3.2. Phân tích hệ thống trong không gian trạng thái

Nội dung

1. Tính ổn định của hệ thống
2. Tính điều khiển được của hệ thống tại một điểm trạng thái cho trước.
3. Tính quan sát được của hệ thống tại một điểm trạng thái cho trước.

3.2.1. Tính ổn định

+ Khái niệm ổn định BIBO

Từ quan hệ giữa mô hình trạng thái không có trạng thái thừa và ma trận hàm truyền *G*(*s*) của hệ thống:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = C\frac{(sI - A)_{adj}}{\det(sI - A)}B + D$$

Định lý 3.6: Hệ không có trạng thái thừa, sẽ ổn định BIBO khi và chỉ khi ma trận *A* có tất cả các giá trị riêng nằm bên trái trục ảo, tức là khi và chỉ khi:

$$p(s) = \det(sI - A)$$

là đa thức Hurwitz.

Dùng các tiêu chuẩn ổn định đại số để kiểm tra tính ổn định của p(s)

3.2.1. Tính ổn định

Định lý 3.7 (Gerschgorin): Ký hiệu aij ; i; j = 1; …. ; n là các phần tử của ma trận A. Với mỗi giá trị riêng k của A, luôn tồn tại một chỉ số i ∈ [1; n] sao cho: $|s_k - a_{ii}| \le R_i$

$$= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|$$

Mô hình trạng thái tham số hằng là ổn định BIBO nếu $a_{ii}+R_i<0$ với mọi i = 1,…,n

Tuy nhiên định lý 3.7 chỉ là điều kiện đủ, bởi vậy nếu hệ không thỏa mãn định lý 3.7 thì có thể nó vẫn ổn định.

Ví dụ 1

=

Cho hệ mô tả bởi:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ -2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

Từ ma trận hệ thống có:

$$a_{11} + R_1 = -3 + 1 = -2 < 0$$

$$a_{22} + R_2 = -3 + 2 = -1 < 0$$

$$a_{33} + R_3 = -4 + (2 + 1) = -1 < 0$$

Do đó theo định lý 3.7 thì hệ ổn định. Ta có thể kiểm tra lại kết luận trên nhờ đa thức đặc tính của hệ thống:

Ví dụ 1

$$p(s)=\det(sI-A)=\det\begin{pmatrix} s+3 & 1 & 0 \\ -2 & s+3 & 0 \\ 2 & -1 & s+4 \end{pmatrix}=(s+4)[(s+3)^2+2]$$

và thấy đa thức đó là Hurwitz.

Ví dụ 2

=

Cho hệ mô tả bởi:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

Hệ có đa thức đặc tính:

$$p(s) = \det(sI - A) = \det \begin{pmatrix} s+2 & 1 & 0 \\ -4 & s+2 & 0 \\ 2 & -1 & s+1 \end{pmatrix} = (s+1)[(s+2)^2 + 4]$$

Với ba nghiệm:

s_1=-1 ; s_2=-2+2j ; s_3=-2-2j.

Đều nằm bên trái trục ảo nên hệ ổn định.

Ví dụ 2

Nhưng lại không thỏa mãn định lý 3.7

$$a_{11} + R_1 = -2 + 1 = -1 < 0$$
$$a_{22} + R_2 = -2 + 4 = 2 > 0$$
$$a_{33} + R_3 = -1 + (2 + 1) = 2 > 0$$

+ Tiêu chuẩn ổn định Lyapunov - Hàm Lyapunov

Định nghĩa 3.6: Hệ được gọi là ổn định Lyapunov tại điểm cân bằng $\underline{x}_e$ nếu sau một tác động tức thời đánh bật hệ ra khỏi điểm cân bằng thì sau đó hệ có khả năng tự quay về được lân cận điểm cân bằng đó. Nếu hệ tiến tới $\underline{x}_e$ thì nó được gọi là ổn định tiệm cận Lyapunov tại $\underline{x}_e$

Điểm cân bằng là điểm thỏa mãn: $\dfrac{dx}{dt} = Ax = 0$

Định lý 3.8: Hệ ổn định BIBO khi và chỉ khi nó ổn định tiệm cận Lyapunov, tức là khi và chỉ khi các quỹ đạo trạng thái tự do có hướng tiến về gốc tọa độ và kết thúc tại đó.

