Combinatorics And Graph Theory

Phạm Phước Minh Hiếu

Ngày 11 tháng 5 năm 2025

1 Bài toán 2:

Tính số Catalan thứ n bằng cách thay $n = 4$:

Ta có công thức:

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Thay $n = 4$ vào:

$$C_4 = \frac{1}{4+1}\binom{8}{4} = \frac{1}{5} \cdot \frac{8!}{4! \cdot 4!}$$

Tính giá trị:

$$\frac{8!}{4! \cdot 4!} = \frac{40320}{24 \cdot 24} = \frac{40320}{576} = 70$$

Vậy:

$$C_4 = \frac{1}{5} \cdot 70 = 14$$

Kết luận: Số Catalan thứ 4 là: 14

2 1.5 Exercise

Problem 3

Cho $m, n \in \mathbb{N}^*$ với $m \leq n$. Đếm số dãy nhị phân $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gồm m chữ số 0 và $n - m$ chữ số 1 sao cho không có hai chữ số 0 nào đứng liền nhau.

Ý tưởng

Ta cần chèn m số 0 vào dãy gồm $n - m$ số 1 sao cho không có hai số 0 đứng cạnh nhau.

Với $n - m$ số 1, ta có $n - m + 1$ vị trí (gọi là các *khe*) giữa hoặc ở hai đầu để chèn số 0 mà không vi phạm điều kiện.

Ví dụ với $n - m = 3$ (tức 3 số 1), ta có dãy: _ 1 _ 1 _ 1 _ $\Rightarrow$ có 4 khe chèn số 0.

Chọn m trong số các khe đó để đặt số 0, mỗi khe chỉ chứa một số 0 để tránh trùng nhau.

Công thức

Nếu $m \leq n - m + 1$ thì số dãy thỏa mãn là:

$$\boxed{\binom{n-m+1}{m}}$$

Ngược lại, nếu $m > n - m + 1$ thì không thể chèn đủ số 0 mà không để chúng đứng liền nhau, nên số dãy là 0.

Ví dụ

Cho $n = 5$, $m = 2$.

Khi đó $n - m = 3$, có 4 khe để chèn số 0.

Số cách chọn 2 trong 4 khe là:

$$\binom{4}{2} = 6$$

Problem 4

Gọi $f(n)$ là số lượng tập con của $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$. Chứng minh rằng $f(n) = 2^n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^\star$.

Chứng minh. Ta sử dụng phương pháp quy nạp toán học.

Cơ sở quy nạp: Với $n = 1$, ta có $[1] = \{1\}$. Các tập con của $[1]$ là $\emptyset$ và $\{1\}$, nên $f(1) = 2 = 2^1$.

Giả thiết quy nạp: Giả sử $f(k) = 2^k$ đúng với một $k \in \mathbb{N}^\star$.

Bước quy nạp: Xét $f(k+1)$ là số tập con của $[k+1] = \{1, 2, \ldots, k, k+1\}$. Mỗi tập con của $[k+1]$ hoặc:

- Không chứa $k+1$ (là tập con của $[k]$), hoặc
- Có chứa $k+1$ (được tạo bằng cách thêm $k+1$ vào một tập con của $[k]$)

Do đó:

$$f(k+1) = f(k) + f(k) = 2f(k) = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$$

Vậy, theo quy nạp toán học, ta có $f(n) = 2^n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^\star$.

Problem 5

(a) $f(n) = n! \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}$, với mọi $n \in \mathbb{N}^\star$.

(b) $f(n)$ là số nguyên gần nhất với $\frac{n!}{e}$.

Chứng minh:

(a) Ta áp dụng *nguyên lý bù trừ (inclusion-exclusion)* để đếm số hoán vị không cố định của n phần tử.

Tổng số hoán vị của n phần tử là $n!$. Ta cần loại bỏ những hoán vị mà có ít nhất một phần tử đứng đúng vị trí ban đầu (tức là người nhận lại mũ của mình).

