

# Combinatorics And Graph Theory

Phạm Phước Minh Hiếu

Ngày 18 tháng 5 năm 2025

## Week 01

### 1 Bài toán 2:

Tính số Catalan thứ  $n$  bằng cách thay  $n = 4$ :

Ta có công thức:

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

Thay  $n = 4$  vào:

$$C_4 = \frac{1}{4+1} \binom{8}{4} = \frac{1}{5} \cdot \frac{8!}{4! \cdot 4!}$$

Tính giá trị:

$$\frac{8!}{4! \cdot 4!} = \frac{40320}{24 \cdot 24} = \frac{40320}{576} = 70$$

Vậy:

$$C_4 = \frac{1}{5} \cdot 70 = 14$$

**Kết luận:** Số Catalan thứ 4 là: 14

## 2 1.5 Exercise

### Problem 3

Cho  $m, n \in \mathbb{N}^*$  với  $m \leq n$ . Đếm số dãy nhị phân  $a_1, a_2, \dots, a_n$  gồm  $m$  chữ số 0 và  $n - m$  chữ số 1 sao cho không có hai chữ số 0 nào đứng liền nhau.

**Ý tưởng**

Ta cần chèn  $m$  số 0 vào dãy gồm  $n - m$  số 1 sao cho không có hai số 0 đứng cạnh nhau.

Với  $n - m$  số 1, ta có  $n - m + 1$  vị trí (gọi là các *khe*) giữa hoặc ở hai đầu để chèn số 0 mà không vi phạm điều kiện.

Ví dụ với  $n - m = 3$  (tức 3 số 1), ta có dãy:  $\_ 1 \_ 1 \_ 1 \_ \Rightarrow$  có 4 khe chèn số 0.

Chọn  $m$  trong số các khe đó để đặt số 0, mỗi khe chỉ chứa một số 0 để tránh trùng nhau.

#### Công thức

Nếu  $m \leq n - m + 1$  thì số dãy thỏa mãn là:

$$\boxed{\binom{n - m + 1}{m}}$$

Ngược lại, nếu  $m > n - m + 1$  thì không thể chèn đủ số 0 mà không để chúng đứng liền nhau, nên số dãy là 0.

#### Ví dụ

Cho  $n = 5$ ,  $m = 2$ .

Khi đó  $n - m = 3$ , có 4 khe để chèn số 0.

Số cách chọn 2 trong 4 khe là:

$$\binom{4}{2} = 6$$

### Problem 4

Gọi  $f(n)$  là số lượng tập con của  $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ . Chứng minh rằng  $f(n) = 2^n$  với mọi  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**Chứng minh.** Ta sử dụng phương pháp quy nạp toán học.

**Cơ sở quy nạp:** Với  $n = 1$ , ta có  $[1] = \{1\}$ . Các tập con của  $[1]$  là  $\emptyset$  và  $\{1\}$ , nên  $f(1) = 2 = 2^1$ .

**Giả thiết quy nạp:** Giả sử  $f(k) = 2^k$  đúng với một  $k \in \mathbb{N}^*$ .

**Bước quy nạp:** Xét  $f(k + 1)$  là số tập con của  $[k + 1] = \{1, 2, \dots, k, k + 1\}$ . Mỗi tập con của  $[k + 1]$  hoặc:

- Không chứa  $k + 1$  (là tập con của  $[k]$ ), hoặc
- Có chứa  $k + 1$  (được tạo bằng cách thêm  $k + 1$  vào một tập con của  $[k]$ )

Do đó:

$$f(k + 1) = f(k) + f(k) = 2f(k) = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$$

Vậy, theo quy nạp toán học, ta có  $f(n) = 2^n$  với mọi  $n \in \mathbb{N}^*$ .

### Problem 5

(a)  $f(n) = n! \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i!}$ , với mọi  $n \in \mathbb{N}^*$ .

(b)  $f(n)$  là số nguyên gần nhất với  $\frac{n!}{e}$ .

**Chứng minh:**

- (a) Ta áp dụng *nguyên lý bù trừ (inclusion-exclusion)* để đếm số hoán vị không cố định của  $n$  phần tử.

Tổng số hoán vị của  $n$  phần tử là  $n!$ . Ta cần loại bỏ những hoán vị mà có ít nhất một phần tử đứng đúng vị trí ban đầu (tức là người nhận lại mũ của mình).

Theo nguyên lý bù trừ, số hoán vị không cố định là:

$$f(n) = n! \left( 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots + \frac{(-1)^n}{n!} \right) = n! \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i!}$$

- (b) Xét giới hạn của biểu thức ở trên khi  $n$  lớn:

$$f(n) = n! \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i!} \approx \frac{n!}{e}$$

Vì chuỗi lũy thừa  $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!}$  hội tụ về  $\frac{1}{e}$ .