+Phương pháp Lyapunov

- Xây dựng họ các đường cong *v* khép kín chứa điểm gốc tọa độ $\underline{0}$ bên trong.
- Kiểm tra xem quỹ đạo trạng thái $\underline{x}(t)$ mô tả quá trình tự do của hệ có cắt mọi đường cong thuộc họ *v* theo chiều từ ngoài vào trong hay không.

Định lý 3.9 (Lyapunov)**:** Nếu tồn tại *hàm* $V(\underline{x})$, thỏa mãn các điều kiện:

a) Khả vi, xác định dương, tức là $V(\underline{x})>0$ với $\forall \underline{x} \neq 0$ và $V(\underline{x})=0 \Leftrightarrow \underline{x}=0$,

b) $\frac{dV}{dt} < 0$, với $\frac{dV}{dt}$ là đạo hàm của $V(\underline{x})$ dọc theo quỹ đạo trạng thái tự do,

thì hệ sẽ ổn định tiệm cận Lyapunov tại $\underline{0}$ (ổn định BIBO). Hàm $V(\underline{x})$ khi đó được gọi là *hàm Lyapunov*. Nói cách khác, hệ ổn định tiệm cận tại $\underline{0}$ nếu nó có hàm Lyapunov.

Ví dụ 3

- Cho hệ mô tả bởi:

$$\frac{d\underline{x}}{dt}=\begin{pmatrix}-4 & 2 & 0\\ -2 & -5 & 1\\ 0 & -1 & -2\end{pmatrix}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}}_{\underline{x}}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix}}_{\underline{u}}=\begin{pmatrix}-4x_1+2x_2\\ -2x_1-5x_2+x_3\\ -x_2-2x_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}u_1\\ u_1+2u_2\\ u_2\end{pmatrix}$$

Sử dụng hàm khả vi, xác định dương: $V(\underline{x})=x_1^2+x_2^2+x_3^2$

cùng với quỹ đạo $\underline{x}(t)$ của quá trình tự do ($u_1=u_2=0$) của hệ:

$$\frac{dV}{dt}=\left(2x_1\;,\;2x_2\;,\;2x_3\right)\cdot\begin{pmatrix}-4x_1+2x_2\\ -2x_1-5x_2+x_3\\ -x_2-2x_3\end{pmatrix}=-8x_1^2-10x_2^2-4x_3^2<0$$

Với mọi vecto $\underline{x}\neq 0$ (dV/dt xác định âm). Vì vậy, hệ ổn định.

3.2.2. Phân tích tính điều khiển được

+ Tại sao lại cần phải hiểu biết về tính điều khiển được

- Nhiệm vụ chính của điều khiển là tìm được tín hiệu điều khiển mang lại cho hệ thống một chất lượng mong muốn, tức là phải tìm được một tín hiệu thỏa mãn chất lượng đề ra trong số các tín hiệu có khả năng đưa hệ thống từ một điểm trạng thái ban đầu $\underline{x}_0$ (tùy ý) tới được điểm trạng thái đích $\underline{x}_T$.
- Nếu tồn tại một tín hiệu điều khiển làm được việc đó thì ta nói hệ thống điều khiển được tại điểm trạng thái $\underline{x}_0$

+ Khái niệm điều khiển được hoàn toàn

- **Định nghĩa 3.7:** Một hệ thống tuyến tính, liên tục được gọi là *điều khiển được* nếu tồn tại ít nhất một tín hiệu điều khiển đưa được nó từ một điểm trạng thái ban đầu $\underline{x}_0$ (tùy ý) về được gốc tọa độ $\underline{0}$ *trong khoảng thời gian hữu hạn*.

