ET4020 - Xử lý tín hiệu số
Các thuật toán FFT

TS. Đỗ Lê Phú
Viện Điện tử - Viễn thông,
Trường Đại học Bách Khoa Hà Nội

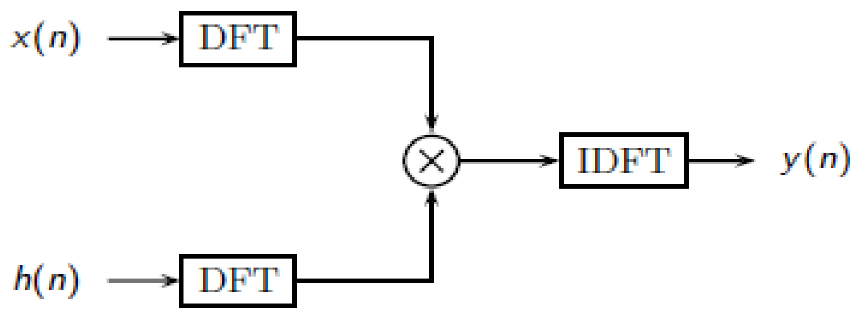
HK1 năm học 2013-2014

Thực hiện hệ thống FIR

Xét hệ thống LTI với đáp ứng xung $h(n)$ có chiều dài hữu hạn P. Khi đầu vào $x(n)$ chiều dài L, ta có:

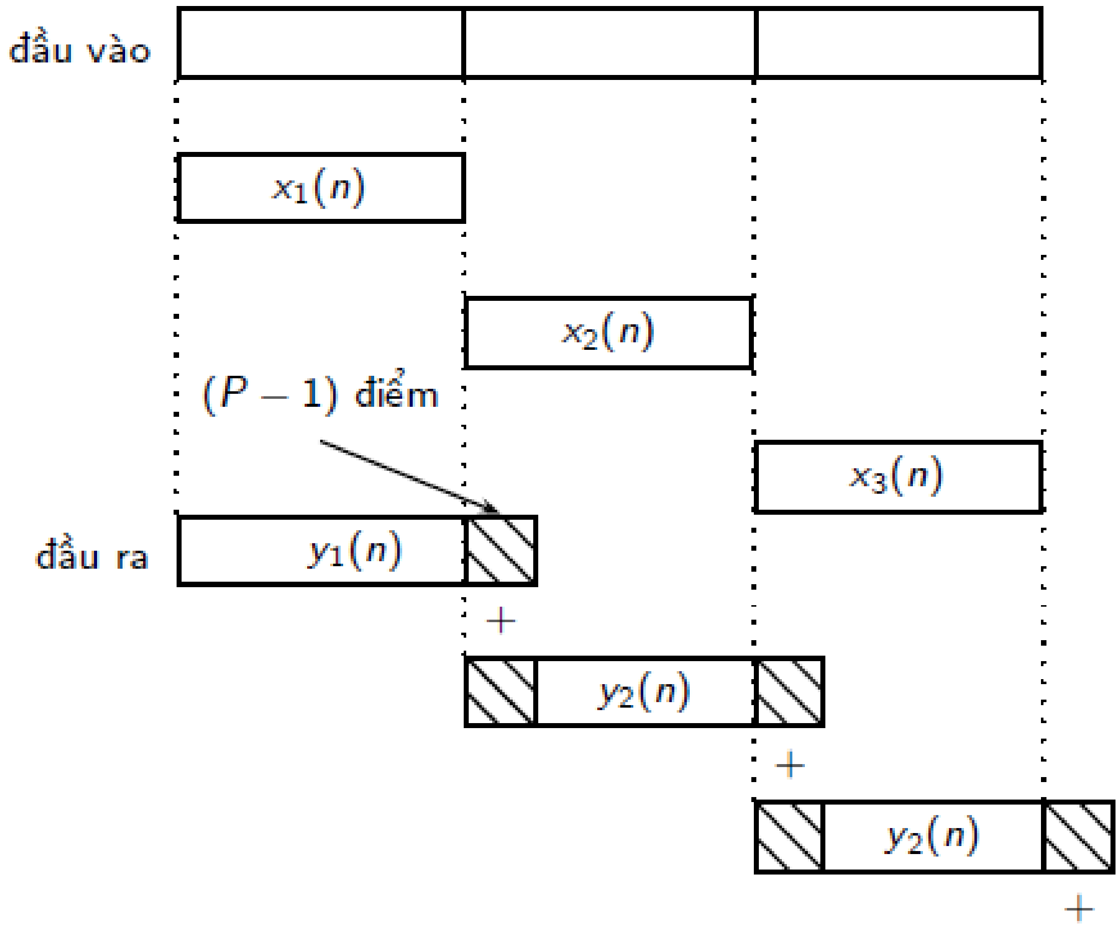
$$y(n) = x(n) * h(n) = x(n)_N (*)_M h(n)_N$$

trong đó $N \geq L + P - 1$, các dãy $x(n)_N, h(n)_N$ được chèn thêm 0 vào cuối.