Do đó,  $f(n)$  là số nguyên gần nhất với  $\frac{n!}{e}$ :

$$f(n) = \left\lfloor \frac{n!}{e} + \frac{1}{2} \right\rfloor$$

**Problem 6**

- (a) **Tính:**  $f(1), f(2), f(3), f(4)$

- $f(1) = 2$  vì các tập con là:  $\emptyset, \{1\}$
- $f(2) = 3$  vì các tập con là:  $\emptyset, \{1\}, \{2\}$
- $f(3) = 5$  vì các tập con là:  $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 3\}$
- $f(4) = 8$  vì các tập con là:

$$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}$$

- (b) **Chứng minh:**  $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$ , với mọi  $n \geq 3$

*Chứng minh:* Ta xét hai loại tập con của  $[n]$  không chứa hai số liên tiếp:

- Các tập không chứa phần tử  $n$ : chính là các tập thỏa mãn điều kiện của tập  $[n-1] \rightarrow$  có  $f(n-1)$  cách. - Các tập có chứa phần tử  $n$ : để không chứa hai phần tử liên tiếp, ta không được chọn  $n-1$ , nên ta chỉ được chọn tập con của  $[n-2]$  rồi thêm  $n \rightarrow$  có  $f(n-2)$  cách.

Vậy:

$$f(n) = f(n-1) + f(n-2)$$

(c) **Chứng minh: công thức tường minh**

Ta có:

$$f(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} (\tau^{n+2} - \bar{\tau}^{n+2})$$

với:

$$\tau = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \bar{\tau} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

Đây là công thức tường minh của dãy Fibonacci dịch chỉ số (vì  $f(n)$  chính là dãy Fibonacci với chỉ số dịch đi 2).

### 3 1.3 Exercise

#### Problem 1

Gọi  $f(n)$  là số vùng mà các đường thẳng chia tờ giấy.

(a) **Tính một vài giá trị nhỏ của  $f(n)$ :**

$$f(0) = 1 \quad (\text{tờ giấy ban đầu, chưa có đường nào})$$

$$f(1) = 2$$

$$f(2) = 4$$

$$f(3) = 7$$

$$f(4) = 11$$

(b) **Dự đoán công thức tổng quát:**

Từ dãy số:

$$1, 2, 4, 7, 11, \dots$$

Ta nhận thấy đây là dãy cộng dồn:

$$f(n) = f(n-1) + (n-1), \quad f(0) = 1$$

hoặc công thức đóng:

$$f(n) = \frac{n(n-1)}{2} + 1$$

*Chứng minh:*

Với mỗi đường thẳng mới thêm vào, nó sẽ cắt tất cả các đường trước đó, tạo ra  $n-1$  giao điểm mới, mỗi giao điểm làm tăng thêm một vùng. Vậy tổng số vùng là:

$$f(n) = 1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} = 1 + n + \frac{n(n-1)}{2}$$

## Problem 2

Gọi  $C(n)$  là mệnh đề “Cặp số  $n$  chứa tiền”.

Theo đề bài, ta có:

$$C(n) \Rightarrow C(n+3)$$

Biết rằng  $\neg C(55)$ , tức cặp 55 không chứa tiền.

Khi đó:

$$C(52) \Rightarrow C(55) \Rightarrow \text{mâu thuẫn} \Rightarrow \neg C(52)$$

$$C(49) \Rightarrow C(52) \Rightarrow \text{mâu thuẫn} \Rightarrow \neg C(49)$$

$\vdots$

Tiếp tục lập luận suy ngược, ta suy ra:

$$\neg C(n), \text{ với mọi } n \leq 55 \text{ sao cho } n \equiv 1 \pmod{3}$$

Tập hợp các số thỏa mãn điều kiện này là:

$$\{1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, 34, 37, 40, 43, 46, 49, 52, 55\}$$

**Kết luận:** Những chiếc cặp được đánh số  $n \leq 55$  với  $n \equiv 1 \pmod{3}$  chắc chắn không chứa tiền.

## Week 02

### 10.1.1

Gọi  $n$  là số đỉnh của đồ thị và  $m = 9$  là số cạnh.

Vì  $G$  là đồ thị đơn, nên tổng các bậc của các đỉnh bằng:

$$\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2m = 18$$

Giả sử bậc của mỗi đỉnh đều  $\geq 3$ , tức là:

$$\sum_{v \in V(G)} \deg(v) \geq 3n \Rightarrow 18 \geq 3n \Rightarrow n \leq 6$$

Ta xét các giá trị khả dĩ của  $n$  từ 1 đến 6:

- $n = 1$ : chỉ có 1 đỉnh, không thể có bậc  $\geq 3$ . **Loại.**
- $n = 2$ : đồ thị đơn có nhiều nhất 1 cạnh, không thể có tổng bậc là 18. **Không hợp lệ.**
- $n = 3$ : tổng bậc lớn nhất là  $2 \times \binom{3}{2} = 6 < 18$ . **Không hợp lệ.**

