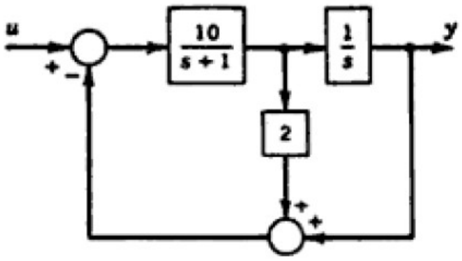
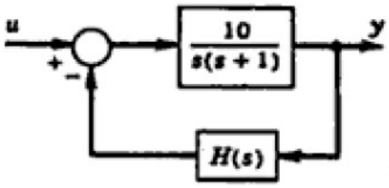
Chương 1

<u>Bài 1-1</u>

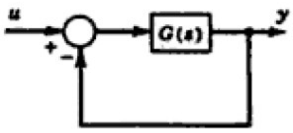
Cho sơ đồ khối của hệ thống như hình 1. Sơ đồ khối của hệ thống được chuyển đổi như hình 2 và hình 3



Hình 1



Hình 2



Hình 3

<u>Lời giải:</u>

Thực hiện cộng tại điểm x của hình 1, tai đây ta có:

$$x = u - \left(2 \cdot \frac{10}{s+1} x + \frac{10}{s(s+1)} x\right)$$

Hay

$$x\left[1 + \frac{20}{s+1} + \frac{10}{s(s+1)}\right] = u$$

$$x = \frac{s(s+1)}{s^2 + 21s + 10} u$$

Từ sơ đồ khối và phương trình trên ta có:

$$y = \frac{10}{s(s+1)} x = \frac{10u}{s^2 + 21s + 10}$$

Với sơ đồ hệ thống ở hình 2 và 3 chúng ta phải tìm mối quan hệ giữa y và u

$$y = \frac{10u}{s^2 + 21s + 10} \qquad (*)$$

Hình 2 ta cộng tại điểm x:

$$x = u - \frac{10x}{s(s+1)} H$$

$$y = \frac{10x}{s(s+1)}$$

Kết hợp 2 phương trình ta có:

$$y = \frac{10u}{s^2 + s + 10H}$$

So sánh với **(*)** ta có:

$$H(s) = 2s + 1$$

Trong hình 3:

$$y = \frac{G(s)}{1+G(s)}\,u$$

Đồng nhất với phương trình **(*)**:

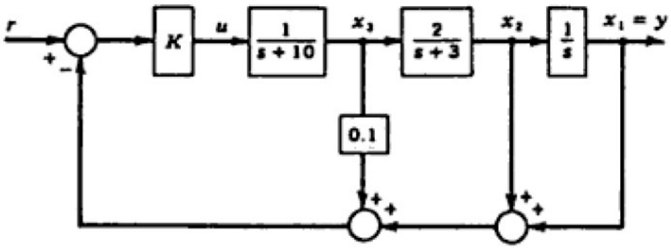
$$\frac{G}{1+G} = \frac{10}{s^2 + 21s + 10}$$

Vậy:

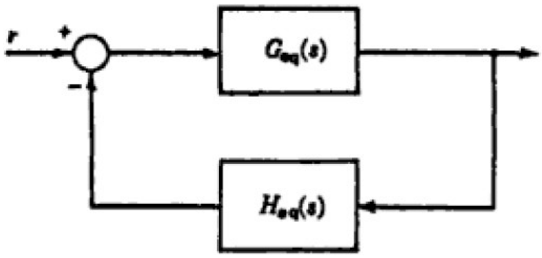
$$G(s) = \frac{10}{s(s+21)}$$

Bài 1-2:

Cho hệ thống điều khiển vòng kín như hình 1. Tìm $G_{eq}(s)$ và $H_{eq}(s)$ của hệ thống cho bởi hình 2.



Hình 1



Hình 2

Lời giải:

Từ sơ đồ khối ở hình 1 ta có được khâu phản hồi của hệ thống:

$$H(s) = 0.1\,x_3 + x_2 + x_1$$

Và
$$x_3 = \frac{s+3}{2}\,x_2$$
$$x_2 = s x_1$$

Thay vào khâu phản hồi:

$$H(s) = \left(0.1\,\frac{s+3}{2}\,s + s + 1\right) x_1 = \frac{0.1s^2 + 2.3s + 2}{2}\,x_1$$

Với y = x_1, ta có được hàm truyền của khâu phản hồi:

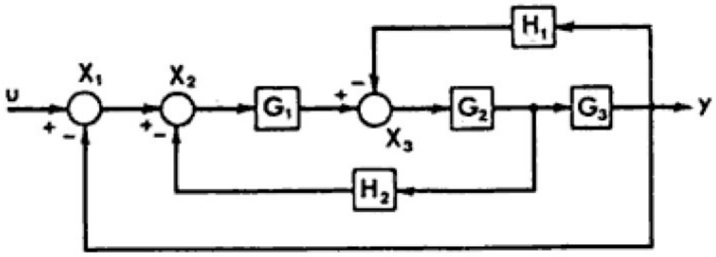
$$H_{eq}(s) = \frac{0.1s^2 + 2.3s + 2}{2}$$

Từ sơ đồ khối hình 1 ta có:

$$G_{eq}(s) = \frac{2K}{(s+10)(s+3)s}$$

Bài 1-5:

Cho hệ thống được trình bày hình dưới. Hãy tìm mối quan hệ giữa u và y ($\frac{y(s)}{u(s)}$) là 1 hàm theo H_1, H_2, G_1, G_2 và G_3.



Lời giải:

Từ sơ đồ khối trên ta có được phương trình:

$$x_1 = u - y \qquad (1)$$

$$x_2 = x_1 - G_2H_2x_3 \qquad (2)$$

$$x_3 = G_1x_2 - H_1y \qquad (3)$$

$$y = G_2G_3x_3 \qquad (4)$$

Từ phương trình (3) và (4) thay vào x_2:

$$x_2 = \frac{x_3 + H_1y}{G_1} = \frac{1 + G_2G_3H_1}{G_1G_2G_3}\, y \qquad (5)$$

Lấy phương trình (5) thế vào phương trình (2):

$$x_1 = x_2 + G_2H_2x_3 = \left(\frac{1 + G_2G_3H_1}{G_1G_2G_3} + \frac{H_2}{G_3}\right) y$$

$$= \left(\frac{1 + G_2G_3H_1 + G_1G_2H_2}{G_1G_2G_3}\right) y \qquad (6)$$

Thế phương trình (6) vào phương trình (1):

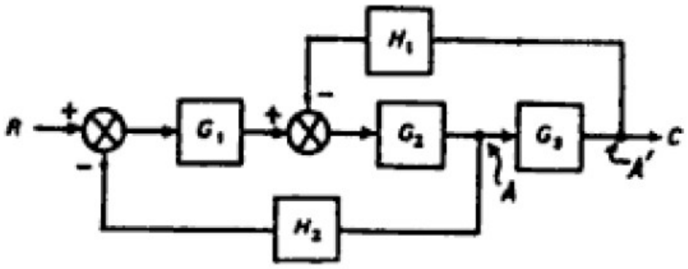
$$\left(\frac{1 + G_2G_3H_1 + G_1G_2H_2}{G_1G_2G_3}\right) y = u - y \qquad (7)$$

Như vậy:

$$\frac{y}{u} = \frac{G_1G_2G_3}{1 + G_1G_2H_2 + G_2G_3H_1 + G_1G_2G_3} \qquad (8)$$

Bài 1- 6:

Cho sơ đồ khối của hệ thống như sau:



Hãy tìm hàm truyền của hệ thống và tối giản sơ đồ khối.

Lời giải:

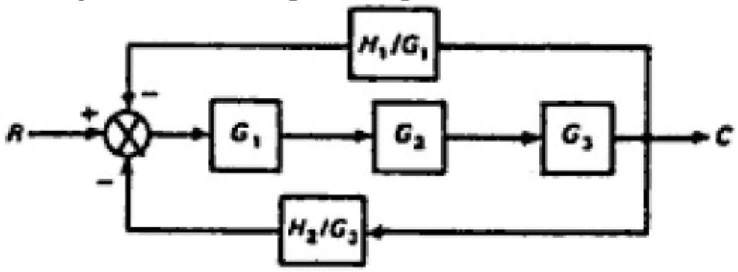
Hệ thống có 2 khâu phản hồi. Ta sắp xếp lại sao cho chỉ còn 1 khâu phản hồi. Chuyển điểm A của khâu phản hồi phía dưới tới điểm A' thì phải biến đổi H_2 thành

$$\frac{H_2}{G_3}$$

Chuyển điểm B ở phía trên tới điểm B’ thì H_1 được biến đổi thành:

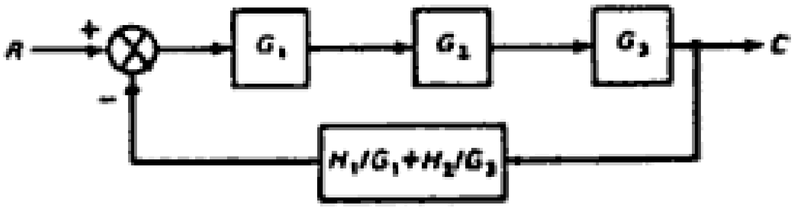
$$\frac{H_1}{G_1}$$

Sơ đồ khối được chuyển đổi tương đương thành:



2 khâu phản hồi được chuyển thành 1 khâu , với :

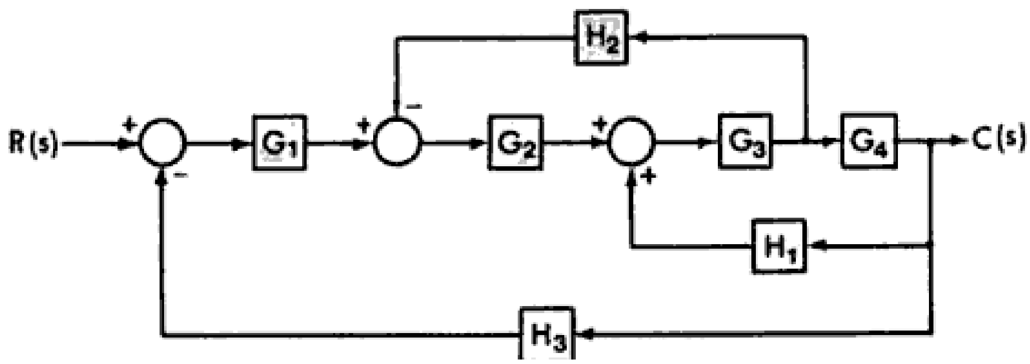
$$\frac{H_1}{G_1} + \frac{H_2}{G_3}$$



Từ sơ đồ khối vừa có, ta có được hàm truyền được đơn giản hóa như sau:

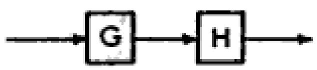
$$\frac{C}{R} = \frac{G_1G_2G_3}{1 + G_1G_2G_3\left(\frac{H_1}{G_1} + \frac{H_2}{G_3}\right)} = \frac{G_1G_2G_3}{1 + G_2G_3H_1 + G_1G_2H_2}$$

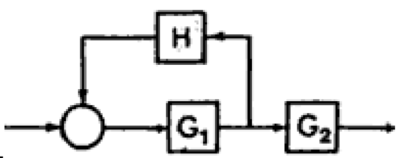
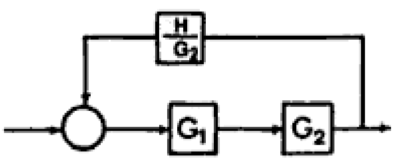
Bài 1-7: Thu gọn sơ đồ của hệ thống điều khiển vòng kín nhiều vòng hình dưới thành sơ đồ đơn giản:

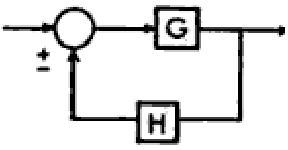


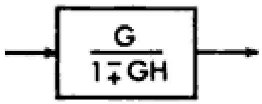
Giải:

Để có thể thu gọn sơ đồ trên cần phải dùng những quy tắc sau:

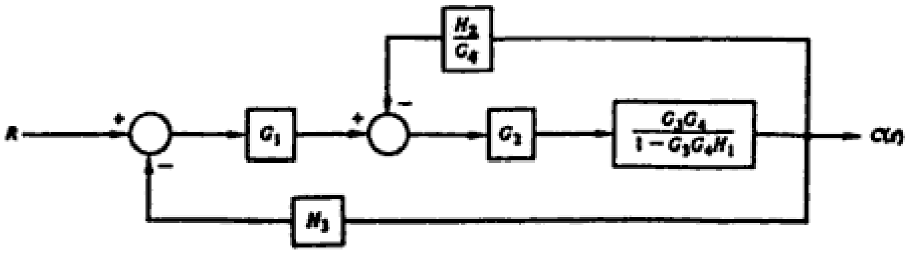
\+  thành 

\+  thành 

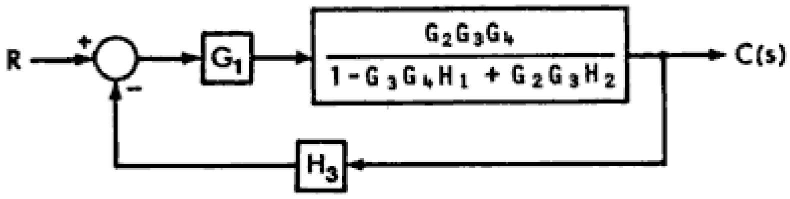
+ 

thành 

Sử dụng quy tắc 2 sẽ chuyển được khối H2 ra sau khối G4. Sử dụng quy tắc 3 sẽ khử được vòng G3.G4. G1. Đưa ra được sơ đồ tương đương như hình dưới.

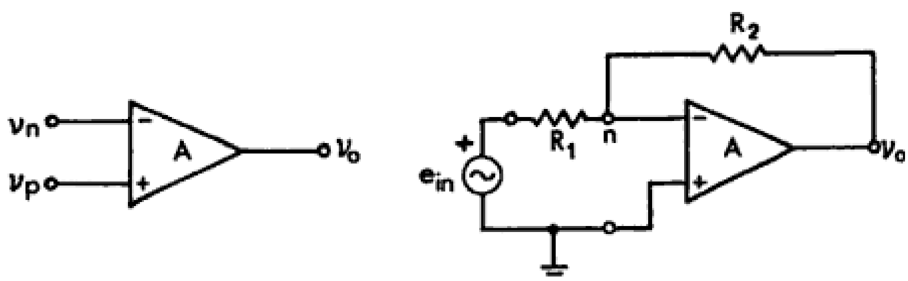


Khử vòng $\frac{H_2}{G_4}$ sẽ được:



Cuối cùng, thu gọn lại theo nguyên tắc 1 khử vòng H3 được sơ đồ thu gọn như hình dưới:

Bài 1- 8: Mô hình mạch khuếch đại được đưa ra như hình dưới:



- **Cho** $A > 10^4$
- **Tính hệ số khuếch đại** $\frac{V_0}{e_{in}}$

- **Dòng vào được xem như không đáng kể do trở kháng đầu vào của bộ khuếch đại là rất lớn**

Giải

Do dòng điện vào cuẩ bộ khuếch đại là bằng 0 nên dòng điện đi qua R1 và R2 là bằng nhau nên biểu thưc toán tại nút n là:

$$\frac{e_{in} - V_n}{R_1} + \frac{V_o - V_n}{R_2} = 0$$

Vì hệ số khuếch đại là A nên ta có

$$V_o = AV_n$$

Gộp hai phép tính vào ta có:

$$\frac{e_{in}}{R_1} - \frac{V_o}{AR_1} + \frac{V_o}{R_2} - \frac{V_o}{AR_2} = 0$$

Hay:

$$V_o = \frac{A \cdot \frac{R_2}{R_1} e_{in}}{\frac{R_2}{R_1} - A}$$

Có thể viết lại biểu thức cuối cùng như sau:

$$\frac{V_o}{e_{in}} = \frac{A}{1 - A \cdot \frac{R_1}{R_2}} = \frac{A}{1 - Ap}$$

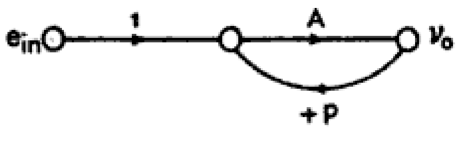
Tại đó

$$p = \frac{R_1}{R_2}$$

Do $A > 10^4$ nên ta có

$$\frac{V_o}{e_{in}} = \frac{A}{1 - A\frac{R_1}{R_2}} = \frac{1}{\frac{1}{A} - \frac{R_1}{R_2}} \simeq -\frac{R_2}{R_1}$$

Nên ta có sơ đồ dòng tín hiệu cua bộ khuếch đại là:



Bài 1- 10: Mạch điện bao gồm điện trở và tụ điện được chỉ ra trong hình . Sơ đồ khối được chỉ ra trong hình 2. Yêu cầu tìm tất cả các hàm truyền từ G1 cho đến G6. thu gọn sơ đồ hình 2 về sơ đồ hình 3:

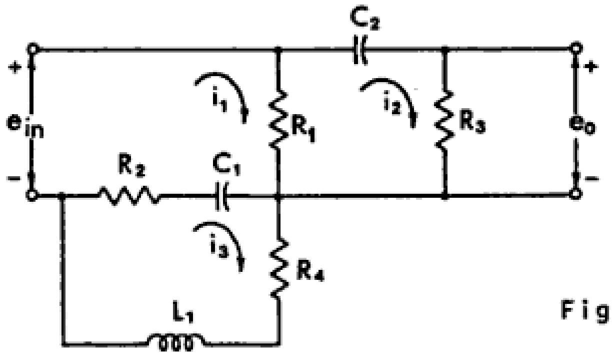


Fig.1

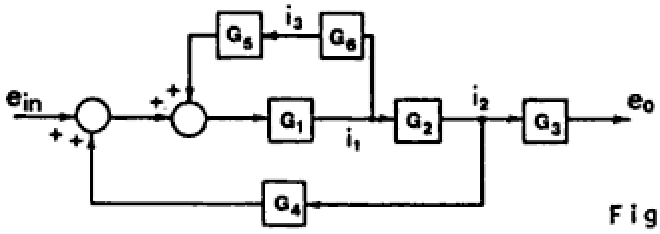


Fig.2

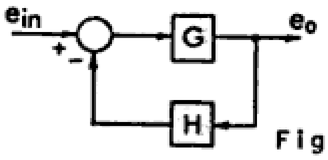


Fig.3

Giải:

Áp dụng các định luật giải mạch điện ta được ma trận như hình dưới:

$$\begin{bmatrix} (R_1 + R_2 + \frac{1}{C_1 S}) & -R_1 & -(R_2 + \frac{1}{C_1 S}) \\ -R_1 & (R_1 + R_3 + \frac{1}{C_2 S}) & 0 \\ -(R_2 + \frac{1}{C_1 S}) & 0 & (R_2 + R_4 + \frac{1}{C_1 S} + L_1 S) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{in} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Và

$$e_o = R_3 i_2$$

Từ hình 2 ta có:

$$\begin{bmatrix} 0 & G_4 & G_1G_5 \\ G_2 & 0 & 0 \\ G_6 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e_{in} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix}$$

Và: $e_o = G_3 i_2$ vì $G_3 = R_3$

Nhân và so sánh các thành phần của ma trận ta có:

$$\frac{i_2}{I_1} = G_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_3 + \frac{1}{C_2S}} = \frac{R_1C_2S}{C_2S(R_1 + R_3) + 1}$$

$$\frac{i_3}{I_1} = G_6 = \frac{R_2 + \frac{1}{C_1S}}{R_2 + R_4 + \frac{1}{C_1S} + L_1S} = \frac{R_2C_1S + 1}{C_1S(R_2 + R_4 + L_1S) + 1}$$

$$i_1 = G_4i_2 + G_1G_5i_3 + G_1e_{in} = \frac{1}{R_1 + R_2 + \frac{1}{C_1S}}\left[R_1i_2 + (R_2 + \frac{1}{C_1S})i_3 + e_{in}\right]$$

Tính các hệ số của biểu thức trên:

$$G_4 = \frac{R_1}{R_1 + R_2 + \frac{1}{C_1S}} = \frac{R_1C_1S}{C_1S(R_1 + R_2) + 1}$$

$$G_1G_5 = \frac{R_2 + \frac{1}{C_1S}}{R_1 + R_2 + \frac{1}{C_1S}} = \frac{R_2C_1S + 1}{C_1S(R_1 + R_2) + 1}$$

$$G_1 = \frac{1}{R_1 + R_2 + \frac{1}{C_1S}} = \frac{C_1S}{(R_1 + R_2)C_1S + 1}$$

Có thêm :

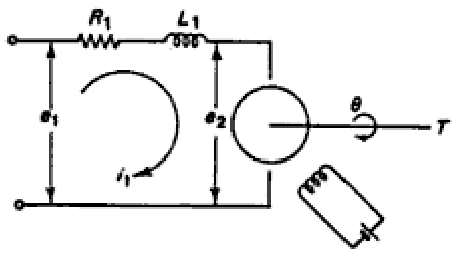
$$G_5 = \frac{R_2C_1S + 1}{C_1S}$$

Thay đổi các vòng trên sơ đồ hình 2 ta tìm được

$$G = G_1G_2G_3$$

$$H = -\frac{G_6G_5}{G_2G_3} - \frac{G_4}{G_3}$$

Bài 1-14: Cho sơ đồ điều khiển động cơ DC như hình dưới.



