Chương II.
Lý thuyết điều khiển tuyến tính, liên tục, trong miền phức

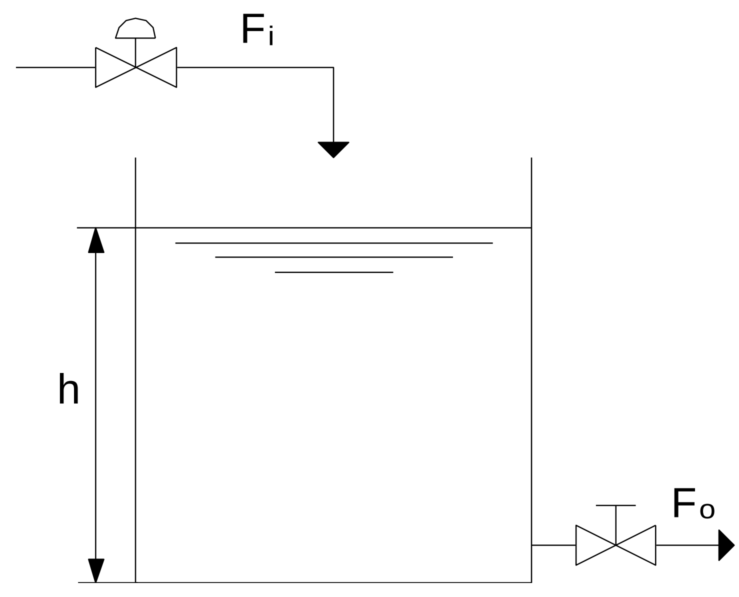
Nguyễn Thu Hà
Bộ môn Điều khiển tự động
Viện Điện, Trường ĐHBK HN

2.1. Mô tả tín hiệu

1. Khái niệm tín hiệu tiền định

- Định nghĩa 2.1: Tín hiệu tiền định x(t) được định nghĩa như là một *hàm số phụ thuộc thời gian* mang thông tin về *các thông số kỹ thuật* được quan tâm trong hệ thống và *được truyền tải bởi những đại lượng vật lý.*

Ví dụ: Bài toán điều khiển mức
Tín hiệu ra: mức nước trong bình
Giá trị về độ cao cột nước tại thời điểm t được đo bằng cảm biến và được biểu diễn dưới dạng hàm số phụ thuộc thời gian u(t)
có đơn vị là [V]



