ĐỀ LUYỆN TẬP MÔN ĐẠI SỐ GIỮA KỲ 20171 (2017 – 2018)

(Thời gian: 60 phút)

<u>Chú ý: Thí sinh không được sử dụng tài liệu</u>

Câu 1: Lập bảng giá trị chân lý cho mệnh đề: $\overline{(A \to B)} \wedge \overline{(B \to C)}$

Câu 2: Cho ánh xạ $f : R^2 \to R^2$

$$(x_1; x_2) \to f(x_1; x_2) = (2x_1 + x_2 - 1, x_1 + 2x_2 + 1)$$

Chứng minh f là đơn ánh

Câu 3: Cho ánh xạ $f : R^2 \to R^2$

$$x \to f(x) = (3x + 1, 3x^2 + x)$$

Cho tập $A = [0, 4) \text{ x} (-\infty; \frac{2}{3}]$, xác định $f^{-1}(A)$

Câu 4: Giải phương trình trên trường số phức: $z^{10} - 3z^5 + 2 = 0$

Câu 5: Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, tính A^{-1}

Câu 6: Cho hệ phương trình $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 7 \\ -3x_1 + 2x_2 - x_3 = -2 \\ 4x_1 - 4x_2 + 3x_3 + (m+3)x_4 = m + 6 \end{cases}$

a) Giải hệ phương trình với $m = 2$

b) Tìm m để hệ phương trình có vô số nghiệm. Khi đó, xác định nghiệm tổng quát của hệ

Câu 7: Cho ánh xạ: $f : X \to Y$ và ánh xạ $g : Y \to Z$

Chứng minh rằng:

+) Nếu $g \circ f$ là đơn ánh thì f là đơn ánh.

+) Nếu $g \circ f$ là toàn ánh thì g là toàn ánh.

Câu 8: Tính $\prod_{k=1}^{2n-2} \sin\frac{k\pi}{2n-1}$, với n là số nguyên ≥ 2

Câu 9: Cho 2 ma trân thực A và B vuông cấp n thỏa mãn: $AB - A - B = 0$. Chứng minh: $AB^k = B^k A$ với $\forall k$ nguyên dương

TUẤN TEO TÓP – ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI

LỜI GIẢI CHI TIẾT SẼ GỬI VÀO HÔM SAU – CHÚC CÁC BẠN THI TỐT !!!!!!

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1:

A	B	C	$A \to B$	$\overline{A \to B}$	$B \to C$	$\overline{B \to C}$	$(\overline{A \to B}) \wedge (\overline{B \to C})$
1	1	1	1	0	1	0	0
1	1	0	1	0	0	1	0
1	0	1	0	1	1	0	0

1	0	0	0	1	1	0	0
0	1	1	1	0	1	0	0
0	1	0	1	0	0	1	0
0	0	1	1	0	1	0	0
0	0	0	1	0	1	0	0

Câu 2:

Ta có: $f : R^2 \to R^2$

$$(x_1, x_2) \to f(x_1, x_2) = (2x_1 + x_2 - 1, x_1 + 2x_2 + 1)$$

$\forall y_1; y_2 \in R^2$ có $f(x_1, x_2) = f(y_1, y_2)$

$$\Leftrightarrow (2y_1 + y_2 - 1, y_1 + 2y_2 + 1) = (2x_1 + x_2 - 1, x_1 + 2x_2 + 1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y_1 + y_2 - 1 = 2x_1 + x_2 - 1 \\ y_1 + 2y_2 + 1 = x_1 + 2x_2 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y_1 + y_2 = 2x_1 + x_2 \\ y_1 + 2y_2 = x_1 + 2x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 \end{cases} \Leftrightarrow (y_1, y_2) = (x_1, x_2)$$

$\Rightarrow f$ là đơn ánh

Câu 3:

Ta có: $f : R^2 \to R^2$

$$x \to f(x) = (3x + 1, 3x^2 + x)$$

$$f^{-1}(A) = \{x \in R, f(x) \in A\} = \{x \in R, (3x + 1, 3x^2 + x) \in A\}$$

$$= \left\{ x \in R, (3x + 1, 3x^2 + x) \in [0, 4) \text{x} (-\infty, \frac{2}{3}] \right\}$$

$$= \left\{ x \in R, \begin{cases} 0 \le 3x + 1 < 4 \\ 3x^2 + x \le \dfrac{2}{3} \end{cases} \right\} = \left\{ x \in R, \begin{cases} -\dfrac{1}{3} \le x < 1 \\ -\dfrac{2}{3} \le x \le \dfrac{1}{3} \end{cases} \right\} = \left\{ x \in R, -\frac{1}{3} \le x \le \frac{1}{3} \right\}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(A) = \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right]$$

Câu 4:

Giải phương trình: $z^{10} - 3z^5 + 2 = 0$

Đặt: $t = z^5 \Rightarrow t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 2 \end{array}\right.$

Với

$t = 1 \Rightarrow z^5 = 1 = cos0 + isin0 \Rightarrow z = \sqrt[5]{cos0 + isin0} \Leftrightarrow z = cos\frac{0 + k2\pi}{5} + isin\frac{0 + k2\pi}{5} = cos\frac{k2\pi}{5} + isin\frac{k2\pi}{5}\left(k = \overline{0,4}\right)$

+) $k = 0 \Rightarrow z_1 = cos0 + isin0 = 1$

+) $k = 1 \Rightarrow z_2 = cos\frac{2\pi}{5} + isin\frac{2\pi}{5}$

+) $k = 2 \Rightarrow z_3 = cos\frac{4\pi}{5} + isin\frac{4\pi}{5}$

+) $k = 3 \Rightarrow z_4 = cos\frac{6\pi}{5} + isin\frac{6\pi}{5}$

+) $k = 4 \Rightarrow z_5 = cos\frac{8\pi}{5} + isin\frac{8\pi}{5}$

Với

$t = 2 \Rightarrow z^5 = 2 = 2\left(cos0 + isin0\right) \Rightarrow z = \sqrt[5]{2\left(cos0 + isin0\right)}$

$\Leftrightarrow z = \sqrt[5]{2}\left(cos\frac{0 + k2\pi}{5} + isin\frac{0 + k2\pi}{5}\right) \Leftrightarrow z = \sqrt[5]{2}\left(cos\frac{k2\pi}{5} + isin\frac{k2\pi}{5}\right)\left(k = \overline{0,4}\right)$

+) $k = 0 \Rightarrow z_6 = \sqrt[5]{2}\left(cos0 + isin0\right)$

+) $k = 1 \Rightarrow z_7 = \sqrt[5]{2}\left(cos\frac{2\pi}{5} + isin\frac{2\pi}{5}\right)$

+) $k = 2 \Rightarrow z_8 = \sqrt[5]{2}\left(cos\frac{4\pi}{5} + isin\frac{4\pi}{5}\right)$

+) $k = 3 \Rightarrow z_9 = \sqrt[5]{2}\left(cos\frac{6\pi}{5} + isin\frac{6\pi}{5}\right)$

+) $k = 4 \Rightarrow z_{10} = \sqrt[5]{2}\left(cos\frac{8\pi}{5} + isin\frac{8\pi}{5}\right)$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $z = \left\{z_1, z_2, \ldots.., z_{10}\right\}$

Câu 5:

Xét $(A|E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1/3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 3 \end{array}\right)$

$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Câu 6:

Xét:

$\bar{A} = [A|b] = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 7 \\ -3 & 2 & -1 & 0 & -2 \\ 4 & -4 & 3 & m+3 & m+6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & m-1 & m-2 \end{array}\right)$

$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & m-1 & m-2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & m-1 & m-2 \end{array}\right)$

$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & m-1 & m-2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & m-1 & m-2 \\ 0 & 0 & 0 & m-1 & m-1 \end{array}\right)$

Với $m = 2 \Rightarrow \bar{A} = [A|b] = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$

$\Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ -x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4 \\ -x_3 + x_4 = 0 \\ x_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4) = (1,1,1,1)$