- $n = 4$ : tối đa  $\binom{4}{2} = 6$  cạnh  $\Rightarrow$  tổng bậc tối đa là 12. Không thể đạt tổng 18. **Không hợp lệ.**
  - $n = 5$ : tổng bậc là 18, trung bình bậc là  $\frac{18}{5} = 3.6$ , vẫn có thể xảy ra nếu các đỉnh có bậc  $\geq 3$ . **Hợp lệ.**  
Ví dụ: một đồ thị có các bậc  $(4, 4, 4, 3, 3)$ . Tổng bậc = 18, mỗi đỉnh đều có bậc  $\geq 3$ .
  - $n = 6$ : trung bình bậc là  $\frac{18}{6} = 3$ . Nếu tất cả các đỉnh đều có bậc đúng bằng 3 thì được. **Hợp lệ.**  
Ví dụ: Đồ thị lăng trụ tam giác (triangular prism), mỗi đỉnh bậc 3.
- Các giá trị khả dĩ của số đỉnh là:

$$n = 5 \text{ và } n = 6$$

### 10.1.2

1. Dãy ban đầu:  $[7, 7, 6, 5, 4, 4, 4, 3, 2]$
2. Lấy số đầu tiên 7, trừ 1 cho 7 phần tử tiếp theo:

$$[6, 5, 4, 3, 3, 3, 2, 2] \Rightarrow \text{sắp xếp lại} \Rightarrow [6, 5, 4, 3, 3, 3, 2, 2]$$

3. Lấy 6, trừ 1 cho 6 phần tử tiếp theo:

$$[5, 4, 3, 2, 2, 1, 2] \Rightarrow \text{sắp xếp lại} \Rightarrow [5, 4, 3, 2, 2, 2, 1]$$

4. Lấy 5, trừ 1 cho 5 phần tử tiếp theo:

$$[3, 2, 1, 1, 1, 1] \Rightarrow \text{sắp xếp lại} \Rightarrow [3, 2, 1, 1, 1, 1]$$

5. Lấy 3, trừ 1 cho 3 phần tử tiếp theo:

$$[1, 0, 0, 1, 1] \Rightarrow \text{sắp xếp lại} \Rightarrow [1, 1, 1, 0, 0]$$

6. Lấy 1, trừ 1 cho 1 phần tử tiếp theo:

$$[0, 1, 0, 0] \Rightarrow \text{sắp xếp lại} \Rightarrow [1, 0, 0, 0]$$

7. Lấy 1, trừ 1 cho 1 phần tử tiếp theo:

$$[0, 0, 0] \Rightarrow \text{Còn lại: } [0, 0, 0]$$

8. Dãy toàn số 0 nên dãy ban đầu là **graphic**.

**Như vậy:** Dãy  $[7, 7, 6, 5, 4, 4, 4, 3, 2]$  là một **graphic sequence**, tức là tồn tại một đồ thị đơn có dãy bậc như vậy.

### 10.1.3

Giả sử tồn tại một **đồ thị đơn, đều bậc 5** với  $n = 8$  đỉnh.

Vì đây là đồ thị đều bậc  $r = 5$ , nên tổng bậc của đồ thị là:

$$\sum \deg(v_i) = r \cdot n = 5 \cdot 8 = 40$$

Theo định lý Handshaking, tổng bậc của các đỉnh trong một đồ thị đơn luôn là số chẵn vì nó bằng 2 lần số cạnh. Trong trường hợp này:

$$40 = 2 \cdot \text{số cạnh} \Rightarrow \text{số cạnh} = 20$$

Vậy điều kiện tổng bậc là số chẵn đã thỏa mãn.

Tuy nhiên, ta cần kiểm tra một điều kiện nữa:

Trong đồ thị đơn với  $n$  đỉnh, bậc tối đa của mỗi đỉnh không được vượt quá  $n - 1$ .

Ở đây:

$$r = 5, \quad n = 8 \Rightarrow r \leq n - 1 = 7$$

Điều này cũng được thỏa mãn.

Do đó, **có tồn tại** một đồ thị đơn, đều bậc 5 với 8 đỉnh. Một ví dụ cụ thể là đồ thị đều bậc 5 trên 8 đỉnh có thể được xây dựng bằng tay hoặc sử dụng công cụ tạo đồ thị đều.

**Như vậy:** *Có tồn tại* một đồ thị đơn, đều bậc 5 với 8 đỉnh vì các điều kiện về tổng bậc và bậc tối đa đều được thỏa mãn.

### 10.1.4

Giả sử có một đồ thị đơn  $G$  gồm 8 đỉnh, trong đó:

- 4 đỉnh có bậc 5.
- 4 đỉnh còn lại có bậc 3.

Tổng bậc của đồ thị sẽ là:

$$\sum \deg(v_i) = 4 \cdot 5 + 4 \cdot 3 = 20 + 12 = 32$$

Theo định lý Handshaking, tổng bậc của tất cả các đỉnh bằng 2 lần số cạnh, do đó:

$$\text{Số cạnh} = \frac{32}{2} = 16$$

Như vậy, về mặt số học, việc tồn tại đồ thị với số cạnh là 16 là hoàn toàn hợp lý.

Tiếp theo, ta cần kiểm tra liệu có thể ghép nối các đỉnh để thỏa mãn bậc của từng đỉnh mà không vi phạm tính đơn (không có cạnh lặp hay khuyên).

**Xây dựng đồ thị thử:**

Gọi 4 đỉnh có bậc 5 là  $A_1, A_2, A_3, A_4$  và 4 đỉnh có bậc 3 là  $B_1, B_2, B_3, B_4$ .