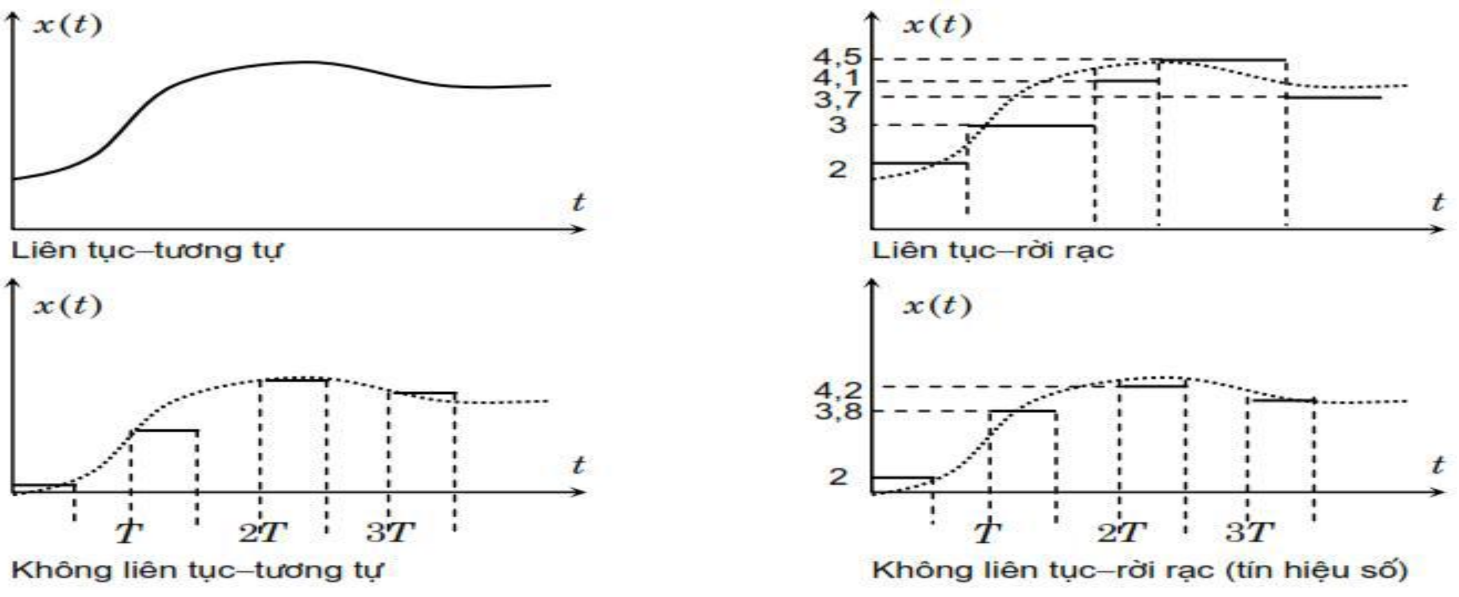
1. Khái niệm tín hiệu tiền định

- Trong một hệ thống có thể có nhiều tín hiệu $x_1(t)$, $x_2(t)$, …$x_n(t)$ được quan tâm cùng một lúc. Tất cả các tín hiệu được quan tâm đó sẽ thường được ta ghép chung lại thành một *vector tín hiệu* ký hiệu bởi:

- $$\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

2. Phân loại tín hiệu tiền định

- Tín hiệu liên tục: x(t) là liên tục nếu $\lim_{t \to tk} x(t) = x_{t_k}\ \forall\ t_k$.
- Tín hiệu không liên tục: x(t) chỉ xác định tại $t_1, t_2, \ldots, t_n$.
- Tín hiệu tương tự: x(t) liên tục theo miền giá trị.
- Tín hiệu rời rạc: x(t) không liên tục theo miền giá trị.



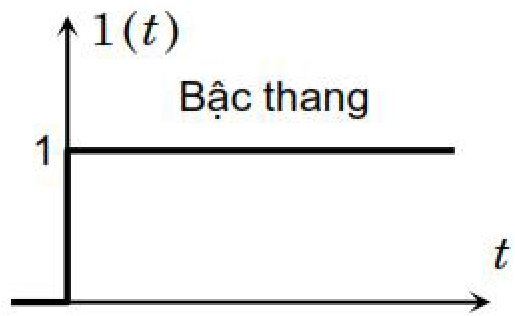
3. Một số tín hiệu điển hình

- Tất cả các loại tín hiệu này đều có một điểm chung là có tính causal (tính nhân quả), tức là:

$$x(t) = 0 \text{ khi } t<0$$

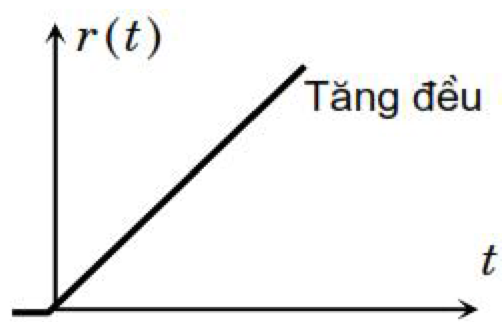
1.Tín hiệu bậc thang (step)

$$1(t) = \begin{cases} 1 \text{ khi } t > 0; \\ 0 \text{ khi } t < 0 \end{cases}$$