Tìm hàm truyền. Cho các thông số sau:

$$e_1 = 22 \text{ V}$$

$$f = 5 \times 10^{-3} \text{ oz-in/ rad/ sec}$$

$$J = 4.27 \times 10^{-4} \text{ oz-in.-sec}^2$$

$$L_1 \simeq 0$$

$$T_s = 10 \text{ oz-in.}$$

$$\omega_o = 480 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$$

Giải:

Các phương trình toán học mô tả hệ thống:

$$T = Ki_1$$

$$e_2 = K_2 \frac{d\theta}{dt}$$

$$L_1 \frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 + e_2 = e_1$$

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} + f \frac{d\theta}{dt} = T$$

Thực hiện biến đổi laplace ta có:

$$sK_2 \Theta(s) = E_2(s)$$

$$I_1(s)\ [L_1 s + R_1] + E_2(s) = E_1(s)$$

$$\Theta(s)\ [Js^2 + fs] = KI_1(s)$$

Vậy hàm truyền là:

$$\frac{\Theta(s)}{E_1(s)} = \frac{K}{S[L_1 Js^2 + s(L_1 f + R_1 J) + R_1 f + KK_2]} \quad (*)$$

Đặt:

$$T_m = \frac{R_1 J}{R_1 f + KK_2}$$

$$K_m = \frac{K}{R_1 f + KK_2}$$

Với $L_1 \simeq 0$ biểu thức (*) tương đương với:

$$\frac{\Theta(s)}{E_1(s)} = \frac{K}{s[sR_1 J + R_1 f + KK_2]} = \frac{K_m}{s(T_m s + 1)}$$

Tại đó ta có:

$$K = \frac{T_s R_1}{e_1}$$

$$K_2 = \frac{e_1}{\omega_o}$$

Có cơ năng phải bằng điện năng nên ta có:

$$i_1 e_2 = K_2 \dot{\theta} i_1 \text{ (watts)} = K_2 \dot{\theta} i_1 \cdot \frac{1}{746} \text{ (HP)}$$

$$T\dot{\theta} = Ki_1\dot{\theta} \text{(ft-lb/sec)} = Ki_1\dot{\theta} \cdot \frac{1}{550} \text{ (HP)}$$

Có :

$$K_2 = 1.356 \text{ watts-sec/ft-lb} \cdot K = 7.06 \cdot 10^{-3} \text{ watts-sec/in-oz} \cdot K$$

Tính các hệ số:

$$K_2 = \frac{22}{480} = 5.41 \cdot 10^{-2} \text{ volt/rad/sec}$$

$$K = \frac{K_2}{7.06 \cdot 10^{-3}} = \frac{5.41 \cdot 10^{-2}}{7.06 \cdot 10^{-3}} = 7.66 \text{ in.-oz/amp}$$

$$R_1 = \frac{Ke_1}{T_s} = \frac{7.66 \cdot 22}{10} = 16.85 \text{ ohms}$$

Vậy hàm truyền tìm được là:

$$\frac{\Theta(s)}{E_1(s)} = \frac{7.66}{s[s(16.85\cdot 4.27\cdot 10^{-4})+16.85\cdot 5\cdot 10^{-3}+7.66\cdot 5.41\cdot 10^{-2}]}$$

$$= \frac{766}{s[0.719s + 49.86]} = \frac{15.36}{s(0.0144s + 1)}$$

Bài 1-15: Cho hệ thống nhiều vòng lập và sơ đồ vòng tín hiệu của nó như hình 1 và hình 2.

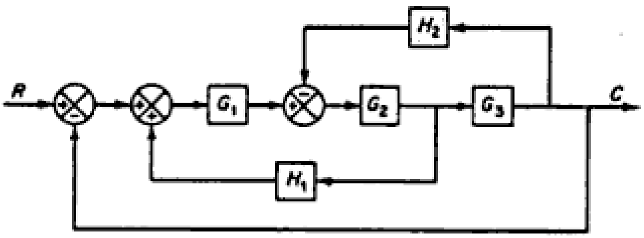


Fig. 1

Multiple-loop system

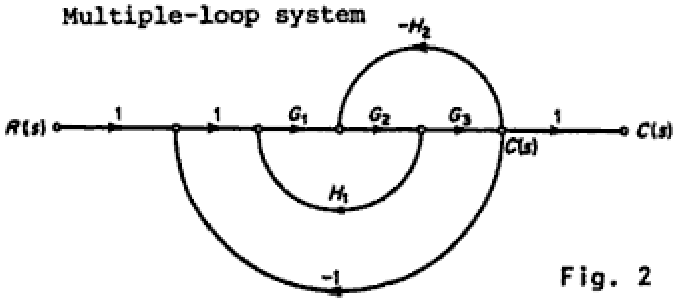


Fig. 2

Signal flow graph for the system

Tìm hàm truyền vòng kín của hệ thống sử dụng công thức Mason.

Bài làm:

Độ lợi của các vòng tiến:(tín hiệu thẳng từ đầu vào đến đầu ra)

$P_1=G_1G_2G_3$

Độ lợi của các vòng kín(hệ thống có 3 vòng kín)

$L_1=G_1G_2H_1$

$L_2= - G_2G_3H_2$

$L_3= - G_1G_2G_3$

Trong hệ thống này tất cả các vòng kín cùng nằm trên một nhánh nên đònh thöùc cuûa sô ñoà doøng tín hieäu:

$$\Delta = 1 - (L1 + L2 + L3)$$

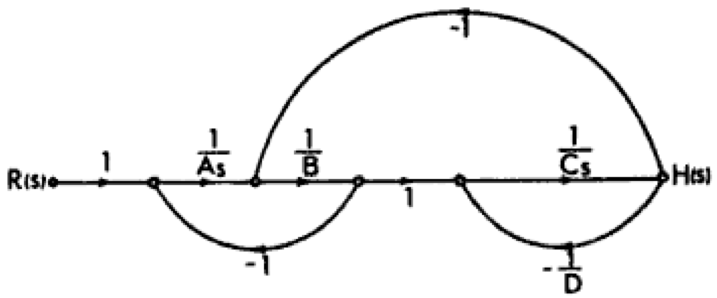
Định thức con: (được tính bằng Δ_k trừ đi các vòng không dính với P_k)

$\Delta_1 = 1$

Vậy hàm truyền của hệ thống là:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = P = \frac{P_1\Delta_1}{\Delta} = \frac{G_1G_2G_3}{1 - G_1G_2H_1 + G_2G_3H_2 + G_1G_2G_3}$$

Bài 1-20: Cho sơ đồ vòng tín hiệu của hệ thống như hình vẽ, tìm hàm truyền $\frac{H(s)}{R(s)}$



Signal flow graph of a control system

Bài làm:

Độ lợi của các vòng tiến:(tín hiệu thẳng từ đầu vào đến đầu ra)

$$P_1 = \frac{1}{As}\ \frac{1}{B}\ \frac{1}{Cs}$$

Độ lợi của các vòng kín(hệ thống có 3 vòng kín)

$$L_1 = -\frac{1}{As}\ \frac{1}{B}$$

$$L_2 = -\frac{1}{Cs}\ \frac{1}{D}$$

$$L_3 = -\frac{1}{B}\ \frac{1}{Cs}$$

Trong hệ thống này có 2 vòng kín không dính nhau là L_1 và L_2 nên đònh thöùc cuûa sô ñoà doøng tín hieäu:

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3) + L_1 L_2$$

$$\Delta = 1 + \frac{1}{ABs} + \frac{1}{CDs} + \frac{1}{BCs} + \frac{1}{ABCDs^2}$$

Định thức con: (được tính bằng Δ_κ trừ đi các vòng không dính với P_k)

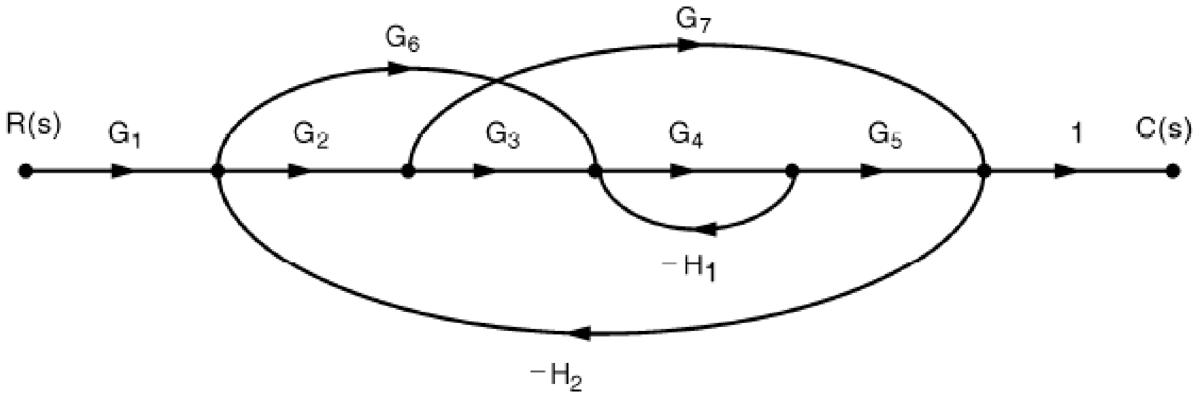
$\Delta_1 = 1$

Vậy hàm truyền của hệ thống là:

$$\frac{H(s)}{R(s)} = \frac{P_1\Delta_1}{\Delta} = \frac{\dfrac{1}{ABCs^2}}{1 + \dfrac{1}{ABs} + \dfrac{1}{CDs} + \dfrac{1}{BCs} + \dfrac{1}{ABCDs^2}}$$

$$= \frac{D}{ABCDs^2 + (CD + AB + AD)s + 1}$$

Bài 1-24: Sử dụng công thức mason để tìm hàm truyền vòng kín cho hệ thống có sơ đồ vòng tín hiệu như hình vẽ:



Bài làm:

- Ñoä lôïi cuûa caùc ñöôøng tieán:

$P_1 = G_1G_2G_3G_4G_5$;

$P_2 = G_1G_6G_4G_5$;

$P_3 = G_1G_2G_7$

- Ñoä lôïi cuûa caùc voøng kín:

$L_1 = -G_4H_1$;

$L_2 = -G_2G_7H_2$;

$L_3 = -G_6G_4G_5H_2$;

$L_4 = -G_2G_3G_4G_5H_2$

Trong hệ thống này có 2 vòng kín không dính nhau là L_1 và L_2 nên đònh thöùc cuûa sô ñoà doøng tín hieäu:

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4) + L_1L_2$$

Định thức con: (được tính bằng Δ_K trừ đi các vòng không dính với P_k)

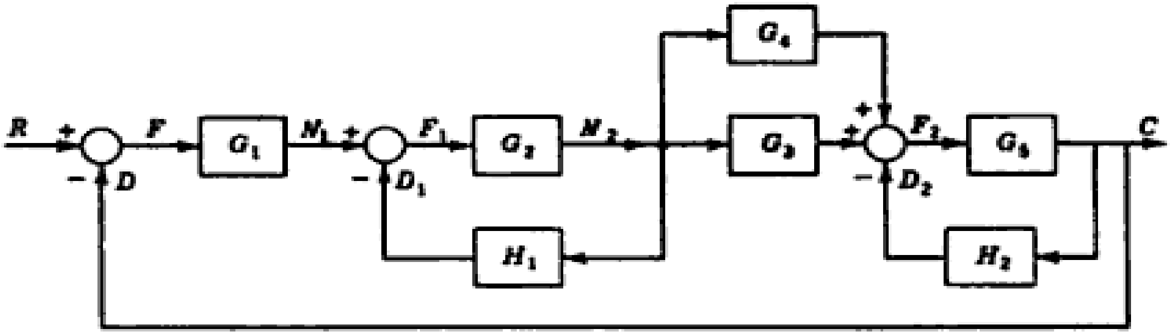
$$\Delta 1 = 1 ; \Delta 2 = 1; \Delta 3 = 1 - L_1$$

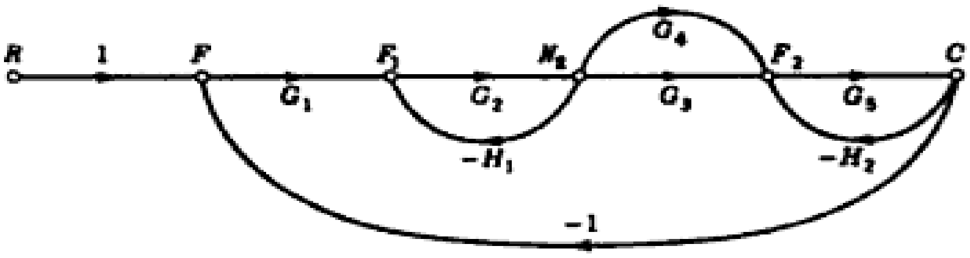
Vậy hàm truyền của hệ thống là:

$$G = \frac{1}{\Delta}(P_1\Delta_1 + P_2\Delta_2 + P_3\Delta_3)$$

$$G = \frac{G_1G_2G_3G_4G_5 + G_1G_6G_4G_5 + G_1G_2G_7(1 + G_4H_1)}{1 + G_4H_1 + G_2G_7H_2 + G_6G_4G_5H_2 + G_2G_3G_4G_5H_2 + G_4H_1G_2G_7H_2}$$

Bài 1-26: Cho sơ đồ khối và sơ đồ vòng tín hiệu của hệ thống như hình vẽ. Dùng công thức mason tìm hàm truyền vòng kín $\frac{C(s)}{R(s)} = T$:





Bài làm:

Hệ thống có bốn vòng kín:

$$L_1\{F_1N_2\} = -G_2H_1$$

$$L_2\{F_2C\} = -G_5H_2$$

$$L_3\ \{FF_1N_2F_2C\} = -G_1G_2G_3G_5\text{(through }G_3)$$

$$L_4\ \{FF_1N_2F_2C\} = -G_1G_2G_4G_5\text{(through }G_4)$$

Hệ thống có 2 vòng kín không dính nhau: (vòng L_1 và L_2)

$$\Sigma L_iL_j = (-G_2H_1)\ (-G_5H_2) = G_2G_5H_1H_2$$

Định thức của hệ thống là:

$$\Delta = 1 - \Sigma L_i + \Sigma L_iL_j - \Sigma L_iL_jL_k + \ldots$$

$$\Delta = 1 + G_2H_1 + G_5H_2 + G_1G_2G_3G_5 + G_1G_2G_4G_5 + G_2G_5H_1H_2.$$

Hệ thống có 2 mạch thẳng:

$$P_1\{\text{through } G_3\} = G_1G_2G_3G_5$$

$$P_2\{\text{through } G_4\} = G_1G_2G_4G_5$$

Từ sơ đồ graph ta có các định thức con:

$$\Delta_1 = 1$$

$$\Delta_2 = 1$$

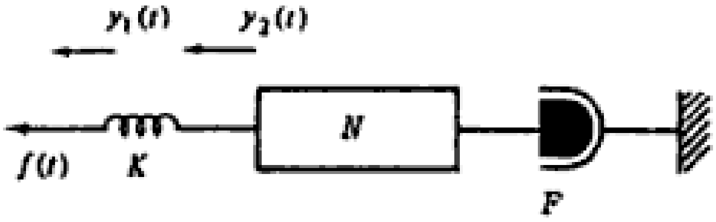
Vậy hàm truyền của hệ thống là:

$$T = \frac{P_1\Delta_1 + P_2\Delta_2}{\Delta}$$

$$= \frac{G_1G_2G_3G_5 + G_1G_2G_4G_5}{1 + G_2H_1 + G_5H_2 + G_1G_2G_5(G_3 + G_4) + G_2G_5H_1H_2}$$

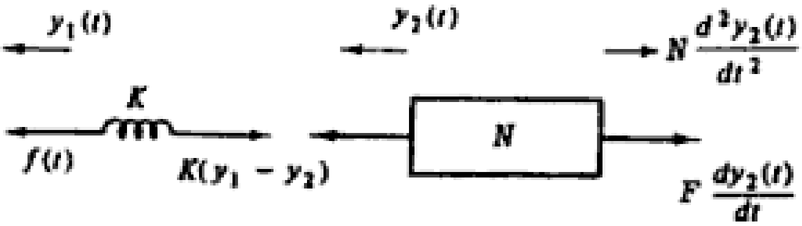
Bài 1-31

Viết phương trình trạng thái cho hệ thống lò xo giảm chấn được cho như hình vẽ.
Tín hiệu vào f(t) là lực tác dụng ở đầu lò xo



Giải:

Đặt $y_1(t)$ và $y_2(t)$ là hai đầu vị trí của lò xo.



Ta phân tích hệ thống như sau:

$$f(t) = K[y_1(t) - y_2(t)]$$

$$K[y_1(t) - y_2(t)] = N\frac{d^2y_2(t)}{dt^2} + F\frac{dy_2(t)}{dt}$$

Phương trình lực tác dụng của hệ thống:

$$f(t) = N\frac{d^2y_2(t)}{dt^2} + F\frac{dy_2(t)}{dt}$$

Thế phương trình 1 vào 2 ta được:

Đặt:

$$x_1(t) = y_2(t)$$

$$x_2(t) = \frac{dy_2(t)}{dt}$$

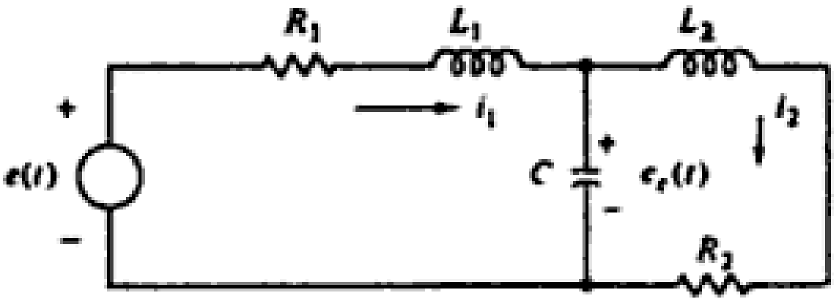
Ta được phương trình của hệ thống như sau:

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t)$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = -\frac{F}{N}x_2(t) + \frac{1}{N}f(t)$$

Bài 1-34

Viết phương trình trạng thái cho mạch điện sau:



Áp dụng các định luật Kirchoff 1,2 ta có:

$$L_1\frac{di_1}{dt} = -R_1 i_1 - e_c + e$$

$$L_2\frac{di_2}{dt} = -R_2 i_2 + e_c$$

$$C\frac{de_c}{dt} = i_1 - i_2$$

Trong đó

$i_1 = i_1(t)$, $i_2 = i_2(t)$, $e_c = e_c(t)$, $e = e(t)$

Từ đó ta viết được dạng phương trình chính tắc sau:

$$\begin{bmatrix} \frac{di_1(t)}{dt} \\ \frac{di_2(t)}{dt} \\ \frac{de_c(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_1}{L_1} & 0 & -\frac{1}{L_1} \\ 0 & -\frac{R_2}{L_2} & \frac{1}{L_2} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \\ e_c(t) \end{bmatrix} + \frac{1}{L_1}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e(t)$$

Chương 3:

Bài 3-1:

Tìm biến đổi Laplace của các hàm sau:

$$a)\quad f(t) = K$$

$$b)\quad f(t) = Kt$$

$$c)\quad f(t) = K \sin \omega t$$

Lời giải:

$$a)\quad L[K] = \int_0^\infty e^{-st} K\, dt = K\left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^\infty = \frac{K}{s}$$

$$b)\quad L[Kt] = \int_0^\infty e^{-st} Kt\, dt = K\int_0^\infty te^{-st}\, dt$$

Dùng tích phân từng phần ta có:

$$\int f\, dg = fg - \int g\, df$$

Với :

$$f = t$$

$$dg = e^{-st}\, dt$$

$$\int t\, e^{-st}\, dt = \frac{te^{-st}}{-s} - \int \frac{e^{-st}}{-s} dt$$

$$\int_0^\infty t\, e^{-st}\, dt = \left[\frac{te^{-st}}{-s} - \frac{e^{-st}}{s^2}\right]_0^\infty = \frac{1}{s^2}$$