- Chú ý: Nếu hệ tuyến tính đã điều khiển được thì nó cũng điều khiển được hoàn toàn, nghĩa là luôn tồn tại một tín hiệu điều khiển u(t) đưa hệ từ x0 (tùy ý) tới được xT (tùy ý) trong khoảng thời gian hữu hạn.

+Các tiêu chuẩn xét tính điều khiển được

Định lý 3.10 (Hautus): Cần và đủ để hệ tuyến tính không có trạng thái thừa điều khiển được là:

$$\mathrm{Rank}(sI - A,\ B) = n \quad \text{với mọi } s \in C$$

Định lý 3.11 (Kalman): Cần và đủ để hệ tuyến tính không có trạng thái thừa điều khiển được là:

$$\mathrm{Rank}(B,\ AB,\ A^2B,\ \dots,\ A^{n-1}B) = n$$

- Trong MATLAB: P = ctrb(A,B) → rank(P).

Ví dụ 4

(Áp dụng tiêu chuẩn Hautus)

Cho hệ thống có mô hình:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underbrace{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}}_{A} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{B} u$$

Suy ra:

$$\text{Rank}(sI - A, B) = \text{Rank}\begin{pmatrix} s-a & 0 & 0 \\ 0 & s-b & 1 \end{pmatrix}$$

- Như vậy nếu s=a thì:

$$\text{Rank}(sI - A, B) = 1 < 2$$

và do đó hệ không điều khiển được.

Ví dụ 4

(Áp dụng tiêu chuẩn Kalman)

Cho hệ thống có mô hình:

Ta có:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underbrace{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}}_{A} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{B} u$$

$$AB = \underbrace{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$$

Vậy: $\mathrm{Rank}(B, AB) = \mathrm{Rank} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix} < 2$

và do đó hệ không điều khiển được.

Ví dụ 5

Cho hệ thống có mô hình:

Ta có:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underline{x} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{B} u$$

Do đó:

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad AB = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -a_2 \end{pmatrix}; \quad A^2B = \begin{pmatrix} 1 \\ -a_2 \\ (a_2^2 - a_1) \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -a_2 \\ 1 & -a_2 & (a_2^2 - a_1) \end{pmatrix}$$

det(P)≠0 suy ra rank(P)=3 vậy hệ thống là điều khiển được

3.2.3. Phân tích tính quan sát được

+ Tại sao cần tính quan sát được

- Sau khi biết hệ có thể điều khiển được → xác định được $\underline{x}_0$ để từ đó bộ điều khiển có thể tạo ra tín hiệu điều khiển thích hợp đưa hệ từ $\underline{x}_0$ về $\underline{x}_T$.
- Công việc xác định điểm trạng thái $\underline{x}_0$ có thể được tiến hành bằng cách đo trực tiếp (nhờ cảm biến) nhưng cũng có khi phải tính toán.
- Điểm trạng thái $\underline{x}_0$ của một hệ là quan sát được nếu ta xác định được nó thông qua việc đo các tín hiệu vào/ ra trong một khoảng thời gian hữu hạn.

+ Khái niệm quan sát được

Định nghĩa 3.8: Một hệ thống có tín hiệu vào $\underline{u}(t)$ và tín hiệu ra $\underline{y}(t)$ được gọi là:

a) *Quan sát được tại thời điểm t_0*, nếu tồn tại ít nhất một giá trị hữu hạn T> t_0 để điểm trạng thái $\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$ xác định được một cách chính xác thông qua vector các tín hiệu vào ra $\underline{u}(t)$, $\underline{y}(t)$ trong khoảng thời gian $[t_0, T]$.

b) *Quan sát được hoàn toàn tại thời điểm t_0*, nếu với mọi T> t_o , điểm trạng thái $\underline{x}(t_o) = \underline{x}_o$ luôn xác định được một cách chính xác từ vector các tín hiệu vào ra $\underline{u}(t)$, $\underline{y}(t)$ trong khoảng thời gian $[t_0, T]$.