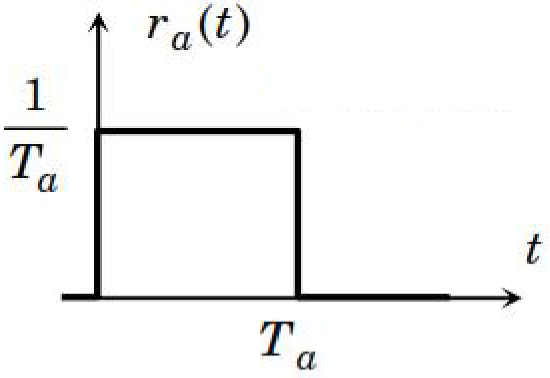
2. Tín hiệu tăng đều (ramp)

$$x(t) = t1(t):$$



3. Tín hiệu xung

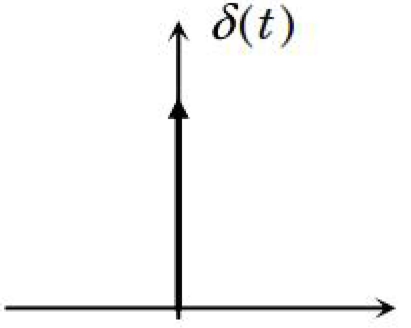
$$r_a(t) = \frac{1(t)-1(t-Ta)}{T_a}$$



4. Tín hiệu xung dirac

$$\delta(t) = \frac{d}{dt}\,1(t) = \lim_{Ta\,\to\,0} r_a(t),$$

- $= \lim_{Ta \to 0} \frac{1(t)-1(t-Ta)}{T_a}$



4. Phép biến đổi Laplace thuận

4.1. Định nghĩa

Nếu tín hiệu x(t) thỏa mãn:

- x(t)= 0 với t<0
- x(t) trong khoảng hữu hạn bất kỳ liên tục từng khúc.
- x(t) trong khoảng hữu hạn bất kỳ chỉ có hữu hạn các điểm cực trị thì tồn tại:

X(s) = L$\{x(t)\} = \int_0^\infty x(t)e^{-st}dt$

Trong đó s: toán tử Laplace, X(s) hàm ảnh, x(t) hàm gốc.

	Time function $f(t)$	*Laplace transform* $\mathscr{L}[f(t)] = F(s)$
1	unit impulse $\delta(t)$	1
2	unit step 1	$1/s$
3	unit ramp t	$1/s^2$
4	t^n	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$
5	e^{-at}	$\dfrac{1}{(s+a)}$
6	$1-e^{-at}$	$\dfrac{a}{s(s+a)}$
7	$\sin\omega t$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$
8	$\cos\omega t$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$
9	$e^{-at}\sin\omega t$	$\dfrac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
10	$e^{-at}(\cos\omega t - \dfrac{a}{\omega}\sin\omega t)$	$\dfrac{s}{(s+a)^2+\omega^2}$

4.2. Các tính chất của biến đổi Laplace

a)Tính tuyến tính

$$L\left[af_1(t)\pm bf_2(t)\right]=aF_1(s)\pm bF_2(s).$$

b)Phép dịch trục

$$L\left[f(t-T)\right]=e^{-Ts}F(s)$$

c)Ảnh của tích chập

$$L\left[\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau\right]=F_1(s)F_2(s).$$

d)Ảnh của tích phân

$$L\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right]=\frac{F(s)}{s}.$$

e)Ảnh của đạo hàm

$$L\left[\frac{d}{dt}f(t)\right]=sF(s)-f(0).$$

f)Định lý về giá trị đầu

$$f(0)=\lim_{t\to 0}f(t)=\lim_{s\to\infty}sF(s).$$

g)Định lý về giá trị cuối

$$f(\infty)=\lim_{t\to\infty}f(t)=\lim_{s\to 0}sF(s).$$

5. Phép biến đổi Laplace ngược

- Giả sử tín hiệu x(t) có ảnh Laplace X(s) dạng

$$X(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_0+b_1s+\cdots+b_ms^m}{a_0+a_1s+\cdots+a_ns^n} \quad \text{với m<n}$$