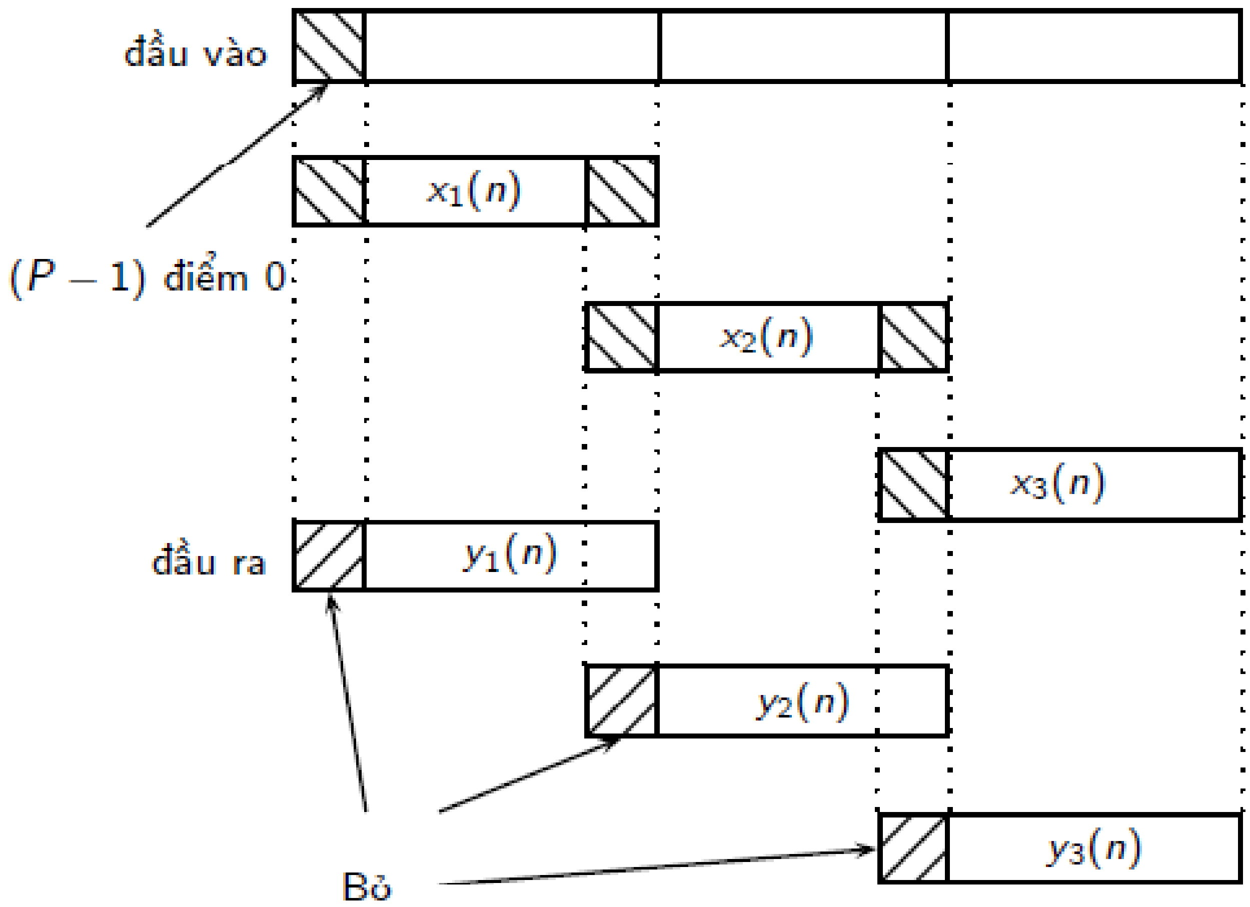


Trên thực tế, đầu vào $x(n)$ rất dài so với đáp ứng xung $h(n)$ (có thể coi dài tới vô hạn): $L \gg P$. Khi đó, chia $x(n)$ thành các đoạn nhỏ trước khi chập $\rightarrow$ chập phân đoạn.