Vậy:

$$L[Kt] = \frac{K}{s^2}$$

$$c)\quad L[K \sin \omega t] = K\int_0^\infty \sin \omega t\, e^{-st}\, dt$$

$$= K\int_0^\infty \left(\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}\right) e^{-st}\, dt = \frac{K}{2j}\left[-\frac{e^{-(s-j\omega)t}}{s - j\omega} + \frac{e^{-(s+j\omega)t}}{s + j\omega}\right]_0^\infty$$

$$= \frac{K}{2j}\left(\frac{1}{s - j\omega} - \frac{1}{s + j\omega}\right) = \frac{K\omega}{s^2 + \omega^2}$$

Bài 3- 2: **Tìm biến đổi Laplace của hàm :**

$$g(t) = \cos \omega t.$$

Lời giải:

Dung định nghĩa về phép biến đổi Laplace ta có:

$$L[g(t)] = \int_0^\infty e^{-st} \cos \omega t \, dt$$

Công thức Euler's:

$$\cos \omega t = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}$$

Ta có được:

$$L[g(t)] = \int_0^\infty e^{-st}\left(\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}\right)dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(e^{-(s-j\omega)t} + e^{-(s+j\omega)t}\right)dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-e^{-(s-j\omega)t}}{s - j\omega} - \frac{e^{-(s+j\omega)t}}{s + j\omega}\right]_0^\infty$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s - j\omega} + \frac{1}{s + j\omega}\right] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

Vậy:

$$L[\cos \omega t] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

Bài 3-3: **Dùng dạng chuyển đổi Laplace sau :**

$$L[\sin \omega t] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

và các định lý vi phân. Hãy tìm chuyển đổi Laplace của hàm sau:

$$f(t) = A \cos \omega t$$

Lời giải:

Định lý về phép lấy vi phân:

Nếu f(t) trong miền thời gian thì:

$$L[f(t)] = F(s)$$

Theo đó

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - \lim_{t \to 0^+} f(t)$$

Ta sử dụng định lý trên và phương trình:

$$A \cos \omega t = \frac{d}{dt}\frac{A}{\omega}\sin \omega t$$

Ta có được:

$$L[A\cos\omega t] = L\left[\frac{d}{dt}\frac{A}{\omega}\sin\omega t\right]$$

$$= \frac{A}{\omega}\left[s\,L[\sin\omega t] - \sin\omega t\,\Big|_{t=0}\right] = \frac{A}{\omega}\left[\frac{s\omega}{s^2+\omega^2} - 0\right]$$

$$= \frac{As}{s^2+\omega^2}$$

Bài 3-4:

Tìm biến đổi Laplace của các hàm sau:

a) $f(t) = e^{-at},\ t \geq 0$ **với a là 1 hằng số.**

b) $g(t) = Ae^{-at},\ t \geq 0$ **với a, A là các hằng số.**

Lời giải:

a) Theo định nghĩa về phép biến đổi Laplace ta có:

$$F(s) = L[f(t)] = \int_0^\infty e^{-st}\,e^{-at}\,dt = \int_0^\infty e^{-(s+a)t}\,dt$$

$$= \frac{e^{-(s+a)t}}{-(s+a)}\Bigg|_0^\infty = \frac{1}{s+a}$$

b) Dùng kết quả câu a) ta có:

$$L[g(t)] = A\,L[e^{-at}] = A\cdot\frac{1}{s+a}$$

Bài 3-20:

Cho biến đổi Laplace của hàm f(t) như sau:

$$F(s) = \frac{(s+1)e^{-7s}}{s^2(s+5)}$$

Tìm f(t)

Giải:

Hàm F(s) được viết lại như sau:

$$F(s) = e^{-7s}\frac{s+1}{s^2(s+5)}$$

Đặt

$$G(s) = \frac{s+1}{s^2(s+5)}$$

Có:

$$G(s) = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s^2} + \frac{K_3}{s+5}$$

Các hệ số K1, K2, K3 được tính như sau:

$$K_1 = \left\{\frac{d}{ds}\left[\frac{s+1}{s+5}\right]\right\}_{s=0} = \frac{4}{25}$$

$$K_2 = \left[\frac{s+1}{s+5}\right]_{s=0} = \frac{1}{5}$$

$$K_3 = \left[\frac{s+1}{s^2}\right]_{s=-5} = -\frac{4}{25}$$

Hàm G(s) được viết lại như sau:

$$G(s) = \frac{4}{25s} + \frac{1}{5s^2} - \frac{4}{25(s+5)}$$

Biến đổi laplace ngược của hàm G(s) là:

$$g(t) = \left(\frac{4}{25} + \frac{1}{5}t - \frac{4}{25}e^{-5t}\right)u(t)$$

Áp dụng thêm định lý:

$$\text{If } h(t) = e^{ct}f(t)\text{, then } H(s) = F(s-c)$$

$$\text{or } L[g(t-a)u(t-a)] = e^{-as}G(s)$$

Vậy ta có:

$$F(s) = e^{-7s}G(s) = L[g(t-7)u(t-7)]$$

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = g(t-7)u(t-7)$$

$$g(t-7) = \left[\frac{4}{25} + \frac{1}{5}(t-7) - \frac{4}{25}e^{-5(t-7)}\right]u(t-7)$$

$$u(t-a)\cdot u(t-a) = u(t-a)$$

$$g(t-7)u(t-7) = \left[\frac{4}{25} + \frac{1}{5}(t-7) - \frac{4}{25}e^{-5(t-7)}\right]u(t-7)$$

Vậy f(t) cần tìm là:

$$f(t) = \left[\frac{4}{25} + \frac{1}{5}(t-7) - \frac{4}{25}e^{-5(t-7)}\right]u(t-7)$$

Bài 3-21:

Tìm Laplace ngược của hàm F(s) cho ở dưới với wn là hằng số

$$F(s) = \frac{3}{s^2(s^2+\omega_n^2)}$$

Giải:

Ta có

$$L[f_1(t)] = F_1(s)$$

Và

$$L[f_2(t)] = F_2(s)$$

Sau đó có

$$L[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(s) \cdot F_2(s)$$

$$= L[\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)d\tau]$$

$$= L[\int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau)d\tau]$$

Hàm F(s) được viết lại:

$$F(s) = \frac{3}{s^2(s^2+\omega_n^2)} = \frac{3}{s} \cdot \frac{1}{s(s^2+\omega_n^2)} = F_1(s) \cdot F_2(s)$$

Thu gọn lại ta có:

$$f(t) = L^{-1}[F_1(s)F_2(s)] = f_1(t) * f_2(t) = \int_0^\tau f_2(\tau) f_1(t-\tau)d\tau$$

Trong trường hợp này:

$$F_1(s) = \frac{3}{5}$$

$$F_2(s) = \frac{1}{s(s^2+\omega_n^2)}$$

Biến đổi laplace có

$$f_1(x) = 3u(x)$$

$$f_2(x) = \frac{1}{\omega_n^2}(1 - \cos \omega_n x)u(x)$$

Có:

$$\text{for } x = t - \tau, \quad f_1(t-\tau) = 3u(t-\tau)$$

Và

$$f_2(\tau) = \frac{1}{\omega_n^2}(1 - \cos \omega_n\tau)u(\tau) \quad \text{for } x = \tau.$$

$$\int_0^t f_2(\tau) f_1(t - \tau)d\tau = \int_0^t \frac{1}{\omega_n^2}(1 - \cos \omega_n\tau)u(\tau) \cdot 3u(t - \tau)d\tau$$

$$= \frac{3}{\omega_n^2}\int_0^t (1 - \cos \omega_n\tau)d\tau$$

Ta sử dụng

$$u(\tau)u(t - \tau) = \begin{cases} 0 & \text{for } \tau < 0 \text{ and } \tau > t \\ 1 & 0 < \tau < t \end{cases}$$

Vì vậy f(t) tìm được là:

$$= \frac{3}{\omega_n^2}[\tau|_0^t - \frac{1}{\omega_n} \sin \omega_n\tau|_0^t] = \frac{3}{\omega_n^2}[t - \frac{1}{\omega_n} \sin \omega_n t]u(t)$$

Bài 3-23:

Cho hàm Laplace X(s)

$$X(s) = \frac{3s^3 + 17s^2 + 33s + 15}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

Tìm x(t)

Giải

Phân tích X(s) thành các hạng tử

$$\begin{array}{rl} 3 & \\ \hline 3s^3 + 17s^2 + 33s + 15 & : \quad s^3 + 6s^2 + 11s + 6 \\ -(3s^3 + 18s^2 + 33s + 18) & \\ \hline -s^2 - 3 & \end{array}$$

Có thể viết lại X(s) thành dạng sau:

$$X(s) = 3 - \frac{s^2 + 3}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

Ta có

$$s^3 + 6s^2 + 11s + 6 = (s + 1)(s + 2)(s + 3)$$

Có:

$$\frac{s^2+3}{s^3+6s^2+11s+6} = \frac{K_1}{s+1} + \frac{K_2}{s+2} + \frac{K_3}{s+3} = P(s)$$

$$K_1 = [(s+1)P(s)]_{s=-1} = 2$$

$$K_2 = [(s+2)P(s)]_{s=-2} = -7$$

$$K_3 = [(s+3)P(s)]_{s=-3} = 6$$

X(s) được viết lại như sau:

$$X(s) = 3 - \frac{2}{s+1} + \frac{7}{s+2} - \frac{6}{s+3}$$

Có:

$$L^{-1}[X(s)] = L^{-1}[3 - \frac{2}{s+1} + \frac{7}{s+2} - \frac{6}{s+3}]$$

$$x(t) = 3\delta(t) - 2e^{-t}u(t) + 7e^{-2t}u(t) - 6e^{-3t}u(t)$$

$$= 3\delta(t) - (2e^{-t} - 7e^{-2t} + 6e^{-3t})u(t).$$

Bài 3-24: Tìm laplace ngược của hàm X(s) qua phương pháp biến đổi tích phân

$$X(s) = \frac{1}{s(s+2)^2}$$

Giải:

X(s) được viết lại là:

$$X(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s+2} \cdot \frac{1}{s+2} = F_1(s)F_2(s)F_3(s)$$

Áp dụng phương pháp tích phân ta có:

$$L^{-1}[F_1(s) \cdot F_2(s)] = \int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau$$

$$= \int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$$

Tại đó có:

$$L^{-1}[F_1(s)] = f_1(t)$$

$$L^{-1}[F_2(s)] = f_2(t)$$

Vì vậy có:

$$F_2(s) = \frac{1}{s+2}$$

$$F_3(s) = \frac{1}{s+2}$$

$$f_2(t) = e^{-2t}$$

$$f_3(t) = e^{-2t}$$

Và

$$L^{-1}\left[\frac{1}{(s+2)^2}\right] = \int_0^t e^{-2(t-\tau)} \cdot e^{-2\tau} d\tau = e^{-2t}\int_0^t d\tau = te^{-2t}$$

Có hàm x(t) là:

$$L^{-1}[X(s)] = L^{-1}\left[\frac{1}{s(s+2)^2}\right] = \int_0^t \tau e^{-2\tau} d\tau$$

$$= \tau\frac{e^{-2\tau}}{-2}\Big|_0^t - \int_0^t \frac{e^{-2\tau}}{-2} d\tau = t\frac{e^{-2t}}{-2} + \frac{1}{2}\left(\frac{e^{-2\tau}}{-2}\right)\Big|_0^t$$

$$= -\frac{1}{2}te^{-2t} - \frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{1}{4}$$

BÀI 3-25: biến đổi laplace của x(t) là X(s) có phương trình sau :

$$X(s) = \frac{100}{s(s+2)(s+3)^2(s^2+8s+25)}$$

Tìm x(t).

Bài làm:

Ta phân tích phương trình X(s) thành tổng của những hàm đơn giản.

Chúng ta chú ý rằng :

$$s^2 + 8s + 25 = (s + 4 - 3j)(s + 4 + 3j)$$

Vậy :

$$X(s) = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s+2} + \frac{A_3}{(s+3)^2} + \frac{A_4}{s+3} + \frac{A_5}{s+4-3j} + \frac{A_6}{s+4+3j}$$

Chúng ta tính các hằng số bằng cách cân bằng các hệ số :

$$A_1 = [sX(s)]_{s=0} = 0.22$$

$$A_2 = [(s+2)X(s)]_{s=-2} = -3.85$$

$$A_3 = [(s+3)^2X(s)]_{s=-3} = 3.33$$

$$A_4 = \frac{d}{ds}[(s+3)^2X(s)]\Big|_{s=-3} = 3.78$$

$$A_5 = [(s+4-3j)X(s)]\Big|_{s=-4+3j} = 0.0923\angle{-214°}$$

$$A_6 = A_5^* = 0.0923\angle{214°}$$

Vậy laplace ngược ta được x(t) :

$$+\ 3.33te^{-3t} + 3.78e^{-3t} + 0.185e^{-4t}\sin(3t - 214°)$$

Vì áp dụng công thức :

$$L^{-1}\left[\frac{A}{s+a-bj} + \frac{A^*}{s+a+bj}\right] = 2|A|e^{-at}\sin(bt + \angle A)$$

Bài 3-26: Tìm laplace ngược của hàm:

$$F(s) = \frac{3s}{s^2+4s+5}$$

Bài làm:

Ta viết lại hàm F(s) như sau:

$$F(s) = \frac{3s}{(s+2)^2+1} = \frac{3(s+2)}{(s+2)^2+1} - \frac{6}{(s+2)^2+1}$$

Áp dụng định lí trễ và laplace ngược của hàm sin và cost a được:

$$L[\sin t] = \frac{1}{s^2+1}$$

$$L[\cos t] = \frac{s}{s^2+1}$$

Định lí trễ:

$$\text{If } g(t) = e^{at}f(t),$$

$$\text{then } G(s) = F(s-a),\ s > a$$

Vậy ta có:

$$L^{-1}[F(s)] = L^{-1}\left[\frac{3(s+2)}{(s+2)^2+1} - \frac{6}{(s+2)^2+1}\right]$$

$$= 3L^{-1}\left[\frac{s+2}{(s+2)^2+1}\right] - 6L^{-1}\left[\frac{1}{(s+2)^2+1}\right]$$

$$= e^{-2t}\cdot 3\cos t - e^{-2t}\,6\sin t$$

$$= e^{-2t}(3\cos t - 6\sin t)$$

Bài 3-27: Tìm laplace ngược của hàm:

$$F(s) = \frac{s+1}{s(s^2+2s+2)}$$

Bài làm:

Ta viết lại hàm F(s):

$$\frac{s+1}{s(s^2+2s+2)} = \frac{a_1 s + a_2}{s^2+2s+2} + \frac{a_3}{s}$$

Ta tiến hành quy đồng và sau đó đồng nhất các hệ số với phương trình chuẩn đã cho => ta tìm được các hệ số: a_1= -0.5; a_2=0; a_3= 0.5.

Vậy ta được:

$$F(s) = \frac{-0.5s}{s^2+2s+2} + \frac{0.5}{s} = \frac{0.5}{s} - \frac{0.5s}{(s+1)^2+1}$$

$$= 0.5\left[\frac{1}{s} - \frac{s+1}{(s+1)^2+1} + \frac{1}{(s+1)^2+1}\right]$$

⇨

⇨ f(t)= $L^{-1}[F(s)] = 0.5[1 - e^{-t}\cos t + e^{-t}\sin t]$

Bài 3-28

Biến đổi Laplace ngược của hàm sau:

$$G(s) = \frac{s^3+8s^2+20s+17}{s^2+4s+3}$$

Giải:

Chia tử số cho mẫu số ta được:

$$G(s) = \frac{s^3+8s^2+20s+17}{s^2+4s+3} = s + 4 + \frac{s+5}{s^2+4s+3}$$

Tối giản phân thức ta được:

$$G(s) = s + 4 + \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+3}$$

Lấy ảnh Laplace ngược ta có:

$$g(t) = \frac{d}{dt}\delta(t) + 4\delta(t) + 2e^{-t} - e^{-3t} \quad \text{for } t \geq 0$$

Bài 3-29

Biến đổi Laplace ngược của hàm sau:

$$F(s) = \frac{s^2+2s+5}{(s+1)^3}$$

Giải:

Ta phân tích F(s) thành các phân số thành phần:

$$F(s) = \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{a_3}{(s+1)^3} + \frac{a_2}{(s+1)^2} + \frac{a_1}{s+1}$$

Ta tìm các hệ số a_1, a_2, a_3 như sau:

$$a_3 = \left[\frac{A(s)}{B(s)}(s+1)^3\right]_{s=-1} = (s^2 + 2s + 5)_{s=-1} = 4$$

$$a_2 = \left\{\frac{d}{ds}\left[\frac{A(s)}{B(s)}(s+1)^3\right]\right\}_{s=-1} = \left[\frac{d}{ds}(s^2 + 2s + 5)\right]_{s=-1}$$

$$= (2s + 2)_{s=-1} = 0$$

$$a_1 = \frac{1}{(3-1)!}\left\{\frac{d^2}{ds^2}\left[\frac{A(s)}{B(s)}(s+1)^3\right]\right\}_{s=-1}$$

$$= \frac{1}{2!}\left[\frac{d^2}{ds^2}(s^2 + 2s + 5)\right]_{s=-1} = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

Từ đó ta tìm được:

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = L^{-1}\left[\frac{4}{(s+1)^3} + \frac{1}{s+1}\right]$$

$$= L^{-1}\left[\frac{4}{(s+1)^3}\right] + L^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] = 2t^2e^{-t} + e^{-t}$$

$$= e^{-t}(2t^2 + 1) \quad \text{for} \quad t \geq 0$$

Bài 3-34

Tìm biến đổi ngược của X(s) được cho bởi phương trình:

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 8x = 0$$

Với các điều kiện đầu

$$x(0) = 0, \ \dot{x}(0) = 4$$

Giải:

Biến đổi Laplace của phương trình vi phân

Áp dụng các điều kiện cho trước ta có được

$$s^2X(s) - 4 + 4sX(s) + 8X(s) = 0 - 4x(0) + 8X(s) = 0$$

hoặc

$$X(s) = \frac{4}{s^2 + 4s + 8} = 2\frac{2}{(s+2)^2 + (2)^2}$$

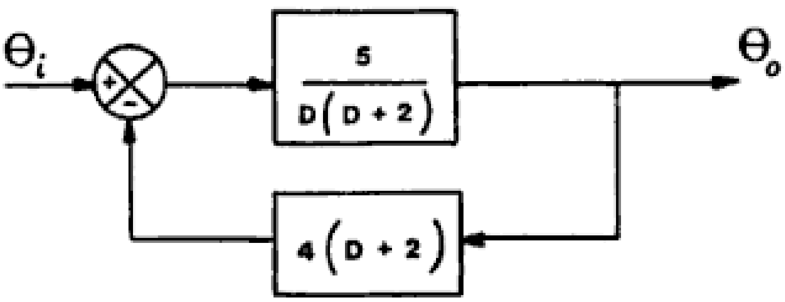
Biến đổi Laplace ngược ta có được:

$$x(t) = 2e^{-2t} \sin 2t.$$

Chương 5

Bài 5-1

Cho hệ thống cơ sở đồ khối như hình vẽ sau. Hãy xác định hàm truyền của hệ thống



Giải:

Hàm truyền của hệ thống có dạng

$$\frac{\theta_o}{\theta_i} = \frac{G}{1 + GH}$$

trong đó:

$$G = \frac{5}{D(D+2)}$$

và:

$$H = 4(D+2)$$

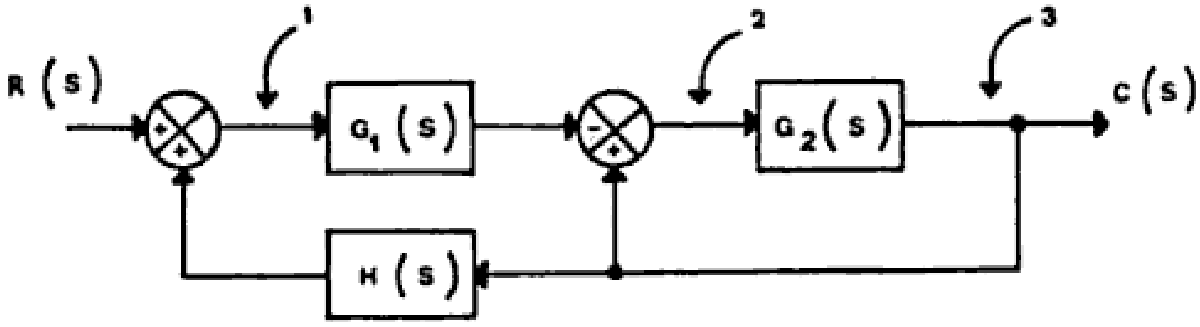
Do đó ta có:

$$\frac{\theta_o}{\theta_i} = \frac{\dfrac{5}{D(D+2)}}{1 + \dfrac{5 \cdot 4(D+2)}{D(D+2)}} = \frac{\dfrac{5}{D(D+2)}}{\dfrac{D+20}{D}} = \frac{5}{D(D+2)} \cdot \frac{D}{D+20}$$

$$= \frac{5}{(D+2)(D+20)}$$

Bài 5-2

Cho hệ thống cơ sở đồ khối như sau. Hãy xác định hàm truyền của hệ thống



Giải:

Tại các điểm 1,2,3 ta có các giá trị

$$R(s) + H(s)C(s)$$

$$C(s) - G_1(s)[R(s) + H(s)C(s)]$$

$$G_2(s)\{C(s) - G_1(s)[R(s) + H(s)C(s)]\} = C(s)$$

Thực hiện phép nhân và giải phương trình ta tìm được hàm truyền của hệ thống

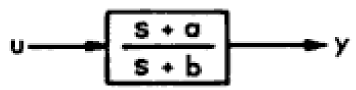
$$G_2(s)C(s) - G_1(s)G_2(s)R(s) + G_2(s)G_1(s)H(s)C(s) = C(s)$$

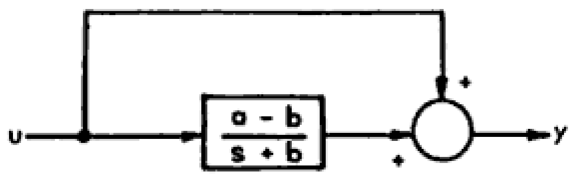
$$C(s)[G_2(s) + G_1(s)G_2(s)H(s) - 1] = G_1(s)G_2(s)R(s)$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1(s)G_2(s)}{G_2(s)[1 + G_1(s)H(s)] - 1}$$

Bài 5-3

Chứng minh rằng hàm truyền của hai hệ thống sau là như nhau





Giải:

Ở sơ đồ khối thứ nhất ta có quan hệ giữa u và y

$$\frac{s+a}{s+b}\, u = y$$

Từ đó ta rút ra được hàm truyền

$$\frac{y}{u} = \frac{s+a}{s+b}$$

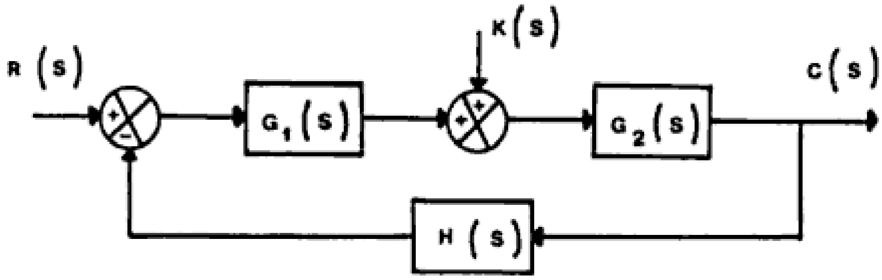
Ơ sơ đô`khôí thư´hai ta co´

$$y = u + u\,\frac{a-b}{s+b}$$

Tư`đo´ta ruť ra được haǹ truyêǹ của hệ thông

$$\frac{y}{u} = 1 + \frac{a-b}{s+b} = \frac{s+b+a-b}{s+b} = \frac{s+a}{s+b}$$

Bài 5-4: cho hệ thống như hình vẽ có 2 tín hiệu vào, một tín hiệu chuẩn và một tín hiệu nhiễu. chỉ ra rằng phương trình đặc tính của hệ thống sẽ không thay đổi khi thay thế tín hiệu vào chuẩn bằng tín hiệu vào là nhiễu.



Bài làm:

Hàm truyền của hệ thống khi bỏ qua tín hiệu nhiễu có dạng sau:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

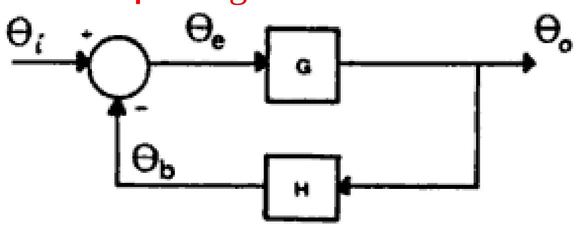
Hàm truyền của hệ thống khi bỏ qua tín hiệu chuẩn có dạng sau:

$$\frac{C(s)}{K(s)} = \frac{G_2}{1 + G_1G_2H}$$

Ta thấy phương trình đặc tính của hệ thống khi bỏ tín hiệu nhiễu tác động vào hệ thống hoặc là bỏ tín hiệu chuẩn tác động vào hệ thống là giống nhau:

$$1 + G_1(s)G_2(s)H(s) = 0$$

Bài 5-5: tìm hàm truyền của hệ thống của sơ đồ khối sau đây:



Bài làm:

Ta có:

$\Theta_0 = G\,\Theta_e$ *

$\Theta_e = \Theta_i - \Theta_b$ **

$\Theta_b = H\,\Theta_0$ ***

Thay (***) vào (**) ta được:

$\Theta_e = \Theta_i - H\,\Theta_0$ ****

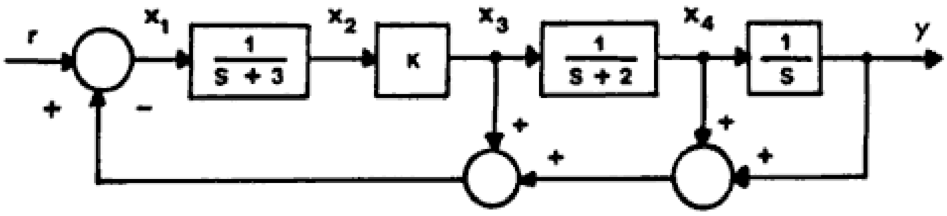
Thay (****) vào (*) :

$\Theta_0 = G\,(\Theta_i - H\,\Theta_0)$

⇨ Hàm truyền của hệ thống là:

$$\frac{\theta_o}{\theta_i} = \frac{1}{H + \frac{1}{G}} = \frac{G}{1 + GH}$$

Bài 5-6: tìm hàm truyền vòng kín của hệ thống cho bởi hình vẽ sau:



Bài làm:

Từ sơ đồ ta có:

$$x_1 \cdot \frac{1}{s+3} = x_2$$

$$x_2 \cdot K = x_3$$

$$x_3 \cdot \frac{1}{s+2} = x_4$$

$$x_4 \frac{1}{s} = y$$

$$x_1 = r - (x_4 + y + x_3)$$

Kết hợp các phương trình trên ta được:

$$\frac{1}{K} sy(s+2)(s+3) + sy + y + sy(s+2) = r$$

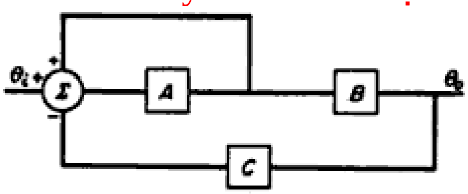
⇨ Hàm truyền vòng kín của hệ là:

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{K}{s(s+2)(s+3) + Ks + K + Ks(s+2)}$$

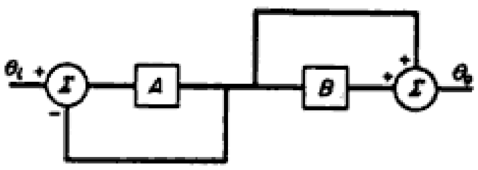
$$= \frac{K}{s(s+2)(s+3+K) + K(s+1)}$$

Bài 5-7:

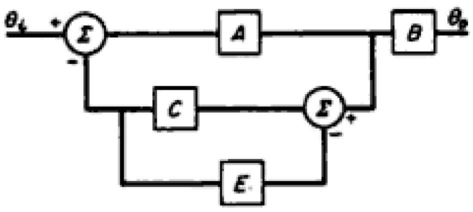
Tìm hàm truyền của các hệ thống từ sơ đồ khối cho bởi hình 1 tới hình 4



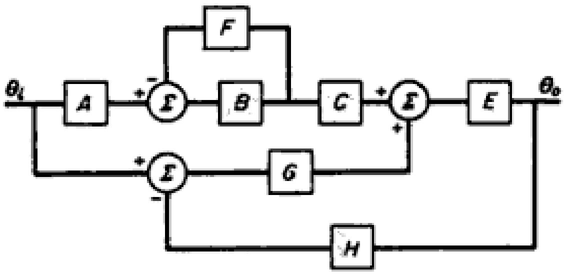
Hình 1



Hình 2



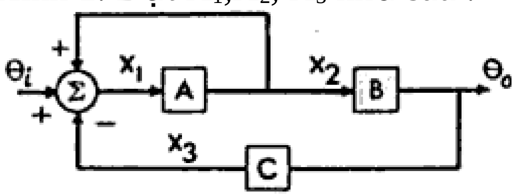
Hình 3



Hình 4

<u>Lời giải:</u>

Hình 1: Đặt X_1,X_2, X_3 như sau :



Từ sơ đồ khối trên ta có:

$$\theta_o = Bx_2$$

$$x_3 = \theta_o C$$

$$x_1 = \theta_i - x_3 + x_2$$

$$x_2 = x_1 A.$$

Kết hợp tất cả 4 phương trình trên ta có:

$$x_1 = \theta_i - x_3 + x_2$$

$$x_1 = \frac{x_2}{A} = \frac{\theta_o}{AB}$$

$$\frac{\theta_o}{AB} = \theta_i - \theta_o C + \frac{\theta_o}{B}$$

$$\frac{\theta_o}{\theta_i} = \frac{AB}{1 - A + ABC}$$

Tương tự như cách làm trên ta tính cho các hình còn lại:

Hình 2:

$$\frac{\theta_o}{\theta_i} = \frac{A(1+B)}{1+A}$$

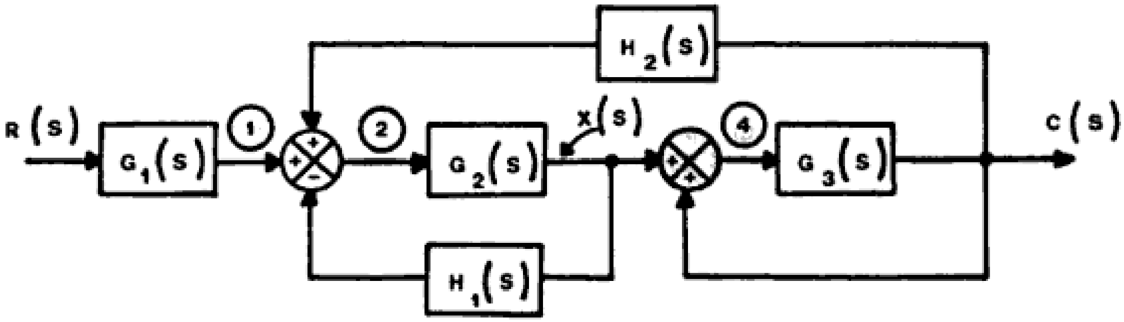
Hình 3:

$$\frac{\theta_o}{\theta_i} = \frac{AB(1+EC)}{1+C(A+E)}$$

Hình 4:

$$\frac{\theta_o}{\theta_i} = \frac{ABCE + EG + BEFG}{(1+BF)(1+EGH)}$$

Bài 5-8: **Từ sơ đồ khối hãy tìm hàm truyền** $\frac{C(s)}{R(s)}$



Lời giải:

Đặt ngõ ra của $G_2(s)$ là X(s) ta có:

Tại điểm (1) :

$R(s)G_1(s)$

Tại điểm (2):

$RG_1 + CH_2 - XH_1$

Và đối với X(s):

$$X = G_2\ [RG_1 + CH_2 - XH_1]$$

$$X = \frac{G_1G_2R + CG_2H_2}{1 + H_1G_2}$$

Tại điểm (4): $X + C$

Đối với ngõ ra C(s) ta có được:

$$C = G_3(C+X)$$

$$C = \frac{G_3G_1G_2R + G_3G_2H_2C}{1 + H_1G_2} + G_3C$$

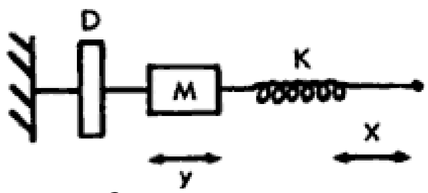
$$C(1 + H_1G_2) - G_3C(1 + H_1G_2) = G_1G_2G_3R + CG_2G_3H_2$$

Như vậy:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1G_2G_3}{(1 + H_1G_2)(1 - G_3) - G_2G_3H_2}$$

Bài 5-12:

Xác định hàm truyền của hệ thống lò xo cho bên dưới. Độ dịch chuyển x là ngõ vào và độ dịch chuyển y là ngõ ra của hệ thống.



Lời giải:

Giả sử hệ dịch chuyển về phía trái, lo xo sinh ra lực đàn hồi có phương trình:

$$F_s = K(x-y)$$

Khối damper sẽ tạo ra lực :

$$F_D = -D\frac{dy}{dt}$$

Sử dụng định luật Newton cho tổng các lực tác động vào khối M , ta có:

$$\Sigma F = Ma = M\frac{d^2y}{dt^2} = K(x-y) - D\frac{dy}{dt}$$

Hay

$$M\frac{d^2y}{dt^2} + D\frac{dy}{dt} + K(y-x) = 0$$

Chuyển đổi phương trình và giả sử điều kiện ban đầu bằng 0, ta có:

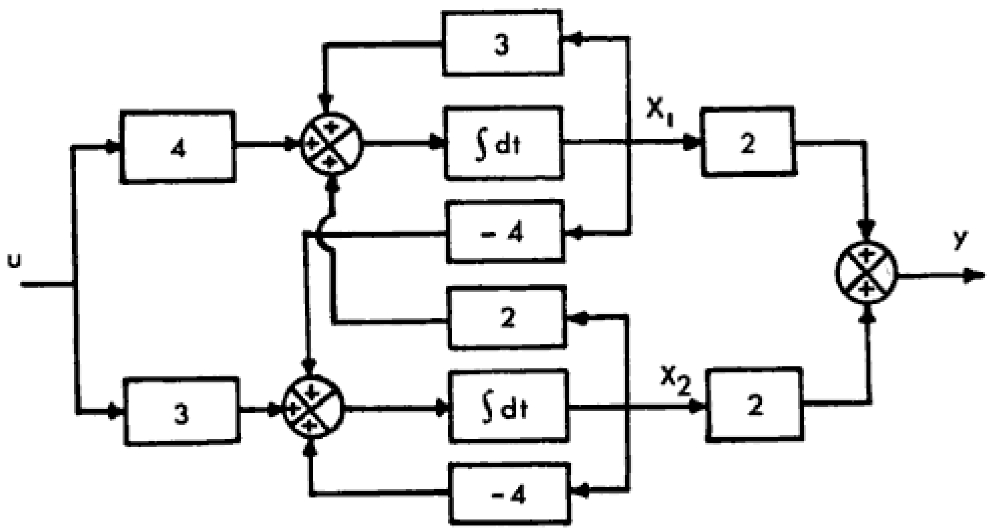
$$Ms^2Y(s) + DsY(s) + KY(s) = KX(s)$$

Hàm truyền là:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{Ms^2 + Ds + K}$$

Bài 5-13:

Tìm hàm truyền của hệ thống được chỉ ra như hình dưới:



Giải

Từ sơ đồ ta đưa ra phép toán:

$$\int(4u + 3x_1 + 2x_2)dt = x_1$$
$$\int(3u - 4x_1 - 4x_2)dt = x_2$$
$$2x_1 + 2x_2 = y$$

Biến đổi phép tính thứ nhất và phép tính thứ 2 ta có:

$$\dot{x}_1 = 3x_1 + 2x_2 + 4u$$
$$\dot{x}_2 = -4x_1 - 4x_2 + 3u$$
$$y = 2x_1 + 2x_2$$

Tìm được ma trận véctơ

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} (u)$$

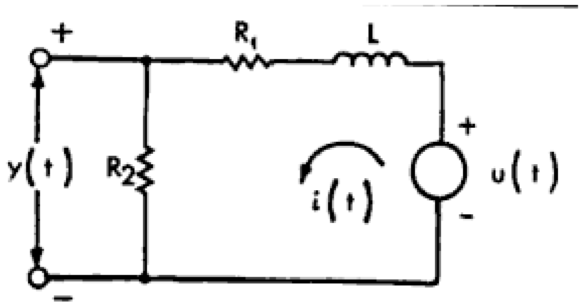
$$y = [2 \quad 2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Hàm truyền của hệ là:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B$$
$$= [2 \quad 2] \begin{bmatrix} s-3 & -2 \\ 4 & s+4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$
$$= [2 \quad 2] \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} s+4 & 2 \\ -4 & s-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{\det A} \cdot [2(s+4) - 8, \; 4+2(s-3)] \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{\det A} [2s \; , \; 2s-2] \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{8s + 6s - 6}{\det A}$$
$$= \frac{14s - 6}{s^2 + s - 4}$$

Bài 5-16:

Tìm hàm truyền $\frac{Y(s)}{U(s)}$ của mạch điện hình dưới



Áp dụng định luật Kirchhoff cho mạch điện trên

$$R_1 i(t) + R_2 i(t) + L\frac{di}{dt} = u(t)$$

Cho điện áp đầu ra:

$$y(t) = R_2 i(t)$$

Kết hợp hai phép tính ta có

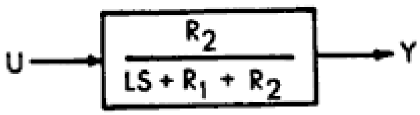
$$L\dot{y}(t) + (R_1 + R_2)y(t) = R_2 u(t)$$

Biến đổi laplace cho biểu thức trên:

$$LsY(s) + (R_1 + R_2)Y(s) = R_2 U(s)$$

Hàm truyền và sơ đồ của hệ thống

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{R_2}{Ls + R_1 + R_2}$$



Bài 5-17:

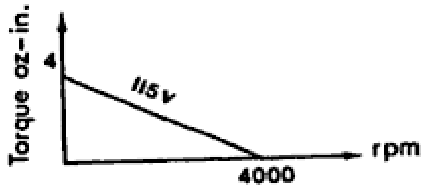
Tìm hàm truyền của động cơ servo hai pha như hình dưới. Điện áp lớn nhất của hai pha là 115 V.

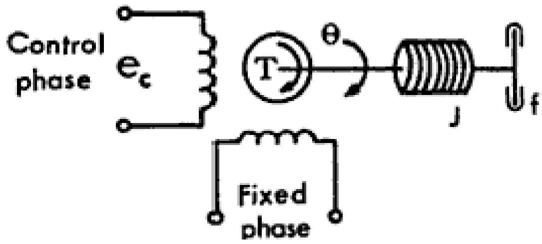
Mô men quán tính là:

$$J = 6 \times 10^{-4} \text{ oz-in.-sec}^2$$

Hệ số ma sát trượt là:

$$f = 0.004 \text{ oz-in./rad/sec.}$$





Giải

Hàm truyền của hệ thống có thể tìm được từ những phép tính sau:

$$T = -K_n\dot{\theta} + K_c E_c$$
$$T = J\ddot{\theta} + f\dot{\theta}$$

Kc, Kn là những hằng số

T: Mômen xoắn

θ: Góc của trục động cơ

Ec: Điện áp điều khiển

J: Mômen quán tính

Gộp hai công thức lại ta có:

$$J\ddot{\theta} + (f + K_n)\dot{\theta} = K_c E_c$$

Chuyển đổi sang laplace với điều khiện ban đầu là 0

$$Js^2\theta(s) + (f + K_n)s\theta(s) = K_c E_c(s)$$

Hàm truyền là:

$$\frac{\theta(s)}{E_c(s)} = \frac{K_c}{Js^2 + (f + K_n)s} = \frac{K_m}{s(T_m s + 1)}$$

Với

$$K_m = \frac{K_c}{f + K_n}$$

$$T_m = \frac{J}{f + K_n}$$

Có:

$$K_n = \frac{4}{4000} \cdot \frac{60}{2\pi} = 0.0095 \text{ oz-in/rad/sec}$$

$$K_c = \frac{4}{115} = 0.0348 \text{ oz-in./volt}$$

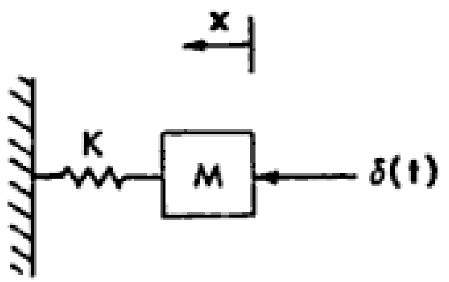
Vậy ta có hàm tuyền là:

$$\frac{\theta(s)}{E_c(s)} = \frac{0.0348}{s[s \cdot 6 \cdot 10^{-4} + 0.004 + 0.0095]} = \frac{348}{s(6s + 135)}$$

Chương 6

Bài 6-2

Cho hệ thôńg cơ khi ́như hiǹh ve ̃dươí đây, trạng thaí ban đâù la ̀trạng thaí nghỉ. Lực tać dụng vaò hệ thôńg la ̀ham̀ xung đơn vị. Hañ tim̀ phương triǹh chuyển động của vật.