- Trường hợp 1: Khi mà ảnh Laplace X(s) của tín hiệu x(t) có dạng thực hữu tỷ và tất cả các điểm cực s_1, s_2,…,s_n đều là nghiệm đơn của phương trình A(s)=0. Do đó X(s) phân tích được thành tổng các phân thức tối giản

$$X(s) = \frac{A_1}{s-s_1} + \frac{A_2}{s-s_2} + \ldots + \frac{A_n}{s-s_n}$$

5. Phép biến đổi Laplace ngược

- Để xác định A_i có 3 cách:

  Cách 1: Quy đồng và đồng nhất hệ số

  Cách 2: Dùng công thức Heaviside

  $$A_i = \frac{B(s)}{A'(s)}\Big|_{s = s_i}$$

  Cách 3: Nhân cả hai vế với $(s-s_i)$ và cho s tiến tới s_i ta sẽ có công thức xác định nhanh những hệ số $A_1, A_2, \ldots, A_n$ như sau:

  $$A_i = \lim_{s \to s_i}(s - s_i)X(s)$$

5. Phép biến đổi Laplace ngược

- Có thể sử dụng MATLAB để tính hàm gốc bằng cách dùng hàm residue:
  - [R,P,K] = RESIDUE(B,A) ta sẽ tìm được R,P và K khi cho các hệ số của đa thức,B A, B(s)/A(s). Nếu là nghiệm riêng biệt ta có công thức: X(s)= $\frac{B(s)}{A(s)} = \frac{R_1}{s-P_1} + \frac{R_2}{s-P_2} + \ldots + \frac{R_n}{s-P_n} + K(s)$
  - Ví dụ: Tìm hàm gốc khi biết hàm ảnh $\frac{6s^2-12}{(s+1)(s+2)(s-2)}$
  - p=poly([-1 -2 2]);
  - [a,b,k]=residue([6 0 -12],p)

a =	b =	k =
3.0000 1.0000 2.0000	-2.0000 2.0000 -1.0000	[]

và ta có u(t) = $3e^{-2t}+e^{2t}+2e^{-t}$

5. Phép biến đổi Laplace ngược

- Trường hợp 2: A(s) = 0 có cặp nghiệm phức liên hợp s_k và s_k^*

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{B_k(s-\alpha_k)}{(s-\alpha_k)^2+\beta_k^2}\right\} = B_k e^{\alpha_k t}\cos(\beta_k t)\,1(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{C_k\beta_k}{(s-\alpha_k)^2+\beta_k^2}\right\} = C_k e^{\alpha_k t}\sin(\beta_k t)\,1(t)$$

Ví dụ: Tìm hàm x(t) khi biết ảnh Laplace

$$X(s) = \frac{2s+12}{s^2+2s+5}$$

$$X(s) = \frac{2(s+1)+10}{s^2+2s++1+4} = 2\,\frac{s+1}{(s+1)^2+2^2} + 5\,\frac{2}{(s+1)^2+2^2}$$

Vây x(t) = $\mathcal{L}^{-1}$\{X(s)\} = 5e^{-t}sin2t+2 e^{-t}cos2t với t≥0

5. Phép biến đổi Laplace ngược

- Trường hợp 3: A(s) = 0 có k nghiệm đơn và một nghiệm s_l bội r. Khi đó phân thức hữu tỷ được phân tích:

$$\frac{B(s)}{A(s)} = \frac{a_1}{s-s_1} + \frac{a_2}{s-s_2} + \frac{a_k}{s-s_k} + \frac{\beta_1}{s-s_l} + \frac{\beta_2}{(s-s_l)^2} + \ldots + \frac{\beta_r}{(s-s_l)^r}$$