Theo nguyên lý bù trừ, số hoán vị không cố định là:

$$f(n) = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right) = n!\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{i!}$$

(b) Xét giới hạn của biểu thức ở trên khi n lớn:

$$f(n) = n!\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{i!} \approx \frac{n!}{e}$$

Vì chuỗi lũy thừa $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{i!}$ hội tụ về $\frac{1}{e}$.

Do đó, $f(n)$ là số nguyên gần nhất với $\frac{n!}{e}$:

$$f(n) = \left\lfloor \frac{n!}{e} + \frac{1}{2} \right\rfloor$$

Problem 6

(a) **Tính:** $f(1), f(2), f(3), f(4)$

- $f(1) = 2$ vì các tập con là: $\emptyset, \{1\}$
- $f(2) = 3$ vì các tập con là: $\emptyset, \{1\}, \{2\}$
- $f(3) = 5$ vì các tập con là: $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,3\}$
- $f(4) = 8$ vì các tập con là:

$$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,4\}$$

(b) **Chứng minh:** $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$, với mọi $n \geq 3$

Chứng minh: Ta xét hai loại tập con của $[n]$ không chứa hai số liên tiếp:

- Các tập không chứa phần tử n: chính là các tập thỏa mãn điều kiện của tập $[n-1] \to$ có $f(n-1)$ cách. - Các tập có chứa phần tử n: để không chứa hai phần tử liên tiếp, ta không được chọn $n-1$, nên ta chỉ được chọn tập con của $[n-2]$ rồi thêm $n \to$ có $f(n-2)$ cách.

Vậy:

$$f(n) = f(n-1) + f(n-2)$$

(c) **Chứng minh: công thức tường minh**

Ta có:

$$f(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\tau^{n+2} - \bar{\tau}^{n+2}\right)$$

với:

$$\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \bar{\tau} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Đây là công thức tường minh của dãy Fibonacci dịch chỉ số (vì $f(n)$ chính là dãy Fibonacci với chỉ số dịch đi 2).

3 1.3 Exercise

Problem 1

Gọi $f(n)$ là số vùng mà các đường thẳng chia tờ giấy.

(a) **Tính một vài giá trị nhỏ của $f(n)$:**

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 \quad \text{(tờ giấy ban đầu, chưa có đường nào)} \\ f(1) &= 2 \\ f(2) &= 4 \\ f(3) &= 7 \\ f(4) &= 11 \end{aligned}$$

(b) **Dự đoán công thức tổng quát:**

Từ dãy số:

$$1,\ 2,\ 4,\ 7,\ 11,\ \ldots$$

Ta nhận thấy đây là dãy cộng dồn:

$$f(n) = f(n-1) + (n-1), \quad f(0) = 1$$

hoặc công thức đóng:

$$f(n) = \frac{n(n-1)}{2} + 1$$

Chứng minh:

Với mỗi đường thẳng mới thêm vào, nó sẽ cắt tất cả các đường trước đó, tạo ra $n-1$ giao điểm mới, mỗi giao điểm làm tăng thêm một vùng. Vậy tổng số vùng là:

$$f(n) = 1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} = 1 + n + \frac{n(n-1)}{2}$$

Problem 2

Gọi $C(n)$ là mệnh đề "Cặp số n chứa tiền".

Theo đề bài, ta có:

$$C(n) \Rightarrow C(n+3)$$

Biết rằng $\neg C(55)$, tức cặp 55 không chứa tiền.

Khi đó:

$$C(52) \Rightarrow C(55) \Rightarrow \text{mâu thuẫn} \Rightarrow \neg C(52)$$

$$C(49) \Rightarrow C(52) \Rightarrow \text{mâu thuẫn} \Rightarrow \neg C(49)$$

$$\vdots$$

Tiếp tục lập luận suy ngược, ta suy ra:

$$\neg C(n), \text{ với mọi } n \leq 55 \text{ sao cho } n \equiv 1 \pmod 3$$

Tập hợp các số thỏa mãn điều kiện này là:

$$\{1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, 34, 37, 40, 43, 46, 49, 52, 55\}$$

Kết luận: Những chiếc cặp được đánh số $n \leq 55$ với $n \equiv 1 \pmod 3$ chắc chắn không chứa tiền.