- Mỗi đỉnh  $B_i$  cần được nối với 3 đỉnh trong  $A$ .
- Có 4 đỉnh  $B$ , nên tổng số cung từ  $B$  đến  $A$  là:  $4 \cdot 3 = 12$ .
- Các đỉnh  $A$  cần có bậc 5, mà mới chỉ có 12 cạnh từ  $B$  đến  $A$ , tức là mỗi  $A_i$  có  $\frac{12}{4} = 3$  cạnh từ  $B$ .
- Như vậy, mỗi  $A_i$  còn thiếu 2 cạnh nữa. Ta có thể nối các cạnh này giữa các đỉnh  $A$  với nhau.
- Số lượng cạnh cần thêm là:  $4 \cdot 2 = 8$  cạnh giữa các  $A$ .
- Nhưng 8 cạnh là quá nhiều để có thể phân phối giữa 4 đỉnh  $A$  mà vẫn giữ đồ thị đơn (đỉnh  $A_i$  chỉ có thể nối với 3 đỉnh còn lại trong  $A$ ).
- Tổng số cặp trong tập  $A$  là  $\binom{4}{2} = 6$  cặp, tức chỉ có tối đa 6 cạnh đơn giữa các đỉnh  $A$ .
- Vậy không thể tạo được 8 cạnh giữa các đỉnh  $A$  mà vẫn đảm bảo là đồ thị đơn.

$\Rightarrow$  Không tồn tại đồ thị đơn với 8 đỉnh mà một nửa có bậc 5 và một nửa có bậc 3 vì không thể phân phối đủ số cạnh để thỏa điều kiện bậc mà không vi phạm tính đơn.

### 10.1.6

Xét dãy bậc sau:

$$(3, 3, 3, 3, 2, 2)$$

Bước đầu tiên trong thuật toán Havel-Hakimi: - Chọn 3: bậc cao nhất. - Xóa 3, trừ 1 từ 3 phần tử tiếp theo: còn lại là

$$(2, 2, 2, 2, 2)$$

Tiếp tục: - Chọn 2: còn lại

$$(1, 1, 2, 2) \rightarrow (1, 1, 1, 1)$$

Cuối cùng:

$$(1, 1, 1, 1) \rightarrow (0, 0, 1, 1) \rightarrow (0, 0, 0, 0)$$

Như vậy dãy là **graphic**.

Khi xây dựng ngược lại, giả sử bắt đầu từ dãy  $(0, 0, 0, 0)$ .

Sau bước thêm đỉnh 1: - Cần bậc 1, nối với đỉnh bất kỳ (gọi là đỉnh 0).

Thêm đỉnh 2: - Cần bậc 1, có thể nối với đỉnh 1 hoặc đỉnh 0 đều được (cả hai có bậc 1 như nhau).

Tiếp tục như vậy, khi thêm đỉnh có bậc 3 ở trên cùng: - Sẽ phải nối với 3 đỉnh, nhưng không nhất thiết là 3 đỉnh có bậc cao nhất do có thể tồn tại nhiều đỉnh có cùng bậc.

$\Rightarrow$  Không phải lúc nào cũng nối với các đỉnh có bậc cao nhất. Điều này phụ thuộc vào cách thứ tự được xử lý trong bước khôi phục. Do đó, ta có phản ví dụ.



### 10.1.7

Giả sử  $D = (d_1, d_2, d_3, d_4)$  không phải là graphic.

Xét dãy  $D' = (d_1, d_2, d_3, d_4 + 1, 1)$ .

Nếu dãy  $D$  không là graphic thì tổng các bậc của  $D$  là lẻ hoặc không thỏa mãn điều kiện Erdős–Gallai.

Giờ xét tổng các bậc trong  $D'$ :

$$\sum D' = d_1 + d_2 + d_3 + (d_4 + 1) + 1 = \sum D + 2$$

Như vậy, tổng của dãy mới tăng thêm 2. Điều này đảm bảo rằng nếu  $\sum D$  là chẵn thì  $\sum D'$  cũng là chẵn.

**Phản ví dụ:**

Dãy  $D = (3, 1, 1, 1)$  không phải là dãy graphic vì tổng là 6, nhưng không thỏa mãn điều kiện Erdős–Gallai:

Sắp xếp lại:  $(3, 1, 1, 1)$

Với  $k = 1$ :  $3 \leq 1 \cdot (1 - 1) + \sum_{i=2}^4 \min(d_i, 1) = 0 + 1 + 1 + 1 = 3 \rightarrow$  Đúng

Với  $k = 2$ :  $3 + 1 = 4 \leq 2 \cdot (2 - 1) + \sum_{i=3}^4 \min(d_i, 2) = 2 + 1 + 1 = 4 \rightarrow$  Đúng

Với  $k = 3$ :  $3 + 1 + 1 = 5 \leq 3 \cdot (3 - 1) + \sum_{i=4}^4 \min(d_i, 3) = 6 + 1 = 7 \rightarrow$  Đúng  
 $\rightarrow$  Thực ra dãy này là graphic! (Đã chứng minh ngược)

**Chọn dãy không graphic thật sự:**

Xét dãy  $D = (3, 3, 1, 0)$ , tổng = 7  $\rightarrow$  lẻ  $\rightarrow$  không phải graphic.