- Phần $\frac{\beta_i}{(s-s_l)^i}$ chuyển sang hàm thời gian $\frac{\beta_i}{(i-1)!} t^{i-1} e^{s_l t}$
- Các hệ số a_k xác định giống trường hợp 1, còn các hệ số β_i được xác định như sau:

$$\beta_r = \lim_{s \to s_l} \left[\frac{B(s)}{A(s)} (s - s_l)^r \right]; \ \beta_{r-1} = \lim_{s \to s_l} \frac{d}{ds} \left[\frac{B(s)}{A(s)} (s - s_l)^r \right]$$

$$\beta_1 = \lim_{s \to s_l} \frac{1}{(r-1)!} \frac{d^{r-1}}{ds^{r-1}} \left[\frac{B(s)}{A(s)} (s - s_l)^r \right]$$

- Khi đó x(t) = $\sum_{i=1}^{k} a_i e^{s_i t} + \left[\frac{\beta_1}{0!} + \frac{\beta_2}{1!} t + \cdots + \frac{\beta_r}{(r-1)!} t^{r-1} \right] e^{s_l t}$

6. Ví dụ

- Ví dụ 1: Cho ảnh X(s) =$\frac{2}{s(s+3)(s-2)^2}$
- Ta đưa về dạng chuẩn :
- X(s) = $\frac{a1}{s} + \frac{a2}{s+3} + \frac{c1}{s-2} + \frac{c2}{(s-2)^2}$
- a_1= X(s)s$|s = 0 = \frac{2}{3*4} = \frac{1}{6}$
- a_2= X(s)(s+3)$|s = -3 \ = \frac{2}{-3\ (-5)^2} = -\ \frac{2}{75}$
- c_2=$\lim_{s\to 2}$ [X(s) (s−2)^2] $= \frac{1}{5}$
- c_1=$\lim_{s\to 2} \frac{d}{ds}$ [X(s) (s−2)^2] = - $\frac{7}{50}$
- **f(t) = $\frac{1}{6} - \frac{2}{75}e^{-3t} + (-\frac{7}{50} + \frac{1}{5}$t)$e^{2t}$**

6. Ví dụ

- Dùng lệnh matlab
  - p=poly([0 -3 2 2]);
  - [a,b,k]=residue(2,p)

a = -0.0267
-0.1400
0.2000
0.1667

b = -3.0000
2.0000
2.0000
0

k = []

$$f(t) = 0.1667 - 0.0267e^{-3t} + (-0.14 + 0.2\,t)e^{2t}$$

Ví dụ

- Ví dụ 2: Giả sử một tín hiệu causal x(t) có ảnh Laplace là:

X(s) = $\frac{k}{s(1+2DTs+T^2s^2)}$ $với$ 0<D<1

Gọi a= - $\frac{D}{T}$; $b = \frac{\sqrt{1-D^2}}{T}$. Khi đó hàm X(s) sẽ phân tích được thành:

X(s) = $\frac{A}{s} + \frac{Bs-2Ba}{(s-a)^2+b^2}$ trong đó A= -B = k

Tiếp tục biến đổi

X(s) = $\frac{A}{s} + \frac{B(s-a)-Bb\frac{a}{b}}{(s-a)^2+b^2}$

=> x(t) = $\left[\boldsymbol{A + B\left(\cos(bt) - \frac{a}{b}\sin(bt)\right)}\right]$1(t)

7.Giải phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng

- Cho phương trình vi phân tuyến tính:

$$a_0y+a_1\frac{dy}{dt}+ \ldots + a_n\frac{d^ny}{dt^n} = b_0u+b_1\frac{du}{dt}+ \ldots + b_m\frac{d^mu}{dt^m} \quad (*)$$

Với các hệ số a_0, a_1, …,a_n và b_0, b_1,…,b_m là những hằng số. Bài toán đặt ra là tìm nghiệm y(t) khi biết trước u(t) cũng như các sơ kiện y(+0) , $\frac{dy(+0)}{dt}$, ..., $\frac{d^ny(+0)}{dt^n}$.

