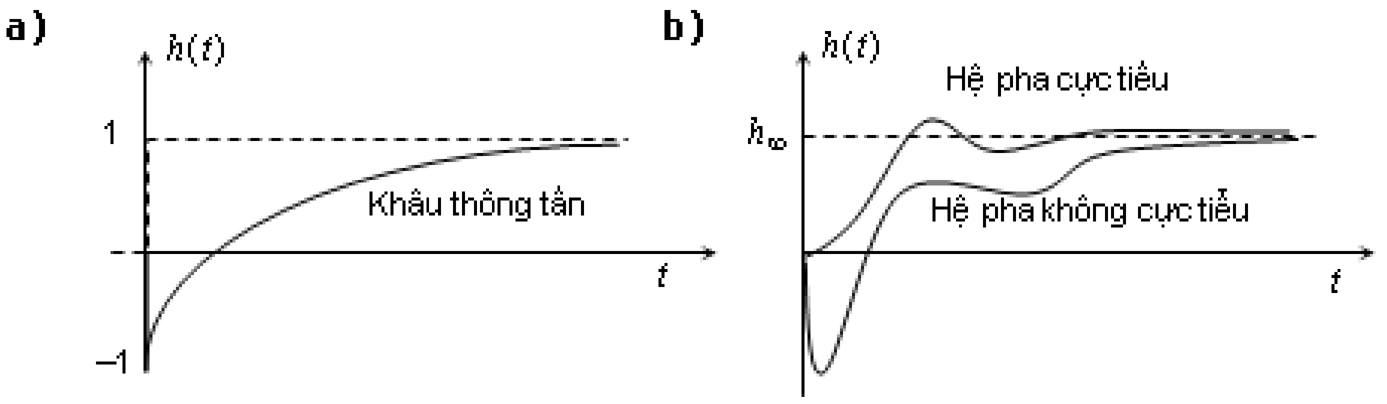




12. Hệ pha cực tiểu

Định nghĩa 2.7: Trong số tất cả các hệ có cùng biên độ $|G(j\omega)|$ của hàm đặc tính tần thì hệ có góc lệch pha $\varphi(\omega)$ nhỏ nhất được gọi là *hệ pha cực tiểu*.

Định lý 2.14: Hệ pha cực tiểu có hàm truyền $G(s)$ thực – hữu tỷ, phải có tất cả các điểm không (hữu hạn) nằm bên trái trục ảo.



Hàm quá độ của khâu thông tần và của hệ pha không cực tiểu.