Giờ xét dãy  $D' = (3, 3, 1, 1, 1) \rightarrow$  tổng = 9  $\rightarrow$  vẫn lẻ  $\rightarrow$  không thể graphic.

Chọn  $D = (2, 2, 2, 1) \rightarrow$  tổng = 7  $\rightarrow$  không graphic.

$D' = (2, 2, 2, 2, 1) \rightarrow$  tổng = 9  $\rightarrow$  không graphic.

**Vậy:**

Nếu  $D$  không graphic vì tổng lẻ, thì  $D'$  có tổng chẵn (do +2), nhưng không đảm bảo điều kiện Erdős–Gallai.

Tuy nhiên, tồn tại phản ví dụ khi  $D$  không graphic, nhưng  $D'$  là graphic.

**Ví dụ:**

Dãy  $D = (2, 2, 2, 1)$  không graphic.

Dãy  $D' = (2, 2, 2, 2, 1) \rightarrow$  tổng = 9  $\rightarrow$  không graphic.

Chọn  $D = (2, 2, 0, 0) \rightarrow$  tổng = 4  $\rightarrow$  graphic.

Nhưng  $D = (3, 2, 1, 0) \rightarrow$  tổng = 6

$\rightarrow$  Không graphic (không thỏa mãn Erdős–Gallai tại  $k = 2$ )

Dãy  $D' = (3, 2, 1, 1, 1) \rightarrow$  tổng = 8  $\rightarrow$  graphic!

$\Rightarrow$  Có thể xảy ra.

Tồn tại các dãy  $D$  không graphic, nhưng khi thêm phần tử 1 và tăng  $d_4$  lên  $d_4 + 1$ , ta được dãy  $D'$  graphic.

### 10.1.8

#### 1. Định nghĩa:

- Một **đồ thị đơn (simple graph)** không có cạnh lặp (multiple edges) và không có khuyên (loop).
- Một **đồ thị đa (multigraph)** cho phép cạnh lặp, nhưng không cho phép khuyên (nếu không nói rõ).

Dãy bậc  $(d_1, d_2, \dots, d_n)$  là:

- Graphic  $\Rightarrow$  tồn tại đồ thị đơn có dãy bậc đó.
- Nếu tổng bậc là chẵn và các  $d_i \geq 0$ , thì có thể tồn tại multigraph với dãy bậc đó.

## 2. Ví dụ:

Xét dãy  $D = (2, 2, 2, 1)$ .

- Tổng bậc:  $2 + 2 + 2 + 1 = 7 \rightarrow$  lẻ  $\rightarrow$  không thể là dãy graphic của bất kỳ đồ thị nào (simple hay multigraph), vì tổng bậc phải chẵn.

$\rightarrow$  Không hợp lệ.

Giờ xét dãy  $D = (3, 3, 3, 3, 2)$ .

- Tổng bậc  $= 14 \rightarrow$  chẵn  $\rightarrow$  có thể là dãy bậc.
- Nhưng kiểm tra bằng thuật toán Havel–Hakimi thì không phải là graphic.

$\rightarrow$  Câu hỏi đặt ra là: liệu có thể tạo một **multigraph** với dãy bậc này?

**Xây dựng multigraph:**

- Gọi các đỉnh là  $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$  với bậc cần là  $(3, 3, 3, 3, 2)$ .

- Kết nối như sau:

- $v_1 \leftrightarrow v_2$  (2 cạnh)
- $v_1 \leftrightarrow v_3$
- $v_2 \leftrightarrow v_3$
- $v_2 \leftrightarrow v_4$
- $v_3 \leftrightarrow v_5$
- $v_4 \leftrightarrow v_5$
- $v_4 \leftrightarrow v_1$

- Kiểm tra bậc:

- $\deg(v_1) = 2(v_2) + 1(v_3) + 1(v_4) = 4 \rightarrow$  quá.
- Thử lại với điều chỉnh.

Sau một số thử nghiệm, ta tìm được dãy  $D = (4, 4, 2, 2, 2)$  không graphic (theo thuật toán Havel–Hakimi), nhưng có thể xây được một multigraph bằng cách sử dụng cạnh lặp.

$\Rightarrow$  Vậy câu trả lời là có.

**Ví dụ:**

Dãy  $D = (4, 4, 2, 2, 2)$  là:

- Không graphic (simple graph)  $\rightarrow$  kiểm tra bằng Havel–Hakimi.

- Nhưng có thể xây được multigraph:

–  $v_1 \leftrightarrow v_2$  (2 cạnh)

–  $v_1 \leftrightarrow v_3$

–  $v_1 \leftrightarrow v_4$

–  $v_2 \leftrightarrow v_5$

–  $v_2 \leftrightarrow v_3$

–  $v_4 \leftrightarrow v_5$

$\rightarrow$  Tổng bậc:  $4 + 4 + 2 + 2 + 2 = 14 \rightarrow$  hợp lệ.