Trước hết giả sử u(t) và y(t) là hai tín hiệu causal. Lấy ảnh Laplace cả hai vế của phương trình đã cho:

$$\mathcal{L}\left\{a_0y+a_1\frac{dy}{dt}+ \ldots + an\frac{d^ny}{dt^n}\right\}= \mathcal{L}\left\{b_0u+b_1\frac{du}{dt}+ \ldots + b_m\frac{d^mu}{dt^m}\right\}$$

Áp dụng tính chất tuyến tính

$$a_0\mathcal{L}\{y\} + a_1\mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} + \cdots + a_n\mathcal{L}\left\{\frac{d^ny}{dt^n}\right\} = b_0\mathcal{L}\{u\} + b_1\mathcal{L}\left\{\frac{du}{dt}\right\} + \cdots + b_m\mathcal{L}\left\{\frac{d^mu}{dt^m}\right\}$$

7. Giải phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng

- Gọi Y(s) là ảnh của y(t) thì từ công thức ảnh của đạo hàm:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} = sY(s) - y(+0)$$

- Ta có: $\mathcal{L}\left\{\frac{d^2y}{dt^2}\right\} = s\,\mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} - \frac{dy(+0)}{dt} = s^2Y(s) - sy(+0) - \frac{dy(+0)}{dt}$

….

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^ny}{dt^n}\right\} = s^nY(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-1-k}\frac{d^ky(+0)}{dt^k}$$

- Tương tự gọi U(s) là ảnh của u(t) thì :

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^mu}{dt^m}\right\} = s^mU(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-1-k}\frac{d^ku(+0)}{dt^k}$$

- Thay tất cả vào công thức (*) ta có

$$Y(s)[a_0 + a_1s + \cdots + a_ns^n] - A = U(s)[b_0 + b_1s + \cdots + b_ms^m] - B$$

- Với A và B là thành phần của các sơ kiện

7. Giải phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng

- Như vậy ảnh Laplace của nghiệm y(t) sẽ là

$$Y(s) = \frac{(b_0+b_1 s+\cdots+b_m s^m)U(s)+(A-B)}{a_0+a_1 s+\cdots+a_n s^n}$$

- **Ví dụ 1**: Hãy tìm nghiệm của phương trình vi phân

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = 0$$ với sơ kiện y(+0) = a và $\frac{dy(+0)}{dt} = b$

Chuyển cả hai vế của phương trình sang toán tử Laplace được

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2y}{dt^2}\right\} + 3\mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} + 2\,\mathcal{L}\{y\} = 0$$

$$s^2Y(s) - sy(+0) - \frac{dy(+0)}{dt} + 3sY(s) - 3y(+0) + 2Y(s) = 0$$

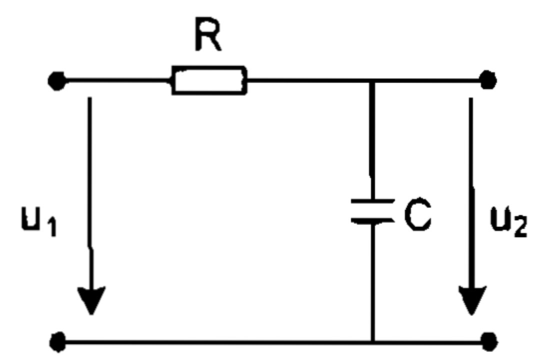
$$Y(s)\,(s^2+3s+2) = as+3a+b$$

$$Y(s) = \frac{as+3a+b}{s^2+3s+2} = \frac{as+3a+b}{(s+1)(s+2)} = \frac{2a+b}{s+1} - \frac{a+b}{s+2}$$