Giải:

Aṕ dụng định luật II Newton ta co ́được

$$M\ddot{x} + Kx = \delta(t)$$

Biêń đổi Laplace ta co ́

$$M[s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)] + KX(s) = 1.$$

Ban đâù hệ thôńg ở trạng thaí nghỉ do đo ́ta co ́

$$\dot{x}(0) = 0 \quad \text{and} \quad x(0) = 0$$

Ta tińh được X(s)

$$X(s) = \frac{1}{Ms^2 + K}$$

Tiến hành lấy ảnh Laplace ngược ta có

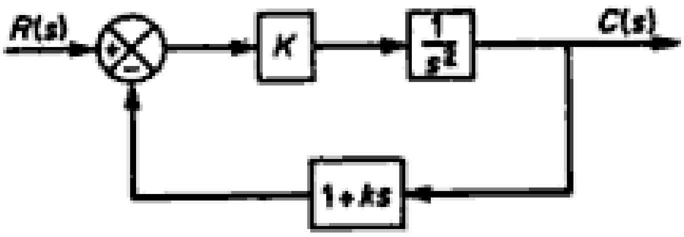
$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{MK}} \sin\sqrt{\frac{K}{M}} \cdot t$$

Trong đó

$\frac{1}{\sqrt{MK}}$ là biên độ dao động.

Bài 6-3

Cho hệ thống có sơ đồ khối như hình sau. Xác định các thông số K, k để độ vọt lố tối đa là 50% và thời gian tăng trưởng là 5s



Giải:

Độ vọt lố tối đa M_p xác định bởi công thức:

$$M_p = e^{-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\pi}$$

Theo đề bài ta có M_p = 50%

$$0.5 = e^{-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\pi}$$

$$\ln 0.5 = \frac{-\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\pi$$

hoặc

$$\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}} = 0.693$$

$$\zeta^2\pi^2 = 0.48(1-\zeta^2)$$

$$\zeta^2\pi^2 + 0.48\zeta^2 = 0.48$$

$$\zeta = \sqrt{\frac{0.48}{\pi^2 + 0.48}} = 0.21$$

Thời gian tăng trưởng 5s

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$$

$$\omega_d = \frac{\pi}{t_p} = 0.63$$

Tần số tăng tự nhiên:

$$\omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{0.63}{\sqrt{1-(0.21)^2}} = 0.644$$

Từ sơ đồ khối ta có

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{s^2 + Kks + K}$$

Với hệ thống bình thường

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

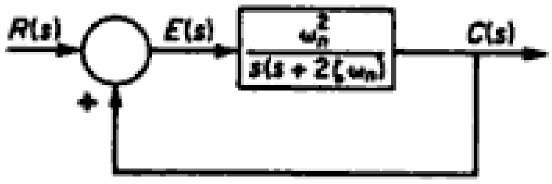
với các hệ số $\omega_n^2 = K,\ 2\zeta\omega_n = Kk$

Từ đó ta có được

$$K = \omega_n^2 = 0.415$$

$$k = \frac{2\zeta\omega_n}{K} = \frac{2 \cdot 0.21}{0.644} = 0.652.$$

Bài 6-4: cho hệ thống bên dưới có các thông số như sau: ξ=0.4 và ω_n= 5 rad/s. Hệ thống chịu tác động bởi tín hiệu bước đơn vị. Tìm thời gian tăng trưởng t_r , thời gian quá chỉnh t_p , độ vọt lố M_p và thời gian quá độ t_s .



Bài làm:

Với ξ=0.4 và ω_n= 5 rad/s. Ta tìm được :

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = 4.58$$

$$\sigma = \zeta\omega_n = 2$$

Thời gian tăng trưởng:

$$t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d}$$

Mà

$$\beta = \tan^{-1}\frac{\omega d}{\sigma} = \tan^{-1}\frac{4.58}{2} = 1.16$$

⇨ $$t_r = \frac{\pi - 1.16}{4.58} = 0.43 \text{ sec.}$$

Thời gian quá chỉnh:

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{3.14}{4.58} = 0.69 \text{ sec.}$$

Độ vọt lố:

$$M_p = e^{-\frac{\sigma}{\omega_d}\pi} = e^{-\frac{2\cdot 3.14}{4.58}} = e^{-1.37} = 0.254.$$

Thời gian quá độ:

Với sai số 2%:

$$t_s = \frac{4}{\sigma} = 2 \text{ sec}$$

Với sai số 5%:

$$t_s = \frac{3}{\sigma} = 1.5 \text{ sec.}$$

Bài 6-7: Cho hàm truyền của hệ thống. tìm đáp ứng bước ngõ ra của hệ thống khi tín hiệu vào là bước đơn vị.

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{3(s+2)}{(s+4)(s+1)^2}$$

Bài làm:

Khi R(s)=1/s. Ta sẽ được Y(s) như sau:

$$y(s) = \frac{3(s+2)}{s(s+4)(s+1)^2}$$

Ta khai triển Y(s) thành tổng của các hàm đơn giản :

$$y(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+4} + \frac{C}{(s+1)^2} + \frac{D}{s+1}$$

Sau đó tìm các hệ số A, B, C, D :

$$A = \left.\frac{3(s+2)}{(s+4)(s+1)^2}\right|_{s=0} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$B = \left.\frac{3(s+2)}{s(s+1)^2}\right|_{s=-4} = \frac{-3 \cdot 2}{(-4) \cdot 9} = \frac{1}{6}$$

$$C = \left.\frac{3(s+2)}{s(s+4)}\right|_{s=-1} = \frac{3}{-3} = -1$$

$$D = \left.\frac{d}{ds}\left[\frac{3(s+2)}{s(s+4)}\right]\right|_{s=-1} = \left.\frac{3s(s+4) - 3(s+2)(2s+4)}{s^2(s+4)^2}\right|_{s=-1}$$

$$= -\frac{5}{3}$$

Vậy Y(s) được viết lại như sau:

$$y(s) = \frac{\frac{3}{2}}{s} + \frac{\frac{1}{6}}{s+4} + \frac{-1}{(s+1)^2} + \frac{-\frac{5}{3}}{s+1}$$

Laplace ngược Y(s) thì ta tìm được y(t) :

$$y(t) = \frac{3}{2} + \frac{1}{6}e^{-4t} - te^{-t} - \frac{5}{3}e^{-t}$$

Bài 6-9:

Cho hệ thống được miêu tả bởi phương trình:

$$\frac{dx}{dt} + x = k$$

Sử dụng :

a) Trong miền thời gian

b) Trong miền tần.

Hãy tìm đáp ứng ở trạng thái nghỉ với tín hiệu đầu vào là bước đơn vị

$k(t) = S(t)$

Lời giải:

Hàm truyền cần tìm có dạng:

$$\frac{dx}{dt} + x = k$$

$$L\left[\frac{dx}{dt} + x\right] = L[k(t)]$$

$$sX(s) + X(s) = K(s)$$

$$\frac{X(s)}{K(s)} = \frac{1}{s+1}$$

Vậy: $G(s) = \frac{1}{s+1}$

a) Đáp ứng xung của hệ thống là hàm ngược của G(s):

$$g(t) = e^{-t}$$

$$x(t) = \int_0^t e^{-t}\,dt = 1 - e^{-t}$$

b) Trong miền tần số

$$K(s) = \frac{1}{s}$$

Theo đó: $X(s) = K(s)\frac{1}{s+1} = \frac{1}{s(s+1)}$

Với $s = j\omega$

Ta có:

$$X(j\omega) = \frac{1}{j\omega(j\omega + 1)}$$

Đồng nhất hệ thức ta có:

$$\frac{1}{j\omega(j\omega + 1)} = \frac{A}{j\omega} + \frac{B}{j\omega + 1}$$

$$\left.\frac{1}{j\omega + 1}\right|_{j\omega=0} = A$$

$$A = 1$$

$$B = \left.\frac{1}{j\omega}\right|_{j\omega=-1} = -1$$

Vậy

$$X(j\omega) = \frac{1}{j\omega} - \frac{1}{j\omega + 1}$$

Lấy Laplace ngược ta được:

$$x(t) = 1 - e^{-t}$$

Bài 6-10:

Hệ thống có hàm truyền vòng kín là:

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{6(s + 3)}{(s + 8)(s^2 + 4s + 8)}$$

Hãy tìm đáp ứng xung của hệ thống này.

Lời giải:

Ta có hàm xung $r(s) = 1$ và:

$$y(s) = \frac{6(s+3)}{(s+8)(s^2+4s+8)}$$

Với:

$$s^2 + 4s + 8 = (s+2)^2 + 2^2$$

Ta có thể viết lại được y(s) như sau:

$$y(s) = \frac{6(s+3)}{(s+8)(s+2+2j)(s+2-2j)}$$

$$= \frac{A}{s+8} + \frac{B}{s+2+2j} + \frac{\bar{B}}{s+2-2j}$$

Các hệ số được xác định như sau:

$$A = \left.\frac{6(s+3)}{(s+2)^2+2^2}\right|_{s=-8} = -\frac{3}{4}$$

$$B = \left.\frac{6(s+3)}{(s+8)(s+2-2j)}\right|_{s=-2-2j} = \frac{3}{8} + \frac{3}{8}j$$

Ta có được:

$$y(s) = \frac{-\frac{3}{4}}{s+8} + \frac{\frac{3}{8}+\frac{3}{8}j}{s+2+2j} + \frac{\frac{3}{8}-\frac{3}{8}j}{s+2-2j}$$

$$y(s) = \frac{-\frac{3}{4}}{s+8} + \frac{0.75(s+4)}{(s+2)^2+2^2}$$

Chuyển đổi ngược hàm truyền có dạng:

$$y(t) = -0.75e^{-8t} + \frac{0.75}{2}[(4-2)^2+2^2]^{\frac{1}{2}}e^{-2t}\sin(2t+\varphi)$$

Trong đó :

$$\psi = \arctan\frac{2}{4-2}$$

$$\psi = 45^{0}$$

Vậy:

$$y(t) = -0.75e^{-8t} + 1.06e^{-2t}\sin(2t+45^0)$$

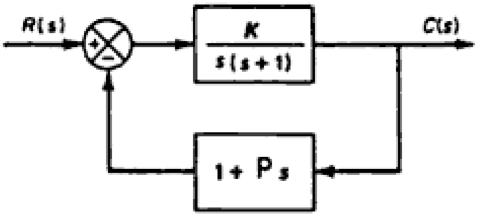
Bài 6-12:

Cho hàm truyền của hệ thống

$$\frac{\theta_0}{\theta_i} = \frac{2}{2D^2 + 5D - 3}$$

Cho $\theta_i = 2$, tìm đáp ứng thời gian của hệ thống. Tìm đáp ứng thời gian của hệ thống

Giải



Với điều kiện ban đầu là 0. Có biến đổi Laplace là:

$$\frac{\theta_0}{\theta_i}(s) = \frac{2}{2s^2 + 5s - 3} = \frac{1}{s^2 + 2.5s - 1.5}$$

$$= \frac{1}{(s + 3)(s - 0.5)}$$

Với

$$\theta_i = 2, \quad \theta_i(s) = \frac{2}{s}$$

Và

$$\theta_0(s) = \frac{2}{s(s + 3)(s - 0.5)} = \frac{\frac{2}{3 \cdot (-0.5)}}{s(\frac{s}{3} + 1)(\frac{s}{-0.5} + 1)}$$

$$= \frac{-1.33}{s(0.33s + 1)(-2s + 1)}$$

- là dạng chuẩn. Sử dụng biến đổi tương đương ta có:

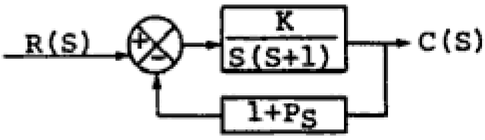
$$\frac{HK}{s(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)} \Leftrightarrow HK\left[1 + \frac{1}{T_2 - T_1}\left(T_1 e^{-\frac{t}{T_1}} - T_2 e^{-\frac{t}{T_2}}\right)\right]$$

Ta có:

$$\theta_0(t) = -1.33\left[1 + \frac{1}{-2 - 0.33}\left(0.33e^{-\frac{t}{0.33}} + 2e^{\frac{t}{2}}\right)\right]$$

$$= -1.33 + 0.188e^{-\frac{t}{0.33}} + 1.141e^{\frac{t}{2}} .$$

Bài 6-13: Cho hệ thống điều khiển như hình dưới:



Cho K và P sao cho độ vọt lố lớn nhất khi đầu vào là đáp ứng đơn vị là 0.4. Thời gian đỉnh là 1s. Tìm thời gian lên

Giải

Có độ vọt lố là:

$$M_p = e^{-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\pi}$$

Do Mp=0.4 nên

$$0.4 = e^{-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\pi}$$

$$\ln 0.4 = -\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\pi$$

$$\frac{\zeta^2\pi^2}{1-\zeta^2} = (\ln 0.4)^2 = 0.84$$

$$\zeta^2\pi^2 = 0.84 - 0.84\zeta^2$$

$$\zeta^2 = \frac{0.84}{\pi^2 + 0.84}$$

$$\zeta = 0.28 .$$

Thời gian đỉnh là:

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$$

$$t_p = 1 \text{ sec, thus } \omega_d = 3.14.$$

Có:

$$\omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1 - \zeta^2}} = \frac{3.14}{\sqrt{1 - (0.28)^2}} = 3.27.$$

Từ sơ đồ hình vẽ ta có:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G}{1 + GH} = \frac{\frac{K}{s(s + 1)}}{1 + \frac{K(1 + Ps)}{s(s + 1)}} = \frac{K}{s^2 + (KP + 1)s + K}$$

Có:

$$s^2 + (KP + 1)s + K = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n{}^2$$

Thực hiện sự đồng nhất

$$K = \omega_n{}^2, \quad KP + 1 = 2\zeta\omega_n$$

$$K = 3.27^2 = 10.69$$

$$P = \frac{2\zeta\omega_n - 1}{K} = 0.077$$

Thời gian lên là:

$$t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d}$$

Tại đó:

$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{\omega_d}{T}\right)$$

Nên:

$$T = \zeta\omega_n = 0.9156$$

$$\beta = \tan^{-1}(3.43)$$

$$\beta = 1.29.$$

$$t_r = \frac{\pi - 1.29}{3.14} = 0.59 \text{ sec.}$$

Chương 7

Bài 7-1: cho khâu tích phân như hình 1, vẽ biểu đồ nyquist cho hệ thống khi K>0.

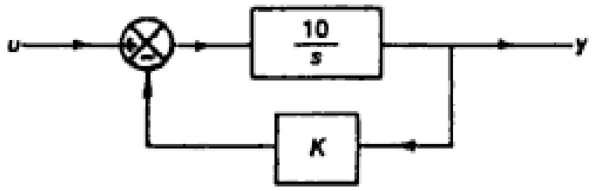


Fig.1

Bài làm:

Từ sơ đồ ta tính được hàm truyền vòng hở như sau:

$$F(s) = \frac{10K}{s} = 10K\,\frac{\sigma - j\omega}{\sigma^2 + \omega^2}$$

Vẽ biểu đồ đáp ứng của đối tượng với hàm truyền vòng hở F(s) . Hình 2 mô tả đáp ứng của hệ thống khi đặt S=jω.

$$F(j\omega) = -\frac{j10K}{\omega}$$

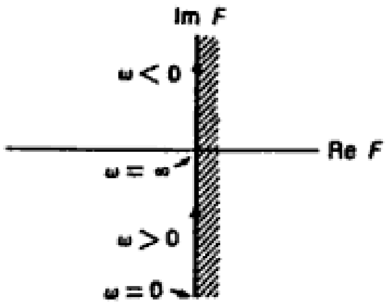


Fig.2

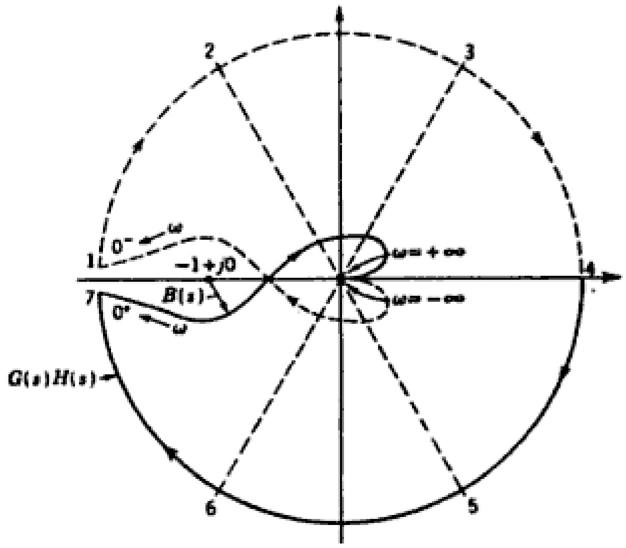
Cho k>0 đáp ứng là đóng về phía bên phải, điều đó có thể chỉ ra rằng khi s=R =>∞ khi F(R)>0. Điểm -1 không bị bao bởi đáp ứng, vì vậy hệ thống là ổn định theo nyquist.

F(s) có 1 zero trên đối tượng nên điểm uốn cong của đồ thị tại điểm S=∞ khi qua góc tọa độ.

Bài 3: chỉ ra sự ổn định của hệ thống khi thay đổi K_2 với hàm truyền vòng hở như sau:

$$G(s)H(s) = \frac{K_2(1 + T_4 s)}{s^2(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)(1 + T_3 s)}$$

Cho biểu đồ myquist như hình vẽ khi $T_4 > T_1$, T_2, T_3.



Bài làm :
Diểm -1+j0 không bị bao bởi đáp ứng vì vậy hệ thống ổn định. Tuy nhiên khi ta tăng giá trị k_2 đủ lớn thì đáp ứng có thể bao điểm -1+j0 và hệ thống sẽ trở thành giao động.
Bài 4 : cho hệ thống có hàm truyền vòng hở như sau :

$$GH(s) = \frac{K}{s(\tau s + 1)}$$

Vẽ biểu đồ nyquist và xét tính ổn định của hệ thống.
Bài làm :

- Phần tại Góc tọa độ của đối tượng :

Chúng ta xét vòng bao bán nguyệt tượng trưng quanh điểm cực bởi
$s=\varepsilon e^{j\Phi}$.
Khi Φ biến đổi từ -90^0 tại $\omega=0^-$ đến $+90^0$ tại $\omega=0^+$. Ta có :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} GH(s) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{K}{\varepsilon e^{j\phi}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \left(\frac{K}{\varepsilon}\right) e^{-j\phi}$$

Vậy góc của đường bao của đáp ứng sẽ thay đổi từ -90^0 tại $\omega=0^-$ đến $+90^0$ tại $\omega=0^+$, nó đi qua điểm 0^0 tại $\omega=0$.

- Phần từ $\omega=0^+$ đến $\omega=+\infty$

Khi $s=j\omega$ thì $GH(s)|_{s=j\omega}= GH(j\omega)$ ta có:

We have

$$\lim_{\omega\to+\infty} GH(j\omega) = \lim_{\omega\to+\infty} \frac{K}{+j\omega(j\omega\tau + 1)}$$

$$= \lim_{\omega\to\infty} \left|\frac{K}{\tau\omega^2}\right| \angle -\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\omega\tau$$

Độ lớn tiến về 0 tại góc -180^0.

- Phần từ $\omega=+\infty$ đến $\omega=-\infty$

$$\lim_{r\to\infty} GH(s)\Big|_{s=re^{j\phi}} = \lim_{r\to\infty} \left|\frac{K}{r^2}\right| e^{-2j\phi}$$

Khi Φ thay đổi từ Φ =+90^0 tại ω=+∞ đến Φ =-90^0 tại ω=-∞. Đường bao di chuyển từ -180^0 tại ω= +∞ đến góc 180^0 tại ω= -∞ với độ lớn không đổi.