Chập phân đoạn: Xếp chồng & cộng (overlap-add)



Chập phân đoạn: Đặt kề nhau (overlap-save)



Phân tích phổ của tín hiệu thời gian thực

Nguyên lý: Chia tín hiệu thành các đoạn (thường là chồng lên nhau), thực hiện biến đổi FFT trên từng đoạn, với các loại cửa sổ khác nhau.

Các bước thực hiện trên một đoạn dữ liệu:

1. Rời rạc hóa tín hiệu $x(t) \rightarrow x(n)$, xét trên một đoạn N mẫu
2. Nhân với hàm cửa sổ $x_d(n) = x(n)w(n)$
3. Thực hiện FFT M-điểm cho $x_d(n)$, với $M \geq N$ (thêm các điểm 0 vào cuối ko làm thay đổi phổ tín hiệu!).
4. Chuẩn hóa tần số, biên độ khi vẽ $|X(k)|$

Lưu ý:

- Ảnh hưởng của cửa sổ: Rò rỉ công suất (leakage)
- Độ phân giải tần số
- Các đoạn chồng lên nhau (overlapping)

DIT Radix-2 FFT

Độ phức tạp tính toán của DFT

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}, \quad 0 \le k \le N-1$$

trong đó, $W_N = e^{-j2\pi/N}$.

Để tính trực tiếp mỗi giá trị của $X(k)$:

- N phép nhân phức ($4N$ phép nhân thực và $2N$ phép cộng thực)
- $N - 1$ phép cộng phức ($2N - 2$ phép cộng thực)
- $2N$ phép tính giá trị các hàm sin, cos.

Độ phức tạp tính toán của DFT - N điểm: $O(N^2)$.

DIT Radix-2 FFT (phân chia theo thời gian, cơ số 2)

Xét $N = 2^{v}$, chia $x(n)$ thành hai dãy chỉ số chẵn $x(2m)$ và chỉ số lẻ $x(2m+1)$:

$$
\begin{aligned}
X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}, \quad k = 0, 1, \cdots, (N-1) \\
&= \sum_{m=0}^{N/2-1} x(2m) W_N^{k2m} + \sum_{m=0}^{N/2-1} x(2m+1) W_N^{k(2m+1)}
\end{aligned}
$$

Với $k = 0, 1, \ldots, N/2$, ta có:

$$
\begin{aligned}
X(k) &= \sum_{m=0}^{N/2-1} x(2m) W_{N/2}^{km} + W_N^k \sum_{m=0}^{N/2-1} x(2m+1) W_{N/2}^{km} \\
&= F_1(k) + W_N^k F_2(k)
\end{aligned}
$$

DIT Radix-2 FFT: Độ phức tạp tính toán

Nhận xét:

$$\begin{aligned} F_1(k+N/2) &= F_1(k) \\ F_2(k+N/2) &= F_2(k) \\ W_N^{k+N/2} &= -W_N^k \end{aligned}$$