Suy ra: **$y(t) = (2a+b)e^{-t} - (a+b)e^{-2t}$ với $t \geq 0$**

7. Giải phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng

- **Ví dụ 2:** Cho mạch điện R-C như hình vẽ với điều kiện đầu $u_2(+0) = 0$
- Phương trình vi phân mô tả như sau:



$$u_1 = iR + u_2$$

$$u_2 = u_c = \frac{1}{C}\int i dt \Rightarrow i = C\frac{du_c}{dt} = C\frac{du_2}{dt}$$

- Thay i vào u_1 ta có
- $U_1 = RC\frac{du_2}{dt} + u_2$
- Lấy Laplace hai vế của

phương trình ta có:

$$L\{u_1(t)\} = RC.L\left\{\frac{du_2}{dt}\right\} + L\{u_2(t)\}$$

$$\Leftrightarrow U_1(s) = RC.s.U_2(s) + U_2(s)$$

$$\Leftrightarrow U_2(s) = \frac{U_1(s)}{RC.s + 1}$$

7.Giải phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng

Giả sử: $u_1(t) = k = const \Rightarrow U_1(s) = \frac{k}{s}$

$$U_2(s) = \frac{k}{s} \cdot \frac{1}{RC.s+1} = \frac{k}{s} - \frac{RC.k}{RC.s+1} = k\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\frac{1}{RC}}\right)$$

Suy ra:

$$u_2(t) = k\left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}\right)$$

8. Phép biến đổi Fourier

- Cho tín hiệu $x(t)$, không phân biệt tuần hoàn hay không tuần hoàn, liên tục hay không liên tục. Ảnh Fourier của nó được hiểu:

$$X(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

Và ánh xạ ngược $x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(j\omega)\}$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

Các tính chất của phép biến đổi Fourier

- Toán tử Fourier là ánh xạ một – một, tức là nếu

  $x(t) \neq y(t) \Rightarrow X(j\omega) \neq Y(j\omega)$.
- Phép biến đổi Fourier là toán tử tuyến tính

  $z(t) = ax(t) + by(t) \Rightarrow Z(j\omega) = aX(j\omega) + bY(j\omega)$.
- Nếu x(t) là hàm chẵn $x(t) = x(-t) \Rightarrow X(j\omega) \in R$ (phần ảo bằng 0).
- Nếu x(t) là hàm lẻ $x(t) = -x(-t) \Rightarrow X(j\omega) \in C$ (phần thực bằng 0).
- Nếu X(j ω) là ảnh Fourier của x(t) thì ảnh của x(t-T) là $\mathcal{F}\{x(t-T)\} = X(j\omega)\, e^{-j\omega T}$.

Các tính chất của phép biến đổi Fourier

- Nếu X(jω), Y(jω) là ảnh Fourier của x(t) , y(t) và tích chập x(t)∗y(t)= $\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)dt$

có ảnh Fourier thì ảnh đó sẽ là: $\mathcal{F}$\{x(t)∗y(t)\} = X(jω)Y(jω).

- Tích z(t) = x(t)y(t) của x(t) có ảnh Fourier X(jω) với y(t) có ảnh Y(jω) sẽ có ảnh Z(jω) là

$$Z(j\omega) = X(j\omega)*Y(j\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\zeta)Y[j(\omega-\zeta)]d\zeta.$$

- Gọi X(jω) là ảnh Fourier của x(t) và Y(jω) là ảnh của y(t) = $(-jt)^n x(t)$ vậy thì:

$$Y(j\omega) = \frac{d^n X(j\omega)}{d\omega^n}$$

9.Quan hệ giữa các phép biến đổi Fourier và Laplace

Điều kiện cần và đủ để X(jω) = X(s)|s=jω
Tất cả các điểm cực của X(s) nằm ở bên trái trục ảo
(X(s) là hàm bền).

10. Bài tập về nhà: Làm các bài tập chương I