Hệ phương trình vô số nghiệm $\Leftrightarrow r(A) = r(\overline{A}) < 4 \Leftrightarrow m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$

Khi đó ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ -x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4 \\ -x_3 = -1 \\ 0.x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2t \\ x_2 = 3t - 2 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = t \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} t \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Câu 7:

+) Giả sử *f* không phải là đơn ánh → ∃ x ≠ x' : *f* (x) = *f* (x') → *g*(*f* (x)) = *g*(*f* (x')) hay *g*∘ *f* (x) = *g*∘ *f* (x') → *g*∘ *f* không phải là đơn ánh, trái giả thiết. Vậy thì *f* phải là đơn ánh.

+) Giả sử *g* không phải là toàn ánh → ∃ z ∈ Z mà z ≠ g (y), ∀ y ∈ Y → ∃ z ∈ Z mà z ≠ *g* (*f* (x)), ∀ x ∈ X hay ∃ z ∈ Z: z ≠ *g*∘ *f* (x), ∀ x ∈ X nghĩa là *g*∘ *f* không phải là toàn ánh, trái giả thiết. Vậy *g* phải là toàn ánh

Câu 8:

Cho $\varepsilon = cos\frac{2\pi}{n} + i.sin\frac{2\pi}{n}$ (chứng minh n số phức khác 0 $,1,\varepsilon,\varepsilon^2,.....,\varepsilon^{n-1}$) đều là nghiệm của phương trình $z^n - 1 = 0$

Xét $\varepsilon_k = \varepsilon^k = \left(cos\frac{2\pi}{n} + i.sin\frac{2\pi}{n}\right)^k = cos\frac{k2\pi}{n} + i.sin\frac{k2\pi}{n}\left(k = \overline{0,n-1}\right)$

Ta có: $z = \varepsilon_k$ thì $z^n - 1 = \left(cos\frac{2k\pi}{n} + i.sin\frac{2k\pi}{n}\right)^n - 1 = cos2k\pi + i.sin2k\pi - 1 = 0$

$\Rightarrow \varepsilon_k$ là nghiệm của phương trình $z^n - 1 = 0$, nhưng phương trình này có bậc là n nên $,1,\varepsilon,\varepsilon^2,.....,\varepsilon^{n-1}$ là mọi nghiệm của phương trình đó

$z^n - 1 = (z-1)(z-\varepsilon)(z-\varepsilon^2)......(z-\varepsilon^{n-1}) \forall z \in C$

$z^{n-1} + z^{n-2} + ... + z + 1 = (z-\varepsilon)(z-\varepsilon^2)......(z-\varepsilon^{n-1})$

Chọn $z = 1 \Rightarrow (1-\varepsilon)(1-\varepsilon^2)(1-\varepsilon^3)......(z-\varepsilon^{n-1}) = n$

Lấy môđun 2 vế $|1-\varepsilon|.|1-\varepsilon^2|......|1-\varepsilon^{n-2}|.|1-\varepsilon^{n-1}| = n$

Vì $1-\varepsilon^k = 1-cos\frac{k2\pi}{n} - i.sin\frac{k2\pi}{n}$ nên

$|1-\varepsilon^k| = 2sin\frac{k\pi}{n} \Rightarrow sin\frac{\pi}{n}.sin\frac{2\pi}{n}.sin\frac{3\pi}{n}......sin\frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{\pi}{2^{n-1}}$

Thay n bởi 2n – 1 suy ra yêu cầu bài toán

Câu 9:

Ta có: $AB = A + B \rightarrow (E-A)(E-B) = E$

Ban đầu, chứng minh $B + A - BA = 0 \Leftrightarrow B(E-A) + A = 0$

Nhân 2 vế với $E - B$

$\Rightarrow B(E-A)(E-B) + A(E-B) = 0 \Rightarrow BE + AE - AB = 0$ (luôn đúng)

$\Rightarrow B + A - AB = 0 \Rightarrow AB = BA$ (Nhân 2 vế với B^{K-1})

Ta có: $AB^K = BAB^{K-1} = B(AB)B^{K-2} = ... = B^K A$