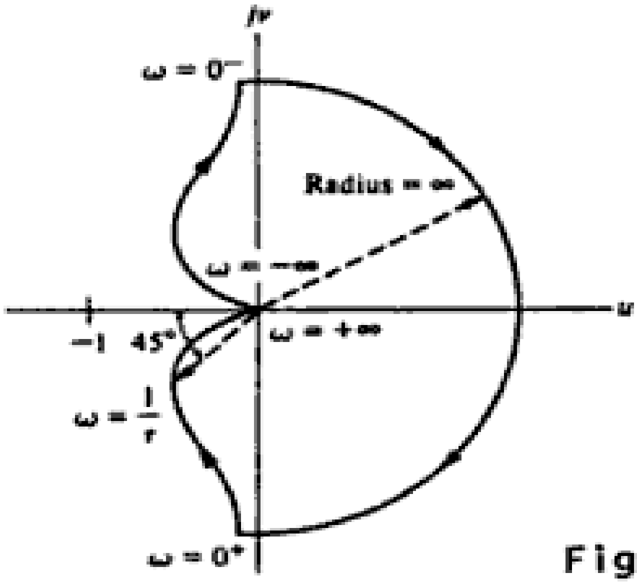


Fig. 3

Bài 7-7 : cho hàm truyền vòng hở của hệ thống. Vẽ biểu đồ quỹ tích nghiệm của hệ thống.

$$\frac{\theta_{on}}{\theta} = \frac{K_0'(D+12)}{D^2(D+20)}$$

Bài làm :

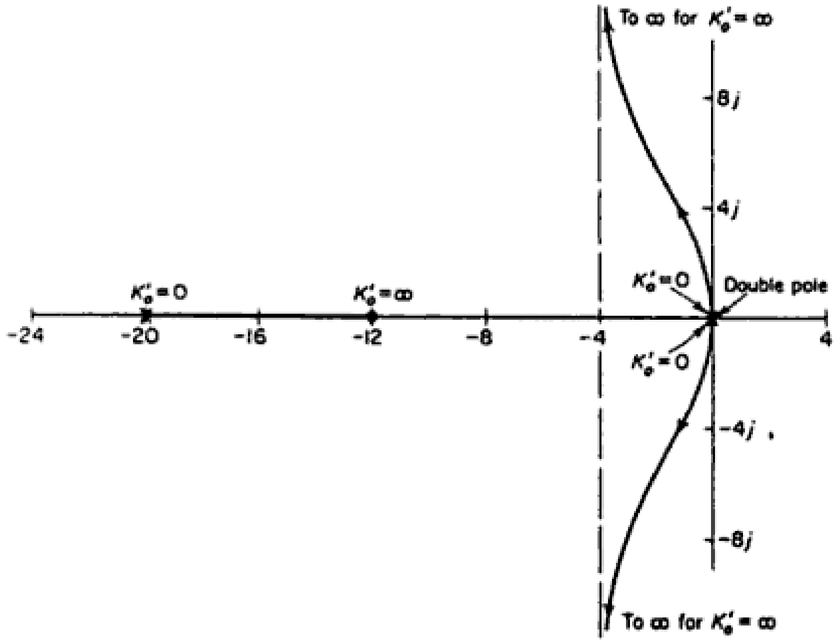
Từ hàm truyền vòng hở ta tính được ba điểm cực của hệ thống, D=-20, và 2 điểm D=0. Hệ thống có 1 điểm zero D=-12. Vì vậy quỹ tích nghiệm của hệ thống sẽ có 2 nhánh xuất phát từ 0 khi K_0=0 và   tiến đến ∞ khi K_0=∞ , một nhánh xuất phát từ -20 khi K_0=0 và tiến đến -12 khi K_0=∞ .

Góc của các đường tiệm cận và điểm xuất phát của các đường tiệm cận là :

$$\alpha = \frac{\pm 180}{2} = \pm 90$$

$$\bar{x} = \frac{-20 - (-12)}{2} = -4$$

Vậy quỹ tích nghiệm có dạng ;



Bài 7-8

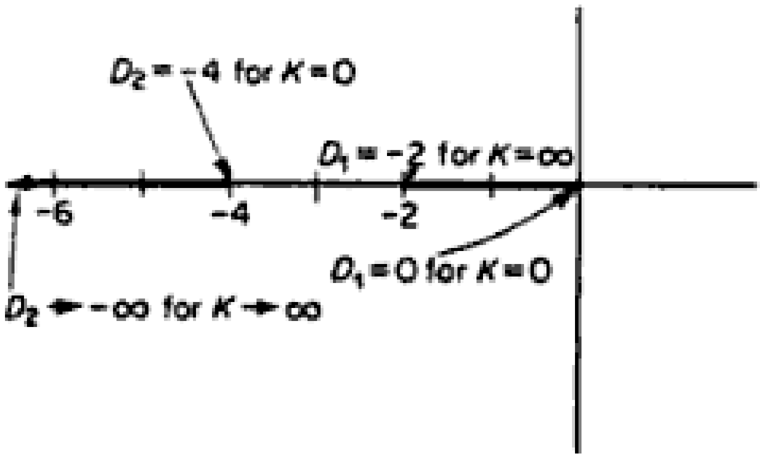
Cho hệ thống có hàm truyền như sau:

$$\frac{\theta_o}{\theta_i} = \frac{K(D+2)}{D^2 + (4+K)D + 2K}$$

Với K là hằng số

Hãy xác định mối quan hệ giữa giá trị của K và đặc tính của hệ thống

Giải:



Phương trình đặc tính của hệ thống là:

$$D^2 + (4+K)D + 2K = 0$$

Giải phương trình trên ta tìm được nghiệm:

$$D_1 = \frac{-(4+K) + \sqrt{16 + K^2}}{2}$$

$$D_2 = \frac{-(4+K) - \sqrt{16 + K^2}}{2}$$

Vì phương trình đặc tính có hai nghiệm thực nên biểu đồ quĩ tích nghiệm có hai nhánh. Khi K=0, D_1=0 và D_2=0 là hai điểm xuất phát của đường quĩ tích nghiệm. Hai nghiệm D_1 và D_2 không thể là nghiệm phức với bất kì giá trị nào của K vì $16 + K^2 > 0$. Các nghiệm này luôn là số thực âm vì

$$\sqrt{16 + K^2} \le 4 + K$$

Khi $K \to \infty$

1) $D_1 \to -2$, do đó qui tích nghiệm của D_1 là đoạn từ 0 đến -2 trên trục thực.
2) $D_2 \to -\infty$, do đó qui tích nghiệm của D_2 là đoạn từ -4 đến $-\infty$ trên trục thực.

Từ biểu đồ qui tích nghiệm ta nhận thấy tất cả các nghiệm đều nằm bên trái mặt phẳng phức do đó hệ thống là ổn định với mọi giá trị của K.

Bài 7-10

Vẽ biểu đồ qui tích nghiệm của hàm

$$KGH = \frac{64K}{s(s+4)(s+16)}$$

Giải:

1) Hệ không có điểm zero. Các điểm cực là s = 0 , s = -4 , s = -16. Các nhánh của qui tích bắt đầu từ các cực của vòng hở và kết thúc tại các điểm zero.
2) Qui tích nghiệm nằm trên trục thực giữa điểm s = 0 và s = -4 , s = -16 và s = $-\infty$. Qui tích nghiệm nằm trên trục thực khi có một số lẻ các điểm cực và zero bên phải điểm đó.
3) Góc tiệm cận là

$$\alpha = \frac{(2k+1)180^\circ}{\Sigma P - \Sigma Z} = \frac{(2k+1)180^\circ}{3} = 60^\circ(2k+1)$$

Với k = 0 thì $\alpha = 60^0$

k = 1 thì $\alpha = 180^0$

k = 2 thì $\alpha = 300^0$

4) Giao điểm của đường tiệm cận và trục thực là:

$$C.G. = \frac{\Sigma P \text{ values} - \Sigma Z \text{ values}}{\Sigma P - \Sigma Z} = \frac{-16-4-0+0}{3-0} = -6\frac{2}{3}$$

5) Điểm tách nhập được xác định bằng cách:

$$\frac{1}{s_b} = \frac{1}{16-s_b} + \frac{1}{4-s_b}$$

hoặc

$$(16-s_b)(4-s_b) = s_b(4-s_b) + s_b(16-s_b)$$

Giá trị xấp xỉ của S_b là

$$s_b \approx -1.86$$

Góc tách nhập từ trục thực là $\pm 90^0$

6) Giá trị lớn nhất của K để hệ thống ổn định có thể xác định được bằng cách thay s = jω, từ đó:

$$KGH(j\omega) = \frac{64K}{j\omega(j\omega+4)(j\omega+16)}$$

Đặt KGH(jω) = -1 ta có:

$$\frac{64K}{j\omega(j\omega+4)(j\omega+16)} = -1$$

Giải ra ta tìm được K

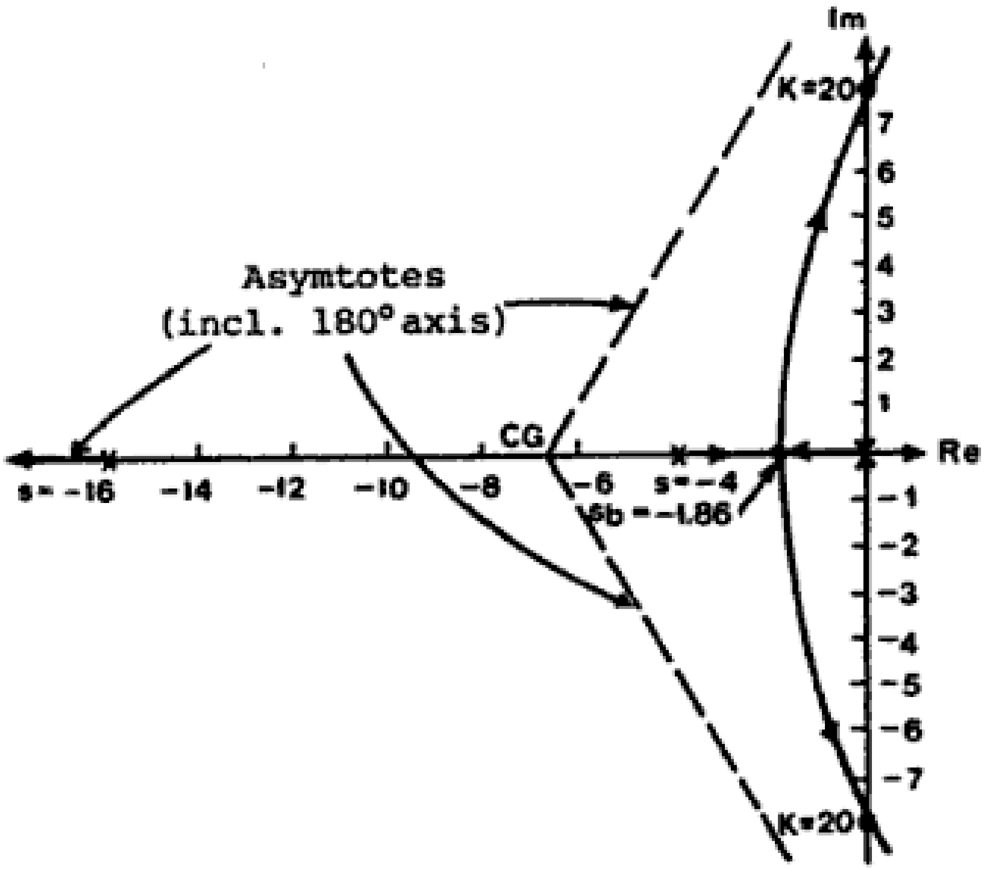
$$K = \frac{20\omega^2 + j\omega(\omega^2 - 64)}{64}$$

Để K là số thực thì $\omega^2 - 64$ phải bằng ‘0’

Do đó ω = ±8

Thay vào ta tìm được K = 20

Biểu đồ quĩ tích nghiệm của hệ thống như hình vẽ sau



Bài 7-12

Cho hệ thống sau

$$\frac{\theta_o}{\theta_i} = \frac{K}{D^2 + 3D + K}$$

Vẽ biểu đồ quĩ tích nghiệm

Giải:
Nghiệm của phương trình đặc tính là

$$D_1 = \frac{-3 + (9-4K)^{1/2}}{2}$$

$$D_2 = \frac{-3 - (9-4K)^{1/2}}{2}$$

Để 9 – 4K > 0 tất cả các nghiệm đều là số thực âm, ta có

với

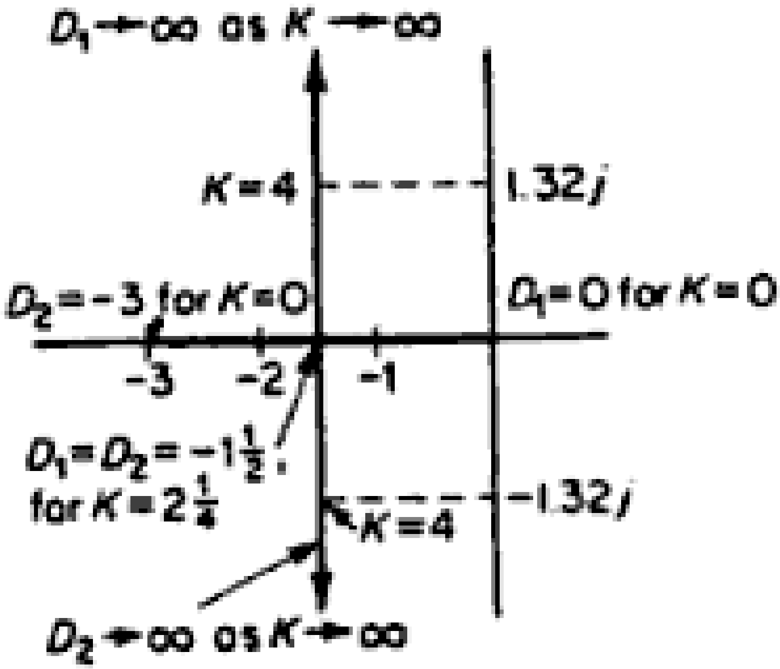
$$K = 2\tfrac{1}{4} \quad \begin{cases} D_1 = -1\tfrac{1}{2} \\ D_2 = -1\tfrac{1}{2} \end{cases}$$

Với $K > 2\frac{1}{4}$, nghiệm là cặp số phức với phần thực bằng $-1\frac{1}{2}$ và phần ảo bằng $\pm\dfrac{(9-4K)^{1/2}}{2}$

Phần ảo sẽ tiến đến vô cùng khi $K \rightarrow \infty$

$$\left.\begin{aligned} D_1 &= \frac{-3 + 2.64j}{2} = -1.5 + 1.32j \\ D_2 &= \frac{-3 - 2.64j}{2} = -1.5 - 1.32j \end{aligned}\right\} \quad \text{for } K = 4$$

Với mọi giá trị của K thì hệ thống ổn định vì tất cả các nghiệm đều nằm bên trái mặt phẳng phức
Biểu đồ quĩ tích nghiệm:



Bài 7-14

Cho hàm truyền hệ thống vòng hở như sau

$$\frac{\theta_{on}}{\theta} = \frac{K'}{D(D^2 + 2D + 2)}$$

Vẽ biểu đồ quĩ tích nghiệm

Giải:

1) Hàm truyền của hệ thống là

$$\frac{\theta_{on}}{\theta} = \frac{K'}{D(D+1+j)(D+1-j)}$$

2) Các điểm cực là 0 , -1-j , -1+j

Do đó quĩ tích nghiệm sẽ có ba nhánh, bắt đầu từ những điểm có K'=0

3) Mỗi nhánh quĩ tích sẽ kết thúc tại ∞, bởi vì không có điểm zero. Góc tiệm cận của các nhánh khi K' → ∞ sẽ là

$$\alpha = \pm\frac{180°}{3} = \pm 60° \text{ and } \quad \alpha = \pm\frac{3 \times 180°}{3} = 180°$$

Tiệm cận sẽ cắt trục thực tại điểm

$$\bar{x} = -\frac{2}{3}$$

4) Không có các điểm tách nhập. Một nhánh quĩ tích sẽ bắt đầu từ 0 khi K' = 0 và tiến theo trục thực âm về -∞ khi K' → +∞

5) Thay jb vào D ta sẽ tìm được điểm cắt của quĩ tích nghiệm với trục ảo

$$D^3 + 2D^2 + 2D + K' = 0$$

$$[-2b^2 + K'] + j[-b(b^2 - 2)] = 0$$

Giải ra ta tìm được $b = \pm 1.414, \quad K' = 4$

Như vậy qui tích cắt trục ảo tại

$\pm 1.414j \quad$ for $K' = 4$

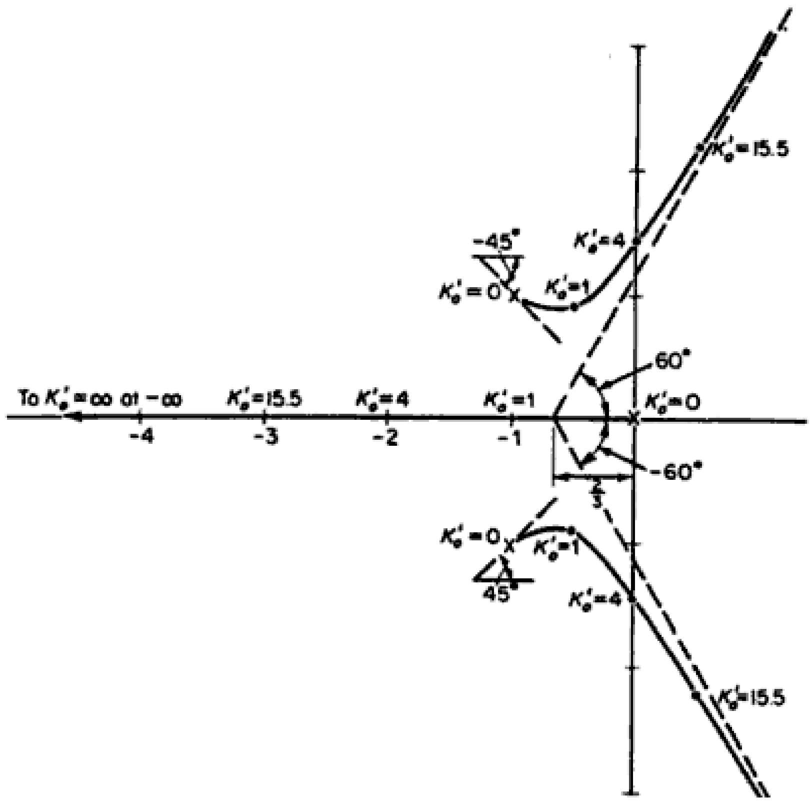
6) Góc xuất phát từ điểm cực -1+j

$$\Psi_1 = 0 - 135° - 90° - 180° = -45°$$

Từ điểm cực -1-j

$$\Psi_2 = 45°$$

Biểu đồ qui tích nghiệm



Bài 7-15:

Cho hàm truyền vòng hở của hệ thống là:

$$\frac{\theta_{on}}{\theta} = \frac{K_0'}{D(D+1)(D+8)}$$

Xác định giá trị của K_0' sao cho hệ thống ổn định và vẽ quỹ tích nghiệm của hệ thống?

Lời giải:

Phương trình đặc tính của hệ thống có 3 nghiệm, vì vậy quỹ tích nghiệm có 3 nhánh. Quỹ tích bắt đầu ở điểm 0, -1, -8 và kết thúc ở điểm vô cùng, Góc tiệm cận là:

$$\alpha^\circ = \frac{3 \times (\pm 180^\circ)}{3} = 180^\circ$$

$$\alpha^\circ = \frac{n \times 180^\circ}{N_p - N_z} = \frac{\pm 180^\circ}{3-0} = \pm 60^\circ$$

Đường tiệm cận cắt trục thực tại điểm:

$$x = \frac{\Sigma P_0 - \Sigma Z_0}{N_p - N_z} = \frac{(-1-8) - 0}{3-0} = -3$$

1 điểm tách nằm giữa 0 và 1. Quỹ tích vẫn liên tục trên trục thực giữa 0 và -1, và giữa điểm -8 và -∞

Phương trình đặc tính của hệ thống là:

$$D^3 + 9D^2 + 8D + K_0' = 0$$

Hay

$$K_0' = -D^3 - 9D^2 - 8D$$

Để tìm điểm tách , chúng ta lấy đạo hàm:

$$\frac{dK_0'}{dD} = -3D^2 - 18D - 8 = 0$$

Giải phương trình $3D^2 + 18D + 8 = 0$

Ta được

D=-0.5 và D=-5.5.