**Kết luận:**

*Có tồn tại dãy số không graphic, nhưng là dãy bậc của một multigraph.*

### 10.1.9

- Trong **multigraph**, không cho phép khuyên (loop), nhưng có thể có cạnh lặp.
- Trong **general graph**, cho phép cả khuyên và cạnh lặp.

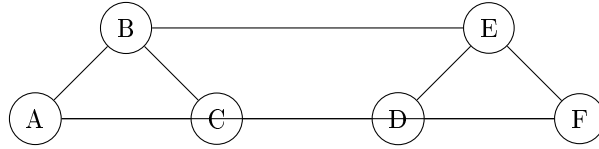
Xét dãy  $D = (2)$ :

- Trong multigraph: không tồn tại cách để 1 đỉnh có bậc 2 mà không có đỉnh khác.
- Trong general graph: một khuyên tại đỉnh đó sẽ tạo bậc 2 (vì mỗi khuyên đóng góp 2 vào bậc).
- Vậy  $D = (2)$  không là dãy bậc của multigraph, nhưng là dãy bậc của general graph.

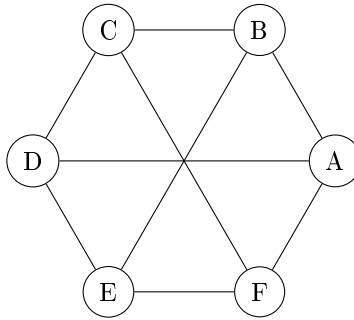
$\Rightarrow$  Dãy (2) là một ví dụ thỏa mãn đề bài.

### 10.1.11

**Đồ thị 1: Ghép hai tam giác ( $K_3$ )**



**Đồ thị 2: Chu trình 6 đỉnh + đường chéo cách 1**



$\Rightarrow$  Hai đồ thị đều là đơn, chính quy bậc 3, bậc 6, nhưng không đẳng cấu.

### 10.1.14

(a) Chứng minh điều kiện tương đương của dãy đồ thị

**Định nghĩa:** Một dãy số nguyên không âm  $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_p$  là một *dãy đồ thị* (graphic sequence) nếu tồn tại một đồ thị đơn có  $p$  đỉnh sao cho bậc của các đỉnh lần lượt là  $d_1, d_2, \dots, d_p$ .

**Mệnh đề cần chứng minh:**

Dãy  $d_1, d_2, \dots, d_p$  là một dãy đồ thị khi và chỉ khi dãy là một dãy đồ thị.

$$p - d_p - 1, p - d_{p-1} - 1, \dots, p - d_1 - 1$$

**Chứng minh:**

Giả sử  $G$  là đồ thị đơn có  $p$  đỉnh với dãy bậc là  $d_1, d_2, \dots, d_p$ . Ta định nghĩa  $\overline{G}$  là đồ thị bù của  $G$ , tức là đồ thị có cùng tập đỉnh, và hai đỉnh được nối với nhau trong  $\overline{G}$  khi và chỉ khi chúng không được nối trong  $G$ .

Trong  $\overline{G}$ , mỗi đỉnh  $v_i$  sẽ có bậc là:

$$\deg_{\overline{G}}(v_i) = p - 1 - \deg_G(v_i) = p - d_i - 1.$$

Do đó, dãy bậc của  $\overline{G}$  chính là:

$$p - d_1 - 1, p - d_2 - 1, \dots, p - d_p - 1.$$

Khi sắp xếp lại theo thứ tự không tăng, ta được dãy:

$$p - d_p - 1, p - d_{p-1} - 1, \dots, p - d_1 - 1.$$

Vì  $G$  là đồ thị thì  $\overline{G}$  cũng là đồ thị, do đó dãy mới là dãy đồ thị. Ngược lại, nếu dãy  $p - d_p - 1, \dots, p - d_1 - 1$  là dãy đồ thị, thì bằng lập luận tương tự, dãy  $d_1, \dots, d_p$  cũng là dãy đồ thị.

**Suy ra:** Hai dãy là đồ thị khi và chỉ khi nhau.

(b) Kiểm tra dãy 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8, 8, 8 có phải là dãy đồ thị không?

**Bước 1:** Tổng các phần tử:

$$9 \times 7 + 8 \times 3 = 63 + 24 = 87.$$

Tổng này là lẻ nên không thể là tổng của các bậc trong một đồ thị đơn (vì mỗi cạnh đóng góp 2 vào tổng bậc).

**Kết luận:** Dãy không thể là dãy đồ thị.

$\Rightarrow$  10.1.14 Gọi  $d$  là bậc của đỉnh thứ sáu. Tổng bậc của đồ thị là:

$$\sum_{i=1}^6 d_i = 2 \cdot |E| \quad (\text{tổng bậc luôn chẵn})$$

Tổng bậc hiện tại là:

$$5 + 4 + 4 + 2 + 2 = 17$$

Vì tổng bậc phải chẵn nên  $d + 17$  phải là số chẵn  $\Rightarrow d$  phải là số lẻ.