+Các tiêu chuẩn xét tính quan sát được

- **Định lý 3.12:** Cho hệ tham số hằng không có trạng thái thừa. Các phát biểu sau là tương đương:

a) Hệ quan sát được.

b) $\mathrm{Rank}\begin{pmatrix} sI - A \\ C \end{pmatrix} = n$ với mọi *s*, và *I* là ma trận đơn vị (Hautus 1969).

c) $\mathrm{Rank}\begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = n$ (Kalman, 1961).

Trong MATLAB: *Q* = obsv(*A*,C) → rank(Q).

Ví dụ 5

Cho đối tượng có mô hình trạng thái

$$\frac{dx}{dt}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & -4 & 3\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}u \quad ;\, y=x_1 \qquad \text{trong đó } \underline{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$$

Hãy kiểm tra tính điều khiển được nhờ tiêu chuẩn Kalman

a) Hãy kiểm tra tính quan sát được của đối tượng nhờ tiêu chuẩn Hautus.

Giải:

a) Tính điều khiển được

Ta có:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & -4 & 3\end{pmatrix};\ \mathbf{B}=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix};C=(1 \quad 0 \quad 0);$$

Ví dụ 5

Tính các ma trận:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}; \quad A^2\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -10 \end{pmatrix};$$

Suy ra :

$$P = (B\,AB\,A^2B) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -10 \end{pmatrix}$$

Rank(P)=3 vây hệ thống là điều khiển được

Dùng Matlab

- Dùng Matlab để tính các ma trận, lập trình trên mfile

```
A=[1 2 -1;0 1 0;1 -4 3];
B=[1;1;0];
C=[1 0 0];
D=A*B
E=A*A*B
P=[B D E]
rank(P)
```

- Dùng trực tiếp câu lệnh để tính P = ctrb(A,B)

Ví dụ 5

b) Tính quan sát được theo Hautus

$$sI-A=\begin{pmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} s-1 & -2 & 1 \\ 0 & s-1 & 0 \\ -1 & 4 & s-3 \end{pmatrix}$$

với mọi s

$$rank\begin{pmatrix} sI-A \\ C \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} s-1 & -2 & 1 \\ 0 & s-1 & 0 \\ -1 & 4 & s-3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}=2$$

Vậy hệ thống là không quan sát được

Ví dụ 4

Cho đối tượng có mô hình trạng thái

$$\frac{dx}{dt}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & -4\\ -1 & 0 & 3\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}u \quad ; \qquad y=x_3$$ trong đó $$\underline{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$$

a) Hãy kiểm tra tính điều khiển được nhờ tiêu chuẩn Hautus

b) Hãy kiểm tra tính quan sát được của đối tượng nhờ tiêu chuẩn Kalman.

Giải:

a) Tính điều khiển được theo Hautus

Ta có:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & -4\\ -1 & 0 & 3\end{pmatrix};\ \mathbf{B}=\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix};C=(0 \quad 0 \quad 1);$$

Ví dụ 4

$$sI-A=\begin{pmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} s-1 & 0 & -1 \\ -2 & s-1 & 4 \\ 1 & 0 & s-3 \end{pmatrix}$$

$$rank\left(sI-A,B\right)=\begin{pmatrix} s-1 & 0 & -1 & -1 \\ -2 & s-1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & s-3 & 1 \end{pmatrix}=3$$

với mọi s

Vậy hệ thống là điều khiển được

b) Tính quan sát theo Kalman

Tính toán các ma trận

Ta có $CA=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \end{pmatrix};\ CA^2=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & 0 & 8 \end{pmatrix};$

$$rank\begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}=2$$

->hệ thống không quan sát được

Dùng Matlab

- Dùng Matlab tính các ma trận, dùng trên m file

A=[1 0 1;2 1 -4;-1 0 3];

B=[-1;0;1];

C=[0 0 1];

D=C*A

E=C*A*A

Q=[C ;D; E]

rank(P)

- Dùng trực tiếp câu lệnh để tính Q=obsv(A,C)