Như vậy, D=-0.5 tương ứng với điểm tách. Vậy K_0’ là:

$$K_0' = -(-0.5)^3 - 9(-0.5)^2 - 8(-0.5) = 1.875$$

Thay jb=D vào phương trình đặc tính:

$$j^3b^3 + 9j^2b^2 + 8jb + K_0' = 0$$

$$(K_0' - 9b^2) + jb(8-b^2) = 0$$

Ta có

$$K_0' - 9b^2 = 0$$

$$jb(8-b^2) = 0$$

Giải ta có:

$$b = \pm\sqrt{8}, \qquad K_0' = 72$$

Ta nhận thấy quỹ tích nghiệm cắt trục ảo tại ± 2.83, ứng với K_0’ = 72. Hàm truyền vòng kín không có điểm cực và điểm zero. Tổng các nghiệm của phương trình đặc tính là -9. Với K_0’ =72 thì 2 nghiệm là -2.83 và 2.83. Như vậy cả 3 nghiệm phải là -9. Chúng ta thấy rằng K_0’ =72 xác định tại -9 trên nhánh bắt đầu từ -8 tới -∞

Với K_0’ < 72 thì hệ thống ổn định

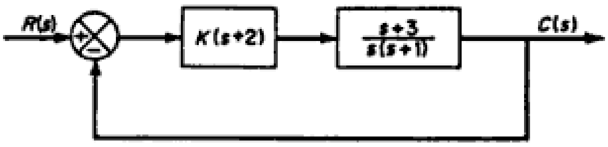
Với K_0’ = 72 thì hệ thống ở biên giới ổn định

Với K_0’ > 72 thì hệ thống không ổn định.

Bài 7-28:

Sơ đồ khối của hệ thống trình bày ở hình 1, K>o.

Vẽ quỹ tích nghiệm của hệ thống, Chú ý: với K lớn và bé thì hệ thống có nhiễu răng cưa, với K trung bình thì hệ đáp ứng trơn.



Lời giải:

Vẽ quỹ tích nghiệm chúng ta phải thực hiện các bước sau:

1) Hiển thị trên mặt phẳng phức các điểm cực và điểm không vòng hở. Tồn tại quỹ tịch nghiệm trên phần ân trục thực giữa -3 và -2 và giữa -1 và 0.

2) Không có đường tiệm cận trong miền phức từ điểm cực và zero của vòng hở.

3) Từ phương trình đặc tính của hệ thống:

$$1 + \frac{K(s+2)(s+3)}{s(s+1)} = 0$$

$$K = -\frac{s(s+1)}{(s+2)(s+3)}$$

Chúng ta xác định được điểm tách và điểm nhập.

$$\frac{dK}{ds} = -\frac{(2s+1)(s+2)(s+3) - s(s+1)(2s+5)}{(s+2)^2(s+3)^2}$$

$$= -\frac{4(s+0.634)(s+2.366)}{(s+2)^2(s+3)^2} = 0$$

Giải phương trình ta có:

$$s = -0.634, \quad s = -2.366$$

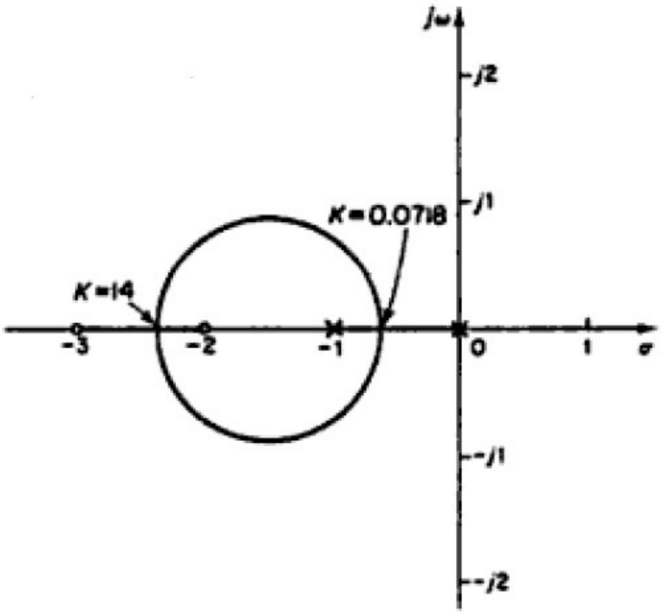
Với $s = -0.634$ giá trị của K là:

$$K = -\frac{(-0.634)(0.366)}{1.366 \times 2.366} = 0.0718$$

Với $s = -2.366$ giá trị của K là:

K= 14

Các giá trị của K trong 2 trường hợp để xác định được điểm tách và điểm nhập. Điểm s=-2.366 nằm giữa 2 điểm không, do vậy nó là điểm nhập, còn s= -0.634 là điểm tách.



4) Ở hình 2 thể hiện quỹ tích nghiệm của hệ thống. Chúng ta có thể tìm đầy đủ các điểm thõa mãn điều kiện góc.

5) Ta có thể xác định đường kính quỹ tích nghiệm tương ứng với giá trị K bằng cách dùng điều kiện về độ lớn. Với 1 giá trị K được đưa ra thì các cực vòng kín đều thõa mãn điều kiện về góc và độ lớn, có thể tìm từ quỹ đạo nghiệm số.

Hệ thống là ổn định với 1 vài giá trị dương của K

Với 0<K<0.0718 và K>14 hệ thống bị nhiễu răng cưa, hệ trơn láng với $0.0718 < K < 14$.

Bài 7-31:

Cho hàm truyền hệ thống:

$$G(j\omega) = \frac{1}{(1 + \frac{j\omega}{20})^2}$$

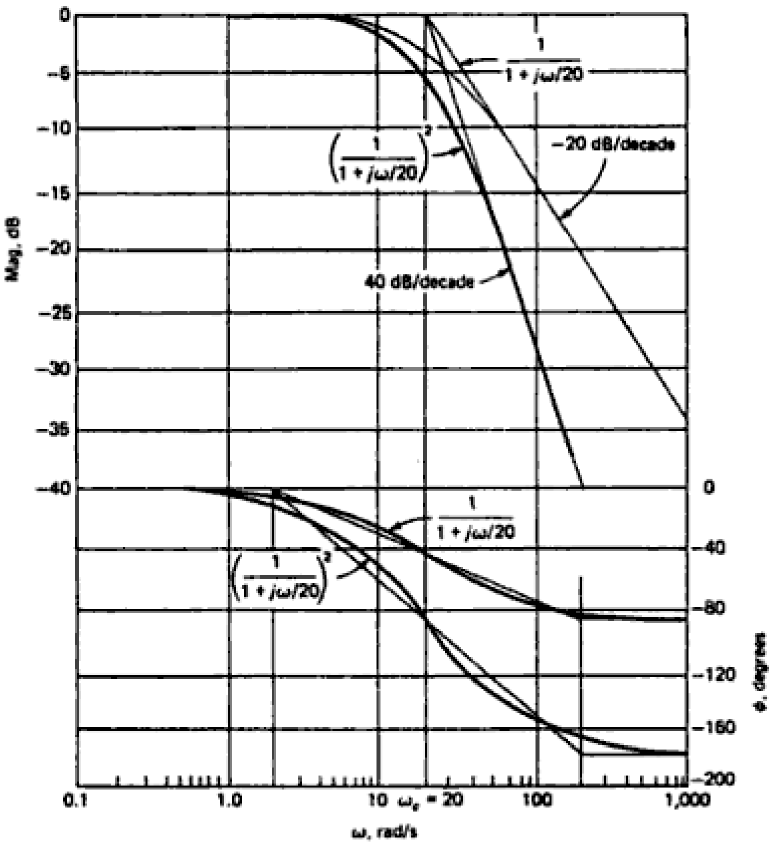
Vẽ đường cong đáp ứng tần số của hệ thống

<u>Lời giải:</u>

Chúng ta sẽ bắt đầu với đồ thị biên độ và góc pha của

$\frac{1}{1 + \frac{j\omega}{20}}$ và kết hợp cả 2 đường cong trên. Đồ thị biên độ với

$\frac{1}{1 + \frac{j\omega}{20}}$ và $\frac{1}{(1 + \frac{j\omega}{20})^2}$ được hiển thị trên hình 1



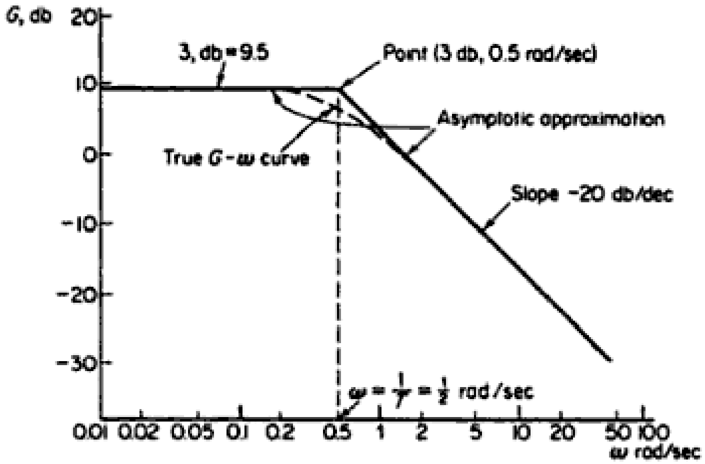
Hình 1

Chú ý rằng đường cong $\frac{1}{(1 + \frac{j\omega}{20})^2}$ có được bằng cách giá trị decibel tại các tần số khác nhau.

Tại tần số cao, đường cong $\frac{1}{(1+\frac{j\omega}{20})^2}$ cho bởi -40dB thõa mãn còn -20 dB thì không. Điều này đúng với thực tế rằng logarithm của 1 số bình phương thì bằng 2 lần tích

Bài 7-33:
Vẽ biểu đồ Bode từ hàm truyền:

$$\frac{\theta_0}{\theta_i} = \frac{3}{1+2D} \; ; \; \theta_i = 2 \sin \omega t$$



Lời giải:

Chúng ta thực hiện theo các bước sau:

1) Vẽ đường nằm ngang 3

$$db = 20 \log 3 = 20 \times 0.477 = 9.54$$

2) Tần số góc duy nhất là :

$\omega_1 = \frac{1}{2} \frac{rad}{sec}$ từ mẫu thức $(1 + 2D)$

Điểm $\omega = \frac{1}{T} = \frac{1}{2} \frac{rad}{sec}$ nằm trên đường nằm ngang.

3) Vẽ 1 đường từ điểm này với độ dốc $-20\frac{db}{dec}$

Hình vẽ được thể hiện từ đồ thị gần đúng trên.

Bài 7-34: Hàm truyền của hệ thống được biểu diễn như sau:

$$G(j\omega) = \frac{e^{-j\omega L}}{1 + j\omega T}$$

Vẽ đồ thị bode của hệ thống

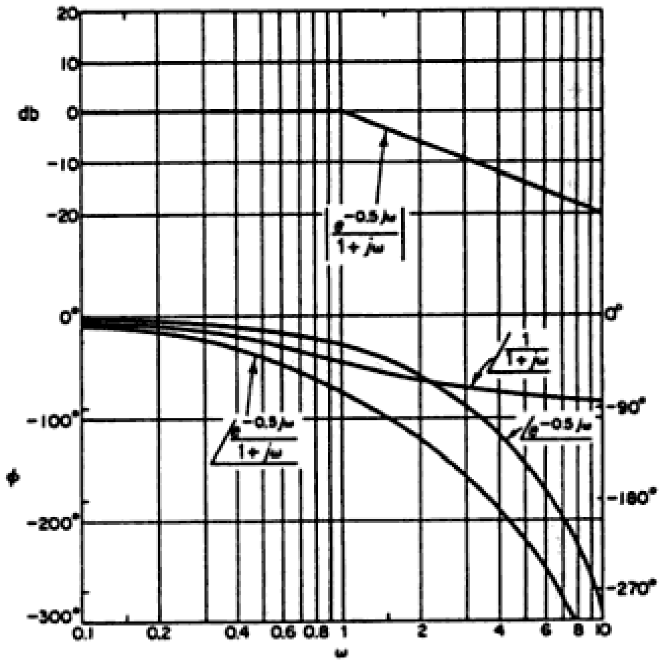
Giải:

Đầu tiên ta tín biên độ hàm log có được

$$20\ \log|G(j\omega)| = 20\ \log|e^{-j\omega L}| + 20\ \log\left|\frac{1}{1+j\omega T}\right|$$
$$= 0 + 20\ \log\left|\frac{1}{1+j\omega T}\right|$$

Góc pha là G(jw) là:

$$\angle G(j\omega) = \angle e^{-j\omega L} + \angle \frac{1}{1+j\omega T} = -\omega L - \tan^{-1}\omega T.$$



Hàm truyền

$$G(j\omega) = \frac{e^{-0.5j\omega}}{1+j\omega}$$

Vẽ được đồ thị biên độ và góc theo tần số như hình vẽ trên

Bài 41:

Hàm truyền của hệ thống được cho như sau:

$$\frac{\theta_0}{\theta_i} = \frac{1}{1 + 0.7D + 0.1D^2}$$

Vẽ đặc tính đáp ứng tần số của hệ thống.

Giải:

Tìm đáp ứng tần số của không gian trạng thái đặt D=jw. Ta có

$$\left(\frac{\theta_0}{\theta_i}\right)_{j\omega} = \frac{1}{1 - 0.1\omega^2 + j \cdot 0.7\omega}$$

Tính được G, ϕ là:

$$G = \frac{1}{[(1 - 0.1\omega^2)^2 + (0.7\omega)^2]^{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{1}{1 + 0.29\omega^2 + 0.01\omega^4}\right)$$

$$\phi = 0 - \tan^{-1}\frac{0.7\omega}{1 - 0.1\omega^2}$$

Đáp ứng tần số của hệ thống được vẽ như hình vẽ:

Tính được :

$$\omega = \omega_n = \frac{1}{T} = 3.16 \text{ rad/sec}$$

Ta tìm được giải tần số là. Đặt:

$$1 - 0.1\omega^2 = 0$$

Ta tìm được là:

$$\phi = -90°$$

Và

$$w = w_n = \frac{1}{T}$$

Bài 42

Cho hệ thống bậc 1:

$$1.25\frac{dz}{dt} + z = y$$

Đầu vào là dạng sin có dạng:

$$y(t) = 3\sin(\omega_0 t)\text{mV}.$$

Gỉa sử đầu ra của hệ thống được cho qua bộ lọc mà loại bỏ tất cả các tín hiệu có biên độ nhỏ 0.01mV. Tìm tần số cắt wc sao cho với tất cả $w_o > w_c$ thì bộ lọc sẽ không quan sát được tín hiệu đầu vào

Giải

Ta có:

$$1.25\frac{dz}{dt} + z = 3\sin\omega_0 t$$

Ta tính được:

$$z_u = \frac{3}{\sqrt{1 + (1.25\omega_0)^2}} \sin(\omega_0 t + \phi)$$

$$\tan\phi = -1.25\omega_0$$

Biên độ A được tính như sau:

$$A = \frac{3}{\sqrt{1 + (1.25\omega_0)^2}}$$

với Wc=Wn ta tìm được A=0.01. Ta tìm được

$$\omega_c = 240 \frac{rad}{s} = 38.2Hz$$

Bài 7-43:

Hệ thống được đưa ra như sau:

$$A\ddot{x} + B\dot{x} + Cx = f(t)$$

Tìm đáp ứng sin của hệ thống

Giải:

Có thể biểu diễn lại f(t) như sau:

$$f(t) = e^{j\omega t}$$

Ta có đáp ứng là:

$$x(t) = ke^{j(\omega t + \phi)}$$

tại đó k là biên độ và ϕ là góc khi tín hiệu đầu vào là dạng véc tơ

Vậy ta có

$$\frac{dx}{dt} = j\omega ke^{j(\omega t + \phi)}, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = (j\omega)^2 ke^{j(\omega t + \phi)}$$

Thay vào phương trình trên đầu bài ta có:

$$A(j\omega)^2 ke^{j(\omega t + \phi)} + Bj\omega ke^{j(\omega t + \phi)} + Cke^{j(\omega t + \phi)}$$
$$= e^{j\omega t}$$

Chi cả hai vế cho e^{jwt} ta được

$$ke^{j\phi}[A(j\omega)^2 + B(j\omega) + C] = 1$$

hoặc

$$ke^{j\phi} = \frac{1}{A(j\omega)^2 + B(j\omega) + C}$$

CHƯƠNG 8:

Bài 2:

Hệ thống của được mô tả như sau:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

Tại đó ta có:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \; \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix}$$

Sử dụng phương pháp phản hồi biến trạng thái đặt cực của hệ thống là -4 và -6.

Giải

Viết u(t) thành dưới dạng

$$u(t) = -G \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}.$$

Vì vậy:

$$G = [g_1, \; g_2]$$

Và có:

$$u(t) = -[g_1, \; g_2] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = -[g_1 x_1(t) + g_2 x_2(t)]$$

Trị số đặc trưng của A là:

$$\lambda_1 = j, \lambda_2 = -j$$

Cần phải phản hồi nếu giá trị thu được là không mong muốn. Hệ thống vòng kín cho tất cả các giá trị của g1 và g2 là:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}[g_1 g_2]\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & 0\\ g_1 & g_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 - g_1 & -g_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}$$

$$A - BG = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 - g_1 & -g_2\end{bmatrix}$$

Nếu muốn trị số đặc trưng của ma trận A-BG tại:

$$\mu_1 = -4 \quad \text{and} \quad \mu_2 = -6$$

Chúng ta áp dụng phương pháp kéo theo. từ ma trận [A,B] có thể điều khiển được ta có thể sử dụng biến phản hồi có thể thay đổi được. Trong trường hợp này khi đưa ra hệ thống có dạng

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

A là ma trận bất kỳ n x n

B là ma trận bất kỳ n x m

Và [A,B] điều khiển được. Tại đó tồn tại ít nhất một ma trận phản hồi G m x n . Mà trị số đặc trưng của A-BG bằng giá trị cần mong muốn. Có đa thức đặc tính

$$p(\mu) = \det\begin{bmatrix}\mu & -1\\ 1 + g_1 & \mu + g_2\end{bmatrix} = \mu(\mu + g_2) + 1 + g_1$$

$$= \mu^2 + g_2\mu + 1 + g_1$$

Có

$$p(\mu) = (\mu - \mu_1)(\mu - \mu_2) = (\mu + 4)(\mu + 6)$$

$$= \mu^2 + 10\mu + 24$$

Vậy giá trị của g1 và g2 là

$$g_1 = 23, \; g_2 = 10.$$

Bài 8-16

Hình vẽ 1 biểu diễn quĩ tích nghiệm cho hệ thống loại 2 với hàm truyền

$$G_x(s) = \frac{K}{s^2\left(s + \frac{1}{T_1}\right)}$$

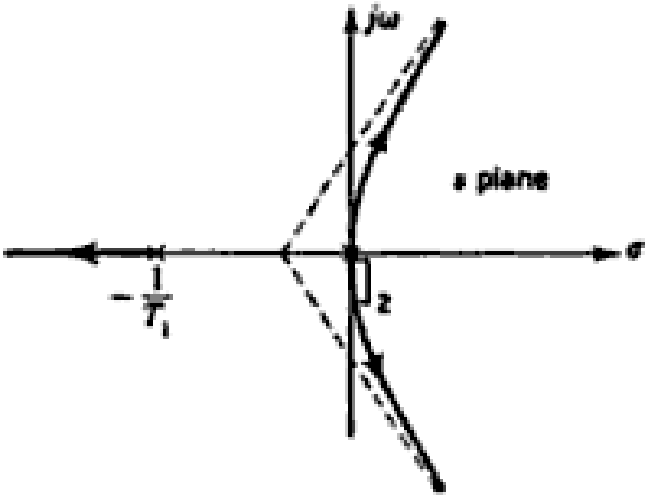


Fig. 1

Phân tích tính ổn định của hệ thống. Giả sử một điểm zero được đưa vào tại s = $\frac{-1}{T2}$ giữa gốc và điểm cực $\frac{-1}{T1}$. Vẽ biểu đồ quĩ tích nghiệm mới. Xét tính ổn định của hệ thống.

