

Project 1: Mathematical Induction & Recurrence Relations – Đồ Án 1: Quy Nạp Toán Học & Quan Hệ Truy Hồi

0.1 Mathematical Induction – Quy nạp toán học

Định lý. Với mọi $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, ta có:

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Chứng minh: Sử dụng phương pháp quy nạp toán học.

- **Cơ sở quy nạp:** Với $n = 1$:

$$\sum_{k=1}^1 k = 1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1.$$

Đúng.

- **Giả thiết quy nạp:** Giả sử công thức đúng với $n = k$, tức là:

$$\sum_{i=1}^k i = \frac{k(k+1)}{2}.$$

- **Bước quy nạp:** Xét $n = k + 1$:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k+1} i &= \left(\sum_{i=1}^k i \right) + (k+1) \\ &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \quad (\text{theo giả thiết quy nạp}) \\ &= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2}.\end{aligned}$$

Đây chính là công thức với $n = k + 1$.

- **Kết luận:** Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề được chứng minh đúng với mọi $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

0.2 Recurrence Relation – Quan hệ truy hồi

Đề bài: Xét dãy truy hồi:

$$a_1 = 1, \quad a_n = a_{n-1} + 2n - 1 \quad \text{với } n \geq 2.$$

Tìm công thức tổng quát của a_n theo n .

Giải:

Ta tính một vài giá trị đầu:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 1 + 3 = 4, \quad a_3 = 4 + 5 = 9, \quad a_4 = 9 + 7 = 16.$$

Dễ thấy:

$$a_n = n^2.$$

Chứng minh bằng quy nạp:

- **Cơ sở:** $n = 1$: $a_1 = 1 = 1^2$, đúng.
- **Giả thiết quy nạp:** Giả sử $a_k = k^2$ đúng với một $k \geq 1$.
- **Bước quy nạp:**

$$a_{k+1} = a_k + 2(k+1) - 1 = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2.$$

- **Kết luận:** $a_n = n^2$ với mọi $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

Project 2: Counting, Probability, Balls, & Boxes – Đồ Án 2: Đếm, Xác Suất, Bánh & Hộp

Cho 5 quả bánh phân biệt và 3 hộp phân biệt.

- Có bao nhiêu cách đặt 5 quả bánh vào 3 hộp?
- Nếu mỗi quả bánh được đặt ngẫu nhiên vào một hộp (các quả độc lập, xác suất như nhau), xác suất có ít nhất một hộp trống là bao nhiêu?

Câu (a):

Mỗi quả bánh có 3 lựa chọn để vào một trong 3 hộp.

Vì các quả bánh là phân biệt và được đặt độc lập:

$$\text{Tổng số cách} = 3^5 = 243.$$

Câu (b):

Ta cần tính:

$$\mathbb{P}(\text{ít nhất một hộp trống}) = 1 - \mathbb{P}(\text{không có hộp nào trống}).$$

Gọi A là biến cố “không có hộp nào trống”

Áp dụng nguyên lý bao hàm – loại trừ (Inclusion–Exclusion), ta tính số cách phân chia 5 quả bánh (phân biệt) vào 3 hộp (phân biệt) sao cho mỗi hộp có ít nhất 1 quả (không rỗng).

Số cách:

$$N = 3^5 - \binom{3}{1}2^5 + \binom{3}{2}1^5 = 243 - 3 \cdot 32 + 3 \cdot 1 = 243 - 96 + 3 = 150.$$

Vậy xác suất để không hộp nào trống là:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{150}{243}.$$

Vậy xác suất có ít nhất một hộp trống:

$$1 - \frac{150}{243} = \frac{93}{243} = \frac{31}{81} \approx 0.38$$

Project 3: Generating Functions – Đề Án 3: Hàm Sinh

Cho 1 ví dụ: Cho vô hạn số đồng xu có mệnh giá: 1, 2 và 5. Hỏi có bao nhiêu cách chọn các đồng xu (không giới hạn số lượng mỗi loại) để tổng tiền bằng 10?

Hàm sinh của từng loại đồng xu:

- Với đồng xu 1: $1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x}$
- Với đồng xu 2: $1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots = \frac{1}{1-x^2}$
- Với đồng xu 5: $1 + x^5 + x^{10} + x^{15} + \dots = \frac{1}{1-x^5}$

Hàm sinh tổng hợp:

Hàm sinh đếm số cách chọn các đồng xu để tổng là n :

$$G(x) = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^5)}$$

Ta cần tìm hệ số của x^{10} trong khai triển của $G(x)$:

$$[x^{10}]G(x) = ?$$

Với $[x^{10}]$:

Ta sẽ đếm số cách chọn bộ số (a, b, c) nguyên không âm sao cho:

$$a + 2b + 5c = 10.$$

Trường hợp $c = 0$: $a + 2b = 10$

- $b = 0 \Rightarrow a = 10$

- $b = 1 \Rightarrow a = 8$

- $b = 2 \Rightarrow a = 6$

- $b = 3 \Rightarrow a = 4$

- $b = 4 \Rightarrow a = 2$

- $b = 5 \Rightarrow a = 0$

Có **6** cách.

Trường hợp $c = 1$: $a + 2b = 5$

- $b = 0 \Rightarrow a = 5$

- $b = 1 \Rightarrow a = 3$

- $b = 2 \Rightarrow a = 1$

Có **3** cách.

Trường hợp $c = 2$: $a + 2b = 0$

Chỉ có 1 nghiệm: $a = 0, b = 0$

3.2. Tổng số cách

Tổng cộng có:

$$6 + 3 + 1 = \boxed{10} \text{ cách.}$$

$$\Rightarrow [x^{10}] G(x) = 10.$$