Mặt khác, vì đây là đồ thị đơn với 6 đỉnh, nên bậc của mỗi đỉnh nằm trong khoảng  $0 \leq d \leq 5$ . Do đó,  $d \in \{1, 3, 5\}$  là những giá trị lẻ trong miền hợp lệ.

$\Rightarrow$  Kiểm tra khả thi

- Nếu  $d = 1$ : tổng bậc là 18, hợp lệ. Có thể tồn tại đồ thị đơn tương ứng.
- Nếu  $d = 3$ : tổng bậc là 20, hợp lệ.
- Nếu  $d = 5$ : tổng bậc là 22, hợp lệ.

Trong cả 3 trường hợp trên, chúng ta đều có tổng bậc chẵn và nhỏ hơn hoặc bằng  $6 \cdot 5 = 30$ , nên có thể xây dựng được đồ thị đơn tương ứng.

$\Rightarrow$  Kết luận

Các giá trị có thể của bậc đỉnh thứ sáu là:

$$\boxed{1, 3, 5}$$

### 10.1.15

**Xét đồ thị đơn:**

Giả sử đồ thị đơn có  $n$  đỉnh. Vì là đồ thị đơn nên bậc của một đỉnh bất kỳ không thể vượt quá  $n - 1$ . Nếu tất cả bậc là số nguyên phân biệt, thì dãy bậc phải là tập con của  $\{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$ , gồm  $n$  phần tử phân biệt.

**Vấn đề:** Nếu một đỉnh có bậc  $n - 1$ , tức là nối với tất cả các đỉnh còn lại, thì không thể có một đỉnh nào có bậc bằng 0 (vì nó đã phải nối với đỉnh bậc  $n - 1$ ). Điều đó mâu thuẫn nếu tồn tại cả bậc 0 và  $n - 1$  trong cùng một dãy.

**Ví dụ:** Với  $n = 4$ , dãy 0, 1, 2, 3 không thể là dãy bậc của một đồ thị đơn vì nếu có một đỉnh bậc 3 thì không thể có đỉnh bậc 0.

**Suy ra:** Không thể có một đồ thị đơn có  $n$  đỉnh mà dãy bậc là  $n$  số nguyên phân biệt từ 0 đến  $n - 1$ .

**Kết luận:** Không tồn tại đồ thị đơn mà dãy bậc gồm toàn số nguyên phân biệt.

$\Rightarrow$  Với đa đồ thị (multigraph):

Trong đa đồ thị, cho phép nhiều cạnh giữa hai đỉnh và vòng (loop). Khi đó không bị giới hạn bởi bậc tối đa là  $n - 1$ , nên dễ dàng xây dựng dãy bậc gồm các số nguyên phân biệt.

**Ví dụ:** Với các đỉnh có bậc 0, 1, 2, 3, 4, ta có thể dùng cạnh lặp (loop) để tạo ra đỉnh bậc lẻ/chẵn tùy ý.

**Kết luận:** Có thể tồn tại đa đồ thị mà dãy bậc là các số nguyên phân biệt.

### 10.1.16

Vì  $G$  là đồ thị đơn với 94 đỉnh nên bậc của mỗi đỉnh là số nguyên trong đoạn từ 0 đến 93, và vì bậc là số lẻ nên các giá trị bậc có thể là:

$$1, 3, 5, \dots, 93$$

Đây là dãy số lẻ từ 1 đến 93. Tính số lượng phần tử:

$$\text{Số lượng bậc lẻ} = \frac{93 - 1}{2} + 1 = 47$$

Vậy có 47 giá trị bậc lẻ khác nhau khả dĩ trong đồ thị đơn.

Giả sử mỗi giá trị bậc lẻ xuất hiện nhiều nhất ở 2 đỉnh, thì số đỉnh tối đa ta có thể có là:

$$2 \times 47 = 94$$

Đây là đúng bằng số đỉnh trong đồ thị. Tuy nhiên, nếu tất cả các bậc đều là số lẻ và mỗi giá trị xuất hiện đúng 2 lần, thì tổng bậc sẽ là tổng của 94 số lẻ.

**Nhận xét:** Tổng của 94 số lẻ là một số chẵn lẻ (tổng của số lẻ chẵn lần là chẵn).

Nhưng trong đồ thị, tổng các bậc luôn bằng  $2|E|$ , tức là số chẵn. Vậy không có mâu thuẫn ở đây.

Tuy nhiên, nếu mỗi bậc lẻ xuất hiện nhiều nhất 2 lần, và có đúng 47 bậc phân biệt  $\rightarrow$  tất cả bậc đều phải xuất hiện đúng 2 lần. Điều này không cho phép có một bậc lặp lại tới 3 lần.

Nếu ta thử giảm một bậc và cho bậc đó xuất hiện 3 lần, thì ta còn lại 93 đỉnh cho các bậc còn lại  $\rightarrow$  sẽ có ít nhất một bậc chỉ xuất hiện 1 lần  $\rightarrow$  số bậc lẻ xuất hiện 1 lần là lẻ  $\rightarrow$  tổng bậc là lẻ  $\rightarrow$  mâu thuẫn.