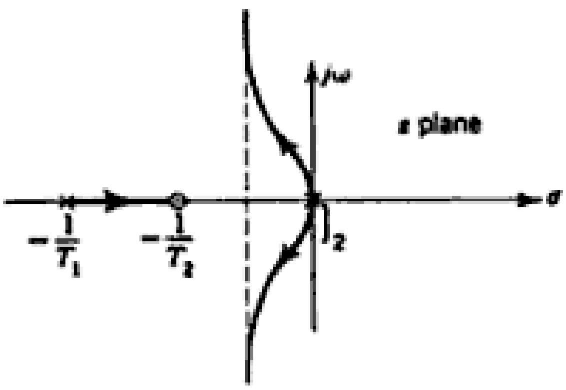
Giải:

Ở hình 1 ta thấy toàn bộ một nhánh của quĩ tích nghiệm nằm ở bên phải mặt phẳng phức vì thế hệ thống không ổn định với mọi giá trị K. Khi thêm một điểm zero tại $\frac{-1}{T2}$, số cực trừ đi số zero bằng 2. Vì thế sẽ có tiệm cận đứng tại

$$s = \frac{T_1 - T_2}{2T_1T_2}$$

Khi K = 0, quĩ tích đi qua gốc toạ độ và phần quĩ tích trên trục thực nằm giữa hai điểm $\frac{-1}{T1}$ và $\frac{-1}{T2}$

Biểu đồ quĩ tích nghiệm được vẽ lại:



Bài 18:

Cho hệ thống được mô tả bởi:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

Với

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Hệ thống được mô tả với trị riêng $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = -5$, với tín hiệu phản hồi trạng thái thì $\dot{x}$ trở thành:

$$\dot{x} = (A-BK)x + Bu$$

Hãy tìm giá trị của K?

Lời giải:

Phương trình đặc tính của hệ thống:

$$|\lambda I - A - BK| = 0$$

Viết về dạng

$$|\lambda I - A||I + (\lambda I - A)^{-1} BK| = 0$$

$$(\lambda I - A)^{-1}B = D(\lambda).$$

Chúng ta xác định K từ phương trình:

$$|I + D(\lambda)K| = 0$$

Với:

$$|I + D(\lambda)K| = |I + KD(\lambda)|$$

Các phần tử cột thứ j của ma trận I ta thay bằng e_j, và cột thứ j của ma trận $D(\lambda)$ bằng d_j. Như vậy 1 cột của 1 ma trận là 0. Như vậy, chúng ta có được

$$K\, d_j(\lambda) = -e_j\,.$$

Tạo thành n cột độc lập $d_{j(i)}(\lambda_i)$, ta có:

$$K = = [e_{j_1}\; e_{j_2}\; \ldots\; e_{jn}][d_{j_1}(\lambda_1) d_{j_2}(\lambda_2)\; \ldots\; d_{jn}(\lambda_n)]^{-1}$$

$$D(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & -2 \\ 0 & \lambda-3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\lambda(\lambda-3)} \begin{bmatrix} \lambda-3 & 2 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$d_1(\lambda_1) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad d_1(\lambda_2) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$d_2(\lambda_1) = \begin{bmatrix} \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{6} \end{bmatrix}, \quad d_2(\lambda_2) = \begin{bmatrix} \frac{1}{20} \\ -\frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

Ma trận D:

$$D = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & -\frac{6}{5} \\ 0 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & \frac{6}{5} \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Chú ý để mô tả D ta dùng $d_1(\lambda_1)$ và $d_2(\lambda_2)$ như các cột độc lập, và chọn $d_1(\lambda_2)$ $d_2(\lambda_1)$. Ta có được trị riêng mong muốn

$\lambda_1 = -3, \ \lambda_2 = -5.$

CHƯƠNG 9:

BÀI 1:

Đưa hàm truyền của hệ thống về dạng không gian trạng thái:

$$G(S) = \frac{C(S)}{U(S)} = \frac{S + 2}{(S + 1)^2 \ (S + 3)}$$

Giải

Hàm truyền của hệ thống được phân tích như sau:

$$G(S) = \frac{S + 2}{(S + 1)^2 \ (S + 3)} = \frac{\frac{1}{2}}{(S + 1)^2} + \frac{\frac{1}{4}}{S + 1} + \frac{-\frac{1}{4}}{S + 3}$$

Nhân thêm s và s^2 vào hàm truyền của hệ thống rồi phân tích ra:

$$SG(S) = \frac{S(S+2)}{(S+1)^2\,(S+3)} = \frac{-\frac{1}{2}}{(S+1)^2} + \frac{\frac{1}{4}}{S+1} + \frac{\frac{3}{4}}{S+3}$$

$$S^2G(S) = \frac{S^2(S+2)}{(S+1)^2(S+3)} = 1 - \frac{3S^2+7S+3}{(S+1)^2(S+3)}$$

$$= 1 + \frac{\frac{1}{2}}{(S+1)^2} + \frac{-\frac{3}{4}}{S+1} + \frac{-\frac{9}{4}}{S+3}$$

Chú ý rằng:

$$\frac{S^2C(S) - U(S)}{U(S)} = \frac{\frac{1}{2}}{(S+1)^2} + \frac{-\frac{3}{4}}{S+1} + \frac{-\frac{9}{4}}{S+3}$$

Sau đó ta đặt

$$X_1(S) = C(S)$$

$$X_2(S) = SC(S)$$

$$X_3(S) = S^2C(S) - U(S)$$

Ta đưa ra:

$$\begin{bmatrix} \frac{X_1(S)}{U(S)} \\ \frac{X_2(S)}{U(S)} \\ \frac{X_3(S)}{U(S)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & -\frac{9}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{(S+1)^2} \\ \frac{1}{S+1} \\ \frac{1}{S+3} \end{bmatrix}$$

Ta có:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & -\frac{9}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

Đưa ra được

$$\frac{Y_1(S)}{U(S)} = \frac{1}{(S+1)^2}$$

$$\frac{Y_2(S)}{U(S)} = \frac{1}{S+1}$$

$$\frac{Y_3(S)}{U(S)} = \frac{1}{S+3}$$

Hoặc dạng trong không gian trạng thái

$$y'_1 = -y_1 + y_2$$

$$y'_2 = -y_2 + u$$

$$y'_3 = -3y_3 + u$$

Có dạng ma trận:

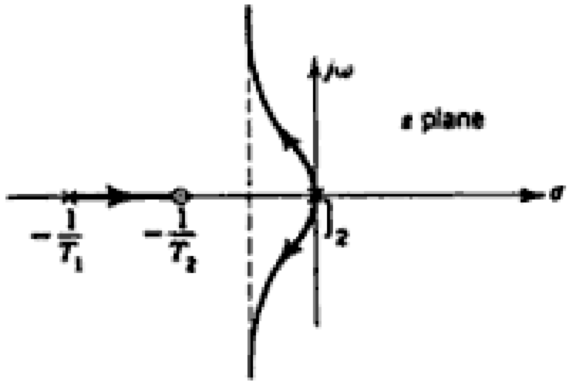
$$\begin{bmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ y'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Điều kiện ban đầu của hệ thống:

$$\begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ y_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & -\frac{9}{4} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix}$$

Tại đó

$$x_1(0) = C(0), \qquad x_2(0) = \dot{C}(0), \; x_3(0) = \ddot{C}(0) - u(0)$$



$$G(s) = \frac{C(s)}{U(s)} = \frac{2}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

Bài 9-2

Cho hàm truyền hệ thống như sau:

Lập phương trình trạng thái.

Giải:

Từ hàm truyền hệ thống ta viết được phương trình vi phân sau:

$$\dddot{c}(t) + 6\ddot{c}(t) + 11\dot{c}(t) + 6c(t) = 2u(t)$$

Chọn vector trạng thái

Đặt biến trạng thái

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ \dot{c} \\ \ddot{c} \end{bmatrix}$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

$$\dot{x}_3 = -6x_1 - 11x_2 - 6x_3 + 2u$$

Vì vậy ta có thể viết được

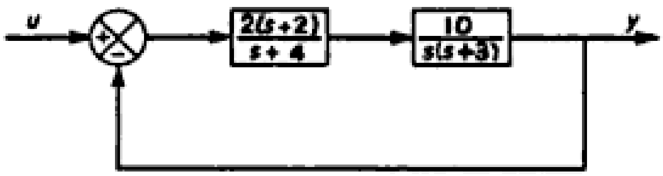
$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$c = Cx$$

Trong đó:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad C = [1 \quad 0 \quad 0]$$

Bài 9-31 : chỉ ra phương trình không gian trạng thái của hệ thống cho bởi hình vẽ sau :



Bài làm :

Hàm truyền vòng kính của hệ thống là

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)}$$

Trong đó

$$G(s) = \frac{20(s+2)}{s(s+3)(s+4)}$$

⇨

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\frac{20(s+2)}{s(s+3)(s+4)}}{1 + \frac{20(s+2)}{s(s+3)(s+4)}} = \frac{\frac{20(s+2)}{s(s+3)(s+4)}}{}$$

$$= \frac{20(s+2)}{s(s+3)(s+4) + 20(s+2)} = \frac{20(s+2)}{s^3 + 7s^2 + 32s + 40}$$

Phương trình hàm truyền vòng kính viết theo cách khác có dạng sau :

$$\dddot{y} + 7\ddot{y} + 32\dot{y} + 40y = 20\dot{u} + 40u$$

Chúng ta hãy đặt các biến trạng thái :

$$x_1 = y - \alpha_o u$$

$$x_2 = \dot{y} - \alpha_o \dot{u} - \alpha_1 u = \dot{x}_1 - \alpha_1 u$$

$$x_3 = \ddot{y} - \alpha_o \ddot{u} - \alpha_1 \dot{u} - \alpha_2 u = \dot{x}_2 - \alpha_2 u$$

Với các hệ số được chỉ ra bởi phương trình :

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}\dot{y} + a_n y = b_o u^{(n)} +$$

$$b_1 u^{(n-1)} + \ldots + b_{n-1}\dot{u} + b_n u$$

$\alpha_o = b_o$ in our case $b_o = 0$

$\alpha_1 = b_1 - a_1\alpha_o$ -''- $\alpha_1 = 0$

$\alpha_2 = b_2 - a_1\alpha_1 - a_2\alpha_o = 20 - 7;0 - 32;0 = 20$

$\alpha_3 = b_3 - a_1\alpha_2 - a_2\alpha_1 - a_3\alpha_o = 40 - 7;20 = -100$

Phương trình không gian trạng thái có dạng sau :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ & & & & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_n \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \ 0 \ \cdots \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} + \alpha_o u$$

Vậy trong trường hợp của ta là :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -40 & -32 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 20 \\ -100 \end{bmatrix} [u]$$

and

$$y = [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

CHƯƠNG 12:

BÀI 5:

Hệ thống được mô tả như sau:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

Tại đó có:

Hãy chỉ ra hệ thống hoàn không quan sát được

Giải:

Có thể đặt u=0. Vì hàm điều khiển u không ảnh hưởng tới tính quan sát của hệ thống. Ma trận quan sát của hệ thống:

$$[C' \quad A'C' \quad (A')^2C'] = \begin{bmatrix} 4 & -6 & 6 \\ 5 & -7 & 5 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Hạng của ma trận là nhỏ hơn 3 có:

$$\begin{bmatrix} 4 & -6 & 6 \\ 5 & -7 & 5 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = 0$$

Vì vậy hệ thống không hoàn toàn quan sát được. Hàm truyền hệ thống X1(s) và G(s) là:

$$\frac{X_1(s)}{U(s)} + \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

Và hàm truyền Y(s) và X1(s) là:

$$\frac{Y(s)}{X_1(s)} = (s+1)(s+4)$$

Hàm truyền Y(s) và U(s) là:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{(s+1)(s+4)}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

Bài 12-9 ; cho hệ thống có hàm truyền không gian trạng thái như sau. Xét khả năng điều khiển của hệ thống.

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

where

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \text{ and } B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Bài làm :

Cho hệ thống trên có khả năng điều khiển trạng thái được, thì điều kiện cần và đủ là ma trận S phải có hạng(rank) là 2 với S=[B AB].

Chúng ta có :

$$[B \quad AB] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \text{nonsingular}$$

Vậy ta kết luận rằng hệ thống này không có khả năng điều khiển được.

Bài 12-18:

Xác định tính quan sát được của hệ thống sau:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 20 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

Lời giải:

Ta tính toán các ma trận sau:

C', $A'C'$, $(A')^2C'$

$$C' = \begin{bmatrix} 20 \\ 9 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A'C' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 9 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$(A')^2C' = \begin{bmatrix} 0 & -6 & 36 \\ 0 & -11 & 60 \\ 1 & -6 & 25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 9 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -18 \\ -39 \\ -9 \end{bmatrix}$$

$$|C' \quad A'C' \quad (A')^2C'| = \begin{vmatrix} 20 & -6 & -18 \\ 9 & 9 & -39 \\ 1 & 3 & -9 \end{vmatrix} \neq 0$$

Hạng của ma trận là 3. Vậy hệ thống quan sát được.

$$B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad AB = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$A^2B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -5 \end{bmatrix} = -10 \neq 0$$

Vector là các hàng độc lập, vì vậy hệ thống hoàn toàn có thể điều khiển được.
Hệ thống hoàn toàn có thể quan sát được khi vector C*, A*C*, $(A^*)^2C^*$ là các hàng độc lập

$$C^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad A^*C^* = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$(A^*)^2C^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Và

$$\det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = 5 \neq 0$$

Như vậy vector là các hàng độc lập và hệ thống hoàn toàn có thể quan sát được.

Chương 13

Bài 13-1

Cho haṁ truyêǹ của hệ thôńg. Haỹ xać định phương triǹh đặc tińh va`xeť tińh ổn định của hệ thông

$$\frac{\theta_o}{\theta_i} = \frac{K}{D^3 + 2D^2 - 5D - 6}$$

Giải:
Phương trình đặc tính của hệ thống có dạng:

$$D^3 + 2D^2 - 5D - 6 = 0$$

Thực hiện phép biến đổi:

$$D^3 + 2D^2 - 5D - 6 = (D+1)(D^2+D-6) = (D+1)(D+3)(D-2) = 0$$

Nghiệm của phương trình là:

$$D_1 = -1,\ D_2 = -3,\ D_3 = 2$$

Phương trình đặc tính có một nghiệm dương $D_3 = 2$ do đó hệ thống không ổn định.

Bài 13-2
Xét tính ổn định của hệ thống có hàm truyền

$$\frac{\theta_0}{\theta_i} = \frac{K}{D^2 + 4D + 5}$$

Giải:
Phương trình đặc tính hệ thống:

$$D^2 + 4D + 5 = 0$$

Giải ra nghiệm của phương trình

$$D_1 = \frac{-4 + (16-20)^{1/2}}{2} = -2 + j\cdot 2$$

$$D_2 = \frac{-4 - (16-20)^{1/2}}{2} = -2 - j\cdot 2$$

Tất cả các nghiệm có phần thực âm do đó hệ thống là ổn định.

Bài 13-6
Xét tính ổn định của hệ thống có phương trình đặc tính:

$$D^4 + 3D^3 + 2D^2 + 10D + 2 = 0$$

Giải:
Lập bảng Routh

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 10 & 0 \\ -\frac{4}{3} & 2 & \\ \frac{29}{2} & 0 & \\ 2 & & \\ 0 & & \end{array}$$

Kêt́ luận hệ thônǵ không ổn định vi`cać gia´trị ở cột thư´nhâť đổi dâú một lâǹ.

Bài 13-10:

Cho hệ thống được đưa ra ở dạng tiêu chuẩn Jordan, sau khi chuyển đổi:

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Tối giản hệ thống dựa vào tính quan sát được và điều khiển được.

Chứng tỏ rằng ma trận của hệ thống tối giản tương tự như ma trận ban đầu?

Lời giải

Hệ thống dạng Jordan có các giá trị riêng khác nhau, như vậy tính điều khiển được và quan sát được dễ dàng xác định được.

Hàng thứ 3 của ma trận B_n là 0, nên q_3 không điều khiển được. Cột thứ 2 của C_n là 0, vậy nên q_2 cũng không điều khiển được. q_2 và q_3 bị loại từ đó chúng không còn tác dụng với ngõ vào-ngõ ra:

Khi đó:

$$\dot{q}_1 = -5q_1 + [1 \quad 0]\, u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} q_1 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u$$

$H = C(sI - A)^{-1}B + D$, với hệ thống ban đầu:

$$H(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+5 & 0 & 0 \\ 0 & s-1 & 0 \\ 0 & 0 & s+3 \end{bmatrix}^{1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s+5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s-1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{s+3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{s+5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{s+3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+5} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Với hệ thống tối giản:

$$H(s) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} [s+5]^{-1} \quad [1 \quad 0] + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s+5} \end{bmatrix} [1 \quad 0] + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+5} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Như vậy ma trận là như nhau đối với cả 2 phương trình trạng thái.

Bài 13-11

Cho các ma trận A và B :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Xác định nếu [A,B] là 1 cặp kiểm soát.

Lời giải:

Từ kích thước các ma trận A là 3x3, B là 3x2 nên ma trân S phải là 3x6:

$$S = [B \quad AB \quad A^2B]$$

Chúng ta tìm :

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad A^2B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

S có thể được viết lại như sau:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Có thể dễ dàng kiểm tra được hạng của S là 3 và hệ thống là điều khiển được.

Bài 13-12 : cho hàm truyền vòng kính. Dùng tiêu chuẩn routh tìm k để hệ thống ổn định

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{(s^4+4s^3+3s^2+s+1) + K}$$

Bài làm :

Phương trình đặc tính của hệ thống là :

$$s^4+4s^3+3s^2+s+(K+1) = 0$$

Bảng routh như sau ;

s^4	1	3	$K+1$
s^3	4	1	0
s^2	$\frac{11}{4}$	$K+1$	
s^1	$1 - \frac{16(K+1)}{11}$	0	
s^0	$K+1$		

Diều kiện cần và đủ để hệ thống ổn định là tất cả các hệ số ở cột 1 của bảng phải đều dương nên ta có :

$$K + 1 > 0 \rightarrow K > -1$$

Và

$$1 - \frac{16(K+1)}{11} > 0 \rightarrow -\frac{5}{16} > K$$

Vậy k phải thỏa mãn :

$$-1 < K < -\frac{5}{16}$$

Bài 13-13 : cho phương trình đặc tính của hệ thống. Tìm k để hệ thống ổn định theo tiêu chuẩn routh.

$$D^4+KD^3+2D^2+D+3 = 0$$

Bài làm :

Bảng routh ;

D^4	1	2	3
D^3	K	1	0
D^2	$\frac{2K-1}{K}$	3	0
D^1	$1 - \frac{3K^2}{2K-1}$	0	
D^0	3		

Theo routh ta có :

$$K > 0$$

$$\frac{2K-1}{K} > 0$$

$$1 - \frac{3K^2}{2K-1} > 0$$

Hai điều kiện đầu cho ta điều kiện k >1/2, điều kiện thứ 3 ta có $-3k^2+2k-1 > 0$ (phương trình này có nghiệm ảo) và giá trị của đa thức luôn âm với mọi k € R. vì vậy với 3 điều kiện trên không tìm được giá trị của k để hệ thống ổn định.

Bài 13-16: Phương trình hàm truyền đặc tính của hệ thống vòng kín là:

$$s^3+2Ks^2+(3K+5)s+9K = 0$$

Với giá trị nào của K thì hệ ổn định

Giải:

Sử dụng bảng Routh để tìm giá của K

$$\begin{array}{lll} s^3 & 1 & 3K+5 \\ s^2 & 2K & 9K \\ s^1 & \dfrac{2K(3K+5)-9K}{2K}, & 0 \\ s^0 & 9K & \end{array}$$

Để hệ thống ổn định thì các giá trị trên cột đầu tiên của bảng là cùng dấu. Trong trường hợp này ta có:

$$s^2 \text{ gives } 2K>0,\ k>0$$

$$s^1 \text{ gives } \frac{2K(3K+5)-9K}{2K} > 0$$

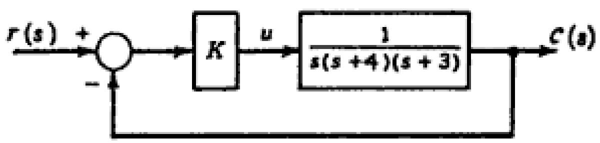
Khi K>0 ta có:

$$2K(3K+5)-9K = 6K^2+K = K(6K+1)>0$$

$$K>0 \text{ and } K>-\frac{1}{6}$$

Bài 13-27:

Xét hệ thống như hình vẽ:



Tìm K để hệ thống ổn định

Giải

Hàm truyền của vòng kín:

$$\frac{c(s)}{r(s)} = \frac{K}{s(s+4)(s+3) + K}$$

Phương trình đặc tính là:

$$D(s) = s(s+4)(s+3) + K = s^3 + 7s^2 + 12s + K$$

Ta có bảng Routh

s^3	1	12
s^2	7	K
s^1	$\frac{84-K}{7}$	0
s^0	K	

Để hệ thống ổn định thì tất cả các thông số của cột đầu tiên phải dương. Nên có:

$$84 - K > 0$$

$$K > 0$$

$$0 < K < 84$$