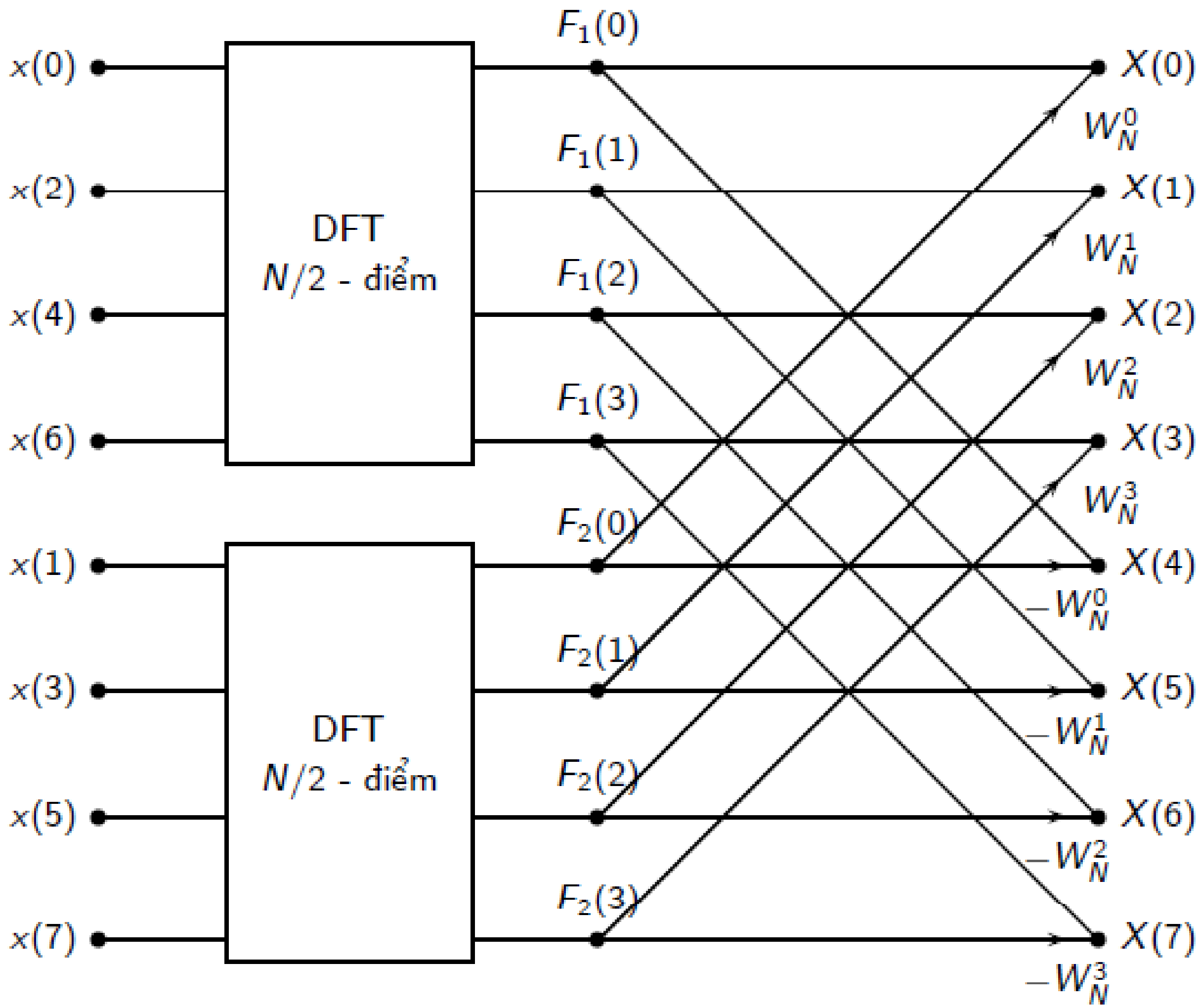
do vậy,

$$\begin{aligned} X(k+\frac{N}{2}) &= F_1(k) - W_N^k F_2(k) \\ X(k) &= F_1(k) + W_N^k