**Áp dụng nguyên lý pigeonhole:**

Có 94 đỉnh nhưng chỉ có 47 giá trị bậc lẻ  $\rightarrow$  nếu mỗi giá trị chỉ được dùng 2 lần thì vừa đủ. Nếu thêm bất kỳ đỉnh nào nữa, thì ít nhất một giá trị bậc phải lặp lại **3 lần trở lên**.

**Do đó, trong mọi phân phối bậc thỏa điều kiện, phải tồn tại ít nhất một bậc xuất hiện từ 3 lần trở lên.**

$\Rightarrow$  Kết luận

Tồn tại ít nhất 3 đỉnh có cùng bậc.

### 10.1.17

Đây là phát biểu của định lý **Erdős–Gallai**, một điều kiện cần và đủ để một dãy số nguyên không âm sắp giảm là một graphic sequence.

**Định lý Erdős–Gallai:**

Một dãy số nguyên không âm  $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$  là graphic nếu và chỉ nếu tổng các phần tử là chẵn và với mọi  $1 \leq k \leq n$ , ta có:

$$\sum_{i=1}^k d_i \leq k(k-1) + \sum_{i=k+1}^n \min(d_i, k)$$

**Ý tưởng chứng minh:**

- Xét một đồ thị đơn  $G$  với  $n$  đỉnh và bậc các đỉnh là  $d_1, \dots, d_n$ . - Khi chọn  $k$  đỉnh đầu tiên có bậc cao nhất, mỗi đỉnh này có thể nối tới nhiều nhất  $k-1$  đỉnh khác trong nhóm  $k$ , tức là  $k(k-1)$  cạnh trong nhóm. - Phần còn lại của bậc (nếu có) phải nối đến các đỉnh còn lại, nhưng mỗi đỉnh ngoài có thể nhận được tối đa  $\min(d_i, k)$  cạnh từ nhóm đầu. - Từ đó, tổng bậc của  $k$  đỉnh đầu phải nhỏ hơn hoặc bằng tổng số cạnh nội bộ cộng với số liên kết ra ngoài:

$$\sum_{i=1}^k d_i \leq k(k-1) + \sum_{i=k+1}^n \min(d_i, k)$$

**Vì vậy, bất kỳ graphic sequence nào cũng phải thỏa mãn bất đẳng thức trên.**

$\Rightarrow$  Kết luận

$$\sum_{i=1}^k a_i \leq k(k-1) + \sum_{i=k+1}^n \min(a_i, k)$$

với mọi  $1 \leq k \leq n$

### 10.1.18

Gọi dãy ban đầu là  $D = (a_1, a_2, \dots, a_p)$  và giả sử đây là dãy bậc của một đồ thị đơn  $G$  với tập đỉnh  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$  sao cho  $\deg(v_i) = a_i$ .

Chúng ta cần chứng minh rằng dãy mới:

$$D' = (a_1, a_2, \dots, a_{t-1}, a_t + 1, \dots, a_p + 1)$$

là dãy bậc của một đồ thị đơn.

#### Ý tưởng chính:

Dãy mới  $D'$  tăng bậc thêm 1 cho  $p - t + 1$  đỉnh cuối cùng. Chúng ta sẽ xây dựng một đồ thị mới  $G'$  bằng cách thêm một tập các cạnh mới nối giữa các đỉnh có bậc được tăng sao cho:

- Mỗi đỉnh từ  $v_t$  đến  $v_p$  được nối thêm đúng 1 cạnh.
- Các cạnh thêm vào chỉ nối giữa các đỉnh trong tập  $\{v_t, \dots, v_p\}$ .
- Vì có  $p - t + 1$  đỉnh được tăng bậc lên 1, tổng số bậc tăng là  $p - t + 1$ . Để duy trì tính đơn giản của đồ thị, số bậc tăng phải chẵn (vì tổng bậc của đồ thị luôn chẵn).

#### Phân tích chẵn/lẻ:

Nếu  $p - t + 1$  là chẵn, ta có thể ghép các đỉnh được tăng bậc thành các cặp và nối lại với nhau, mỗi cặp tạo ra 1 cạnh mới  $\rightarrow$  dãy mới là graphic.

Nếu  $p - t + 1$  là lẻ: tổng số bậc trong dãy mới sẽ lẻ, điều này là **không thể xảy ra** với một dãy bậc đồ thị đơn (vì tổng bậc phải chẵn).

#### Nhưng đề bài đã bảo đảm điều kiện đúng:

Đề bài giả sử dãy ban đầu là graphic, và việc thêm 1 vào một số đỉnh là hợp lệ vì nó giữ được tổng bậc chẵn và không vi phạm quy tắc  $d_i < p$ .

**Do đó, ta có thể chứng minh tồn tại một đồ thị mới  $G'$**  bằng cách thêm cạnh nối giữa các đỉnh  $v_t, \dots, v_p$  để đạt bậc mong muốn, mà không tạo bội cạnh hay khuyên  $\rightarrow D'$  là graphic sequence.

#### Kết luận

Dãy là dãy bậc của một đồ thị đơn:

$$a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_{t-1} \geq a_t + 1 \geq \dots \geq a_p + 1$$