F_2(k) \end{aligned}$$

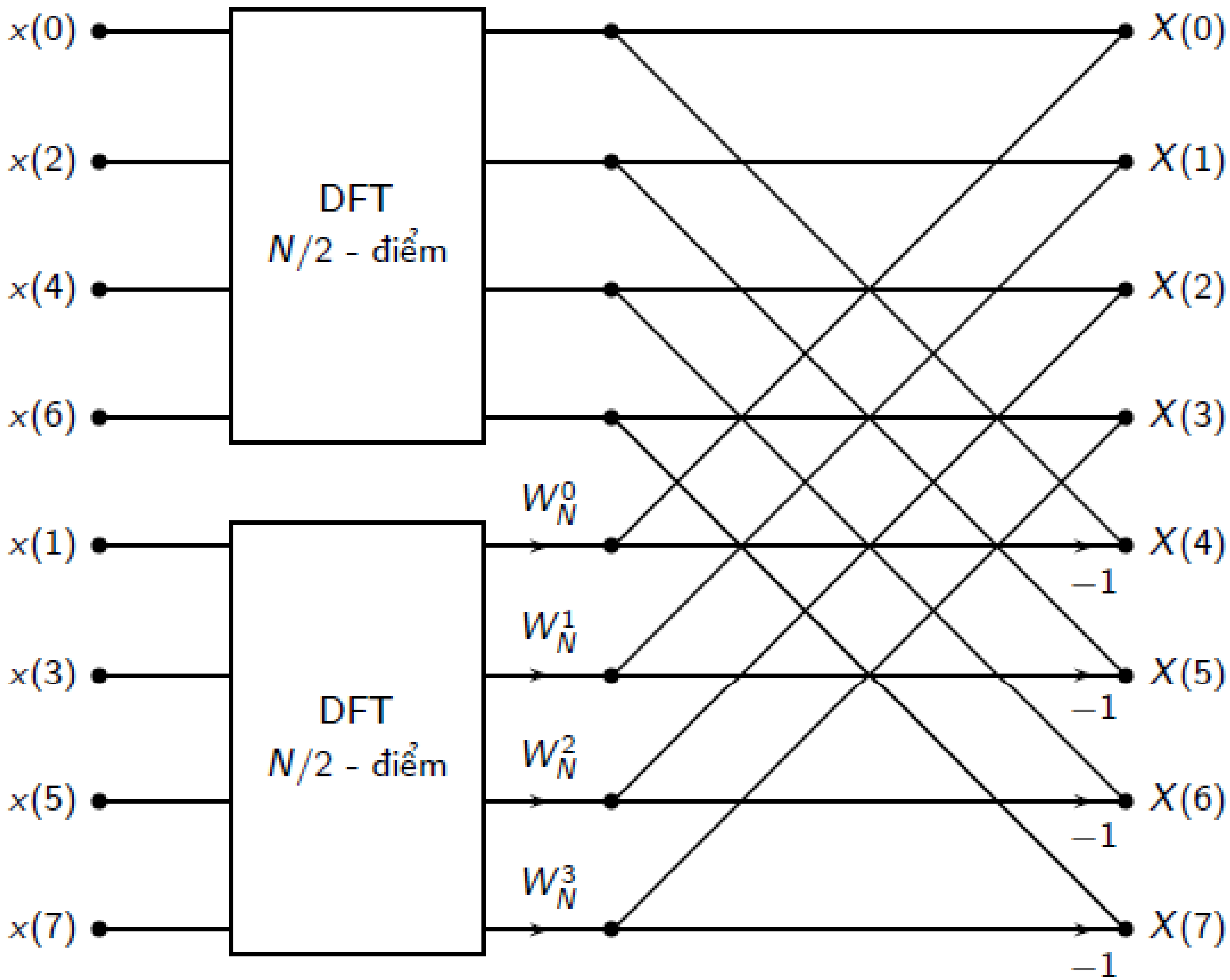
Nếu tính toán trực tiếp $F_1(k)$ và $F_2(k)$, tổng số phép nhân phức là:

$$2(N/2)^2 + N/2$$

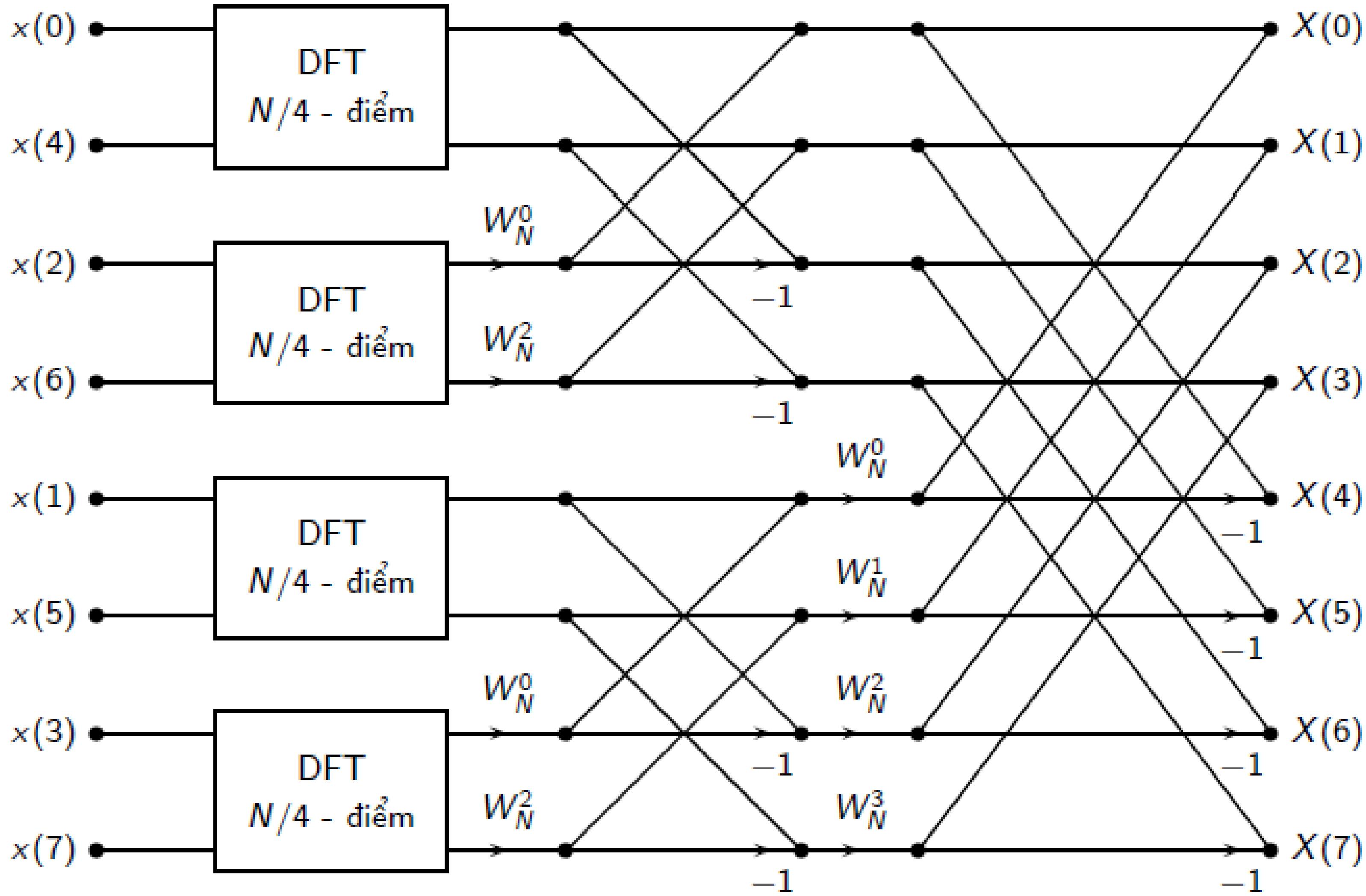
DIT Radix-2 FFT



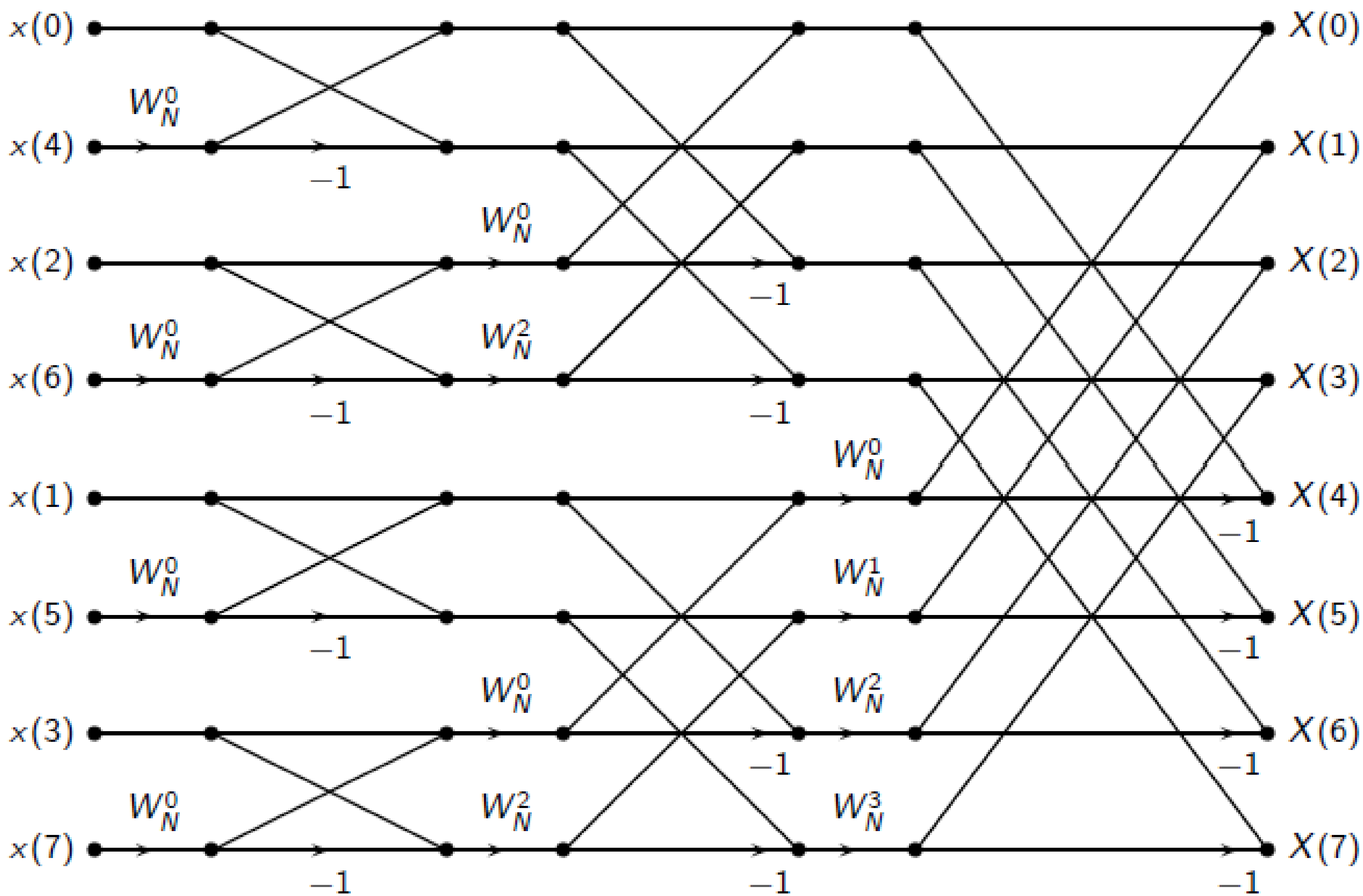
DIT Radix-2 FFT: Rút gọn



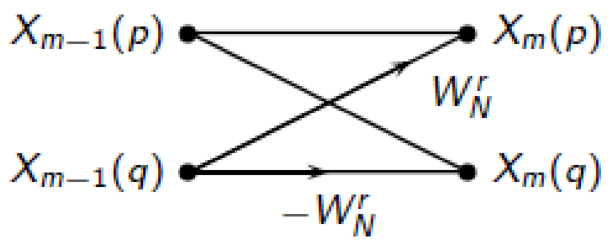
DIT Radix-2 FFT: Tiếp tục phân chia



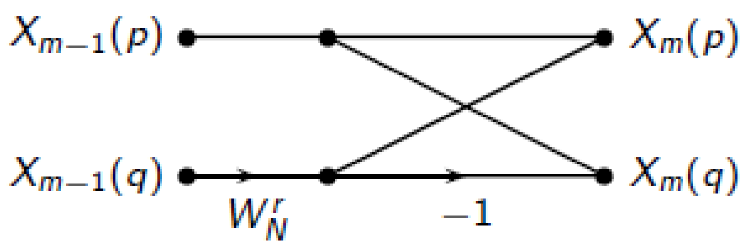
DIT Radix-2 FFT: Lưu đồ tín hiệu hoàn chỉnh



DIT Radix-2 FFT: Sơ đồ cánh bướm



Sơ đồ cánh bướm cơ bản



Sơ đồ cánh bướm rút gọn

Tính toán tại chỗ và đảo bit

$$\begin{aligned} X_m(p) &= X_{m-1}(p) + W_N^r X_{m-1}(q) \\ X_m(q) &= X_{m-1}(p) - W_N^r X_{m-1}(q) \end{aligned}$$

Không cần có bộ nhớ trung gian!

Khi đó, cần đảo thứ tự tại đầu vào (chặng 0):

Thứ tự	Nhị phân	Đảo bit	Giá trị
$X_0(0)$	000	000	$x(0)$
$X_0(1)$	001	100	$x(4)$
$X_0(2)$	010	010	$x(2)$
$X_0(3)$	011	110	$x(6)$
$X_0(4)$	100	001	$x(1)$
$X_0(5)$	101	101	$x(5)$
$X_0(6)$	110	011	$x(3)$
$X_0(7)$	111	111	$x(7)$

DIF Radix-2 FFT (phân chia theo tần số, cơ số 2)

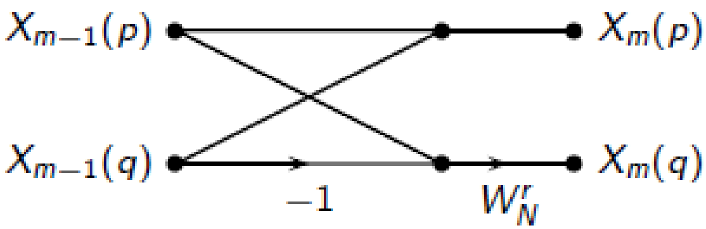
$$
\begin{aligned}
X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}, \quad k = 0, 1, \cdots, (N-1) \\
&= \sum_{m=0}^{N/2-1} x(n) W_N^{kn} + \sum_{n=N/2}^{N-1} x(n) W_N^{kn} \\
&= \sum_{m=0}^{N/2-1} x(n) W_N^{kn} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n+N/2) W_N^{kN/2} W_N^{kn} \\
&= \sum_{m=0}^{N/2-1} [x(n) + (-1)^k x(n+N/2)] W_N^{kn}
\end{aligned}
$$

DIF Radix-2 FFT: Độ phức tạp tính toán

Tách $X(k)$ thành hai dãy có chỉ số chẵn, lẻ:

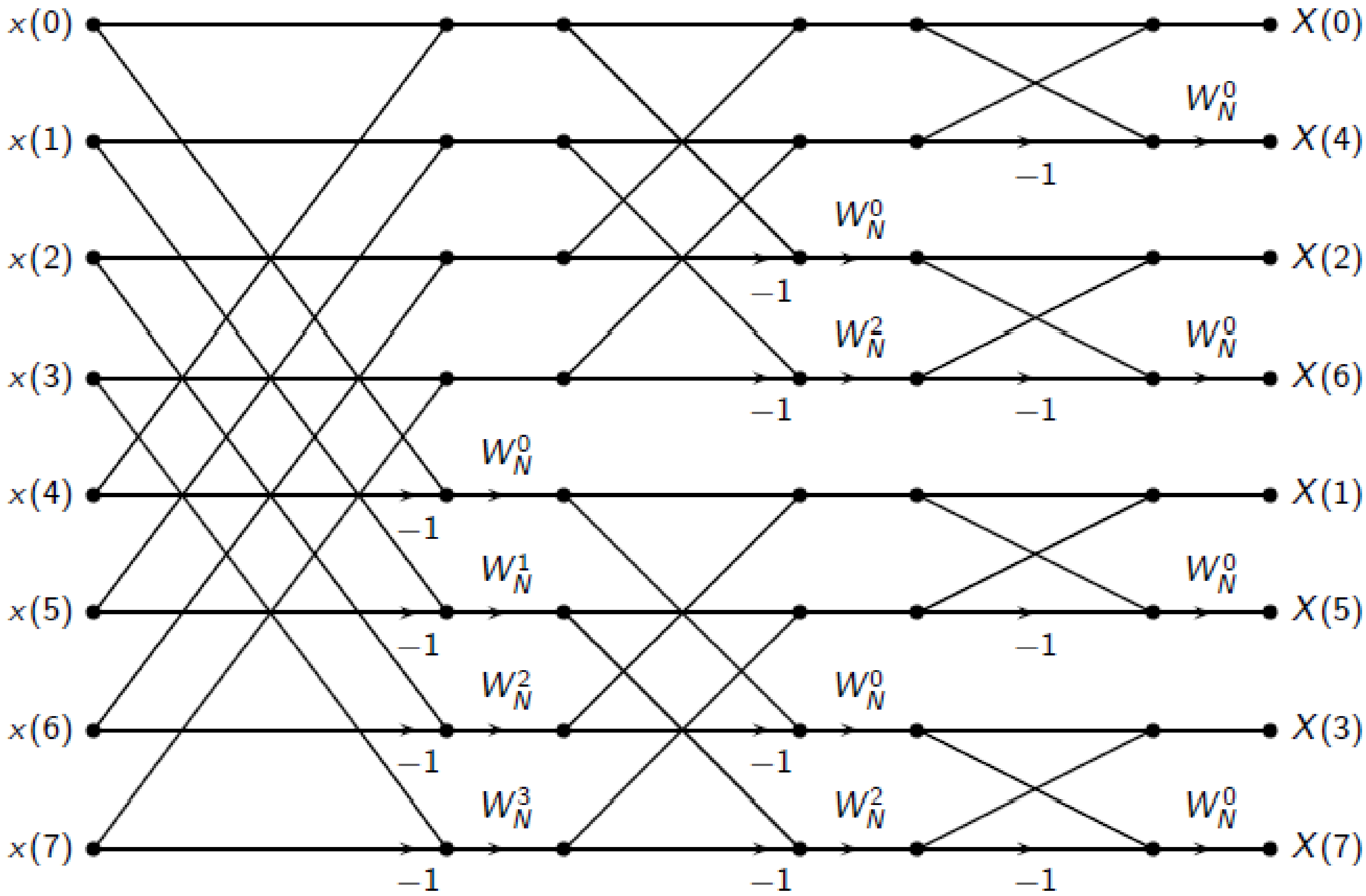
$$
\begin{aligned}
X(2k) &= \sum_{m=0}^{N/2-1} [x(n) + x(n + N/2)] W_{N/2}^{kn} \\
X(2k+1) &= \sum_{m=0}^{N/2-1} [x(n) - x(n + N/2)] W_N^n W_{N/2}^{kn}
\end{aligned}
$$

Độ phức tạp tính toán: $(N/2)\log_2 N$ phép nhân phức và $N \log_2 N$ phép cộng phức.



Sơ đồ cánh bướm

DIF Radix-2 FFT: Lưu đồ tín hiệu hoàn chỉnh



Bài tập

1. Vẽ lưu đồ tín hiệu cho thuật toán FFT trường hợp N = 16, phân chia theo tần số / thời gian, cơ số 2.
2. Tìm hiểu thuật toán FFT cơ số 4.
3. Triển khai các thuật toán FFT đã học bằng ngôn ngữ C, so sánh tốc độ.
4. Sử dụng bộ DFT N-điểm để tính DFT 2N-điểm của dãy số thực.
5. Tính toán tối ưu DFT N-điểm của hai dãy số thực (cùng chiều dài hữu hạn N).